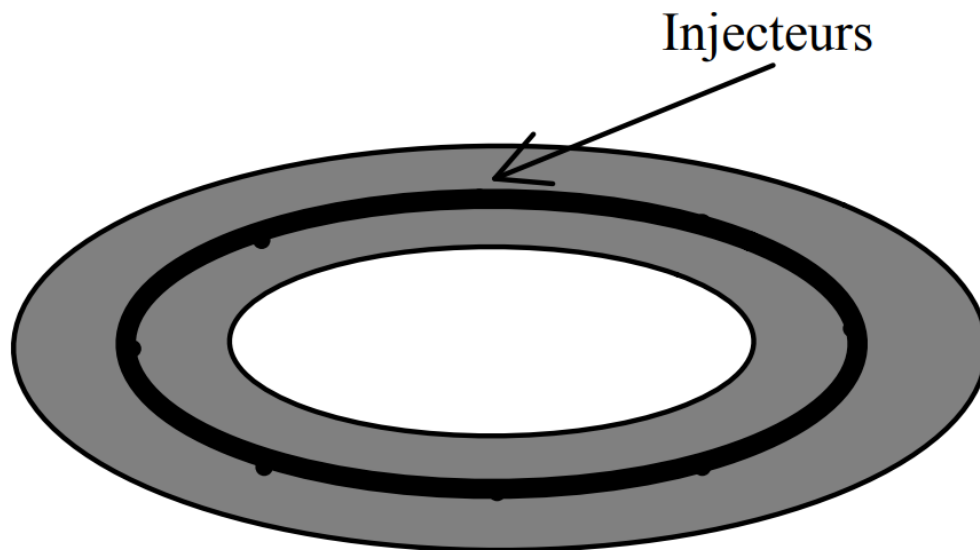


Rapport de Mini Projet NUM

---

# Modélisation de la répartition de pression dans une butée aérostatique

---



Martin MURE  
Saad BENAICHA

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Méthodes</b>	<b>2</b>
2.1	Étude numérique 1D de la butée . . . . .	2
2.2	Étude analytique 1D de la butée . . . . .	3
2.3	Etude 2D de la butée . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Résultats</b>	<b>6</b>
3.1	Résultats étude 1D de la butée . . . . .	6
3.2	Comparaison avec le résultat analytique . . . . .	7
3.3	Etude 2D de la butée dépliée . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Discussion</b>	<b>8</b>
4.1	Limites des résultats . . . . .	8
4.2	Analyse de complexité et pistes d'optimisation . . . . .	8
4.3	Optimisations de la complexité . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>9</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>10</b>
5.1	Annexe 1 : Calculs différences finies pour la résolution 1D . . . . .	12
5.2	Annexe 2 : Calculs différences finies pour la résolution 2D . . . . .	12
5.3	Annexe 3 : Champ de pression 2D avec $N$ insuffisant . . . . .	12
5.4	Annexe 4 : Calcul de complexité . . . . .	13

## 1 Introduction

Les butées aérostatiques sont des éléments technologiques d'assemblage utilisés dans le but de **supporter des charges axiales sans aucun frottement mécanique**. Le principe est simple : un coussin d'air engendré par les injecteurs permet d'empêcher les deux pièces de se toucher.

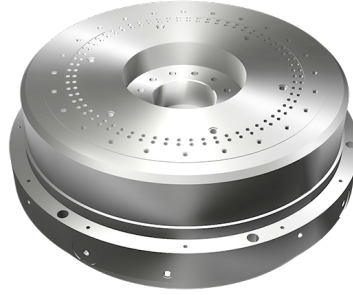


FIGURE 1 – Butée aérostatique

Dans ce cadre, nous nous intéressons à la répartition de la pression au sein d'une butée aérostatique en fonction des paramètres géométriques et physiques (rayons intérieur et extérieur, position des injecteurs, pression des injecteurs et pression ambiante).

**L'objectif est donc de modéliser la pression dans cette butée afin d'optimiser sa performance.** Dans ce rapport, nous verrons la méthode mise en place pour mener à bien cette étude. Puis, nous analyserons la pertinence de nos résultats numériques. Enfin, nous proposerons d'autres méthodes permettant de représenter plus fidèlement le problème posé.

## 2 Méthodes

Pour étudier la variation de pression au sein de la butée aérostatique, nous avons décomposé l'étude en trois parties :

- Étude **numérique 1D** d'une section de la butée
- Étude **analytique 1D** d'une section de la butée
- Étude **numérique 2D** de la butée dépliée

Cette décomposition nous a permis d'obtenir une première approximation rapide du résultat souhaité, puis nous avons affiné notre résultat avec une modélisation plus complexe dans un second temps.

### 2.1 Étude numérique 1D de la butée

Dans ce premier cas, nous considérons que la pression ne varie pas angulairement (nombre infini d'injecteurs). Ainsi, l'équation qui régit notre problème est :

$$\frac{d}{dr} \left( pr \frac{dp}{dr} \right) = 0 \quad \implies \quad \frac{d}{dr} \left( r \frac{dQ}{dr} \right) = 0, \quad \text{en posant } Q = p^2$$

Le problème posé est linéaire et possède des conditions aux limites. Nous allons donc appliquer **la méthode des différences finies stationnaires**.

