جمهورية العراق

وزارة التربية

المديرية العامة للتعليم المهني

الرياضيات

الأول

الفرع الصناعي- فرع الحاسوب وتقنية المعلومات

اعداد

لجنة في المديرية العامة للتعليم المهني

الطبعة الثامنة **1447 هـ -2025 م**

المقدمة

تعد المناهج أحد أهم حلقات العملية التربوية حيث أن للمناهج دور كبير في إيصال المعلومة إلى المتلقي (الطالب) وأن لتطوير المناهج العلمية دور أساسي مهم في تطوير مجمل العملية التعليمية كما ان التطور هو سمة الحياة الإنسانية المتجددة دوماً والعلم جزء من الحياة المتجددة لذلك لا بد أن تعكس المناهج التطورات الحديثة في مختلف ميادين الحياة حيث أن النمو المعرفي سريع جداً مما يحتم تحديث المناهج بصورة مستمرة وان عملية التحديث والتطوير هي عملية متكاملة.

ان التوجه من قبل وزارة التربية نحو تحسين جودة التعليم فرضته عوامل وحاجات تربوية وعلمية متعددة، وقد تمثل هذا التوجه بالاهتمام بأهمية تحسين نوعية التعليم في المنطقة انسجاما مع مقررات مؤتمر (التعليم للجميع) الاقليمي العربي (القاهرة، 2000) بأن تكون جودة التعليم في سلم الاولويات.

لقد تناولت أحدث الدراسات والبحوث في مجال الذكاء ونمو الدماغ ثورة كبيرة في الطريقة التي نتعلم بها، مما كان لها الأثر في تغيير الممارسات داخل الصف المدرسي وطرائق التعليم والتعلم وطرائق التقويم.

إن الحاجة لأحداث تحول نوعي في عملية التعلم هو تحد يواجه المجتمعات على كل مستوى من مستويات التنمية، فالدول الأقل نمواً والنامية والانتقالية والمتطورة عليها جميعاً أن تجد وسائل لجعل التعلم داعماً للتغيير.

ولا يخفى على احد ان التعلم في كل مكان بحاجة إلى أن يتحول إلى تجربة أكثر ملائمة وحراكاً إذا ما أريد لطلبتنا أن يدخلوا سوق العمل المتغير بالمهارات التي يحتاجونها كي يتمكنوا من المنافسة.

وإدراكاً لكل هذه التحديات وحاجات قطاع التعليم المهني في العراق لتحسين جودة هذا التعليم في مختلف قنواته التعليمية تقوم شعبة المناهج في المديرية العامة للتعليم المهني بتنفيذ مبادرة طموحة تهدف إلى إحداث تغيير جوهري في مناهجها الدراسية، تهدف هذه المبادرة في جانبها المتعلق بعلوم الرياضيات إلى إعداد الكتب الدراسية لمادة الرياضيات بما يتلاءم مع المعايير العالمية والنظريات التربوية الحديثة فضلاً عن رفع مستوى تحصيل طلاب التعليم المهني في مادة الرياضيات ليتسنى لهم منافسة أقرانهم من طلبة التعليم العام عن طريق إحداث نقلة نوعية في المناهج من حيث الإعداد العلمي وأسلوب العرض والربط مع التطبيقات الحياتية .

إن هذا الكتاب الذي بين أيديكم هو الكتاب الأول لطلبة التعليم المهني بكافة فروعه وتخصصاته (عدا الفرع التجاري) ، وهو في سبعة فصول يتناول الفصل الاول موضوع المعادلات والمتباينات، فيما يتناول الفصل الثاني الدوال الحقيقية أما الفصل الثالث فقد تناول النسبة والتناسب فيما تلاه الفصل الرابع الذي تضمن حساب المثلثات أما الفصل الخامس فقد

بحث في المنطق الرياضي اما الفصل السادس فلقد تناولنا فيه الهندسة الاحداثية وكان الفصل السابع خاتمة الفصول متضمناً شيئا من علم الإحصاء.

لقد تم وضع هذا الكتاب وفقاً للأهداف المقررة، وحاولنا ان نتبع عند تأليفه الطرق الحديثة فكان جهدنا منصباً على الشرح المفصل لكل مفرداته بما يقربها من الاذهان وتوخينا الاكثار من التمارين العملية التي يصادفها الطالب في حياته العملية.

وهنا لا بد من الأشارة إلى الوقت المخصص لكل فصل والذي تم الاتفاق على ان يكون كالاتي وبمعدل ثلاث حصص في الاسبوع وما مجموعه (30 أسبوعاً).

الفصل الاول	اربعة أسابيع
الفصل الثاني	أربعة أسابيع
الفصل الثالث	أربعة أسابيع
الفصل الرابع	ستة أسابيع
الفصل الخامس	ثلاثة أسابيع
الفصل السادس	خمسة أسابيع
الفصل السابع	أربعة أسابيع

وختاماً نستشهد بالمقولة الشهيرة التي يقول صاحبها ((إني رأيت أنه لا يكتب أنسان كتاباً في يومه إلا قال في غده: لو غير هذا لكان أحسن، ولو زيد كذا لكان يستحسن، ولو قدم هذا لكان أفضل، ولو ترك هذا لكان أجمل، وهذا من أعظم العبر للإنسان، وهو دليل على استيلاء النقص على جملة البشر)). آملين من اخواننا المدرسين أن يوافونا بملاحظاتهم بهدف التطوير والله الموفق.

المؤلفون

الفهرس

الفهرس

الفصل الاول
المعادلات والمتباينات
$(\boldsymbol{Equations}\ \&\ \boldsymbol{Inequalities})$

البنود (Sections)

Vocabulary	الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
Solution set	S. s	مجموعة الحل
Null set	Φ	المجموعة الخالية
The General Formula O The Equation of The stright line	$ax + by + c = 0,$ $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$	الصيغة العامة لمعادلة المستقيم
The constitution	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	الدستور(القانون)
Distinctive factor	$b^2 - 4ac$	العامل المميز
Open Interval	$(a, b)=\{x : a < x < b\}$	الفترة المفتوحة
Closed Interval	$[a, b]=\{x : a \le x \le b\}$	الفترة المغلقة
Half closed interval	$[a, b)=\{x: a \le x < b\}$ $(a, b]=\{x: a < x \le b\}$	الفترة نصف المغلقة

1-1 المعادلات Equations

1-1-1 حل المعادلة من الدرجة الأولى بمتغيرين

قد درسنا في المرحلة المتوسطة المعادلة التي على الصورة $ax + by + c = 0$ حيث الثوابت $a, b, c \in \mathbb{R}: a, b, c \neq 0$ ، وإن كلاً من المتغيرين $x, y \in \mathbb{R}$ ، وتعلمنا أن حل هذه المعادلة يقتضي إيجاد مجموعة من الأزواج المرتبة $(x, y) \in \mathbb{R}$ والتي تحقق المعادلة. أي إن مجموعة الحل لمعادلة من الدرجة الأولى بمتغيرين هي مجموعة الأزواج المرتبة التي تجعل الجملة المفتوحة عبارة صائبة.

جد مجموعة حل المعادلة $3x + 2y = 9$ إذا كانت مجموعة التعويض لكل من المتغيرين x, y هي $\{3,2,1\}$.

الحل: -كما هو معلوم إن حاصل الضرب الديكارتي لمجموعة التعويض هو:

$$\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

وعند تعويض الزوج المرتب $(1,1)$ بالمعادلة ينتج $3.1 + 2.1 = 9$ وهي عبارة خاطئة وبذلك نستبعد الزوج المرتب $(1,1)$ من مجموعة حل المعادلة بينما الزوج المرتب $(1,3)$ يحقق المعادلة عند تعويضه فيها حيث ينتج $3.1 + 2.3 = 9$ وهي عبارة صائبة وبذلك نستنتج أن الزوج المرتب $(1,3)$ هو أحد حلول المعادلة، وهكذا لو عوّضنا الأزواج المرتبة التالية: - $(1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)$ فأننا سنتوصل إلى أنها تؤدي إلى ظهور عبارة خاطئة. ومن ذلك نستنتج أن الزوج المرتب $(1,3)$ هو الحل الوحيد لهذه المعادلة أي إن مجموعة حل (*Solution set*) المعادلة والتي نرمز لها اختصارا $S.s$ هي :-

$$S.s = \{(1, 3)\}$$

جد مجموعة حل المعادلة $2x + y = 4$.

نلاحظ في المثال هذا عدم تحديد مجموعة تعويض، ولذلك سوف نقوم باختيار قيم عشوائية حقيقية (أي تنتمي إلى $\mathbb{R}$) لكل من المتغيرين x, y تحقق المعادلة وسنجد أن الزوج المرتب $(0,4)$ يحقق المعادلة أي$(2.0 + 4 = 4)$ وهي عبارة صائبة لذلك فأننا نعتبر الزوج المرتب $(0,4)$ هو أحد حلول المعادلة ولكنه ليس الحل الوحيد لأننا نلاحظ أن الأزواج المرتبة الآتية تحقق المعادلة أيضاً :

$$\left\{(1,2), (2,0), (-1,6), (-2,8), \left(\frac{1}{2}, 3\right), (-\frac{1}{4}, 4\frac{1}{2})\right\}$$

كما إنه يمكننا اختيار قيم عددية حقيقية أخرى للمتغير x واستخراج ما يقابلها من قيم للمتغير y عن طريق التعويض بالمعادلة $(y = 4 - 2x)$ لنحصل على ازواج مرتبة اخرى غير التي ذكرناها

أعلاه تنتمي إلى مجموعة حل المعادلة... ولذلك فأنه من البديهي أن نستنتج أن مجموعة حل المعادلة هي مجموعة غير منتهية من الأزواج المرتبة، وإن المجموعة المذكورة أعلاه ما هي إلا مجموعة جزئية من مجموعة الحل.

استنتاج:
للمعادلة من الدرجة الأولى بمتغيرين عدد غير منته من الحلول في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

(2-1-1) حل معادلتين من الدرجة الأولى بمتغيرين

ان مجموعة الحل للمعادلتين من الدرجة الأولى بمتغيرين تحتوي أزواجاً مرتبة تحقق كلاً من المعادلتين في آن واحد ولذلك أطلق عليها تسمية (المعادلات الآنية)، وبلغة الرياضيات إذا طلبنا إيجاد مجموعة حل المعادلتين آنياً فإن المقصود هو إيجاد مجموعة التقاطع لمجموعتي الحل لكل معادلة من المعادلتين، ولتوضيح ذلك:

لتكن

$$a_1\,x + b_1\,y + c_1 = 0$$
$$a_2\,x + b_2\,y + c_2 = 0$$

معادلتين من الدرجة الأولى بمتغيرين. إن حل هاتين المعادلتين آنياً يستهدف إيجاد مجموعة الأزواج المرتبة التي تحقق كلا المعادلتين في آن واحد ويتم ذلك عن طريق إيجاد مجموعة الحل لكل معادلة ومن ثم استخراج مجموعة تقاطعهما.

لتكن $\{1,2,3,4,5,6\}$ مجموعة التعويض لكل من المعادلتين الآتيتين: -

$$3x + y = 8$$
$$3x - y = 4$$

جد مجموعة حل هاتين المعادلتين.

الحل: كما مر بالمثال (2) نقوم بإيجاد مجموعة حل المعادلة الأولى وهي:

$S.s_1 = \{(2,2),(1,5)\}$ ومجموعة حل المعادلة الثانية وهي $S.s_2 = \{(2,2),(3,5)\}$

وعليه تكون مجموعة التقاطع $S.s = \{(2,2)\}$ هي مجموعة الحل للمعادلتين.

ملاحظة
إذا كانت مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ فإنه من الصعب بل من المستحيل ايجاد مجموعة الحل بالطريقة السابقة لذلك نستخدم إحدى الطريقتين الآتيتين:
• الطريقة الجبرية وتشمل أسلوبين هما (أسلوب الحذف) و (أسلوب التعويض)
• الطريقة البيانية (أي استخدام المخطط البياني على ورق المربعات)

اولاً: الطريقة الجبرية

1) أسلوب الحذف: ويتلخص هذا الاسلوب بمساواة القيمة العددية لمعاملي أحد المتغيرين في كل من المعادلتين ثم جمع أو طرح إحداهما من الأخرى بهدف حذف أحد المتغيرين والامثلة الآتية توضح الاسلوب هذا: -

جد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين: -

$$5x + 4y = 8 \quad \dots \quad (1)$$

$$3x - 2y = 7 \quad \dots \quad (2)$$

الحل: - بضرب طرفي المعادلة (2) بالعدد (2) نحصل على

$$5x + 4y = 8 \quad \dots \quad (1)$$

$$6x - 4y = 14 \quad \dots \quad (2)$$

وبجمع المعادلتين نحصل على

$$11x = 22$$

$$x = \frac{22}{11} \Rightarrow x = 2$$

وبتعويض قيمة x بالمعادلة (1) نحصل على

$$5.(2) + 4y = 8$$

$$10 + 4y = 8$$

$$4y = -2$$

$$y = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$\mathrm{S.s} = \{(2, \frac{-1}{2})\}$$

2) أسلوب التعويض: ويتلخص هذا الاسلوب بإيجاد القيمة العددية لأحد المتغيرين بدلالة المتغير الآخر من إحدى المعادلتين لنحصل على معادلة ثالثة نقوم بتعويضها بالمعادلة الأخرى، يلي ذلك استخراج قيمة المتغير بطريقة عزل المتغيرات بجهة والثوابت بجهة ثانية ثم تعويض تلك القيمة بالمعادلة الثالثة بهدف إيجاد قيمة المتغير الثاني والأمثلة الآتية توضح هذا الاسلوب.

مثال5

جد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين: -

$$4x - y = -5 \quad \dots\ (1)$$

$$8x + 5y = 32 \quad \dots\ (2)$$

الحل: -نستخرج قيمة y من المعادلة (1) فنحصل على

$$y = 4x + 5 \quad \dots\dots\dots..(3)$$

ونعوض هذه القيمة بالمعادلة (2) لنحصل على قيمة x كما يأتي: -

$$8x + 5(4x + 5) = 32$$

$$8x + 20x + 25 = 32$$

$$28x = 32 - 25$$

$$28x = 7$$

$$x = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

وبتعويض قيمة x بالمعادلة (3) نحصل على

$$y = 4.\left(\frac{1}{4}\right) + 5 = 1 + 5 = 6$$

$$\therefore \mathrm{S.s} = \{(\frac{1}{4}, 6)\}$$

مثال6

جد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين: -

$$2x - y = 4 \quad \dots\ (1)$$

$$4x - 2y = 10 \quad \dots\ (2)$$

الحل: -نستخرج قيمة y من المعادلة (1) فنحصل على $y = 2x - 4$

ونعوض القيمة هذه بالمعادلة (2) لنحصل على قيمة x كما يأتي: -

$$4x - 2(2x - 4) = 10$$

$$4x - 4x + 8 = 10 \Rightarrow 8 = 10$$

وهي عبارة خاطئة وعليه يمكننا القول انه ليس لهاتين المعادلتين حل مشترك أي لا يوجد زوج مرتب يمكن أن يحققهما معاً في آن واحد، ونعبر عن ذلك رياضياً بالقول إن مجموعة الحل مجموعة خالية أي أن: $\mathrm{S.s} = \phi$

مثال 7 ما الكسر الذي إذا أضيف العدد (1)إلى بسطه يكون مساوياً للكسر $\frac{1}{3}$ وإذا أضيف العدد(1) إلى مقامه أصبح مساوياً للكسر $\frac{1}{4}$ ؟

الحل: - نفرض إن بسط الكسر هو x وإن مقامه هو y أي إن الكسر هو $\frac{x}{y}$

$$\frac{(x+1)}{y} = \frac{1}{3} \quad \dots\ (1)$$

$$\frac{x}{y+1} = \frac{1}{4} \ \dots\ (2)$$

نبسط الطرفين باستخدام إحدى خواص التناسب وهي خاصية (حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين)

$$y = 3x + 3 \ \Rightarrow \ \ y - 3x = 3 \quad \dots\ (1)$$

$$4x = y + 1 \Rightarrow \ \ -y + 4x = 1 \ \dots\ \ (2)$$

وبجمع المعادلتين نحصل على

$$x = 4$$

وبتعويض قيمة x بالمعادلة (1) نحصل على قيمة y كما يأتي:

$$\frac{4+1}{y} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 15$$

لذلك فان الكسر المطلوب هو $\mathbf{\frac{4}{15}}$

ثانياً: الطريقة البيانية

سبق وذكرنا ان كل معادلة من الدرجة الأولى بمتغيرين($ax + by + c = 0$) تتحقق بعدد لا نهائي من الأزواج المرتبة (x, y). ويمكن تمثيل المعادلة هذه بالصيغة $y = f(x) = ax + c$ حيث ان الثوابت $a, c \in \mathbb{R}, a \neq o$ ، وان $f(x)$ هي قاعدة الاقتران بين x و y وسوف نطلق عليها فيما بعد مصطلح (الدالة) ويمكن تمثيل تلك الدالة بيانياً عن طريق تحديد موقعي زوجين من الأزواج المرتبة آنفة الذكر على الاقل في المستوى الاحداثي والتوصيل بينها فنحصل على خط مستقيم ولهذا السبب تسمى هذه المعادلات بالمعادلات الخطية ويكفي لتمثيلها بيانياً ان نحدد موقع زوجين فقط من الأزواج المرتبة.

ولأجل إيجاد مجموعة الحل لزوج من المعادلتين من الدرجة الأولى بمتغيرين بيانياً نتبع الخطوات الآتية:

1. **نرسم على المستوي الأحداثي المستقيم الذي يمثل المعادلة الأولى (بتعيين نقطتي تقاطعه مع المحورين).**
2. نرسم على المستوي الأحداثي المستقيم الذي يمثل المعادلة الثانية بالطريقة ذاتها.
3. يكون الزوج المرتب الذي يمثل نقطة تقاطع المستقيمين هو مجموعة الحل وفي حالة ظهور مستقيمين متوازيين فإن مجموعة الحل هي مجموعه خالية أي ϕ.

ملاحظة: يفضل في أغلب الاحيان تعيين نقطتي تقاطع المستقيم مع المحورين الاحداثيين. 1) مع المحور x بتعويض $y = 0$ 2) مع المحور y بتعويض $x = 0$

مثال8 زاويتان متتامتان قياس أحداهما يزيد بمقدار $30°$ عن أربعة أمثال قياس الزاوية الاخرى جد قياس كلاً من الزاويتين .

الحل :- نفرض إن قياس الزاوية الأولى بالدرجات $= x$ ، وإن قياس الزاوية الثانية بالدرجات $= y$

وبما إن الزاويتين متتامتان فإن :-

$$x + y = 90 \dots (1)$$
$$x - 4y = 30 \dots (2)$$

وبضرب المعادلة (2) بالعدد (-1) نحصل على :

$$x + y = 90 \dots (1)$$
$$-x + 4y = -30 \dots (2)$$

بالجمع

$$5y = 60 \Rightarrow y = \frac{60}{5} = 12°$$ (قياس الزاوية الثانية)

وبالتعويض بالمعادلة (1) نحصل على قياس الزاوية الاولى وكما يأتي:

$$x + 12 = 90 \Rightarrow x = 90 - 12 = 78°$$ (قياس الزاوية الاولى)

مثال9 جد مجموعة حل المعادلتين الاتيتين بيانياً

$$3y = 2x + 20$$
$$\frac{2x}{5} - \frac{y}{10} + 1 = 0$$

الحل : 1. نرسم المستقيم L_1 الذي يمثل المعادلة (1) باستخراج نقطتي تقاطعه مع المحورين.