Notre problème dispose de 3 conditions limites :

- $P_{\text{intérieur}} = P_{\text{atmosphérique}}$
- $P_{\text{extérieur}} = P_{\text{atmosphérique}}$
- $P_{\text{rayon-moyen}} = P_{\text{injecteur}}$  avec  $r_{\text{moy}} = \frac{r_{\text{ext}} - r_{\text{int}}}{2}$

Notre problème est donc **sur-contraint**, puisque nous avons besoin uniquement de 2 conditions limites. Nous avons donc séparé le problème en 2 domaines :

- Domaine 1 :  $r \in [R_{\text{int}}, R_{\text{inj}}]$
- Domaine 2 :  $r \in [R_{\text{inj}}, R_{\text{ext}}]$

Grâce à cette séparation, les deux systèmes sont bien dimensionnés.

L'équation régissant notre problème est à coefficients non constants, puisque le rayon  $r$  varie. Ainsi, nous utilisons **une approximation centrée à demi-pas** pour approximer notre solution. En effet, nous avons choisi un schéma d'ordre 2 afin d'augmenter la précision du schéma, puisque l'erreur est réduite au carré lorsque nous diminuons le pas de discrétisation.

En discrétisant ces domaines et en utilisant les développements limités (cf. Annexe 5.1), nous obtenons le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{-r_{i-1/2}}{\Delta r^2} & \frac{r_{i-1/2} - r_{i+1/2}}{\Delta r^2} & \frac{r_{i+1/2}}{\Delta r^2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \frac{-r_{i-1/2}}{\Delta r^2} & \frac{r_{i-1/2} - r_{i+1/2}}{\Delta r^2} & \frac{r_{i+1/2}}{\Delta r^2} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{\text{ext/inj}}^2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ P_{\text{inj/ext}}^2 \end{bmatrix}$$

Une fois le système posé, nous avons résolu numériquement  $Q$  à l'aide de la librairie Numpy sur chacun des deux domaines. Ensuite, nous avons pu concaténer les résultats des 2 systèmes, afin d'obtenir la pression au sein de la butée entière.

Grâce à la formule  $P = \sqrt{Q}$ , nous retrouvons facilement la répartition de pression en fonction du rayon, à partir de  $Q$ . La prochaine étape est de trouver la solution analytique afin de comparer les 2 résultats.

## 2.2 Étude analytique 1D de la butée

L'équation initiale de notre problème est :

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dQ}{dr} \right) = 0$$

En intégrant une première fois, nous trouvons :

$$r \frac{dQ}{dr} = C_1 \Leftrightarrow \frac{dQ}{dr} = \frac{C_1}{r}$$

Nous pouvons intégrer une deuxième fois par séparation de variable :

$$Q(r) = C_1 \int \frac{1}{r} dr \Leftrightarrow Q(r) = C_1 \ln(r) + C_2$$

Nous trouvons les constantes  $C_1$  et  $C_2$  grâce aux 3 conditions initiales. D'une part, pour le domaine 1 :  $r \in [R_{\text{int}}, R_{\text{inj}}]$ , nous avons :

$$\begin{cases} Q_1(r_{\text{int}}) = A \ln(r_{\text{int}}) + B = P_{\text{atm}}^2 \\ Q_1(r_{\text{inj}}) = A \ln(r_{\text{inj}}) + B = P_{\text{inj}}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{P_{\text{inj}}^2 - P_{\text{atm}}^2}{\ln\left(\frac{r_{\text{inj}}}{r_{\text{int}}}\right)} \\ B = P_{\text{atm}}^2 - A \ln(r_{\text{int}}) \end{cases}$$

D'autre part, pour le domaine 2 :  $r \in [R_{\text{inj}}, R_{\text{ext}}]$ , nous avons

$$\begin{cases} Q_2(r_{\text{inj}}) = C \ln(r_{\text{inj}}) + D = P_{\text{inj}}^2 \\ Q_2(r_{\text{ext}}) = C \ln(r_{\text{ext}}) + D = P_{\text{atm}}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = \frac{P_{\text{atm}}^2 - P_{\text{inj}}^2}{\ln\left(\frac{r_{\text{ext}}}{r_{\text{inj}}}\right)} \\ D = P_{\text{inj}}^2 - C \ln(r_{\text{inj}}) \end{cases}$$

Grâce à ces 4 équations, nous retrouvons les solutions analytiques des 2 domaines. En traçant ces solutions, nous obtenons la répartition de pression analytique au sein de la butée, que nous pouvons comparer avec la solution numérique.

### 2.3 Etude 2D de la butée

Pour représenter plus fidèlement notre problème, nous avons modélisé la butée aérostatique en 2D. Cette représentation 2D nous a permis de modéliser 12 injecteurs, à la place d'un simple injecteur infini dans le modèle 1D.

De plus, nous avons posé l'hypothèse simplificatrice que **le domaine circulaire est déplié et approximé par un rectangle** (cf. figure 2). Cette hypothèse a permis d'avoir 2 axes  $x$  et  $r$  orthogonaux et de faire une résolution 2D simplifiée.