- مع المحور x نعوض $y = 0$ ، أي ان

$$0 = 2x + 20 \Rightarrow 2x = -20 \Rightarrow x = -10 \Rightarrow (-10,0)$$

- مع المحور y نعوض $x = 0$ ، أي ان

$$3y = 2(0) + 20 \Rightarrow y = \frac{20}{3} \Rightarrow (0,\frac{20}{3}) = (0,6.6)$$

2. نرسم المستقيم L_2 الذي يمثل المعادله (2) باستخراج نقطتي تقاطعه مع المحورين.

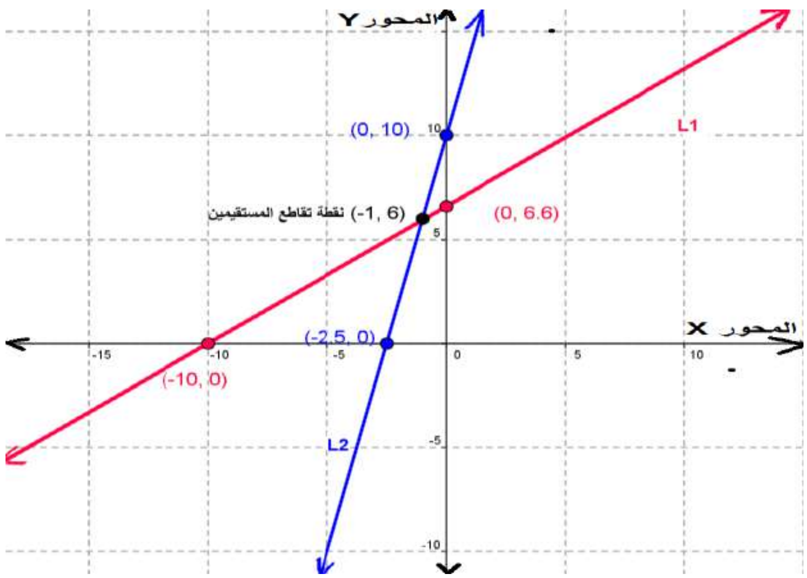
- مع المحور x نعوض $y = 0$ ، أي ان

$$\frac{2x}{5} - 0 + 1 = 0 \Rightarrow \frac{2x}{5} = -1 \Rightarrow x = \frac{-5}{2} \Rightarrow \left(\frac{-5}{2},0\right)$$
$$= (-2.5,0)$$

- مع المحور y نعوض $x=0$

$$0-\frac{y}{10}+1=0 \Rightarrow \frac{-y}{10}=-1 \Rightarrow y=10 \Rightarrow \quad (0,10)$$

نلاحظ ان نقطة تقاطع المستقيمين وهي النقطة $(-1,6)$ تمثل مجموعة الحل كما موضح في الشكل 1-1 ادناه



الشكل 1-1

1. جد مجموعة الحل لأزواج المعادلات الآتية بالطريقة الجبرية: -

1) $2x+3y=2\,, \qquad 2x-3y=0$

2) $\frac{2}{x}-\frac{3}{y}=4\,, \qquad \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=3$

3) $2x-3y=-44\,, \qquad -(x-8)-64=-5y$

4) $\frac{2x-5y}{3}-\frac{3x+8y}{11}=-56, \quad y=x$

5) $\frac{2x-y}{x-2y}=\frac{1}{5}, \quad \frac{2x+y}{x+1}=4$

2.جد مجموعة الحل لأزواج المعادلات الآتية بالطريقتين الجبرية والبيانية

$6)\ 2x + y = 4 \qquad , \qquad x - y = -1$

$7)\ 2x + 3y = -1 \qquad , \qquad 5x + 6y = -3$

$8)\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2 \qquad , \qquad \frac{x}{3} + \frac{y}{9} = 1$

3. عدد مؤلف من رقمين، مجموع رقمي مرتبتيه يساوي 9 ، فإذا أستبدلنا آحاده بعشراته حصلنا على عدد يقل عن العدد الأصلي بمقدار 63 فما هو العدد؟

3-1-1 المعادلات من الدرجة الثانية بمتغير واحد

المعادلة التي صيغتها العامة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ (أي ثوابت حقيقية) تسمى (معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد هو المتغير x) كما يسمى الثابت a معامل x^2 ويسمى الثابت b معامل x ويسمى الثابت c الحد المطلق. هناك ثلاث طرائق لحل هذا النوع من المعادلات هي:

- طريقة التحليل إلى العوامل
- طريقة إكمال المربع
- طريقة القانون (الدستور)

وسنتناول في هذا البند هذه الطرق بالتفصيل: -

اولاً) طريقة التحليل:

تعتمد هذه الطريقة على أساليب تحليل المقادير الجبرية إلى العوامل والتي درستها بالتفصيل في المرحلة المتوسطة وهي (استخراج العامل المشترك– الفرق بين مربعين – فرق ومجموع مكعبين – التحليل بالتجربة) فضلاً على استخدام البديهية التي تنص على (إذا كان حاصل ضرب كميتين يساوي صفراً فإن أحدهما على الاقل يساوي صفراً).ونعبر عن ذلك رمزياً كالآتي:

$$\boxed{\text{اذا كان } a.b = 0 \text{ فأما } a = 0 \text{ أو } b = 0}$$

والامثلة الآتية توضح تفصيلاً أكثر عن هذه الطريقة: -

مستخدماً طريقة التحليل إلى العوامل، جد مجموعة حل المعادلات الآتية: -

a) $x^2 + 5x = -6$
b) $3x^2 - 5x = 0$
c) $9x^2 = 16$

الحل:

a) $x^2+5x=-6$

$$x^2+5x+6=0$$

$(x+3)(x+2)=0$ (التحليل بالتجربة)

أما: $x+3=0 \Rightarrow x=-3$

أو: $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$$\therefore \quad S.s=\{-3\,,-2\,\}$$

b) $3x^2-5x=0$

$x(3x-5)=0$ (التحليل باستخراج العامل المشترك)

أما: $x=0$

أو: $3x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$

$$\therefore \quad S.s=\{0,\frac{5}{3}\}$$

c) $9x^2=16$

$$9x^2-16=0$$

$(3x-4)(3x+4)=0$ (التحليل بطريقة الفرق بين مربعين)

أما:

$$3x-4=0 \Rightarrow x=\frac{4}{3}$$

أو:

$$3x+4=0 \Rightarrow x=\frac{-4}{3}$$

$$\therefore \quad S.s=\{\ \frac{4}{3},\frac{-4}{3}\ \}$$

ثانياً) طريقة إكمال المربع:

قد يصعب أحياناً أو يستحيل تحليل الطرف الأيسر للمعادلة لذلك نلجأ إلى طرق أخرى منها طريقة (إكمال المربع) والتي يقتضي استخدامها للحل إتباع عدد من الخطوات وهي: -

1. نقل الحد المطلق إلى الطرف الايمن وترتيب المعادلة ترتيباً تنازلياً.
2. تقسيم المعادلة على معامل الحد الذي يحتوي x^2.
3. إضافة المقدار $\left(\frac{x \text{ معامل}}{2}\right)^2$ لطرفي المعادلة.
4. كتابة الحد الأيسر للمعادلة بصورة المربع الكامل أي بالصورة $(x\pm a)^2$ وتبسيط الطرف الايمن.
5. إكمال الحل بأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة.

والمثال الآتي يوضح هذه الخطوات: -

جد مجموعة حل المعادلة $x^2 + 4x - 5 = 0$ بطريقة إكمال المربع

الحل: $x^2 + 4x = 5$

نضيف المقدار $\left[(\frac{4}{2})^2 = 4 \right]$ لطرفي المعادلة فتصبح:

$$x^2 + 4x + 4 = 5 + 4$$

$$(x + 2)^2 = 9$$

وبجذر الطرفين نحصل على: - $x + 2 = \pm 3$

أما: $x = 3 - 2 = 1$

أو: $x = -3 - 2 = -5$

$$S.s = \{ -5, 1 \}$$

ثالثاً) طريقة القانون (الدستور):

كما تعلمنا، إن الصيغة العامة لمعادلة الدرجة الثانية بمتغير واحد (او مجهول واحد) x هي

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

يمكن إيجاد مجموعة حلها باستخدام العلاقة الاتية:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

والتي تسمى القانون (أو الدستور) حيث:

الحد المطلق $= c$ ، معامل الحد الذي يحتوي x $= b$ ، معامل الحد الذي يحتوي $a = x^2$

كما يسمى المقدار $x^2 - 4ac$ بـ (العامل المميز) حيث نتمكن باستخدامه من تمييز جذري المعادلة قبل المباشرة بحلها باستخدام الدستور وكما يأتي:

1. إذا كان العامل المميز عدداً موجباً اي $(b^2 - 4ac > 0)$ فأن للمعادلة جذرين حقيقيين مختلفين (غير متساويين).
2. إذا كان العامل المميز يساوي صفراً أي $(b^2 - 4ac = 0)$ فأن للمعادلة جذرين حقيقيين متساويين يساوي كل منهما $\frac{-b}{2a}$.
3. إذا كان العامل المميز عدداً سالباً أي $(b^2 - 4ac < 0)$ فأنه ليس للمعادلة جذور في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ونعبر عن ذلك بالقول ان مجموعة الحل مجموعة خالية.ϕ

مثال12

جد مجموعة الحل للمعادلة $x^2 + 2x = 4$ بطريقة الدستور

الحل: نعيد ترتيب حدود المعادلة لنجعلها مطابقة للصيغة العامة $ax^2 + bx + c = 0$

وتصبح بالشكل $x^2 + 2x - 4 = 0$

وبالمقارنة نجد إن $a = 1\,,\quad b = 2\,,\quad c = -4$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{-2(1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{5}$$

$$\therefore S.s = \{-1 + \sqrt{5}, -1 - \sqrt{5}\}$$

مثال13

جد مجموعة الحل للمعادلة $x^2 - 10x + 25 = 0$ بطريقة الدستور

الحل :- $a = 1\,,\quad b = -10\,,\quad c = 25$

$$\because x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore x = \frac{+10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \times 1 \times (25)}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2}$$

$$x = \frac{10}{2} = 5$$

ونلاحظ هنا اننا نكتب مجموعة الحل كما يأتي $S.s = \{5\}$ نظراً لكون العامل المميز $b^2 - 4ac$ يساوي صفراً مما يعني ان للمعادلة جذرين حقيقيين متساويين.

ومن الممكن حل المثال بطريقة أخرى هي: -

$$\because b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 25 = 100 - 100 = 0$$

وحيث إن العامل المميز قيمته تساوي صفراً فإن للمعادلة جذرين متساويين يساوي كل منهما $\frac{-b}{2a}$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-(-10)}{2 \times 1} = \frac{10}{2} = 5$$

$$S.s = \{5\}$$

مثال 14 بين ان المعادلة $x^2 - 2x + 5 = 0$ ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

الحل: -

$$a = 1 , \quad b = -2 , \quad c = 5$$

$$b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20 = -16 < 0$$

وبما ان المميز عدد سالب لذلك فانه ليس للمعادلة حل في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

(2-1) إيجاد المعادلة التربيعية اذا علم جذراها:

لإيجاد المعادلة التربيعية إذا علم جذراها نستخدم القانون الآتي

$$\boxed{\boldsymbol{x^2 - (\text{مجموع الجذرين}).x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0}}$$

مثال 15 كون معادلة تربيعية جذريها العددين -3 ، 2

الحل :-

$$x^2 - (\text{مجموع الجذرين}).x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$$

$$x^2 - (-3 + 2)x + (-3 \times 2) = 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

ملاحظة: -

$$\text{مجموع الجذرين} = \frac{-b}{a}$$

$$\text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{c}{a}$$

مثال 16 جد مجموعة حل المعادلة $x^2 - 4x + 3 = 0$ وتحقق من صحة الحل مستخدماً المعلومات الواردة في الملاحظة أعلاه.

الحل:
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x-1)(x-3) = 0$$
أما $(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$

أو $(x-3) = 0 \Rightarrow x = 3$

$$\therefore \text{S.s} = \{1, 3\}$$

مجموع الجذرين $(3 + 1 = 4)$, $\dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(-4)}{1} = 4$

حاصل ضرب الجذرين $(3 \times 1 = 3)$, $\dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{1} = 3$

مثال 17 إذا كان أحد جذري المعادلة $x^2 + kx - 15 = 0$ يساوي 3 فما هو الجذر الاخر وما قيمة k ؟

الحل: نفرض ان الجذرالمجهول هو h، فيكون حاصل ضرب الجذرين هو $(3.h)$ وبالمقارنة مع الصيغة القياسية

$x^2 -$ (مجموع الجذرين)$.x +$ (حاصل ضرب الجذرين) $= 0$

$3h = -15 \Rightarrow h = \dfrac{-15}{3} = -5$ (وهي قيمة الجذر الثاني)

$3 + (-5) = -2$ (مجموع الجذرين)

بالمقارنة مع الصيغة أعلاه نتوصل إلى أن : $-k = -2 \Rightarrow k = 2$

تمرين 2-1

1. جد مجموعة حل المعادلات الآتية مستخدماً طريقة التحليل:

$a)\ 6x^2 + 7x - 3 = 0$ $\quad b)\ x^2 + 3x - 4 = 0$

$c)\ x^2 + 12 = 7x$ $\quad d)\ 16 = x^2 - 6x$

$e)\ 3x^2 = 9x$ $\quad f)\ (2x-3)(x-1) = 15$

$g)\ x - \sqrt{x} - 12 = 0\ ,\ \sqrt{x} > 0, x \geq 0$

2. جد مجموعة حل المعادلات الآتية مستخدماً طريقة اكمال المربع:

$a)\ \ x^2 - 7x - 8 = 0 \qquad b)\ \ 42 + x^2 = 13x$

$c)\ \ 6x^2 = 6 - 5x \qquad d)\ 3x^2 + 4x - 4 = 0$

3. جد مجموعة حل المعادلات الآتية مستخدماً طريقة الدستور:

$a)\ \ 3x^2 - 6x = -2 \qquad b)\ x^2 - 4x + 3 = 0$

$c)\ \ 4x^2 = 12x - 9 \qquad d)\ \ 3x^2 - 7x + 2 = 0$

$e)\ \ (x+5)^2 + 2 = 38$

4. كون المعادلة التربيعية التي جذريها $1+\sqrt{3},\ \ 1-\sqrt{3}$

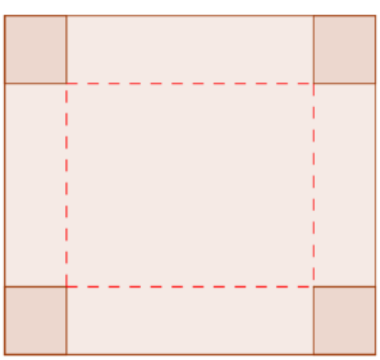
5. كون المعادلة التربيعية التي جذريها $2-3\sqrt{2},\ \ 1+5\sqrt{2}$

6. جد قيمة k التي تجعل جذري المعادلة $x^2 - (k-2).x + 9 = 0$ متساويين.

7. صفيحة معدنية مربعة الشكل تستخدم في قسم الميكانيك فإذا قطع من طول ضلعها بمقدار $(15\ cm)$ وتناقصت مساحتها بمقدار $(\ 255\ cm^2\ )$. جد طول ضلعها

8. في مدخل بناية إعدادية صناعية توجد قطعة ارض مربعة الشكل طول ضلعها $(20\ m)$ ، ما عرض الشريط اللازم زراعته في محيطها لتصبح نصف مساحتها مزروعة؟

9. في المعرض العلمي السنوي للتعليم المهني يراد صنع صندوق لعرض المنتوجات قاعدته مربعة ومفتوح من الأعلى باستخدام قطعة مـــن الكرتون الملون مربعة الشكل باسلوب قطع مربعات متساوية المساحة من أركانها الأربعة طول ضلع كل منها $(3\ cm)$ وثنـــي الاجزاء البارزة (كما في الشكل ألمجاور) فإذا كان حجم الصندوق المطلوب $(768\ cm^3)$ فما طول ضلع قطعة الكرتون الملونة؟



(3-1) الفترات الحقيقية (Real Intervals)

تعريف الفترة (Interval) هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ ويمكن تصنيفها كالاتي:

1-3-1الفترات المحددة بين نقطتين حقيقيتين a ، b عندما $a < b$ وتكون بثلاث صيغ هي:

1. الفترة المفتوحة (a, b) (Open Interval) وتعرّف بانها:(a, b)=$\{x : a < x < b\}$

وتمثل بيانياً على خط الاعداد كما في الشكل 1-2 ادناه

الشكل 1-2

حيث $a \notin (a, b)$، $b \notin (a, b)$ اي أنها مجموعة كل الاعداد الواقعة بين العددين a، b دون أن يكون هذين العددين من ضمنها.

2. الفترة المغلقة $[a, b]$ (Closed Interval) وتعرّف بانها: $[a, b]$=$\{x : a \leq x \leq b\}$

وتمثل بيانياً على خط الاعداد كما في الشكل 1-3 ادناه

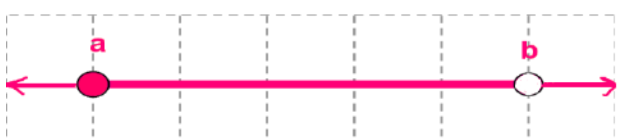
الشكل 1-3

حيث $a \in [a, b]$ ، $b \in [a, b]$ اي أنها مجموعة كل الاعداد الواقعة بين العددين a، b وبضمنها هذين العددين a , b.

3. الفترة نصف المفتوحة أو نصف المغلقة وهي بصيغتين

❖ مغلقة من اليسار ومفتوحة من اليمين وتعرّف كما يأتي: $[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$

وتمثل بيانيا على خط الاعداد كما في الشكل 1-4 ادناه



الشكل 1-4

حيث $a \in [a, b)$ ، $b \notin [a, b)$ اي أنها مجموعة كل الاعداد الواقعة بين العددين a، b وبضمنها العدد a فقط.

❖ مغلقة من اليمين ومفتوحة من اليسار وتعرّف كما يأتي: $(a,b] = \{x : a < x \leq b\}$

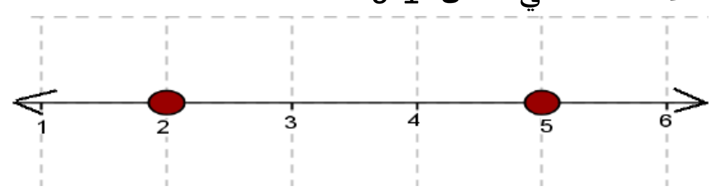
وتمثل بيانيا على خط الاعداد كما في الشكل 1-5 ادناه

الشكل 1-5

حيث $b \in (a,b]$ ، $a \notin (a,b]$ اي أنها مجموعة كل الاعداد الواقعة بين العددين a، b وبضمنها العدد b فقط.