Nous avons discrétisé le domaine selon les 2 axes et défini 2 pas de discrétisation distincts (cf. figure 3).

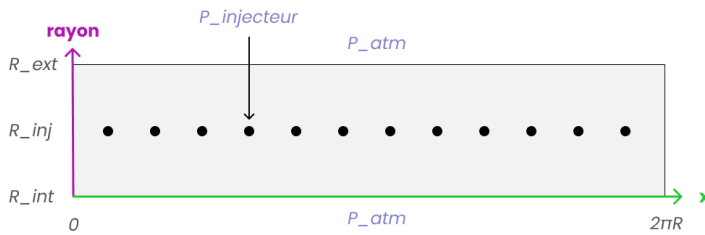


FIGURE 2 – Domaine déplié

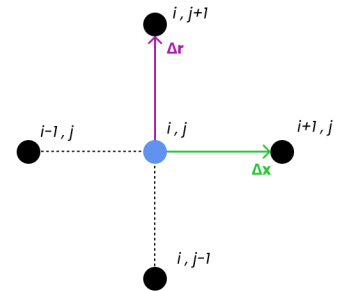


FIGURE 3 – Pas de discrétisation

Le problème à résoudre dans ce domaine est le suivant :

$$r_{\text{moy}} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial Q}{\partial r} \right) = 0$$

De plus, le problème dispose des **conditions initiales suivantes** :

- $Q_{\text{int},i,j=1} = P_{\text{atm}}^2$
- $Q_{\text{ext},i,j=N} = P_{\text{atm}}^2$
- $Q_{\text{rayon-injecteurs}} = P_{\text{injecteur}}^2$

Enfin, nous avons défini un sens de parcours permettant de transformer notre problème 2D en un problème matriciel linéaire (cf. figure 4). Le parcours évolue d'abord selon les indices  $j$  croissants, puis selon les indices  $i$  croissants.

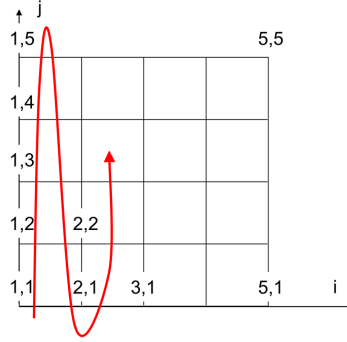


FIGURE 4 – Sens de parcours du maillage

Finalement, en combinant plusieurs développements limités (cf. Annexe 5.2) et en utilisant les conditions aux limites ainsi que le sens de parcours, nous avons obtenu l'expression suivante :

$$r_{\text{moy}} \cdot \left( \frac{Q_{i+1,j} - 2Q_{i,j} + Q_{i-1,j}}{dx^2} \right) + \frac{1}{dr^2} [r_{j+1/2}Q_{i,j+1} - (r_{j+1/2} + r_{j-1/2})Q_{i,j} + r_{j-1/2}Q_{i,j-1}] = 0$$

En prenant comme exemple  $N = 3$  et 1 seul injecteur, nous déduisons le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{j-1/2} & \beta & r_{j+1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{j-1/2} & \beta & r_{j+1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{j-1/2} & \beta & r_{j+1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_{1,1} \\ Q_{1,2} \\ Q_{1,3} \\ Q_{2,1} \\ Q_{2,2} \\ Q_{2,3} \\ Q_{3,1} \\ Q_{3,2} \\ Q_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{\text{atm}}^2 \\ P_{\text{atm}}^2 \\ P_{\text{atm}}^2 \\ 0 \\ P_{\text{inj}}^2 \\ 0 \\ P_{\text{atm}}^2 \\ P_{\text{atm}}^2 \\ P_{\text{atm}}^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec } \beta = \frac{-2*r_{\text{moy}}}{dx^2} - \frac{(r_{j-1/2}+r_{j+1/2})}{dr^2} \text{ et } \sigma = \frac{r_{\text{moy}}}{dx^2}$$

### 3 Résultats

#### 3.1 Résultats étude 1D de la butée

En appliquant la méthode des différences finies, nous avons obtenu cette répartition de pression dans la butée aérostatique :