امثلة:

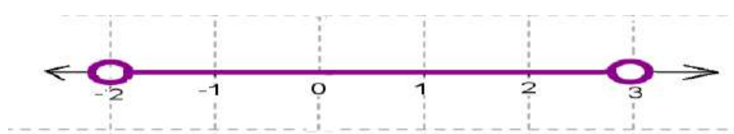
❖ لاحظ الفترة المغلقة $[2,5]$ وهي تمثل مجموعة الاعداد الحقيقية x حيث $2 \leq x \leq 5$
وتمثل على خط الاعداد كما في الشكل 1-6 ادناه



الشكل (1-6)

❖ لاحظ الفترة المفتوحة $(-2,3)$ وهي تمثل مجموعة الاعداد الحقيقية x حيث $-2 < x < 3$

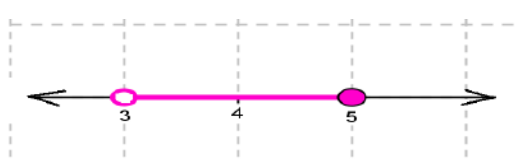
وتمثل بيانياً على خط الاعداد كما في الشكل 1-7 ادناه



الشكل 1-7

❖ لاحظ الفترة نصف المفتوحة $(3,5]$ وهي تمثل مجموعة الاعداد الحقيقية x حيث $3 < x \leq 5$

وتمثل بيانياً على خط الاعداد كما في الشكل 1-8 ادناه



الشكل 1-8

❖ لاحظ الفترة نصف المغلقة $[2,6)$ وهي تمثل مجموعة الاعداد الحقيقية x حيث $2 \le x < 6$
وتمثل بيانياً على خط الاعداد كما في الشكل 1-9 ادناه

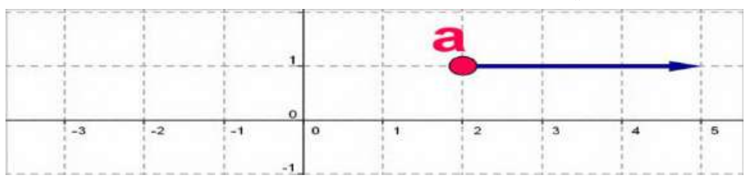
الشكل 1-9

(1-3-2) مجموعات عددية غير محددة: وتكون بأربع صيغ هي:

a) مجموعة الاعداد الحقيقية التي تزيد عن قيمة العدد الحقيقي a أو تساويه وتعرف كما يأتي: -

$$\{x : x \in \mathbb{R}، x \ge a\} = [a, \infty)$$

وتمثل بيانياً على خط الاعداد كما في الشكل 1-10 ادناه

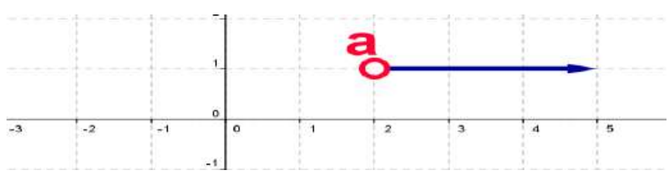


الشكل 1-10

b) مجموعة الاعداد الحقيقية التي تزيد عن قيمة العدد الحقيقي a ولا تساويه وتعرف كما يأتي:

$$\{x : x \in \mathbb{R}، x > a\} = (a, \infty)$$

وتمثل بيانياً على خط الاعداد كما في الشكل 1-11 ادناه

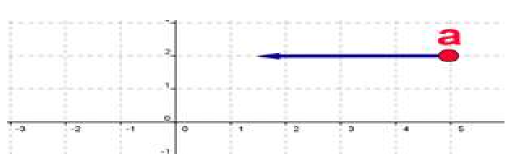


الشكل 1-11

c) مجموعة الاعداد الحقيقية التي تقل عن قيمة العدد الحقيقي a أوتساويه وتعرف كما يأتي:

$$\{x : x \in \mathbb{R}، x \le a\} = (-\infty, \mathrm{a}]$$

وتمثل بيانياً على خط الاعداد كما في الشكل1-12 ادناه :

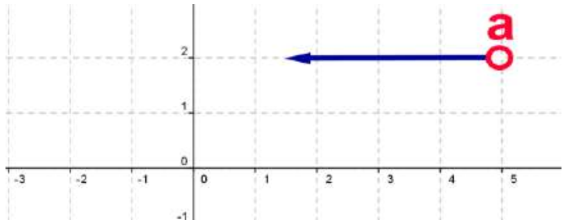


الشكل (1-12)

d) مجموعة الاعداد الحقيقية التي تقل عن قيمة العدد الحقيقي a ولا تساويه وتعرف كما يأتي

$$\{x : x \in \mathbb{R}، x < a\} = (-\infty, a)$$

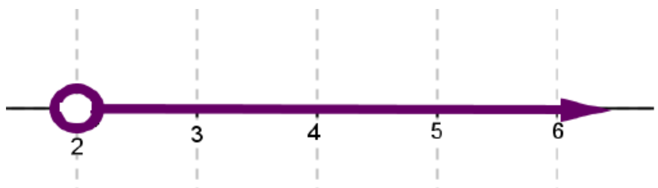
وتمثل بيانياً على خط الاعداد كما في الشكل 1-13 ادناه



الشكل (1-13)

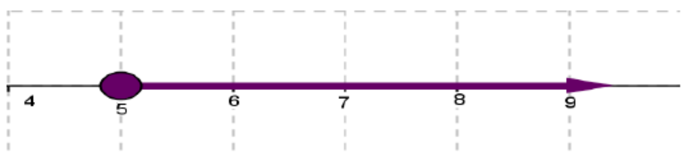
امثلة

- ✓ ان مجموعة الاعداد الحقيقية xحيث $x > 2$ يمكن أن يمثلها شعاع بدايته فجوة عند الاحداثي $x = 2$ كما في الشكل1-14 ادناه



الشكل1-14

- ✓ أن مجموعة الاعداد الحقيقية x حيث $x \geq 5$ يمكن أن يمثلها شعاع بدايته فجوة مملوءة عند الاحداثي $x = 5$ كما في الشكل 1-15 ادناه

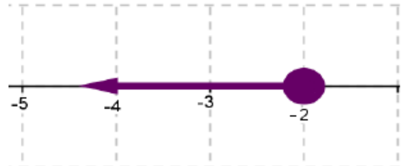


الشكل 1-15

- ✓ ان مجموعة الاعداد الحقيقية x حيث $x < -2$ يمكن أن يمثلها شعاع بدايته فجوة عند الاحداثي $x = -2$ كما في الشكل 1-16 ادناه

الشكل 1-16

✓ أن مجموعة الاعداد الحقيقية x حيث $x \leq -2$ يمكن أن يمثلها شعاع بدايته فجوة مملوءة عند النقطة $x = -2$ كما في الشكل17-1 ادناه



الشكل (17-1)

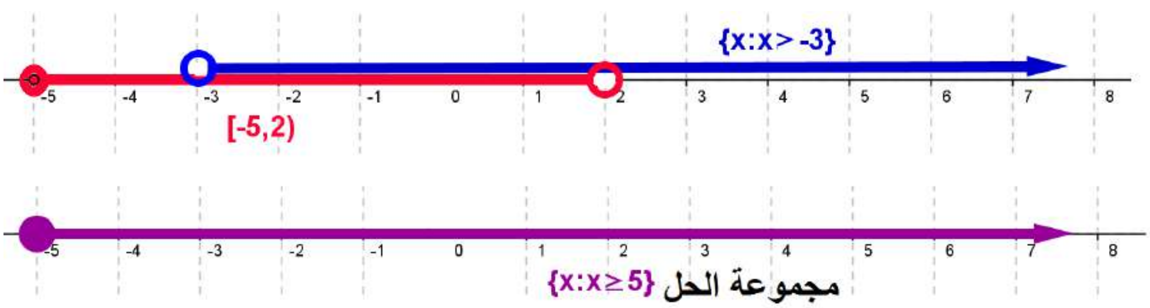
مثل على خط الاعداد كلاً مما يأتي: -

a) $\{x : x > -3\} \cup [-5,2)$

b) $[3,8] \cap [1,6]$

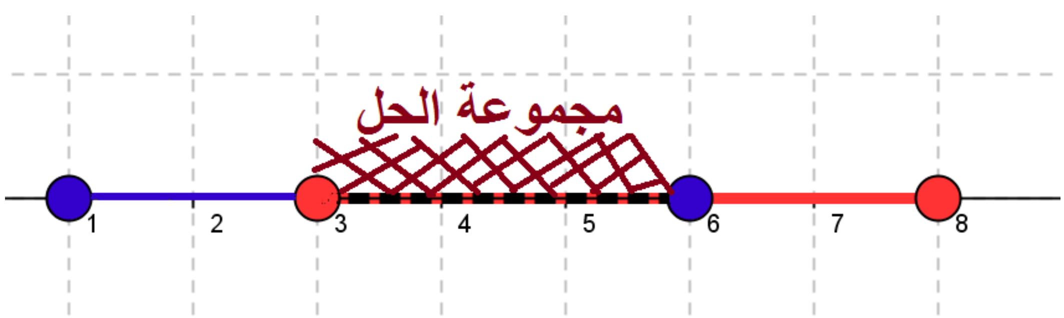
الحل

$a)\{x : x > -3\} \cup [-5,2) = \{x : x \geq -5\}$



الشكل 18-1

$b)[3,8] \cap [1,6] = [3,6]$



الشكل 19-1

(4-1)القيمة المطلقة للعدد الحقيقي (The Absolute Value of The Real Number)

تعريف: القيمة المطلقة للعدد الحقيقي x هي عدد حقيقي له قيمة العدد x نفسها عندما يكون موجباً او صفراً، فيما تساوي $(-x)$ عندما يكون سالباً، ويرمز لمطلق العدد x بالرمز $|x|$ أي أن :

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \forall x \geq 0 \\ -x & \forall x < 0 \end{cases}}$$

أي أن القيمة المطلقة للعدد الحقيقي هي دائماً عدد غير سالب كما يتضح ذلك بالمثال الآتي: -

مثال 19

لاحظ الامثلة العددية الآتية: -

$$1)\ |5| = 5 \quad 2)\ |-5| = 5 \quad 3)\ \left|\frac{-3}{4}\right| = \frac{3}{4} \quad 4)\ |3-2| = |2-3| = 1$$

مثال 20

عبر باستعمال تعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي عن المقدار الجبري

$$|x-3|, x \in \mathbb{R}$$

الحل: -

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \forall (x-3) \geq 0 \\ -x+3 & \forall (x-3) < 0 \end{cases} \Rightarrow |x-3| = \begin{cases} x-3 & \forall x \geq 3 \\ -x+3 & \forall x < 3 \end{cases}$$

نستنتج من البند (4-2) أن القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي x لها الخواص الآتية: -

1. $\forall x \in \mathbb{R};\ |x| \geq 0$ اي أن القيمة المطلقة غير سالبة دائماً
2. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = |-x|$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, -|x| \leq x \leq |x|$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = |x|^2$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x.y| = |x|.|y|, \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$
6. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x-y| \geq ||x|-|y||$
7. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq +a$
8. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x+y| \leq |x|+|y|$
9. $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$

(5-1) حل بعض المعادلات التي تحتوي قيمة مطلقة
(Solving Some Equations Containing Absolute Value)

مثال 21 جد مجموعة حل المعادلة $|x-2| = 4$

الحل :

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \forall x \geq 2 \\ -(x-2) & \forall x < 2 \end{cases}$$

1) عندما $x \geq 2$ فأن :-

$$x-2 = 4 \Rightarrow x = 6$$

2) عندما $x < 2$ فأن :-

$$-(x-2) = 4 \Rightarrow x-2 = -4 \Rightarrow x = -4+2 \Rightarrow x = -2$$

$$\therefore S.s = \{-2,6\}$$

مثال 22 جد مجموعة حل المعادلة: $x^2 - |x| = 12$

الحل:- 1) عندما $(x \geq 0)$ فأن $|x| = x$ ولذلك تكون المعادلة كالآتي :-

$$x^2 - x = 12$$
$$x^2 - x - 12 = 0$$
$$(x-4)(x+3) = 0$$

أما:

$(x-4) = 0 \Rightarrow x = 4$ تحقق العلاقة $(x \geq 0)$

او:

$(x+3) = 0 \Rightarrow x = -3$ تهمل لأنهما لا تحقق العلاقة $(x \geq 0)$

2) عندما $(x < 0)$ فأن $|x| = -x$ ولذلك تكون المعادلة كالآتي: -

$$x^2 - x = 12$$
$$x^2 + x - 12 = 0$$
$$(x+4)(x-3) = 0$$

اما:

$(x+4) = 0 \Rightarrow x = -4$ تحقق العلاقة $(x < 0)$

او:

$(x-3) = 0 \Rightarrow x = 3$ تهمل لأنها لا تحقق العلاقة $(x < 0)$

$$\therefore S.s = \{-4, +4\}$$

تمرين 3-1

1. أكتب خمسة عناصر تنتمي الى كل من الفترات الآتية: -

$$[\frac{1}{4},\frac{1}{2}), [0,1] , (1,2] , [5,7), (3,4), (-10,-6], (-1,\frac{1}{2}]$$

2. . باستعمال تعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي جد قيمة ما يأتي: -

$$|\sqrt{3}-5| \quad , \ |-\sqrt{20}| \ , \ \left|\frac{3}{-4}\right|, \ \ |-11|$$

3. لتكن $A=[-5,2], B=[-3,3]$. جد ناتج ما يأتي $A \cup B$ ، $A \cap B$ على شكل فترات حقيقية ومثلها على خط الاعداد الحقيقية.

4. جد ناتج كلاً مما يأتي: -

$a)\{x: x \geq -1\} \cap [-3,2)$ $b)\ (-3.1] \cap \{x: x > 2\}$

$c)(-2,3) \cup \{x: x \leq 1\}$ $d)\ [-7,0] \cap (-2,3)$

5. حل المعادلات الآتية في مجموعة الاعداد الحقيقية: -

$a)\ \left|\frac{x}{2}-1\right| = 5$ $b)|x^2-4| = |2x-4|$

$c)x^2-30=|x|$ $d)|x^2+5|=9$

(6-1) المتباينات (المتراجحات)$(Inequalities)$

تناولنا في البند السابق مفهوم الفترات والمجموعات العددية غير المحددة، وسنتناول في هذا البند مفهوم التباين وبعض خواصه التي تفيد في حل المتباينات من الدرجة الاولى والثانية، وبيان أهمية المفاهيم أعلاه في علم الرياضيات.

لقد تعرفنا في دراساتنا السابقة على شيء من مفهوم التباين وأن الترميز الرياضي ($a > b$) يشير الى كون العدد a أكبر من العدد b أو أن العدد b أصغر من العدد a تبعاً لأتجاه القراءة كما أننا نتحقق من صحة ذلك بإجراء عملية الطرح $a-b$ فإذا كان الناتج موجباً كانت عبارة التباين ($a > b$) صائبة وإذا كان الناتج سالباً كانت العبارة خاطئة.

فالعبارة($\frac{3}{4} > \frac{5}{7}$) عبارة خاطئة لأن $\frac{-1}{28} = \frac{20-21}{28} = \frac{3}{4} - \frac{5}{7}$ (لأن الناتج سالب). ولذلك فأن العبارة $(\frac{3}{4} < \frac{5}{7})$ تكون هي العبارة الصائبة. مما سبق يمكننا صياغة تعريف لمفهوم التباين وكما يأتي: -

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R} \ , \ \ a > b \Leftrightarrow a - b > 0}$$

أثبت صحة المتباينة الاتية: $\frac{5}{11} > \frac{-3}{7}$

الحل : -

$$\frac{5}{11} - \frac{-3}{7} = \frac{35+33}{77} = \frac{88}{77} > 0$$

ولكون ناتج الطرح موجب فأن العبارة صائبة

(1-6-1) خواص المتباينات (المتراجحات)

سنحاول في هذا البند تقديم بعض خواص التباين التي يتيح تطبيقها حل كل أنواع المتباينات:
إذا كانت $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ فأن:-

1) $\boxed{a > b \ \Leftrightarrow a + c > b + c}$

أي أنه أذا أضيفت كميات متساوية الى طرفي متباينة صائبة فأن المتباينة الناتجة تبقى صائبة

فمثلاً $7 > 3 \rightarrow 7 + 5 > 3 + 5 \Rightarrow 12 > 8$

2) $\boxed{a > b \ \Leftrightarrow a \times c > b \times c \ ; \ c > 0}$

3) $\boxed{a > b \ \Leftrightarrow a \times c < b \times c \ ; \ c < 0}$

أي أنه أذا ضرب طرفي متباينة صائبة بعدد حقيقي موجب فأن المتباينة الناتجة تبقى صائبة بنفس ترتيبها أما أذا ضرب طرفي المتراجحة بعدد حقيقي سالب فأن المتراجحة الناتجة لا تكون صائبـــــة ألا بعـــد عكـــس ترتيبـــها ((أي استبدال $>$ بــ $<$ وبالعكس)).

فمثلاً $15 > 8 \quad \Rightarrow \quad 15 \times 5 > 8 \times 5 \quad \Rightarrow \ 75 > 40$

بينما $10 > 6 \quad \Rightarrow 10 \times (-3) < 6 \times (-3) \quad \Rightarrow \quad -30 < -18$

4) $\boxed{a > b \ , \ b > c \ \Rightarrow a > c}$

فمثلاً $9 > 7 \ , \ 7 > 2 \ \Rightarrow 9 > 2$ كما أن $-3 > -10 \ , -10 > -50 \ \Rightarrow -3 > -50$

5) $\boxed{a > b \ , \ \ c > d \ \ \Rightarrow a + c > b + d}$

فمثلاً $7 > 5$ ، $3 > 1 \quad \Rightarrow 7 + 3 > 5 + 1 \quad \Rightarrow \quad 10 > 6$

كما أن $-1 > -5,\ \ 3 > -9 \quad \Rightarrow\ -1 + 3 > -5 + (-9) \quad \Rightarrow 2 > -14$

6) $\boxed{a > b \quad \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}}$ مختلفتان في الأشارة a, b

$\boxed{a > b \quad \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}}$ متفقتان في الأشارة a, b

فمثلاً : $6 > (-5) \Rightarrow \frac{1}{6} > \frac{-1}{5} \Rightarrow\ 7 > 5 \ \Rightarrow\ \frac{1}{7} < \frac{1}{5}$

7) $\boxed{a > 0 \ \ \Rightarrow\ \frac{1}{a} > 0\ , a < 0 \ \ \Rightarrow\ \frac{1}{a} < 0}$

أي أن مقلوب العدد الموجب يكون موجبا ، ومقلوب العدد السالب يكون سالباً فمثلاً :

$$6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{6} > 0\,, -3 < 0 \quad \Rightarrow \frac{-1}{3} < 0$$

(1-6-2) حل المتباينات (المتراجحات)

علمنا من دراستنا السابقة أن المتباينة جملة رياضية مفتوحة تشتمل على رموز التباين الاتية : ($\geq$ ، $>$ ، $\leq$ ، $<$) وأن حل المتباينة يعني إيجاد مجموعة الحل لها ، كما تعلمنا كيفية حل بعض المتباينات البسيطة من الدرجة الاولى بمتغير واحد. سنتعلم في هذا البند حل المتباينات من الدرجة الاولى بمتغير واحد المحتوية على القيمة المطلقة كما سنتعلم أيضاً حل ألمتباينات من الدرجة الثانية مستفيدين من خواص التباين التي تم ذكرها في البند السابق.

(1-6-2-1) حل المتباينات (المتراجحات) من الدرجة الاولى بمتغير واحد

مثال 24 جد مجموعة حل المتباينة $3 - 2x \leq 5$ ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد

ألحل : $3 - 2x \leq 5$

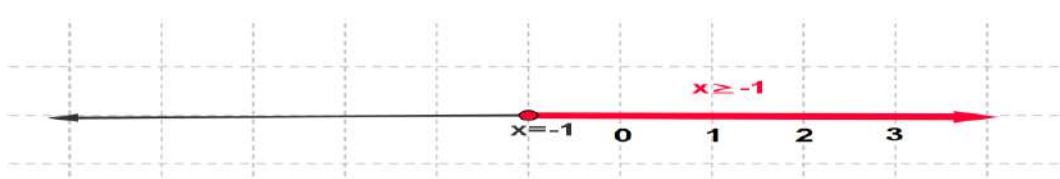
بإضافة العدد(-3) الى طرفي المتباينة نحصل على: -

$$(-3) + 3 - 2x \leq (-3) + 5 \Rightarrow\ -2x \leq 2$$

بضرب طرفي المتباينة بالعدد $\frac{-1}{2}$ نحصل على: $\quad x \geq -1$

$$S.s = \{x \in \mathbb{R}: x \geq -1\}$$

ويكون التمثيل البياني لمجموعة الحل كما مبين بالشكل 1-20 ادناه



الشكل (1-20)

جد مجموعة حل المتباينة $2 \leq 2x - 3 \leq 4-$ ومثل مجموعة الحل على خط الاعداد

الحل: $-2 \leq 2x - 3 \leq 4$

بأضافة العدد3 إلى المتباينة نحصل على:

$$-2 + 3 \leq 2x - 3 + 3 \leq 4 + 3$$

اي $1 \leq 2x \leq 7$

وبضرب المتباينة بالعدد $\frac{1}{2}$ نحصل على :

$$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}$$

$$S.s = \{x \in \mathbb{R}: \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}\}$$

ويكون التمثيل البياني لمجموعة الحل كما مبين بالشكل 1-21 ادناه

الشكل (1-21)

جد مجموعة حل المتباينة $|2 - 6x| \leq 8$ ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد

الحل :

$$|2 - 6x| \leq 8 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 6x \leq 8 & \forall x \leq \frac{1}{3} \\ -(2 - 6x) \leq 8 & \forall\, x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

1) $2 - 6x \leq 8 \quad \Rightarrow -6x \leq 6 \quad \Rightarrow \quad x \geq -1$

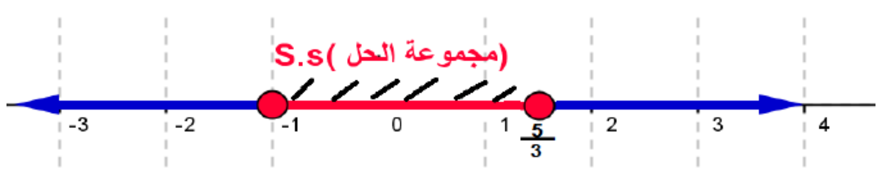
وفي الوقت نفسه لدينا $x \leq \frac{1}{3}$

2) $-(2 - 6x) \leq 8 \quad \Rightarrow \quad -2 + 6x \leq 8 \quad \Rightarrow \quad 6x \leq 10 \quad \Rightarrow x \leq \frac{5}{3}$

وفي الوقت نفسه لدينا $x > \frac{1}{3}$

$$S.s = \left\{x: x \in [-1, \frac{1}{3}\right\} \cup [\frac{1}{3}, \frac{5}{3}]\} = \left\{x \in \mathbb{R} :\ -1 \leq x \leq \frac{5}{3}\right\}$$

ويكون التمثيل البياني لمجموعة الحل كما مبين بالشكل 1-22 ادناه



الشكل (1-22)

مثال 27

جد مجموعة حل المتباينة $-3 \leq |x-1| < 6$ ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد.

الحل:

$$-3 \leq |x-1| < 6 = \begin{cases} -3 \leq (x-1) < 6 & \forall\, x \geq 1 \\ -3 \leq -(x-1) < 6 & \forall\, x < 1 \end{cases}$$

1) $-3 \leq (x-1) < 6 \quad \Rightarrow \quad -3+1 \leq x-1+1 < 6+1$

$-2 \leq x < 7 \qquad , \ x \geq 1$ وفي الوقت نفسه

$S.S_1 = \{x \in \mathbb{R}: -2 \leq x < 7\} = [-2,7)$

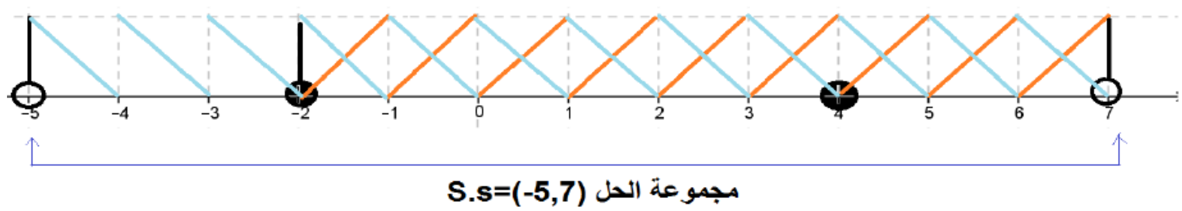
2) $-3 \leq -(x-1) < 6 \quad \Rightarrow -3 \leq -x+1 < 6$

$-3-1 \leq -x+1-1 < 6-1 \ \Rightarrow -4 \leq -x < 5 \quad \Rightarrow 4 \geq x > -5$

$-5 < x \leq 4 \qquad , \ x < 1$ وفي الوقت نفسه

$S.S_2 = \{x \in \mathbb{R}: -5 < x \leq 4\} = (-5,4]$

$\therefore S.s = [-2,7) \cup (-5,4] \Rightarrow \therefore S.s = (-5,7)$



الشكل (23-1)

(1-6-2-2) حل المتباينات (المتراجحات) من الدرجة الثانية بمتغير واحد بالصورة

$$x^2 \leq a^2 \text{ او } x^2 \geq a^2$$

مبرهنة: إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً

1. مجموعة حل المتباينة $x^2 \leq a^2$ هي الفترة المغلقة $[-a,+a]$
2. مجموعة حل المتباينة $x^2 < a^2$ هي الفترة المفتوحة $(-a,+a)$

نتيجة: -إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً فأن:

1. مجموعة حل المتباينة $x^2 \geq a^2$ هي الفترة المغلقة $\mathbb{R}/(-a,+a)$
2. مجموعة حل المتباينة $x^2 > a^2$ هي الفترة المفتوحة $\mathbb{R}/[-a,+a]$

مثال 28

(a) جد مجموعة حل المتباينة $x^2 \leq 16$

الحل: حيث ان المتباينة بالشكل $x^2 \leq a^2$ فان مجموعة حلها هي $[-a, +a]$

$$\therefore S.s = [-4, +4]$$

(b) جد مجموعة حل المتباينة $x^2 - 25 < 0$

الحل: - $x^2 - 25 < 0 \Rightarrow x^2 < 25$

حيث ان المتبايتة بالشكل $x^2 \leq a^2$ فان مجموعة حلها هي $(-a, +a)$

$$\therefore S.s = (-5, +5)$$

(c) جد مجموعة حل المتباينة $2x^2 > 18$

الحل: - $x^2 > \frac{18}{2} \Rightarrow x^2 > 9$

حيث ان المتباينة بالشكل $x^2 > a^2$ فان مجموعة حلها هي $\mathbb{R}/(-a, +a)$

$$\therefore S.s = \mathbb{R}/[-3, +3]$$

(d) جد مجموعة حل المتباينة $x^2 \geq 3$

الحل: - حيث ان المتباينة بالشكل $x^2 \geq a^2$ فان مجموعة حلها هي $\mathbb{R}/[-a, +a]$

$$\therefore S.s = \mathbb{R}/(-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$$

تمرين 4-1

1. جد مجموعة حلول كل من المتباينات الآتية:

$a)\ 2x + 8 \leq 0$ | $b)\ 3(y-1) + 5 \geq y + 2$

$c)\ \frac{3-z}{5} > 2z$ | $d)\ 3x - 1 > 7 - x$

$e)\ 2x^2 - 8 \leq 0$ | $f)\ x^2 \geq 49$

$g)\ 3x^2 - 27 > 0$ | $h)\ z^2 > 15$

$i)\ |x-2| < 5$ | $j)\ |4x+1| \geq -15$

$k)\ 7 > |2x+5| \geq 5$

2. المثلث ABC ليس قائم الزاوية وفيه $AB = 5cm\ , BC = 7cm$ جد العددين الذين يقع بينهما طول الضلع الثالث AC.

3. ما هو أكبر عدد صحيح سالب يمكن أضافته لحدي النسبة $\frac{6}{7}$ ليكون الناتج لا يزيد على $\frac{14}{17}$ ؟

4. عدد طبيعي قيمة خمسة أمثاله مطروحاً منها 3 محصورة بين العددين 12، 2 فما هو العدد؟

1. جد مجموعة الحل للنظام المؤلف من المعادلتين الاتيتين في $\mathbb{R}$ تحليلياً وبيانياً

$$2x + 3y = 1$$
$$3x - 2y = 21$$

2. جد مجموعة الحل لكل من المعادلتين الاتيتين في $\mathbb{R}$

1) $0.05x + 0.2.5(30 - x) = 3.3$ 2) $\frac{5x}{3} + \frac{4+x}{2} = \frac{x-2}{4} + 1$

3. جد مجموعة الحل لكل من المعادلات الاتية في $\mathbb{R}$

1) $2x^2 - 7 = 0$ 2) $2x^2 = 4x$ 3) $2x^2 = 7x - 3$

4) $m^2 + m = 0$ 5) $y^2 = \frac{3}{2}(y+1)$ 6) $\sqrt{5x-6} - x = 0$

7) $\frac{7}{2-x} = \frac{10-4x}{x^2+3x+10}$ 8) $\frac{u-3}{2u-2} = \frac{1}{6} - \frac{1-u}{3u-3}$

9) $|x-2| = 2x - 7$ 10) $|x+4| = 3x - 8$

4. جد مجموعة حل المتباينات الاتية في $\mathbb{R}$ ثم مثلهما على خط الاعداد

1) $3(2-x) - 2 \leq 2x - 1$ 2) $|y+9| < 9$

3) $|3-2x| \leq 5$ 4) $\frac{x+3}{8} \leq 5 - \frac{2-x}{3}$

5.جد المعادلة التربيعية التي جذريها العددين $6 , -2$

6. إذا كان العدد 4 هو أحد جذري المعادلة $2x^2 - kx + 24 = 0$ فما قيمة k وما هو الجذر الاخر؟

7. في تفاعل كيمياوي يراد ضبط درجة حرارة التفاعل (T) بحيث لا تزيد على $200°\,C$ ولا تقل عن $10°\,C$عبر عن ذلك بصيغة الفترات ثم عبر عنه مرة أخرى بصيغة متباينة تحتوي القيمة المطلقة.

8. أراد طالب ان يصمم أطاراً للوحة فنية بوضع حواشي ملونة على ورقة كارتونية مستطيلة بطول $2\ cm$ على حوافها الأربعة فاذا كانت مساحة الورقة الكارتونية $480\ cm^2$ والمساحة المخصصة للكتابـة $320\ cm^2$. جد ابعاد الورقة الكارتونية المستطيلة.

9. يستخدم رجل الواحاً خشبية متساوية في الطول طول كل منها $2\sqrt{2}\ m$ لتصميم احواض على شكل مثلث متساوي الساقين على طول جدار مبنى منزله (كما موضح في الشكل المجاور) يتم زراعتها بالزهور الموسمية ، فإذا كانت مساحة كل حوض مثلث هي $4\ m^2$ أحسب طول قاعدة المثلث.

الفصل الثاني
الدوال الحقيقية
$(Real\ Functions)$

البنود (Sections)

1-2	تمهيد
2-2	مفهوم الدالة
3-2	بعض أنواع الدوال
4-2	مجال الدالة ومداها
1-4-2	أوسع مجال للدالة
2-4-2	المدى
5-2	التمثيل البياني للدالة
6-2	جبر الدوال

Vocabulary	الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
For each	$\forall$	لكل
There exist	$\exists$	يوجد على الاقل
Belong	$\in$	ينتمي
Such that	$\ni$	بحيث
Real numbers	$\mathbb{R}$	مجموعة الاعداد الحقيقية
Integers	$\mathbb{Z}$	مجموعة الاعداد الصحيحة
Exept	$/$	ما عدا
Function	$f(x)$	الدالة
Domain of f	D_f	مجال الدالة f
Horizontar axis	$\mathrm{X-axis}$	المحور الافقي
Vertical axis	$\mathrm{Y-axis}$	المحور العمودي

الفصل الثاني
الدوال الحقيقية
$(\boldsymbol{Real\ Functions})$

1-2 تمهيد Preface:

عندما يجري الاستاذ امتحاناً للطلبة فأنه يعطي استحقاق الطالب من الدرجات حسب إجابته، فيقول على سبيل المثال استحق زيد (65) واستحق رياض (90) واستحق احمد (74) الخ.

نلاحظ إن القاعدة التي استند عليها الأستاذ في إعطاء الدرجات هي تصحيح الورقة الامتحانية. ونقول نحن في الرياضيات قد صنع الأستاذ (دالة) بين مجموعة الطلبة من جهة والأعداد الحقيقية من جهة أخرى.

فلو رمزنا لمجموعة الطلبة A ورمزنا لمجموعة الدرجات B فإن الأستاذ قام بالتوزيع بالشكل التالي: -

A	B
زيد	65
رياض	90
احمد	74

ويمكن ان يكتب بشكل أزواج مرتبة:

(65، زيد)، (90، رياض)، (74، احمد) ونلاحظ إن الأزواج المرتبة هي مجموعة جزئية من A×B.

وإن كل عنصر في A يقابله عنصر واحد فقط من المجموعة B ومن ذلك يمكن ملاحظة إن الدالة نوع خاص من العلاقات.

2-2 مفهوم الدالة The Concept Of The Function

إن كان لدينا مجموعتين غير خاليتين وكان كل عنصر من المجموعة الأولى يقترن بعنصر واحد فقط من المجموعة الأخرى فإن القاعدة التي تم على أساسها أجراء هذه المقابلة تسمى دالة.

ويعبّر عن الدالة بالشكل الرياضي الاتي: -

$$\boxed{f: A \rightarrow B : \forall x \in A \ \exists\ y \in B \ \ni (x, y) \in f, y = f(x)}$$

ويسمى المتغير y الذي تعتمد قيمته على قيمة x متغير غير مستقل (معتمد). في حين يسمى x متغيراً مستقلاً.

ويتضح مما تقدم إن للدالة ثلاثة عناصر هي: -

1- المجال (The Domain) وتمثله المجموعة الأولى A حيث $x \in A$.

2- المجال المقابل (The Codomain) وتمثله المجموعة الثانية B حيث $y \in B$.

3- قاعدة الاقتران (Mapping Rule) وهي العلاقة التي تربط كل عنصر من مجموعة المجال A مع عنصر واحد فقط من مجموعة المجال المقابل B، وتسمى الدالة (دالة حقيقية) إذ كان كل من مجموعة المجال ومجموعة المجال المقابل فيها مجموعتين غير خاليتين جزئيتين من مجموعة الأعداد الحقيقية.($\mathbb{R}$)

وتحتوي كل دالة على بيان الدالة ومداها ويقصد بهما: -

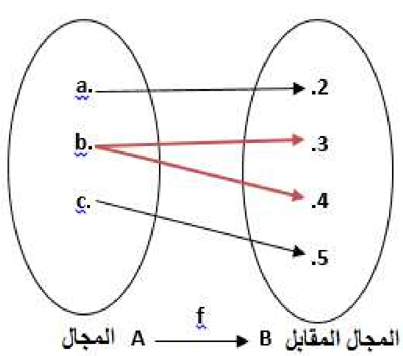
1) بيان الدالة: هي مجموعة الأزواج المرتبة (x,y) الناتجة بتأثير الدالة f ويعبر عنها بالشكل

$$f : \{ (x,y);\ y = f(x); x \in A, y \in B\}$$

2) المدى: هي مجموعة عناصر مجموعة المجال المقابل التي تمثل صوراً لعناصر المجال وفق الدالة f.

فكرة المثال الاتي: وجود عنصر في المجال له صورتان في المجال المقابل (علاقة وليست دالة)

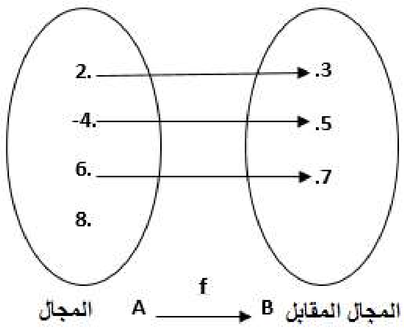
مثال 1 في المخطط السهمي 2-1 f لا تمثل دالة لأن العنصر (b) في مجموعة المجال $A = \{a,b,c\}$ يقترن بعنصرين من مجموعة المجال المقابل $B = \{2,3,4,5\}$ وهما العنصران { 3, 4 } وهذا مخالف لتعريف الدالة.



الشكل 2-1

فكرة المثال الاتي: وجود عنصر في المجال ليس له صورة في المجال المقابل (علاقة وليست دالة)

في المخطط السهمي 2-2 f لا تمثل دالة لأن العنصر (8) في مجموعة المجال $A = \{2, -4,6,8\}$ لايقترن بأي عنصر من عناصر المجال المقابل ، ولا يوجد عنصر في المجال له أكثر من صورة في المجال.

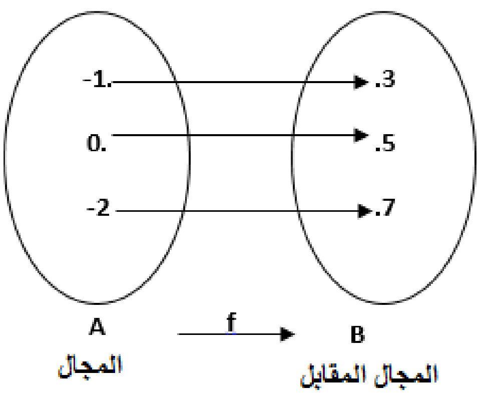


الشكل 2-2

فكرة المثال الاتي: الشرطين اللازمين لتكون العلاقة دالة

في المخطط السهمي 2-3، f تمثل دالة لأن:

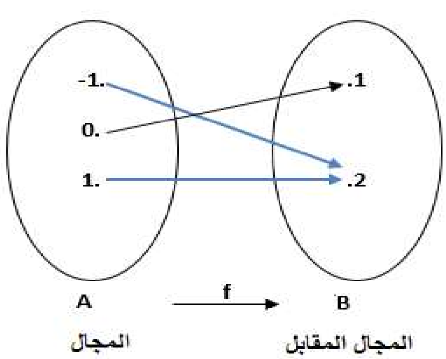
1-كل عنصر في المجال يقابله عنصر من المجال المقابل
2-لا يوجد عنصر في المجال له أكثر من صورة في المجال المقابل يمكن تمثيل الدالة بطريقة الأزواج المرتبة كالاتي
$\{(-1,3), (0,5), (-2,8)\}$



الشكل 2-3

فكرة المثال الاتي: يمكن ان تشترك عناصر المجال بنفس الصورة من عناصر المجال المقابل

في المخطط السهمي 2-4، f تمثل دالة لأن كل عنصر من مجموعة المجال $A = \{-1,0,1\}$ له صورة واحدة في مجموعة المجال المقابل $B = \{1,2\}$ ولا يوجد عنصر في المجال له أكثر من صورة في المجال المقابل.