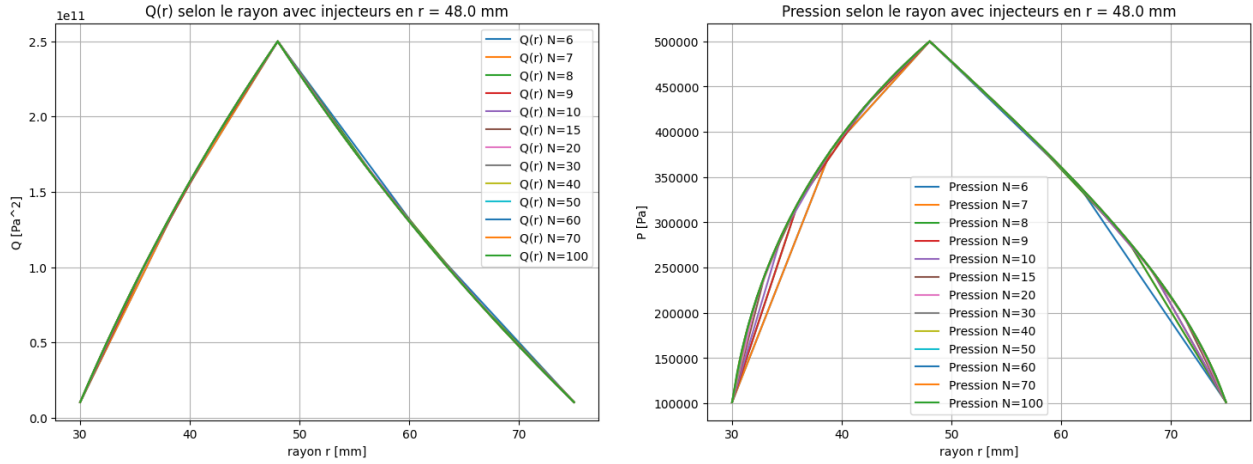


FIGURE 5 – Répartition de pression dans la butée

Sur le schéma de gauche, nous observons la variation de  $Q(r)$ . Sur le schéma de droite, nous observons la variation de pression  $P(r)$ . Nous retrouvons bien une pression maximale et égale à  $P_{\text{int}}$  en  $x = 0.48$  (position injecteur) et la pression  $P_{\text{atm}}$  aux limites de la butée hydrostatique. La répartition de pression semble donc cohérente. Nous avons également tracé la pression dans la butée pour différentes positions de l'injecteur :

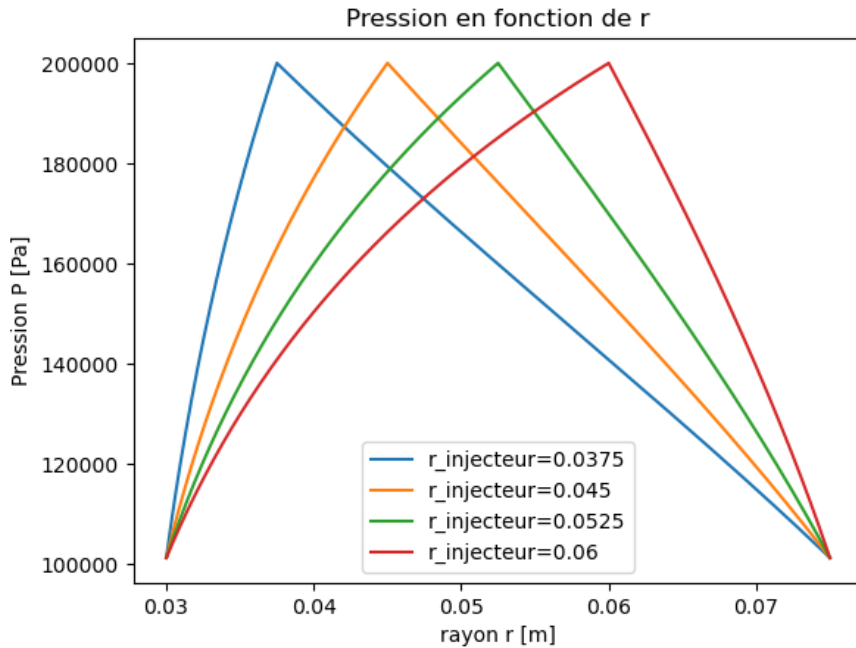


FIGURE 6 – Répartition de pression dans la butée pour différentes positions d'injecteur

Nous remarquons que la décroissance de la pression reste similaire malgré les changements de position de l'injecteur, ce qui est cohérent. Ainsi, nous pourrions optimiser la position de

l'injecteur en fonction de notre cahier des charges et de nos usages. Il ne reste plus qu'à comparer nos résultats à une solution analytique.

### 3.2 Comparaison avec le résultat analytique

À partir de l'équation théorique, nous avons trouvé la répartition de pression suivante :

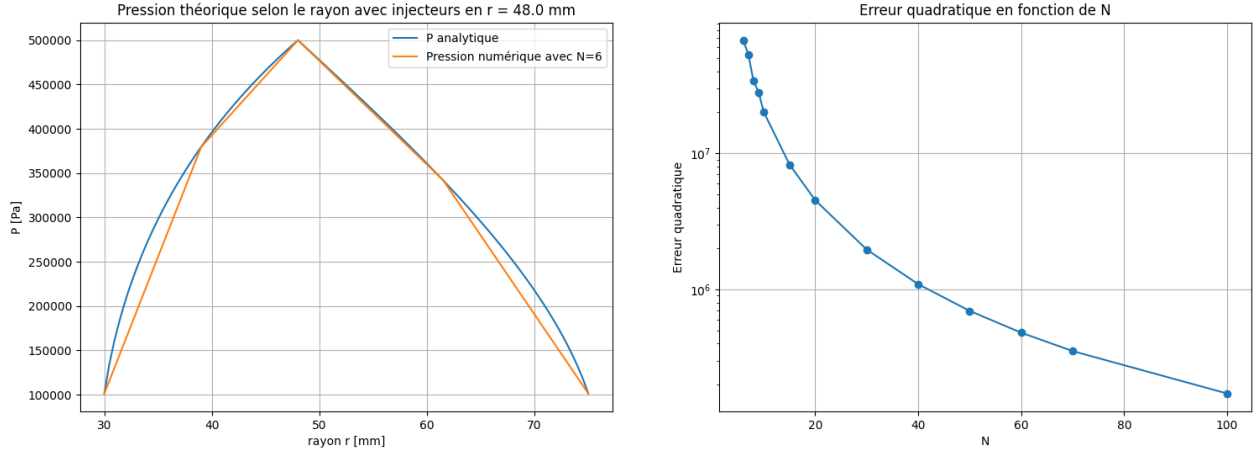


FIGURE 7 – Comparaison et erreur entre la solution analytique et numérique

Nous avons utilisé cette dernière, ainsi que les résultats numériques afin de calculer l'erreur quadratique en fonction du nombre de points du maillage. L'erreur quadratique décroît rapidement lorsque le maillage devient plus fin (cf. Figure 7)

Nous avons aussi calculé l'erreur relative maximale entre les deux courbes, en effectuant une interpolation de nos résultats numériques. Ainsi, nous pouvons comparer nos valeurs avec la pression théorique en tout point. De cette façon, nous obtenons une erreur relative qui diminue rapidement (cf. Tableau 1)

$N$	6	10	20	30	50	100
Erreur relative max (%)	22.07	6.53	2.71	1.43	0.56	0.17

TABLE 1 – Erreur relative maximale entre  $P$  et  $P_{th}$  pour différentes valeurs de  $N$

**Ainsi, notre modèle offre des résultats proches de la solution analytique et n'a pas besoin d'un maillage très fin pour aboutir à un résultat satisfaisant.** Par la suite, il sera judicieux de trouver un équilibre entre précision et temps de calcul.

### 3.3 Etude 2D de la butée dépliée

Dans cette partie, nous avons étudié une modélisation en 2D de notre champ de pression, ce qui est plus réaliste. Après résolution numérique, nous pouvons visualiser le champ de pression sur notre maillage :



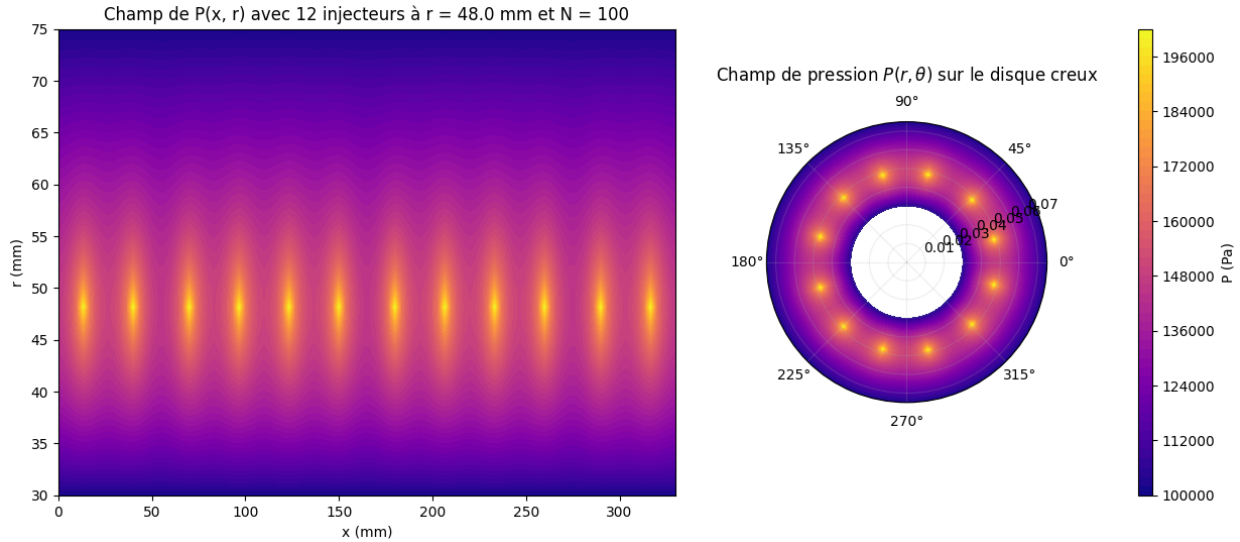


FIGURE 8 – Visualisation du champ de pression en 2D

Ce champ de pression met en évidence la capacité des injecteurs à maintenir une pression élevée localement. Cependant, la pression chute rapidement lorsque nous nous éloignons des injecteurs. Il faudrait une meilleure répartition de pression pour assurer une charge admissible uniforme et la stabilité de la butée aérostatique.

D'ailleurs, une intégration simple de notre champ de pression dans un repère polaire permet d'obtenir la force générée par la butée. **Ainsi, la butée aérostatique offre une charge admissible de 1997.9 N (203.7 kg) pour une pression de 2 bar** au sein de la chambre intérieure, ce qui est un ordre de grandeur cohérent.

## 4 Discussion

### 4.1 Limites des résultats

Notre modélisation 2D présente certaines limites :

- Le nombre de points joue un rôle crucial dans cette modélisation. Par exemple, **il faut  $N = 25$  au minimum afin de placer les 12 injecteurs séparément sur la grille.** Dans le cas contraire, nous obtenons un résultat inutilisable (cf. Annexe 5.3).
- Dans notre modèle, nous assimilons l'injecteur à une maille de notre modèle. **La taille de cette maille est dépendante du nombre de points de discrétisation**, donc la taille réelle de l'injecteur  $150 \mu m$  n'est pas représentée fidèlement. De plus, la maille est carrée alors que l'injecteur réel est circulaire.