الشكل 2-4

فكرة المثال الاتي: إيجاد بيان ومدى الدالة ومخططها السهمي من قاعدة الاقتران

اذا كان $A = \{0,2,4\}$ ، $B = \{2,4,6\}$ وكان :

$$f: A \to B: y = f(x) = x + 2$$

جد: 1) بيان الدالة 2) مدى الدالة 3) مخططها السهمي

الحل:

نكتب قاعدة اقتران الدالة المعطاة $y = f(x) = x + 2$

نعوض بالدالة قيم مجال الدالة وهي عناصر المجموعة A

$$y = f(0) = 0 + 2 = 2$$
$$y = f(2) = 2 + 2 = 4$$
$$y = f(4) = 4 + 2 = 6$$

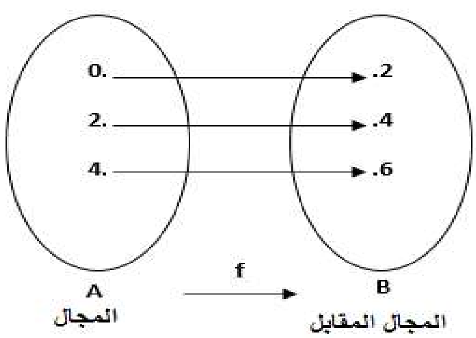
1) بيان الدالة: هو مجموعة الأزواج المرتبة (عنصر، صورته) وكالاتي:

$$\{(0,2), (2,4), (4,6)\}$$

2) المدى: هو مجموعة الصور لكل عناصر المجال أي

ان المدى: $\{2,4,6\}$

3) المخطط السهمي: نرسم شكلين (فليكونا بيضويين) ونكتب قيم المجموعتين في الشكلين ونوصل بين كل عنصر من المجال مع صورته في المجال المقابل بسهم.



الشكل 5-2

فكرة المثال الاتي: إيجاد بيان ومدى الدالة ومخططها السهمي من قاعدة الاقتران

إذا كان $X = \{-2, -1, 0, 2, 3\}$ ، $Y = \{-1, 1, 17, 7\}$ وكان

$$f: X \to Y: y = f(x) = 2x^2 - 1$$

1 جد: 1) بيان الدالة 2) مدى الدالة 3) مخططها السهمي

الحل:

نكتب الدالة المعطاة $y = f(x) = 2x^2 - 1$

نعوض بالدالة قيم مجال الدالة وهي عناصر المجموعة A

$y = f(-2) = 2(-2)^2 - 1 = 2(4) - 1 = 8 - 1 = 7$

$y = f(-1) = 2(-1)^2 - 1 = 2(1) - 1 = 2 - 1 = 1$

$y = f(0) = 2(0)^2 - 1 = 2(0) - 1 = -1$

$y = f(2) = 2(2)^2 - 1 = 2(4) - 1 = 8 - 1 = 7$

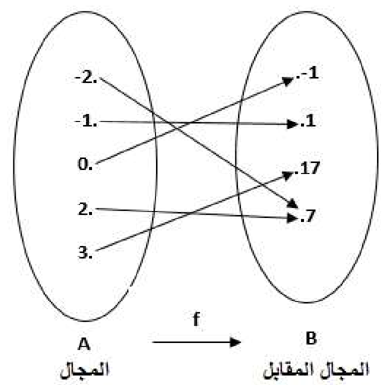
$y = f(3) = 2(3)^2 - 1 = 2(9) - 1 = 18 - 1 = 17$

1- بيان الدالة: هو مجموعة الأزواج المرتبة (عنصر، صورته) وكالاتي: -

$$\{(-2,7), (-1,1), (0,-1), (2,7), (3,17)\}$$

2- مدى الدالة: هو مجموعة الصور لكل عناصر المجال أي ان المدى هو $\{1, -1, 7, 17\}$

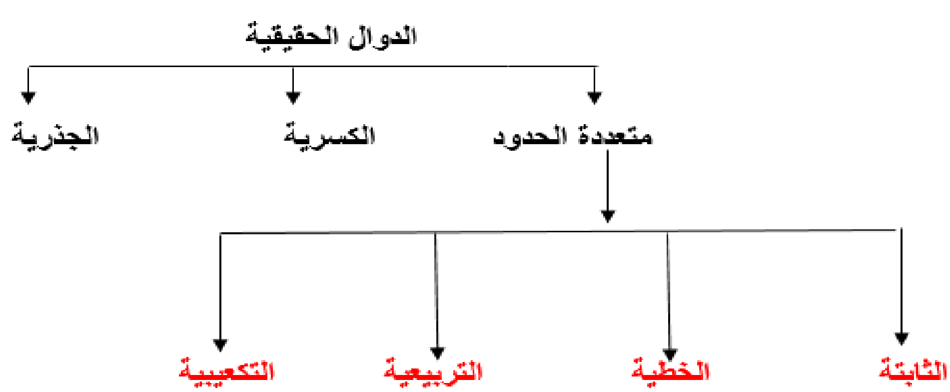
3-المخطط السهمي:



الشكل 2-6

(2-3) بعض أنواع الدوال Some Types Of The Function:

إن الدوال التي سندرسها في هذا الفصل هي الدوال الحقيقية ومنها (الثابتة، الخطية، التربيعية، التكعيبية، الجذرية). ولدراسة هذه الدوال يجب التعرف عليها وعلى أشكالها. وفيما يأتي مخطط يوضح الدوال التي سنتناولها في هذا الفصل:



أولاً) الدوال متعددة الحدود: وهي الدوال المعرفة بالشكل

$$y = f(x) = a_n\, x^{n} + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$$

$$a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0, n \in \mathbb{Z}^{+}$$

ويمكن تصنيفها إلى الصيغ الرياضية الأتية:

1- الدوال الثابتة: وهي الدالة التي تكون صيغتها العامة كالاتي:

$$y = f(x) = a, a \in \mathbb{R}$$

مثل:

$$f(x) = 2 \ \ ,\ \ f(x) = \frac{-1}{3}\ , \quad g(x) = \frac{3}{4}$$

2- الدوال الخطية: وهي الدالة التي تكون صيغتها العامة كالاتي:

$$y = f(x) = a_1\, x + a_0 \ \ ,\ \ a_0 \in \mathbb{R}\ \ , a_1 \neq 0$$

مثل:

$$g(x) = 2x - \frac{1}{3}\ ,\ \ f(x) = 3x - 5\ , \qquad f(x) = x$$

3- الدوال التربيعية: وهي الدالة التي تكون صيغتها العامة كالاتي:

$$y = f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \qquad a_0\,, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0$$

مثل: $h(x) = 3x^2 + 5\ ,\ g(x) = x^2 - x + 3\ \ , f(x) = 2x^2$

4- الدوال التكعيبية: وهي الدالة التي تكون صيغتها العامة كالاتي:

$$y = f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \qquad a_0, a_1\,, a_2, a_3 \in \mathbb{R}, a_3 \neq 0$$

مثل: - $y = f(x) = 7x^3 + 5x^2 - 4x + 9$

ثانياً) الدوال الكسرية: وهي الدوال التي تحتوي مقاديرا جبرية في بسط ومقام الكسر:

مثل :

$$f(x) = \frac{8}{x-2} \quad , \quad g(x) = \frac{x-1}{x+23}, \quad h(x) = \frac{x^2}{2-x}$$

ثالثاً) الدوال الجذرية: وهي الدوال التي تحتوي مقاديرا جبرية موضوعة تحت الجذر: -

مثل: $f(x) = \sqrt[5]{x^2+9} \quad , \quad g(x) = \sqrt[3]{2x^2+x} \ \ , \quad h(x) = \sqrt[2]{x-2}$

4-2 مجال الدالة ومداها (Domain and Range Of The Function)

1-4-2 أوسع مجال للدالة (Domain)

لإيجاد أوسع مجال للدالة نعتمد على طبيعة الدالة وخصائصها:

اولاً) الدوال متعددة الحدود (الثابتة – الخطية – التربيعية – التكعيبية)

ويكون أوسع مجال للدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، لأنه عند تعويض أي عدد حقيقي في تلك الدوال يكون الناتج أعدادا حقيقية أيضا.

فكرة المثال الاتي: الدوال متعددة الحدود (الثابتة – الخطية – التربيعية – التكعيبية) يكون أوسع مجال لها هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

جد أوسع مجال للدوال الآتية:

1) $f(x) = -5$

2) $f(x) = 2x + 3$

3) $f(x) = x^2 + x + 3$

4) $f(x) = x^3 - 2$

5) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{2}{5}$

الحل:

1) $f(x) = -5$

الدالة ثابتة لذلك فان أوسع مجال لها هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

2) $f(x) = 2x + 3$

الدالة خطية لذا فان أوسع مجال لها هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

3) $f(x) = x^2 + x + 3$

الدالة متعددة حدود من الدرجة الثانية لذا فان أوسع مجال لها هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

4) $f(x) = x^3 - 2$

الدالة متعددة حدود من الدرجة الثالثة لذلك فان أوسع مجال لها هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

5) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{2}{5}$

الدالة متعددة حدود من الدرجة الثالثة لذلك فان أوسع مجال لها هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

ثانياً) الدوال الكسرية: ان اوسع مجال الدالة الكسرية هو: $\mathbb{R}$ ما عدا قيم xالتي تجعل المقام يساوي صفراً

فكرة المثال الاتي: التعرف على طريقة إيجاد أوسع مجال لدالة كسرية.

مثال 8 جد أوسع مجال للدالة لكل من الدوال الآتية:

$$1)\ f(x)=\frac{1}{x-3}$$

$$2)\ f(x)=\frac{2x}{4-x}$$

$$3) f(x)=\frac{x+3}{x^2-9}$$

$$4) f(x)=\frac{x-13}{x^2-5x-6}$$

الحل:

$$1) f(x)=\frac{1}{x-3}$$

$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$

أي ان أوسع مجال للدالة هو: $\{x \in \mathbb{R}/3\}$

$$2)\ f(x)=\frac{2x}{4-x}$$

$$4-x\ =0 \Rightarrow x=4$$

أي ان أوسع مجال للدالة هو: $\{x \in \mathbb{R}/4\}$

$$3)\ f(x)=\frac{x+3}{x^2-9}$$

$$x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm 3$$

أي ان أوسع مجال للدالة هو: $\{x \in \mathbb{R}/\pm 3\}$

$$4)\ f(x)=\frac{x-13}{x^2-5x-6}$$

$$x^2-5x-6=0 \Rightarrow (x-3)(x-2)=0$$

اما$(x-3)=0 \Rightarrow x=3 \quad ,$ او $(x-2)=0 \Rightarrow x=2$

أي ان أوسع مجال للدالة هو$\mathbb{R}/\{2,3\}$.

ثالثا) الدوال الجذرية: -لإيجاد مجال الدالة الجذرية نعتمد على دليل الجذر وكما يأتي: -

1. إذا كان دليل الجذر فردياً أي $\sqrt[3]{x}, \sqrt[5]{x}, \sqrt[7]{x} \dots \dots$ فإن أوسع مجال للدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$
2. إذا كان دليل الجذر زوجياً أي $\sqrt{x}, \sqrt[4]{x}, \sqrt[6]{x}$ فإن أوسع مجال للدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا القيم التي تجعل المقدار الجبري داخل الجذر مقداراً سالباً.

فكرة المثال الاتي: في الدوال الجذرية إذا كان دليل الجذر فرديا فان أوسع مجال للدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، أما اذا كان الدليل زوجياً فأننا نجعل ما بداخل الجذر اكبر او يساوي صفرا ونبسط المتراجحة الناتجة لنحصل على المجموعة التي تمثل أوسع مجال للدالة.

جد أوسع مجال للدالة لكل من الدوال الآتية:

1) $f(x) = \sqrt{x-3}$

2) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+2}$

3) $f(x) = \sqrt[4]{4-x^2}$

4) $f(x) = \sqrt[5]{2x-5}$

5) $f(x) = \sqrt[6]{x^2-9}$

الحل:

1) $f(x) = \sqrt{x-3}$

حيث ان دليل الجذر زوجي فإننا نجعل المقدار الذي بداخل الجذر أكبر أو يساوي صفر (أي قيماً غير سالبة فقط) أي: $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$

أي ان أوسع مجال للدالة هو: $\{x \in \mathbb{R}, x \geq 3\}$

2) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+2}$

بما إن الجذر دليله فردي فإن أوسع مجال للدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

3) $f(x) = \sqrt[4]{4-x^2}$

بما ان الجذر دليله زوجي لذلك يجب جعل المقدار الذي بداخل الجذر أكبر أو يساوي صفراً .

$$4-x^2 \geq 0 \Rightarrow \quad -x^2 \geq -4$$

نضرب المتراجحة بالعدد (-1) ونلاحظ تغير علامة التباين بسبب الضرب بعدد سالب

$$x^2 \leq 4 \Rightarrow \quad x^2 \leq 2^2$$

وباستخدام المبرهنة الأتية التي درستها في الفصل الثاني:

إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً فأن مجموعة حل المتباينة $x^2 \leq a^2$ هي الفترة المغلقة $[-a, +a]$

لذلك يكون أوسع مجال للدالة هو $[-2, +2]$.

$4)\ f(x) = \sqrt[5]{2x-5}$

بما ان الجذر دليله فردي فان أوسع مجال للدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

$5)\ f(x) = \sqrt[6]{x^2-9}$

بما ان الجذر دليله زوجي لذلك نجعل المقدار الذي بداخل الجذر أكبر أو يساوي صفراً

$$x^2 - 9 \geq 0$$
$$x^2 \geq 9$$
$$x^2 \geq 3^2$$

وباستخدام النتيجة الأتية التي درستها في الفصل الثاني:

أذا كان a عدداً حقيقياً موجباً فأن مجموعة حل المتباينة $x^2 \geq a^2$ هي المجموعة $\mathbb{R}/(-a,a)$

لذلك يكون أوسع مجال للدالة هو $\mathbb{R}/(-3,3)$.

2-4-2 المــدى (Rang)

مما سبق يتبين لنا إن مدى الدالة هي مجموعة صور جميع عناصر المجال وتكون مجموعة جزئية من مجموعة المجال المقابل للدالة. أي إن المدى هو مجموعة عناصر المتغير المعتمد (y) والناتجة من تأثير المتغير المستقل(x) في الدالة. ولغرض إيجاد المدى بصورة مبسطة سنعتمد على طبيعة وشكل الدالة.

1) الدالة الثابتة: والتي صيغتها العامة هي: $y = f(x) = a$ يكون مداها هو $\{a\}$.

2) الدالة الخطية: والتي صيغتها العامة هي: $y = f(x) = a\,x + b \ \in \mathbb{R}, a \neq 0$

يكون مداها هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ لأنه كلما طبقت الدالة على عدد حقيقي سواء أكان سالباً أم موجباً، يكون الناتج عدداً حقيقياً أيضاً.

3) الدالة التربيعية: والتي صيغتها العامة هي $y: f(x) = ax^2 + b\ ; a,b \in \mathbb{R}, a \neq 0$

لاحظ إنه هذه الدالة تتميز بوجود المعامل للمتغير x وهو (a) وهذا يؤثر على سلوك الدالة.
لذلك لإيجاد المدى نحول الدالة من دالة بالمتغير(x) الى دالة بالمتغير $(\,y\,)$ أي إيجاد المتغير x بدلالة المتغير y فنحصل على دالة جديدة ذات جذر تربيعي فنختبر سلوك هذه الدالة ونحصل على المدى لها .

4) الدالة التكعيبية: التي صيغتها العامة هي $y = f(x) = ax^3 + b\ ;\ a,b \in \mathbb{R}; a \neq 0$

يكون المدى لها هو كل مجموعة الأعداد الحقيقية.

5) الدالة الجذرية ذات الدليل الزوجي: لإيجاد المدى اتبع الخطوات الأتية:

1. جد أوسع مجال للدالة
2. عوض القيم (من أوسع مجال) في قاعدة اقتران الدالة مبتدئاً من الحدود الدنيا للفترة واضف لها قيماً من داخل الفترة ليتضح لك سلوك الدالة عندما تتزايد أو تتناقص القيم التي نعوضها فيها ومن هذا الاستنتاج نتوصل إلى معرفة المدى كالاتي:

- اذا كانت الدالة الجذرية بدليل زوجي ومتزايدة يكون مداها $[a,\infty)$ حيث a هي القيمة التي تجعل $f(x)$يساوي صفر.
- إذا كانت الدالة الجذرية بدليل زوجي ومتناقصة يكون مداها $(-\infty, a]$ حيث a هي القيمة التي تجعل $f(x)$يساوي صفر.

6) الدالة الجذرية ذات الدليل الفردي يكون مداها هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية لأنه كلما طبقت الدالة على عدد حقيقي سواء أكان سالباً أم موجباً، يكون الناتج عدداً حقيقياً أيضاً.

فكرة المثال الاتي: إذا كانت الدالة الجذرية بدليل زوجي ومتزايدة يكون مداها $[a,\infty)$ حيث a هي القيمة التي تجعل $f(x)$ يساوي صفر.

مثال 10 جد المدى للدالة $f(x)=\sqrt{x^3-8}$

الحل: 1) نجد أوسع مجال كالاتي:

$$x^3-8\geq 0\Rightarrow x\geq 2\ \Rightarrow \mathrm{D}=[2,\infty)$$

2) نعوض قيماً تنتمي للفترة $[2,\infty)$ في قاعدة اقتران الدالة ولتكن $x=2,3$ مثلاً

$$f(2)=\sqrt{2^3-8}=\sqrt{8-8}=0$$

$$f(3)=\sqrt{3^3-8}=\sqrt{27-8}=\sqrt{19}$$

نلاحظ ان قيمة الدالة تزايدت عند زيادة قيمة x ولذلك فان المدى هو الفترة $[0,\infty)$ والتي يمكن ان نعبر عنها بالصيغة الاتية $\{y\in\mathbb{R}: y\geq 0\}$.

فكرة المثال الاتي: إذا كانت الدالة الجذرية بدليل زوجي ومتناقصة يكون مداها $(-\infty,a]$ حيث a هي القيمة التي تجعل $f(x)$ يساوي صفر.

مثال 11 جد المدى للدالة $f(x)=\ -\sqrt{x+4}$

الحل: 1) نجد أوسع مجال كالاتي:

$$x+4\geq 0\Rightarrow x\geq -4\ \Rightarrow \mathrm{D}=[-4,\infty)$$

2) نعوض قيماً تنتمي للفترة $[-4,\infty)$ في قاعدة اقتران الدالة ولتكن $x=-4,0,5$ مثلاً

$$f(-4)=\ -\sqrt{-4+4}=0$$

$$f(0)=\ -\sqrt{0+4}=-2$$

$$f(5)=\ -\sqrt{5+4}=\ -3=-3$$

نلاحظ ان قيمة الدالة تناقصت عند زيادة قيمة x ولذلك فان المدى هو الفترة $(-\infty,4]$ والتي يمكن ان نعبر عنها بالصيغة الأتية $\{y\in\mathbb{R}: y\leq 4\}$.