Malgré ces limites, les résultats trouvés semblent cohérents physiquement. Il n'est toutefois pas possible de résoudre analytiquement notre problème 2D sans poser de nouvelles conditions limites. Une autre manière de vérifier notre approximation serait de réaliser une étude par éléments finis à l'aide d'un logiciel spécialisé.

### 4.2 Analyse de complexité et pistes d'optimisation

Pour notre modèle 2D, le code résout une équation sur un domaine 2D de taille  $N \times N$  via une discrétisation en différences finies. Il génère et résout un système matriciel linéaire de taille  $N^2 \times N^2$ .

- **Complexité en temps initiale de construction de la matrice** :  $\mathcal{O}(N^2)$
- **Complexité de résolution du système linéaire** :  $\mathcal{O}(N^6)$

Ces coûts rendent le programme peu adapté pour des tailles de grille élevées  $N > 100$ .

**Exemple :** Pour  $N = 100$ , nous obtenons le résultat en 3 secondes, tandis que pour  $N = 200$ , le résultat est obtenu en 2 minutes et 30 secondes (données pouvant varier de machine en machine).

### 4.3 Optimisations de la complexité

La résolution de notre équation à l'aide de NumPy entraîne des temps de calcul importants pour  $N > 100$ . Une alternative aurait été d'utiliser des solveurs spécialisés ou de réduire le domaine de calcul à un seul injecteur, puis de translater les résultats pour les 12 injecteurs. Ces approches auraient permis de traiter des maillages plus fins tout en maintenant des temps de calcul raisonnables.

- **Solveurs linéaires adaptés :**
  - Utiliser `scipy.sparse.linalg.spsolve` ou des méthodes itératives comme `cg` (conjugate gradient)
  - Complexité ramenée à environ  $\mathcal{O}(N^2 \log N)$  selon le solveur
- **Structuration du domaine :**
  - Exploiter la régularité du maillage pour effectuer la résolution sur un domaine restreint

Cependant, cela n'est pas nécessaire, car en nous limitant à  $N = 100$ , nous obtenons des résultats précis en seulement 3 secondes (temps de calcul sur notre machine). Nous sommes alors limités à ce seuil dans notre étude.

## 5 Conclusion

Lors de cette étude, nous avons réussi à modéliser numériquement en 1D, la répartition de pression au sein de la butée aérostatique. Puis, en résolvant analytiquement notre équation, nous avons pu confirmer nos résultats.

De plus, nous avons modélisé notre butée en 2D, afin de positionner les injecteurs à leur position réelle. **Cette modélisation nous a permis d'étudier la variation de pression autour des injecteurs de manière plus précise et de calculer la charge admissible de notre butée.**

Enfin, nous avons analysé la complexité de notre code afin de limiter le nombre d'itérations et de maîtriser le temps de calcul de notre résolution numérique.

La prochaine étape serait d'étudier le positionnement et les pressions des injecteurs plus finement afin d'optimiser la répartition de pression pour notre utilisation. Nous pourrions par exemple modéliser des injecteurs avec des pressions différentes et des rayons variables pour une répartition plus homogène.

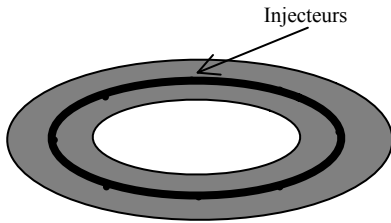
## Bibliographie

Netlib.org. Documentation de lapack. URL <https://www.netlib.org/lapack/lug/node71.html>. 13

Numpy.org. Documentation de la fonction numpy.linalg.solve. URL <https://numpy.org/devdocs/reference/generated/numpy.linalg.solve.html>. 13

### MINI-PROJET 3

**Thème :** Calcul de la répartition radiale de pression dans une butée aérostatique (portance de type coussin d'air), en fonction de la pression à la sortie de l'injecteur  $P_i$ , de la position de l'injecteur  $r_p$ , des rayons interne  $r_{int}$  et externe  $r_{ext}$  de la butée et de la pression ambiante  $P_e$ .



#### Données

- $P_{pi}$  pression à l'injecteur (Pa),
- $r_{pi}$  position radiale de l'injecteur (mm),
- $r_{int}$  rayon intérieur (mm),
- $r_{ext}$  rayon extérieur (mm),
- $P_e$ , pression ambiante (Pa),

#### Méthode

On considère que la pression ne varie pas angulairement (nombre infini d'injecteurs). L'équation de Reynolds pour un fluide compressible s'écrit alors :

$$\frac{d}{dr} \left( pr \frac{dp}{dr} \right) = 0$$

Avec les deux conditions aux limites :  $p(r = r_{int}) = p(r = r_{ext}) = P_e$  et  $p(r = r_{pi}) = P_{pi}$ .

En faisant le changement de fonction inconnue  $Q = p^2$ , on obtient une équation différentielle linéaire :

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dQ}{dr} \right) = 0$$

Cette équation sera alors discrétisée par une technique de différences finies.

#### Travail à effectuer

◆ Ecrire deux systèmes à résoudre en explicitant les termes de la matrice et du second membre pour obtenir la répartition de la pression  $p$  en fonction du rayon.

◆ Pour une méthode de résolution choisie :

Etudiez la forme de  $Q(r)$  et de  $p(r)$  en fonction du nombre d'intervalles de discrétisation,

Etudiez l'allure du champ de pression  $p(r)$  en fonction de la position de l'injecteur. Quel est l'avantage numérique de séparer le problème en deux résolutions numériques similaires ?

◆ Il vous est alors demandé de justifier les résultats obtenus tant du point de vue des méthodes et paramètres numériques employés, que du point de vue de la physique du phénomène à modéliser.

◆ Dans la réalité, les injecteurs sont constitués de 12 petits orifices de  $150 \mu\text{m}$  de diamètres (que l'on considèrera ponctuels), répartis sur toute la circonférence du cercle de rayon  $r_{inj}$ . En se plaçant dans le cas de la butée suivante :  $r_{int} = 30 \text{ mm}$ ,  $r_{ext} = 75 \text{ mm}$ ,  $r_{inj} = 48 \text{ mm}$ , on considèrera que la courbure de la butée est négligeable et que l'on peut « déplier » le domaine d'étude (en gris ci-dessus) comme un rectangle de dimension  $(r_{ext} - r_{int}) \cdot 2\pi \cdot r_{moy}$ , en posant  $r_{moy} = (r_{ext} + r_{int})/2$ . L'équation à résoudre est maintenant :

$$r_{moy} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial Q}{\partial r} \right) = 0 \quad \text{avec } x \in [0, 2\pi r_{moy}] \text{ la nouvelle dimension.}$$

Proposez une résolution numérique de ce problème 2D, analysez votre résultat, puis discutez de l'hypothèse simplificatrice précédemment utilisée.

## 5.1 Annexe 1 : Calculs différences finies pour la résolution 1D

L'équation qui régit notre problème est :

$$\frac{d}{dr} \left( pr \frac{dp}{dr} \right) = 0 \implies \frac{d}{dr} \left( r \frac{dQ}{dr} \right) = 0, \quad \text{en posant } Q = p^2$$

On prend  $\Phi(r) = r \frac{dQ}{dr}$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\Phi(r)) = \frac{\Phi(r_{i+1/2}) - \Phi(r_{i-1/2})}{\Delta r} + O(\Delta r^2)$$

L'approximation centré à demi-pas de  $\Phi$  donne :

$$\Phi(r_{i+1/2}) = r(r_{i+1/2}) \frac{Q(r_{i+1}) - Q(r_i)}{\Delta r}$$

$$\Phi(r_{i-1/2}) = r(r_{i-1/2}) \frac{Q(r_i) - Q(r_{i-1})}{\Delta r}$$

## 5.2 Annexe 2 : Calculs différences finies pour la résolution 2D

Pour remplir le corps de la matrice, nous avons utilisé un schéma de différence finies d'ordre 2 pour chaque terme, puis nous avons remplacé les schémas dans l'équation initiale :

— Schéma centré d'ordre 2 du premier terme :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \approx \frac{Q_{i+1,j} - 2Q_{i,j} + Q_{i-1,j}}{dx^2} \implies r_{\text{moy}} \cdot \left( \frac{Q_{i+1,j} - 2Q_{i,j} + Q_{i-1,j}}{dx^2} \right)$$

— Schéma centré d'ordre 2 du deuxième terme :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial Q}{\partial r} \right) \approx \frac{1}{dr^2} [r_{j+1/2} Q_{i,j+1} - (r_{j+1/2} + r_{j-1/2}) Q_{i,j} + r_{j-1/2} Q_{i,j-1}]$$