فكرة المثال الاتي: إذا كانت الدالة الجذرية بدليل فردي يكون مداها $\mathbb{R}=[-\infty,\infty)$

مثال 12 جد المدى للدالة $f(x)=\ \sqrt[3]{2x^2-5x+7}$

الحل: المدى $\mathbb{R}=[-\infty,\infty)$ لان دليل الجذر فردي

فكرة المثال الاتي: إيجاد المدى لأنواع مختلفة من الدوال

مثال 13 جد المدى لكل من الدوال الأتية:

1) $f(x)\ =-\ 7$ 2) $f(x)\ =x\ +\ 1$ 3) $f(x)\ =\ 3x-\ 4$

4) $f(x)\ =\ x^2-\ 1$ 5) $f(x)\ =\ 3x^2\ +\ 6$ 6) $f(x)\ =x^3-\ 2$

7) $f(x)=\ -3\sqrt{x}$ 8) $f(x)\ =\ \sqrt{x^2-\ 4}$ 9) $y=\sqrt{16-x^2}$

الحل:

1) $f(x) = -7$

الدالة ثابتة لذلك يكون المدى: $\{y \in \mathbb{R} ; y = -7\}$

2) $f(x) = x + 1$

الدالة خطية لذلك يكون المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

3) $f(x) = 3x - 4$

الدالة خطية لذلك يكون المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

4) $f(x) = x^2 - 1$

الدالة تربيعية ولذلك لا بد من اتباع الخطوات الأتية:

$$y = x^2 - 1 \Longrightarrow x^2 = y + 1$$

نستخرج بدلالة y فنحصل على

$$x = \pm\sqrt{y + 1}$$

الأن نجعل ما بداخل الجذر أكبر أو يساوي صفراً أي:

$$y + 1 \geq 0$$

$$y \geq -1 \Rightarrow \{y \in \mathbb{R} ; y \geq -1\}$$ المدى

5) $f(x) = 3x^2 + 6$

$$y = 3x^2 + 6$$

$$3x^2 = y - 6$$

بقسمة المعادلة على 3 نحصل على

$$x^2 = \frac{1}{3}y - 2$$

وبجذر الطرفين (لكي نحصل على x بدلالة y) نتوصل الى

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}y - 2}$$

الأن نجعل ما بداخل الجذر أكبر أو يساوي صفراً أي:

$$\frac{1}{3}y - 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{3}y \geq 2$$

نضرب الطرفين بالعدد (3) فنحصل على $y \geq 6$

فيكون المدى: $\{y \in \mathbb{R}; y \geq 6\}$

6) $f(x) = x^3 - 2$

الدالة تكعيبية لذلك فإن المدى يكون مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

7) $f(x) = -3\sqrt{x}$

الدالة جذرية لذلك نتبع الخطوات الأتية:

$$x \geq 0 \Rightarrow \mathrm{D} = [0, \infty)$$
$$f(0) = \sqrt{0} = 0$$
$$f(4) = \sqrt{4} = -6$$

نلاحظ ان قيمة الدالة تناقصت عند زيادة قيمة x ولذلك فان المدى هو الفترة $(-\infty, 0]$ والتي يمكن ان نعبر عنها بالصيغة الاتية : $\{y \in \mathbb{R} : y \leq 0\}$

8) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

الدالة جذرية لذلك نتبع الخطوات الأتية:

$$x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 2^2 \Rightarrow \mathrm{D} = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 2, x \leq -2\} = \mathbb{R}/(-2,2)$$

نختار قيماً للمتغير x تنتمي إلى المجال ولتكن $-3, -2, 2{,}3$

$$f(-3) = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$
$$f(-2) = \sqrt{4-4} = 0$$
$$f(2) = \sqrt{4-4} = 0$$
$$f(3) = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

نلاحظ ان الدالة تأخذ قيمة الصفر عند حدود الفترة $[-2,2]$ وتتزايد قيمتها عند زيادة قيمة المتغير x وتتزايد قيمتها ايضاً عند تناقص قيمة المتغير x ولذلك فان المدى هو الفترة $[0, \infty)$ والتي يمكن ان نعبر عنها بالصيغة الاتية $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$

9) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

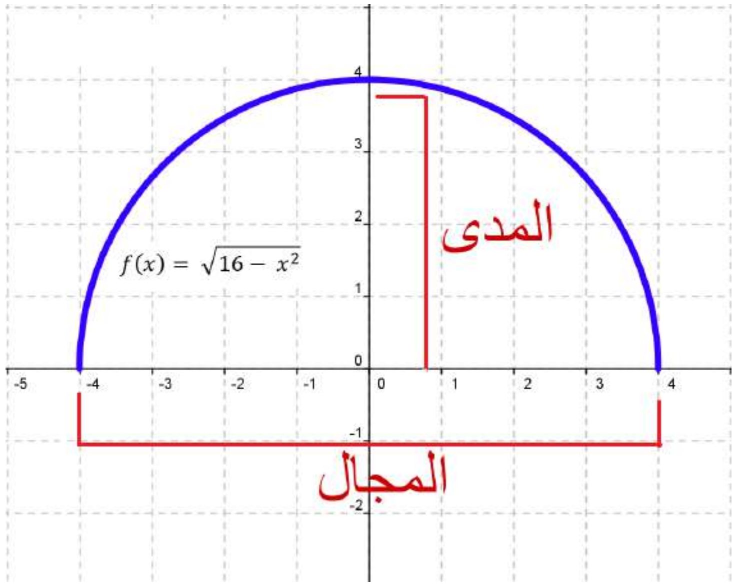
الدالة جذرية لذلك نتبع الخطوات الأتية:

$$16 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4^2 \Rightarrow \mathrm{D} = \{x \in \mathbb{R}: -4 \leq x \leq 4\} = [-4,4]$$

نختار قيماً للمتغير x تنتمي إلى المجال ولتكن $-4, -3{,}0, 3{,}4$

$$f(-4) = \sqrt{16 - 16} = 0$$
$$f(-3) = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7} = 2.6$$
$$f(-2) = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$
$$f(0) = \sqrt{16 - 0} = 4$$
$$f(1) = \sqrt{16 - 1} = \sqrt{15} = 3.87$$
$$f(4) = \sqrt{16 - 16} = 0$$

نلاحظ ان الدالة أخذت اعلى قيمة لها عند $x = 0$ وهي $y = 4$ثم بدأت بالتناقص وعادت إلى قيمة $y = 0$ عند $x = 4$ ، و $x = -4$ وهي حدود فترة مجالها وعليه فان المدى لهذه الدالة هو الفترة $[0{,}4]$ والتي يمكن ان نعبر عنها بالصيغة الاتية $\{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 4\}$ ويتضح ذلك جلياً في المخطط البياني للدالة وكما في الشكل 2-7 الاتي



الشكل 2-7

تمرين 1-2

اولاً) جد أوسع مجال لكل الدوال التالية:

$1) f(x) = -\frac{2}{5}$

$2) f(x) = 3x^2 - 2x + 6$

$3) f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}1$

$4) f(x) = \frac{2x-5}{3x-9}$

$5)9) f(x) = \frac{6x-7}{x^2-25}$

$6) f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-x-6}$

$7) f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$

$8) f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

$9) f(x) = \frac{2x}{x^2 + 25}$

$10) f(x) = \sqrt{1 - 3x}$

ثانياً) جد المدى لكل من الدوال التالية:

$1) f(x) = 5$

$2) f(x) = 2x + 4$

$3) f(x) = 1 - x^2$

$4) f(x) = \sqrt{4x - 1}$

$5) f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

$6) f(x) = 2x^3 + 7$

$7) f(x) = \sqrt[3]{8x - 1}$

$8) f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 16}$

5-2 التمثيل البياني للدالة Graphical representation of the function:

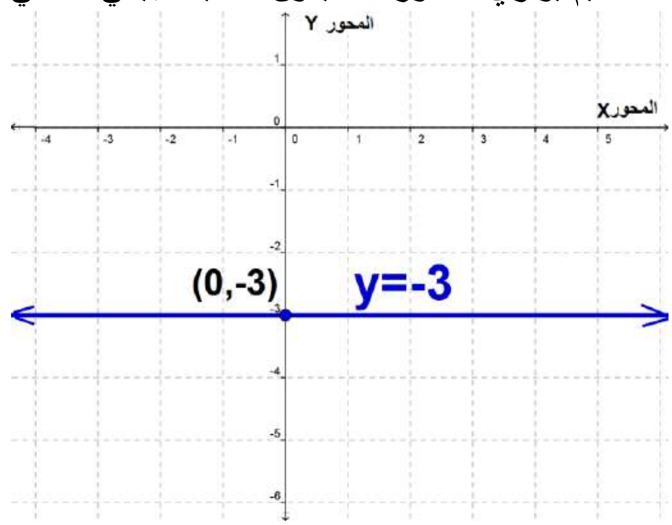
1- الدوال الثابتة: والتي صيغتها العامة $y = f(x) = a, a \in \mathbb{R}$

لرسم هذه الدالة نرسم خط مستقيم من النقطة $(0, a)$ يوازي المحور x .

فكرة السؤال الاتي: يكفي لرسم الدالة الثابتة تحديد نقطة واحدة يمرر منها مستقيم يوازي المحور x

مثل الدالة $f(x) = -3$ بيانياً

الحل: نرسم المحورين الإحداثيين $x - axis, y - axis$ ثم نحدد النقطة $(0, -3)$ على المحور y ونمرر منها مستقيم يوازي المحور x فيكون التمثيل البياني كما في الشكل 2-8 أدناه



الشكل 2-8

2-الدوال الخطية: وهي الدوال التي بالصيغة:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: y = f(x) = ax + b: a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0:$$

والتمثيل البياني لهذه الدالة هو خط مستقيم لذلك سميت بالدالة الخطية. ويكفي للحصول عليه وجود نقطتين لأن الخط المستقيم يمكن رسمه بالتوصيل بين نقطتين من نقاطه. وقد اعتاد الرياضيون ان يستخرجوا نقطتي تقاطع المستقيم مع المحورين الإحداثيين وكالاتي:

1) مع المحور x وذلك بتعويض $(y = 0)$

2) مع المحور y وذلك بتعويض $(x = 0)$

فكرة المثال الاتي: لرسم الدوال الخطية لابد من إيجاد نقطتي التقاطع مع المحورين الإحداثيين المتعامدين

مثل الدالة الخطية الأتية بيانياً $y = f(x) = 2x - 7$

الحل: أولا) نستخرج نقطة التقاطع مع المحور y بتعويض $x = 0$ بالدالة

$$y = f(0) = 2(0) - 7 = -7$$

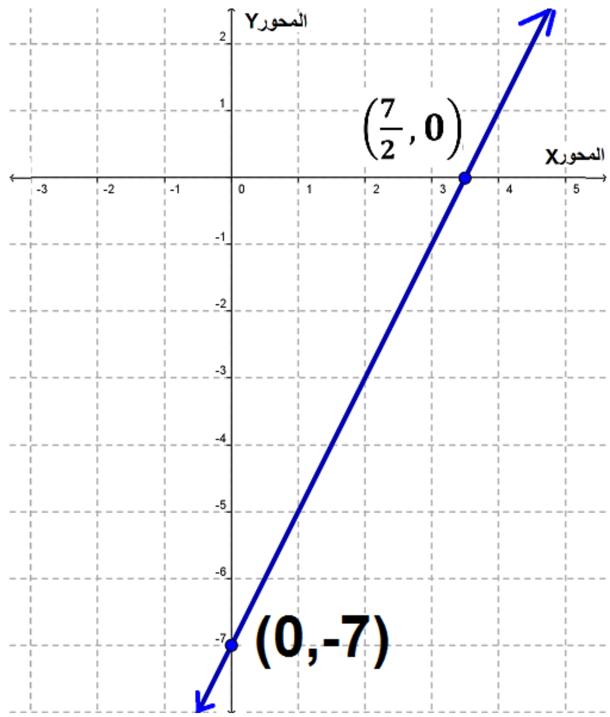
وبذلك تكون نقطة التقاطع مع المحور y هي: $(0,-7)$.

ثانيا) نستخرج نقطة التقاطع مع المحور x بتعويض $y=0$ بالدالة وكالاتي:

$$0=2x-7 \Rightarrow 2x=7 \Rightarrow x=\frac{7}{2}$$

وبذلك تكون نقطة التقاطع مع المحور x هي $\left(\frac{7}{2},0\right)$

نرسم المحورين الإحداثيين y , x ونعين عليهما النقطتين $(0,-7)$, $\left(\frac{7}{2},0\right)$ ثم نوصل بينهما بخط مستقيم فيكون التمثيل البياني كما في الشكل 2-9 أدناه



الشكل 2-9

3-الدوال التربيعية: وهي الدوال التي بالصيغة:

$$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}: y=f(x)=ax^2+b; a,b\in\mathbb{R}, a\neq 0$$

ويكون التمثيل البياني للدالة بشكل خط منحني متناظر حول نقطة تنتمي إلى المحور x، تسمى هذه النقطة نقطة التناظر. ولتمثيل هذه الدوال نعمل جدول يحتوي عددا من القيم للمتغير x وما تقابلها من قيم للمتغيرyوفقاً لقاعدة اقتران الدالة بهدف الحصول على عدد كاف من الأزواج المرتبة التي يتم تعيينها على المستوي والتوصيل بينها بخط منحني ترسم في نهاياته أسهم للدلالة على امتداده إلى ما لانهاية.

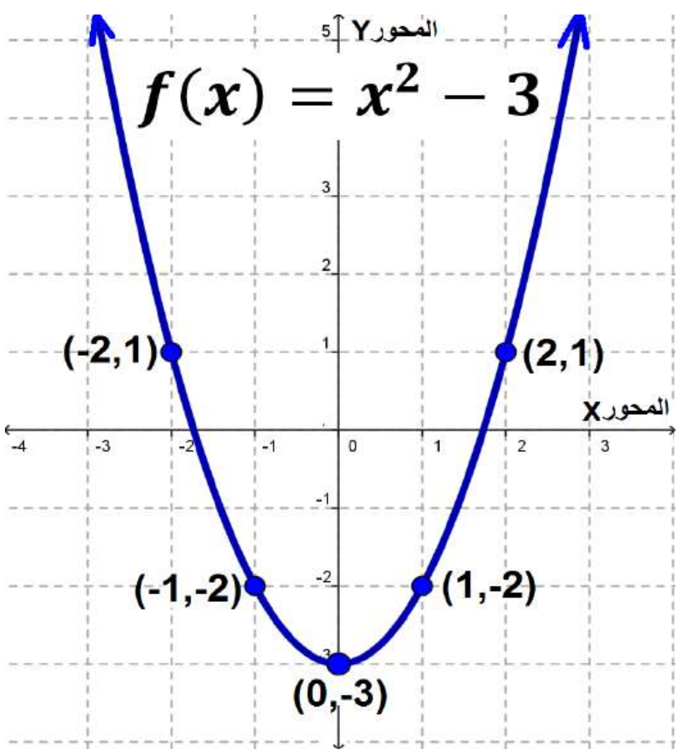
فكرة المثال الاتي: الدوال التي بالصيغة $f(x) = x^2 + a, a \in \mathbb{R}$ يكون التمثيل البياني لها منحني متناظر حول نقطة تقع على المحور y وأطراف المنحني متجهة إلى الأعلى نحو المالانهاية.

مثل الدالة الأتية بيانياً : $f(x) = x^2 - 3$

الحل / نعمل الجدول الاتي:

x	$y = f(x) = x^2 - 3$	(x, y)
-2	$y = f(x) = (-2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$	$(-2,1)$
-1	$y = f(x) = (-1)^2 - 3 = 1 - 3 = -2$	$(-1, -2)$
0	$y = f(x) = 0^2 - 3 = 0 - 3 = -3$	$(0, -3)$
1	$y = f(x) = 1^2 - 3 = 1 - 3 = -2$	$(1, -2)$
2	$y = f(x) = 2^2 - 3 = 4 - 3 = 1$	$(2,1)$

الأن نعين النقاط الخمسة على المستوى الإحداثي ونوصل بينها بخط منحني. لاحظ ان منحني الدالة هنا متناظر حول النقطة $(0, -3)$ وان أطراف المنحني متجهة إلى الأعلى نحو المالانهاية كما في الشكل 2-10 أدناه



الشكل 2-10

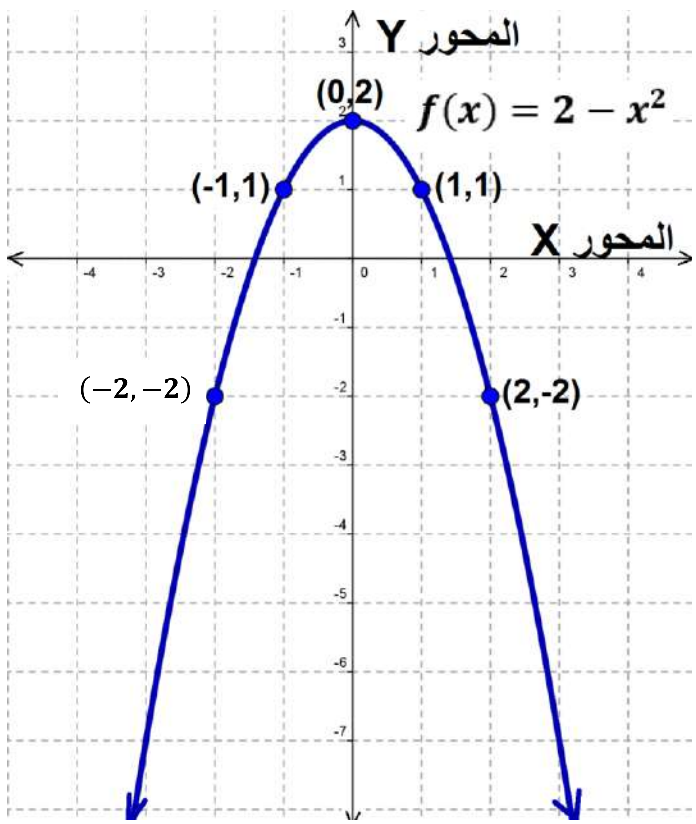
فكرة المثال الاتي: الدوال التي بالصيغة $f(x) = a - x^2, a \in \mathbb{R}$ يكون التمثيل البياني لها منحني متناظر حول نقطة تقع على المحور y وأطراف المنحني متجهة إلى الأسفل نحو المالانهاية.

مثل الدالة الأتية بيانيا: $f(x) = 2 - x^2$

الحل / نعمل الجدول الاتي:

x	$y = f(x) = 2 - x^2$	(x, y)
-2	$y = f(x) = 2 - (-2)^2 = 2 - 4 = -2$	$(-2, -2)$
-1	$y = f(x) = 2 - (-1)^2 = 2 - 1 = 1$	$(-1, 1)$
0	$y = f(x) = 2 - 0^2 = 2 - 0 = 2$	$(0,2)$
1	$y = f(x) = 2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$	$(1,1)$
2	$y = f(x) = 2 - 2^2 = 2 - 4 = -2$	$(2, -2)$

الأن نعين النقاط الخمسة على المستوى الإحداثي ونوصل بينها بخط منحني. لاحظ ان منحني الدالة هنا متناظر حول النقطة (0,2) وان أطراف المنحني متجهة إلى الأسفل نحو المالانهاية.كما في الشكل 2-11 أدناه



الشكل 2-11

4-الدوال التكعيبية: -وهي الدوال التي بالصيغة:

$$y = f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad , \qquad a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}, a_3 \neq 0$$

وهي من الدوال متعددة الحدود والتي يكون التمثيل البياني لها خط منحني لذلك نرسم مخططها البياني بنفس أسلوب رسم المخطط البياني للدالة التربيعية مع مراعاة ان شكل هذه الدوال يتكون من منحيين أحدهما مقعر والأخر محدب تفصلهما نقطة تقع على المحورy. وتسمى هذه النقطة نقطة التناظر. ويجب الحذر من التوصيل بين النقاط بخطوط مستقيمة مهما تقاربت تلك النقاط.

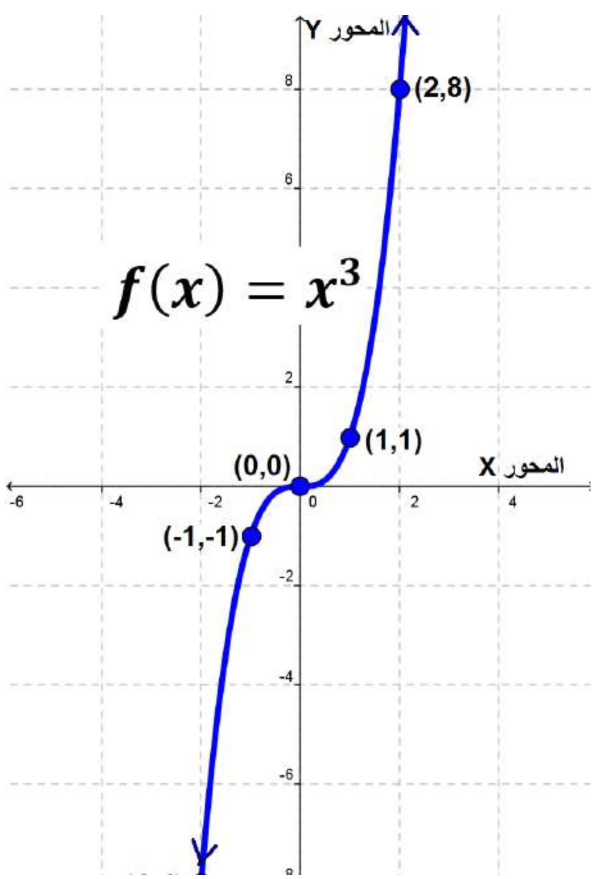
فكرة المثال الاتي: منحني الدالة هنا متناظر حول نقطة الأصل (0,0) والجزء الأيمن من منحني الدالة مقعر بينما الجزء الأيسر محدب.

مثال 18 مثل الدالة الأتية بيانياً: $f(x) = x^3$

الحل: نعمل الجدول الاتي:

x	$y = f(x) = x^3$	(x, y)
-2	$y = f(x) = (-2)^3 = -8$	$(-2, -8)$
-1	$y = f(x) = (-1)^3 = -1$	$(-1, -1)$
0	$y = f(x) = 0^3 = 0$	$(0,0)$
1	$y = f(x) = 1^3 = 1$	$(1,1)$
2	$y = f(x) = 2^3 = 8$	$(2,8)$

الأن نعين النقاط الخمسة على المستوى الإحداثي ونوصل بينها بخط منحني. لاحظ ان منحني الدالة هنا متناظر حول نقطة الأصل (0,0) وان الجزء الأيمن للمنحني مقعر ومتجه إلى الأعلى نحو المالانهاية، بينما الجزء الأخر محدب ومتجه إلى الأسفل نحو المالانهاية. كما في الشكل 12-2 المجاور



الشكل 12-2

5- الدوال الجذرية: لتمثيل الدالة الجذرية لابد لنا ان نتذكرأن مجال الدالة الجذرية يعتمد على دليل الجذر وكما يأتي:

1) إذا كان دليل الجذر فردياً فإن أوسع مجال للدالة هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

2) إذا كان دليل الجذر زوجياً فإن أوسع مجال للدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا القيم التي تجعل المقدار الجبري داخل الجذر مقداراً سالباً.

لذلك فإننا يجب ان ننتبه (إذا كان دليل الجذر زوجياً) ان لا نضع في الجدول الذي نستخدمه لاستخراج الأزواج المرتبة قيماً للمتغير x تجعل قيمة ما بداخل الجذر سالبة. كذلك نفضل وضع قيم تكون جذورها أعداداً صحيحة.

فكرة المثال الاتي: لدوال الجذور التكعيبية نختار خمسة قيم للمتغير x في الجدول وبنفس الأسلوب السابق لكننا نراعي ان تعطي القيم المختارة عند التعويض نتائجاً صحيحة (قدر الإمكان).

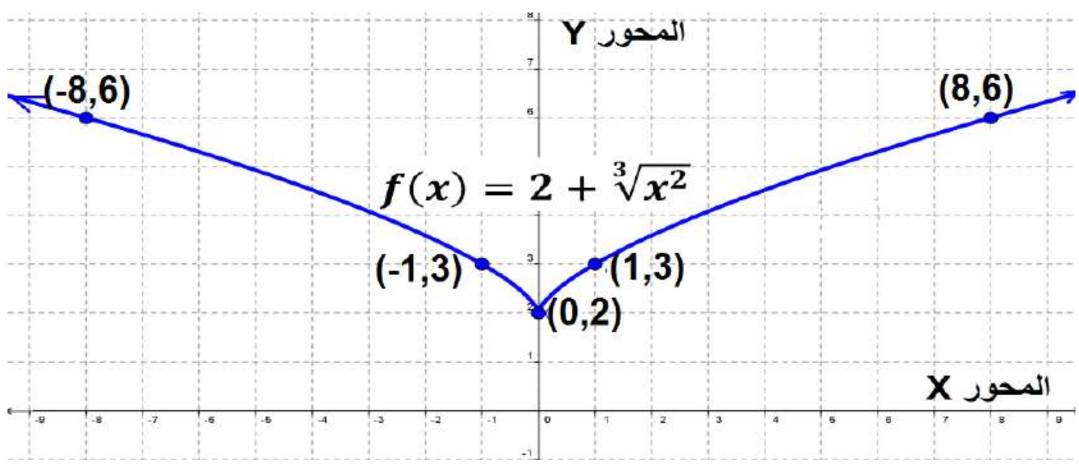
مثال 19 مثل الدالة الأتية بيانياً $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x^2}$

الحل:

نعمل الجدول الاتي:

x	$f(x) = 2 + \sqrt[3]{x^2}$	(x, y)
-8	$f(x) = 2 + \sqrt[3]{(-8)^2} = 2 + \sqrt[3]{64} = 2 + 4 = 6$	$(-8,6)$
-1	$f(x) = 2 + \sqrt[3]{(-1)^2} = 2 + 1 = 3$	$(-1,3)$
0	$f(x) = 2 + \sqrt[3]{(0)^2} = 2 + 0 = 2$	$(0,2)$
1	$f(x) = 2 + \sqrt[3]{(1)^2} = 2 + 1 = 3$	$(1,3)$
8	$f(x) = 2 + \sqrt[3]{(8)^2} = 2 + \sqrt[3]{64} = 2 + 4 = 6$	$(8,6)$

الأن نعين النقاط الخمسة على المستوى الإحداثي ونوصل بينها بخط منحني. لاحظ ان منحني الدالة هنا متناظر حول النقطة $(0,2)$وان الجزء الأيمن للمنحني محدب ومتجه الى اليمين نحو المالانهاية، والجزء الأخر محدب أيضا ومتجه إلى اليسار نحو اللانهاية. لاحظ انه يجب عليك الاهتمام بالرسم عند التوصيل بين النقاط $(1,3)$ و $(0,2)$و$(-1,3)$كونها نقاط متقاربة ولابد من ان يكون الخط الواصل بينهما منحنياً وليس مستقيماً. ويكون التمثيل البياني للدالة كما في الشكل 2-13 أدناه



الشكل 2-13

فكرة المثال الاتي: في دوال الجذور ذات الدليل الزوجي لا بد اولاً من استخراج أوسع مجال للدالة كي نختار منه قيماً للمتغير x في الجدول وكذلك لا بد من ان نراعي ان تعطي القيم المختارة عند التعويض نتائجاً تنتمي إلى مجموعة الأعداد صحيحة (قدر الإمكان).

مثل الدالة الأتية بيانياً $f(x) = \sqrt[2]{6-2x}$

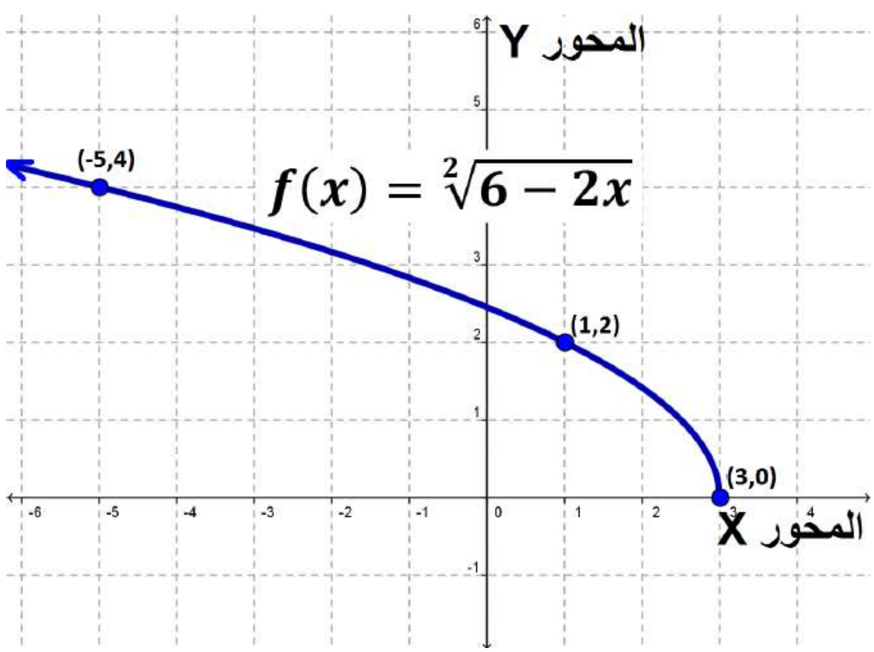
الحل: إيجاد أوسع مجال للدالة:

$$6-2x \geq 0 \Rightarrow -2x \geq -6 \Rightarrow x \leq \frac{-6}{-2} \Rightarrow x \leq 3$$

أي أننا نختار قيماً للمتغير x من $x = 3$ نزولاً وسوف نختار قيما تعطي نتائج بأعداد صحيحة

x	$f(x) = \sqrt[2]{6-2x}$	(x,y)
3	$f(x) = \sqrt[2]{6-2(3)} = \sqrt[2]{6-6} = 0$	$(3,0)$
1	$f(x) = \sqrt[2]{6-2(1)} = \sqrt[2]{6-2} = \sqrt[2]{4} = 2$	$(1,2)$
-5	$f(x) = \sqrt[2]{6-2(-5)} = \sqrt[2]{6+10} = \sqrt[2]{16} = 4$	$(-5,4)$

الأن نسقط النقاط الثلاث على المستوى الإحداثي ونوصل بينها بخط منحني. لاحظ ان منحني الدالة هنا يقع فوق المحور الأفقي x لان الجذور ذات الدليل الزوجي تعطي جذوراً سالبة لا تنتمي الى مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ويكون التمثيل البياني للدالة كما في الشكل 14-2 أدناه



الشكل 14-2

فكرة المثال الاتي: في دوال الجذور ذات الدليل الزوجي لا بد اولاً من استخراج أوسع مجال للدالة كي نختار منه قيماً للمتغير x في الجدول وكذلك لا بد من ان نراعي ان تعطي القيم المختارة عند التعويض أعدادا صحيحة (قدر الإمكان).

مثل الدالة الأتية بيانياً $f(x) = 2 - \sqrt[2]{x-4}$

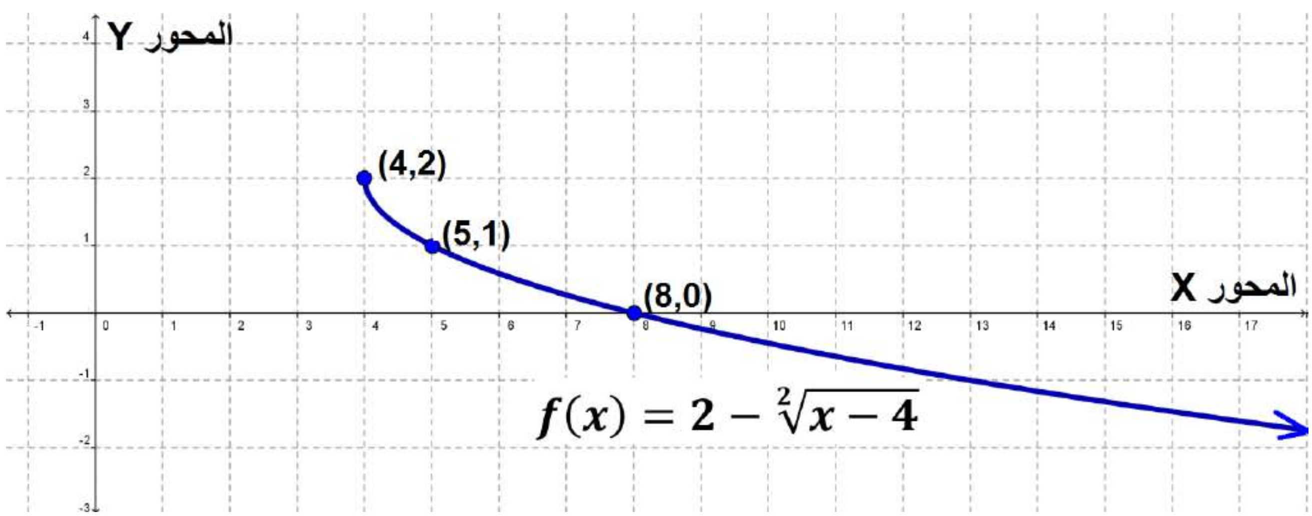
الحل: إيجاد أوسع مجال للدالة:

$$x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$$

أي أننا نختار قيماً للمتغير من $x = 4$ صعوداً وسوف نختار قيما تعطي نتائج بأعداد صحيحة

x	$f(x) = 2 - \sqrt[2]{x-4}$	(x, y)
4	$f(x) = 2 - \sqrt[2]{4-4} = 2 - 0 = 2$	$(4,2)$
5	$f(x) = 2 - \sqrt[2]{5-4} = 2 - 1 = 1$	$(5,1)$
8	$f(x) = 2 - \sqrt[2]{8-4} = 2 - \sqrt[2]{4} = 2 - 2 = 0$	$(8,0)$

الآن نعين النقاط الثلاث على المستوى الإحداثي ونوصل بينها بخط منحني. لاحظ ان منحني الدالة هنا يقع فوق المستقيم $x = -2$ ويكون التمثيل البياني للدالة كما في الشكل2-15 أدناه



الشكل 2-15

تمرين
2-2

مثّل الدوال الأتية بيانياً على ورق المربعات: -

1) $y = f(x) = \frac{2}{3}$

2) $y = f(x) = 3x - 2$

3) $y = f\ (x) = x^2 - 1$

4) $y = f(x) = 5 - 3x^2$

5) $y = f(x) = x^3 + 3$

6) $y = f(x) = x^3 + x$

7) $y = f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$

8) $y = f(x) = \sqrt{3 + x^2}$

9) $y = f(x) = x + \sqrt{x}$

10) $y = f(x) = x^3 - 2x + 1$

11) $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

12) $y = f(x) = 2\sqrt[3]{x - 3}$

6-2 جبر الدوال functions Algebra

عند تطبيق العمليات الجبرية الأربع وهي (الجمع والطرح والضرب والقسمة) على الدوال، فان المجال للدوال الناتجة من هذه العمليات هو تقاطع المجال لكلتا الدالتين مع الانتباه في حالة القسمة اذ يشترط الا يساوي المقام صفرا. فإذا كانت $f(x)$ دالة مجالها D_f وان $g(x)$ دالة اخرى ومجالها D_gفان:

1) $(f + g)(x) = f(x) + g(x): x \in D_f \cap D_g$

2) $(f - g)(x) = f(x) - g(x): x \in D_f \cap D_g$

3) $(f.g)(x) = f(x) - g(x): x \in D_f \cap D_g$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}: x \in D_f \cap D_g, g(x) \neq 0$

فكرة المثال الاتي: في حالة كون الدالتين $g(x), f(x)$ متعددتي حدود فان المجال في العمليات الجبرية الثلاثة الأولى يكون هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ أما في عملية القسمة فان المجال هو: $\mathbb{R}/${كل ما يجعل المقام يساوي صفرا}

أذا كانت $g(x) = x + 3 \quad , f(x) = x^2 - 3$ جد كل مما يأتي:

$$1)\ (f+g)(x) \qquad (2)(f-g)(x) \qquad (3)(f.g)(x) \qquad (4)\ \left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

وأستخرج مجال كل من هذه الدوال.

الحل: بما أن كلاً من الدالتين f, g متعددتي حدود فأن أوسع مجال لكل منهما هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، وعليه يكون تقاطع مجاليهما هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ أيضاً ، ويكون :-

$$1)(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 3 + x + 3 = x^2 + x$$

$$2)(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 3 - (x+3) = x^2 - x - 6$$

$$3)(f.g)(x) = f(x).g(x) = (x^2-3)(x+3) = x^3 + 3x^2 - 3x - 9$$

$$4)\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-3}{x+3} \quad , x \in \mathbb{R}/\{-3\}$$

فكرة المثالين الآتيين: يكون المجال في العمليات الجبرية الثلاثة الأولى يكون هو تقاطع مجموعتي المجال لكلا الدالتين أما في عملية القسمة فمن الضروري استثناء القيم التي تجعل مقام الدالة يساوي صفراً.

لتكن $f(x) = \sqrt{x-1}$ ، $g(x) = x^2 + 5$ دالتين مختلفتين ، جد:

1) أوسع مجال للدالتين $g(x), f(x)$

2) المدى للدالتين $g(x), f(x)$

3) جد: $(f+g)(x) \ , \ (f-g)(x)$ وأوسع مجال للدوال الناتجة.

الحل: (1) بالنسبة للدالة الأولى $f(x) = \sqrt{x-1}$

$$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

أوسع مجال للدالة هو $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ أما بالنسبة إلى المدى فنتبع الخطوات الأتية:

$$f(1) = \sqrt{1-1} = 0$$

$$f(2) = \sqrt{2-1} = 1$$

$$f(3) = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$$

نلاحظ ان قيمة الدالة تزايدت عند زيادة قيمة x ولذلك فان المدى هو الفترة $[0, \infty)$ والتي يمكن ان نعبر عنها بالصيغة الأتية: $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$.

(2) بالنسبة إلى الدالة الثانية $g(x) = x^2 + 5$ نلاحظ ان الدالة تربيعية لذلك يكون أوسع مجال للدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

وللحصول على المدى نتبع الخطوات الأتية:

$$y = x^2 + 5 \Rightarrow x^2 = y - 5$$

$$x = \pm\sqrt{y-5}$$

$$y - 5 \geq 0 \Rightarrow y \geq 5$$

المدى: $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 5\}$

(3) $$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x-1} + x^2 + 5$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x-1} - x^2 - 5$$

أوسع مجال للدالتين الناتجتين هو تقاطع مجالي الدالتين $(x), f(x)$ أي:

$$\{\, x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} \cap \mathbb{R} = \{\, x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$$

ليكن $f(x) = \sqrt{x+2}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ دالتين مختلفتين جد

1) المجال والمدى لكل من $g(x), f(x)$

2) $\left(\frac{f}{g}\right)(x), (f.g)(x)$ وجد المجال لكل منهما

الحل:

$1) f(x) = \sqrt{x+2}$

$$x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

أوسع مجال للدالة: $\{x \in \mathbb{R}: x \geq -2\}$ ، ولإيجاد المدى:

$$f(-2) = \sqrt{-2+2} = 0\,, \quad f(-1) = \sqrt{-1+2} = 1$$

نلاحظ ان قيمة الدالة تزايدت عند زيادة قيمة x ولذلك فان المدى هو الفترة $[0,\infty)$ والتي يمكن ان نعبر عنها بالصيغة الأتية $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$.