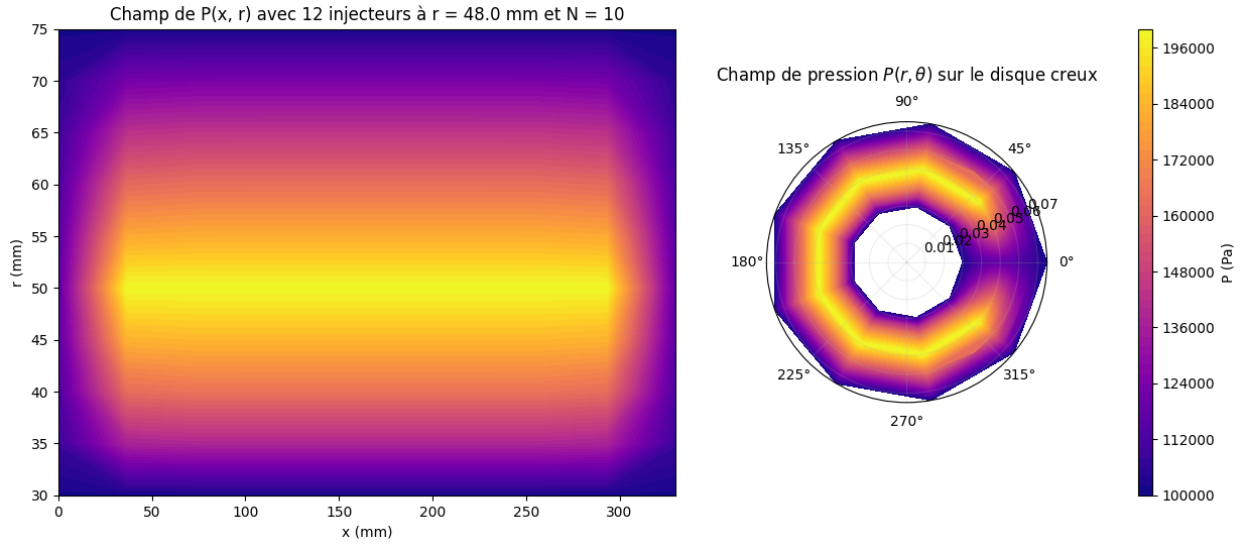
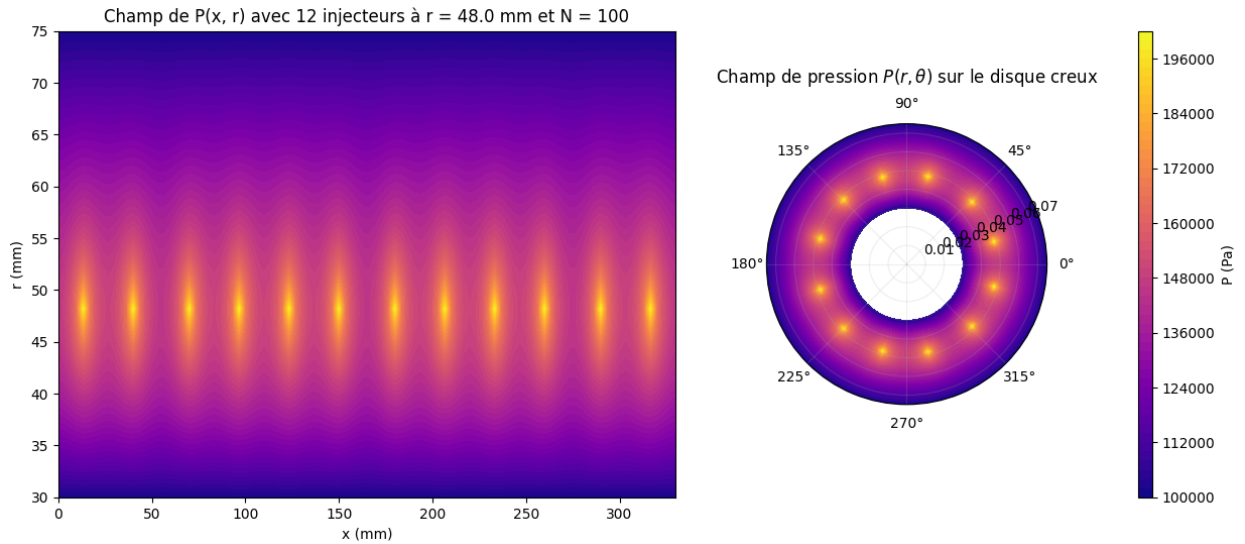
— Equation initiale approximée

$$r_{\text{moy}} \cdot \left( \frac{Q_{i+1,j} - 2Q_{i,j} + Q_{i-1,j}}{dx^2} \right) + \frac{1}{dr^2} [r_{j+1/2} Q_{i,j+1} - (r_{j+1/2} + r_{j-1/2}) Q_{i,j} + r_{j-1/2} Q_{i,j-1}] = 0$$

Il suffit alors de remplir la matrice et de compléter le système avec les conditions aux limites.

## 5.3 Annexe 3 : Champ de pression 2D avec $N$ insuffisant

Le nombre de points  $N$  de notre discrétisation est un facteur important qui influe sur la précision et le temps de calcul. Cependant, un  $N$  insuffisant peut aussi causer des problèmes. Par exemple, en prenant  $N = 10$ , on n'a pas assez de points pour placer nos 12 injecteurs (cf. Figure 10), ce qui conduit à une modélisation qui ne répond pas à nos critères.

FIGURE 9 – Champ de pression 2D avec  $N = 10$  (résultat incorrect)FIGURE 10 – Champ de pression 2D avec  $N = 100$  (résultat correct)

## 5.4 Annexe 4 : Calcul de complexité

La grande majorité de notre code a une complexité en  $\mathcal{O}(N^2)$  ce qui correspond à l'utilisation d'outils comme `np.linspace` ou encore nos boucles `for` imbriquées.

De plus, `np.linalg.solve()` utilise un module LAPACK qui possède une fonction `gesv` comme stipulé ici : [Numpy.org](https://numpy.org)

On utilise alors la documentation de LAPACK afin de trouver la complexité de `gesv` et donc de `np.linalg.solve()` [Netlib.org](https://netlib.org)

Finalement, on trouve que la complexité de la résolution par Numpy est en  $\mathcal{O}(N^3)$ , donc comme on résoud un système matriciel de taille  $N^2$  la complexité totale est en  $\mathcal{O}(N^6)$