$2)\ g(x) = \sqrt{x}$

أوسع مجال للدالة: $\{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\} \Leftarrow x \geq 0$ ، ولإيجاد المدى:

$$f(0) = \sqrt{0} = 0\,, \quad f(1) = \sqrt{1} = 1$$

نلاحظ ان قيمة الدالة تزايدت عند زيادة قيمة x ولذلك فان المدى هو الفترة $[0,\infty)$ والتي يمكن ان نعبر عنها بالصيغة الأتية $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$.

$$(f.g)(x) = f(x), g(x) = \sqrt{x+2}.\sqrt{x} = \sqrt{x^2 + 2x}$$

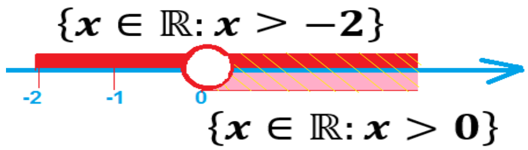
ويكون المجال لعملية الضرب هو تقاطع المجال لكلتا الدالتين وهو

$$\{x \in \mathbb{R}: x \geq -2\} \cap \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\} = [x \in \mathbb{R}: x \geq 0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{x+2}{x}}$$

أما المجال لعملية القسمة هو تقاطع المجال لكلتا الدالتين عدا قيم x التي تجعل المقام صفراً أي

$$\{x \in \mathbb{R}: x \geq -2\} \cap \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} = [x \in \mathbb{R}: x > 0)$$



الشكل 2-16

1) ليكن: $f(x) = 2x^2$ وان $g(x) = 3 - x$ جد:

a. المجال للدالتين $f(x)\,,\quad g(x)$

b. المدى للدالتين $f(x),\quad g(x)$

c. $(f+g)(x),\ (f-g)(x),\ \ (f.g)(x),\ \ \left(\frac{f}{g}\right)(x)$

2) ليكن: $f(x) = \sqrt{2x+1}\ \ ,\ \ g(x) = \sqrt[3]{x-3}$ جد

a. المجال للدالتين $f(x)\,,\quad g(x)$

b. المدى للدالتين $f(x),\quad g(x)$

c. $(f+g)(x),\ (f-g)(x),\ \ (f.g)(x),\ \ \left(\frac{f}{g}\right)(x)$

1) لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية ، Y مجموعة المجال المقابل لدالة ما بحيث:

$$f: \mathbb{R} \to Y \,;\, y = f(x) = x^2$$

جد المجال والمدى للدالة $f(x)$ ثم مثلها بيانياً.

2) مثّل الدالة الأتية بيانياً $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\quad f(x) = 2x + \sqrt{9 - x^2}$

3) جد المجال والمدى لكل من الدوال الأتية ثم مثَلها بيانياً

1) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

2) $f(x) = 3x - 1$

3) $f(x) = 2x^2 + 16$

4) لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}:\ f(x) = 3x - 5$ ، $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: g(x) = x + 12$

جد المجال والمدى ثم مثل بيانياً $(f + g)(x)$

5) لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}:\quad f(x) = \sqrt{x - 2}$ ، $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: g(x) = x^2 + 1$ جد المجال والمدى لكل من الدالتين ثم جد $(f.g)(x)$ ، $(f - g)(x)$ وحدد مجال الدالتين الناتجتين.

6) إذا كان $(.g)(x) = \sqrt{x^5 - x^2}$ جد

a) الدالتين $g(x), f(x)$

b) اوسع مجال للدالة $g(x), f(x)$

7) إذا كان $(g)(x) = \sqrt{3x - 6x^3}$ وإن $f(x) = x$ جد:

a) $g(x)$

b) المجال والمدى للدالتين g, f

c) مثل بيانياً الدالة $g(x)$

الفصل الثالث
النسبة والتناسب
(Ratio & Proportion)

البنود (Sections)

1-3	تمهيد
2-3	النسبة والتناسب
3-3	خواص التناسب
4-3	التناسب المتسلسل
5-3	التغير
1-5-3	التغير الطردي
2-5-3	التغير العكسي

Vocabulary	الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
Ratio	$\frac{a}{b}$	النسبة
Proportion	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$	التناسب
Geometric Proportion	$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$	التناسب المتسلسل
Constant of proportion	k	ثابت التناسب او ثابت التغير
Posative Real Number	$\mathbb{R}^+$	مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة
For Each	$\forall$	لكل
Variation	$\propto$	التغير
Direct Variation	$x \propto y$	التغير الطردي
Inverse Varition	$x \propto \frac{1}{y}$	التغير العكسي

الفصل الثالث
النسبة والتناسب
(Ratio & Proportion)

1-3 تمهيد Preface

النسبة والتناسب بيَنها الله تعالى في القرآن الكريم، في قوله تعالى ((يا أيها النبي حرَض المؤمنين على القتال إن يكن منكم عشرون صابرون يغلبوا مائتين.))... ((الحسنة بعشرة أمثالها.))

كان قدماء المصريين (الفراعنة) قد عرفوا النسبة وكانوا يكتبونها باستخدام الكسور، تعتبر فكرة النسبة أساس للكثير من قوانين علوم الفلك، الأحياء، الكيمياء، الفيزياء ويحتوي الكثير من هذه القوانين على ثوابت نسبية، وتستخدم فكرة النسبة والتناسب في العلوم الهندسية والاجتماعية والفنون وترتبط النسب بالجوانب الوظيفية والجمالية والإنشائية.

شكل رقم 3-1 وزن الجسم على سطح القمر يعادل $\frac{1}{6}$ وزنه على الارض

2-3 النسبة والتناسب Ratio and Proportion

النتاجات الخاصة بهذا البند

- **التوسع في مفهوم النسبة.**
- **كتابة النسب والنسب المكافئة ومعرفة إذا كانت هذه النسب المكافئة تؤلف تناسباً.**
- **إدراك مفهوم التناسب**
- **المقارنة بين النسب والتناسب.**

سبق لك أن تعلمت

عندما نكون كسراً من اجل مقارنة عددين أو كميتين من النوع نفسه ولهما الوحدة ذاتها نسمي الكسر (نسبة) ونسمي البسط (مقدم النسبة) ونسمي مقام الكسر (تالي النسبة) ونسمي مقدم النسبة وتاليها (حدي النسبة)

أن النسبة بين العدد a والعدد b تكتب بالصيغة الأتية

$$\frac{a}{b} \quad \text{او} \quad a:b, \quad b \neq 0$$

وتقرأ نسبة a الى b

فكرة المثالين الآتيين : التعرف على مفهوم نسبة شيء ما إلى شيء اخر (من نفس الجنس)

مثال 1

إذا كانت عدد معلمي إعدادية صناعية 25 وكان مجموع الطلاب فيها 350 فما نسبة عدد المعلمين إلى عدد الطلاب؟

الحل: نسبة عدد المعلمين إلى عدد الطلاب $= \frac{25}{350}$ او $25:350$

وبالتبسيط $= \frac{1}{14}$ أو $1:14$

مثال 2

في خليط الخرسانة إذا قلنا إن نسبة وزن الماء إلى وزن الإسمنت يجب ان تكون $\frac{1}{4}$ فهذا معناه ان وزن الإسمنت المستخدم يجب أن يساوي 4 أضعاف وزن الماء.

التناسب هو تساوي كميتين نسبيتين أو أكثر فمثلاً $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$
يمكن كتابته بالصيغة $\dfrac{a}{b}:\dfrac{c}{d}$ ، تسمى a,b,c,d حدود
التناسب ونسمي a,d طرفي التناسب كما نسمي العددين c,b
وسطي التناسب

3-3 خواص التناسب Proportion properties

1) خاصية الضرب التبادلي
حاصل ضرب الوسطين يساوي حاصل ضرب الطرفين

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \Rightarrow a.d$$

2) خاصية إبدال الطرفين

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \Rightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$$

3) خاصية إبدال الوسطين

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

4) خاصية قلب التناسب

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

5) خاصية التركيب

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

6) خاصية التحليل

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

7) خاصية التحليل والتركيب معاً

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \Rightarrow \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

8) مجموع المقدمات إلى مجموع التوالي يساوي أحد النسب

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \Rightarrow \frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b} \quad or \quad \frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$$

9) إذا تساوت المقدمات تساوت التوالي والعكس صحيح

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \Rightarrow \ (a=c) \ \Leftrightarrow (b=d)$$

ملاحظات مهمة

1) لمعرفة هل تشكّل نسبتان تناسباً أو لا نستخدم خاصية الضرب التبادلي (حاصل ضرب الوسطين يساوي حاصل ضرب الطرفين) أي :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a.d = b.c$$

فكرة المثال الاتي: تعلم أسلوب التأكد من وجود التناسب باستخدام الخاصية (3) من خواص التناسب

هل تشكل النسبتان الأتيتان تناسباً صحيحا أو لا ؟

$$\frac{3}{7}, \frac{12}{28}$$

الحل :

$$3 \times 28 = 84 = \text{حاصل ضرب الوسطين}$$

$$12 \times 7 \;\; = 84 = \text{حاصل ضرب الطرفين}$$

ادن النسبتان تشكلان تناسباً صحيحاً.

2) اذا ضربنا حدي النسبة بكمية ثابتة فان النسبة لا تتغير.

$$\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk} \quad \forall k \in \mathbb{R}, k \neq 0$$

3) اذا قسمنا حدي النسبة على كمية ثابتة فان النسبة لا تتغير.

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}} \quad \forall k \in \mathbb{R}, k \neq 0$$

4) اذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ بحيث: $a \neq c$ ، $b \neq d$ فان : $a = kc, b = kd, k \in \mathbb{R}^{+}$

توضيح: ان التناسب الاتي:

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$$

لا يعني بالضرورة أن $a = 2$ ، $b = 3$ إذ يمكن ان يعني $a = 4$ ، $b = 6$ أو $a = 16$ $b = 24$ لأن:

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{16}{24} = \cdots$$

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2 \times 2}{3 \times 2}\right) = \left(\frac{2 \times 8}{3 \times 8}\right) = \cdots$$

لاحظ انه يمكننا ان نعمم ذلك بالقول أن $a = 2k$ ، $b = 3k$ حيث k ثابت يسمى ثابت التناسب.

5) إذا أضيف أو طرح من حدي النسبة نفس العدد فإن قيمة النسبة تتغير.

فمثلا النسبة $3 : 4$ إذا أضيف إلى حديها العدد 2 فان النسبة تصبح $5 : 6$ وهما غير متساويتين في القيمة لان:

حاصل ضرب الوسطين $= 3 \times 6 = 18$ و حاصل ضرب الطرفين $= 5 \times 4 = 20$

أي ان : $\frac{3}{4} \neq \frac{5}{6}$

فكرة المثال الاتي: تطبيق لخاصية (حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين)

مثال 4

جد قيمة $\frac{3a+2b}{6b-a}$ إذا علمت ان $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$

الحل: وفقاً للملاحظة (3) الواردة أعلاه يكون $a = 2k, b = 3k$ حيث k يمثل ثابت التناسب

$$\frac{3a+2b}{6b-a} = \frac{3(2k)+2(3k)}{6(3k)-(2k)} = \frac{6k+6k}{18k-2k} = \frac{12k}{16k} = \frac{3}{4}$$

فكرة المثال الاتي: إيجاد النسبة بين متغيرين إذا علمنا العلاقة التي تربطهما

مثال 5

إذا كان $4x^2 + y^2 = 4xy$ فأوجد $x : y$

الحل :- بترتيب المعادلة ومساواتها للصفر ينتج:

$$4x^2 - 4xy + y^2 = 0$$

نلاحظ ان المقدار $4x^2 - 4xy + y^2$ هو مربع كامل ويمكن تحليله الى الصيغة $(2x-y)^2$

$$(2x-y)^2 = 0$$

وبجذر الطرفين نحصل على $2x - y = 0$

أي : $2x = y$

وبقسمة الطرفين على $2y$ نتوصل الى أن:

$$\frac{2x}{2y} = \frac{y}{2y} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$$

$$x : y = 1 : 2$$

فكرة المثال الاتي: التدريب على حل مسائل كلامية متعلقة بالتناسب

مثال 6

ما هوالعدد الموجب الذي إذا أضيف مربعه ألي حدي النسبة $3 : 10$ يكون الناتج هو $1 : 2$

الحل: نفرض أن العدد هو x ويكون مربعه هو x^2 وهذا يعني ان:

$$\frac{3+x^2}{10+x^2} = \frac{1}{2}$$

وباستخدام خاصية الضرب التبادلي (حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين) يكون

$$10 + x^2 = 6 + 2x^2$$

$$10 - 6 = 2x^2 - x^2 \Rightarrow x^2 = 4$$

وبجذر الطرفين ينتج $x = \pm 2$ ولما كان العدد موجب فان $(x = 2)$ أي ان العدد المطلوب هو 2

وللتأكد من صحة الحل: -

$$\frac{3+x^2}{10+x^2} = \frac{3+2^2}{10+2^2} = \frac{3+4}{10+4} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

فكرة المثال الاتي: تطبيق لخواص التناسب

إذا كانت a, b, c, d كميات متناسبة فأثبت أن

$$\frac{2a-3c}{4a+5c} = \frac{2b-3d}{4b+5d}$$

الحل:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{2a}{2b} = \frac{-3c}{-3d}$$

(إذا ضربنا حدي النسبة بكمية ثابتة فان النسبة لا تتغير)

$$\frac{2a-3c}{2b-3d} = \frac{a}{b} \ldots (1)$$

(مجموع المقدمات إلى مجموع التوالي يساوي أحد النسب)

وبنفس الطريقة

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{4a}{4b} = \frac{5c}{5d} \Rightarrow \frac{4a+5c}{4b+5d} = \frac{a}{b} \ldots (2)$$

من (1) و (2) نحصل على

$$\frac{2a-3c}{2b-3d} = \frac{4a+5c}{4b+5d}$$

وبأبدال الوسطين نحصل على

$$\frac{2a-3c}{4a+5c} = \frac{2b-3d}{4b+5d}$$

4-3 التناسب المتسلسل (Geometric Proportion)

إذا كان: -

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

يقال إن، $a\ b, c$ في تناسب متسلسل (أو تناسب هندسي)

وبالعكس إذا كان a, b, c في تسلسل متناسب فان

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

ويسمى b الوسط المتناسب أو الوسط الهندسي للعددين a, c

كما يسمى a, c طرفي التناسب.

ملاحظات:

1) ليكن $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ فاذا كانت في تناسب متسلسل أي $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ فان تطبيق خاصية الضرب التبادلي تعطينا العلاقة الأتية: $(b^2 = ac)$ وبذلك يمكننا صياغة الجملة الرياضية الاتية :

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow b^2 = ac}$$

2) العددين a, c لا بد ان تكون لهما نفس الإشارة لأن اختلافهما بالإشارة يجعل قيمة b لا تنتمي الى مجموعة الأعداد الحقيقية (جذر سالب).

3) الوسط المتناسب (أو الوسط الهندسي) له قيمتان متساويتان أحداهما موجبة والأخرى سالبة.

4) جميع خواص التناسب تنطبق على التناسب المتسلسل.

فكرة المثال الاتي: توضيح مفهوم التناسب المتسلسل

مثال8 هل تشكل الأعداد 3,9,27 تناسباً متسلسلاً صحيحا او لا؟

الحل: التناسب المتسلسل بين الأعداد الثلاثة يجعل

$a = 3, b = 9, c = 27$ وبالصيغة الأتية:

$$\frac{3}{9} = \frac{9}{27}$$

وهي عبارة صائبة منطقيا لان $b^2 = ac$ حيث :

$ac = 3 \times 27 = 81$ ،$b^2 = 9^2 = 81$

فكرة المثال الاتي: تدريب على أسلوب استخراج الوسط المتناسب بين عددين

مثال9 جد الوسط المتناسب للعددين 2,8

الحل: نفرض ان x هو الوسط المتناسب للعددين فنحصل على تناسب متسلسل

هو $2, x, 8$ أي:

$$\frac{2}{x} = \frac{x}{8} \Leftrightarrow x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

التناسب المتسلسل لأربعة أعداد

لتكن $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ اعداداً في تناسب متسلسل أي $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$

فان تطبيق خاصية الضرب التبادلي تعطينا العلاقات الأتية:

$$\boxed{a = dk^3, b = dk^2, c = dk}$$

فكرة المثال الاتي: توضيح مفهوم التناسب المتسلسل لأربعة أعداد

إذا كان x, l, f, g أربعة اعداد في تناسب متسلسل اثبت ان

$$\frac{x+l+f}{l+f+g}=\frac{x}{l}$$

الحل: حيث ان x, l, f, g أربعة أعداد في تناسب متسلسل فان:

$$\frac{x}{l}=\frac{l}{f}=\frac{f}{g}=k$$

وبتطبيق العلاقات الواردة بالتعريف أعلاه نتوصل إلى:

$$x=gk^3, l=gk^2, f=gk$$

$$l.h.s=\frac{x+l+f}{l+f+g}$$

$$=\frac{gk^3+gk^2+gk}{gk^2+gk+g}$$

$$=\frac{gk(k^2+k+1)}{g(k^2+k+1)}$$

$$=\frac{gk}{g}=k=\frac{x}{l}=r.h.s$$

فكرة المثال الاتي: توضيح أسلوب أثبات انتظام أربعة أعداد في تناسب متسلسل

بين ان الأعداد $625,125,25,5$ تنتظم في تناسب متسلسل.

الحل :

نفرض $d=5,\ c=25, b=125, a=625$

$$\frac{a}{b}=\frac{625}{125}=5, \qquad \frac{b}{c}=\frac{125}{25}=5, \qquad \frac{c}{d}=\frac{25}{5}=5$$

$$\therefore\ \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=5=k$$

أي ان الاعداد تنتظم في تناسب متسلسل.

طريقة ثانية: نلاحظ أننا نستطيع كتابة الأعداد بالصيغة الأسية الأتية:

$$(5\times 5^3), (5\times 5^2), (5\times 5), (5)$$

حيث: $a=5\times 5^3,\ \ b=5\times 5^2, c=5\times 5, d=5$

نفرض $d=5, k=5$ وبذلك نحصل على العلاقات الاتية:

$$a=dk^3, b=dk^2, c=dk$$

أي ان الأعداد تنتظم في تناسب متسلسل.

تمرين (1-3)

1) جد العدد الذي اذا طرح ثلاثة أمثاله من حدي النسبة $\frac{49}{69}$ فإنها تصبح $\frac{2}{3}$.

2) بيَن فيما إذا كانت أزواج النسب الأتية تمثل تناسباً ام لا

$$a)\ \left(\frac{19}{76},\frac{5}{20}\right)\quad b)\ \left(\frac{17}{34},\frac{2}{3}\right)\quad c)\ \left(\frac{5}{9},\frac{15}{27}\right)\quad d)\ \left(\frac{6}{10},\frac{24}{42}\right)$$

3) جد العدد الذي لو أضيف إلى الأعداد 1,5,2,7 أصبحت متناسبة.

4) جد قيمة x في التناسبين الآتيين:

$$a)\ \frac{x+7}{7}=\frac{13}{5}\qquad b)\ (5x-1):(x+4)=4:5$$

5) اثبت ان $m,n,y,\ x$ متناسبة إذا علمت ان:

$$\frac{x-2n}{y-2m}=\frac{3x+2n}{3y+2m}$$

6) اذا كان $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$ جد قيمة التناسب

$$\frac{3a+2b}{6b-a}$$

7) أكمل الجمل الرياضية الأتية بما يناسبها لتكون جملاً صائبة منطقياً:

a) إذا كانت $3,6,x+15$ كميات متناسبة فان x تساوي.................

b) إذا كانت $a,b,2,3$ كميات متناسبة فان $\frac{a}{b}$ تساوي......................

c) النسبة تعتبر........ رياضية بينما يعتبر التناسب.............. رياضية.

d) اذا كان $5a=4b$ فان $\frac{a}{b}$ يساوي ....

e) الوسط الهندسي بين العددين $27,\frac{1}{3}$ هو............... .

5-3 التغير (Variation)

التغير ظاهرة طبيعية في الحياة نشاهدها في العديد من المواقف والأشياء فمثلاً:

- درجات الحرارة تتغير بالارتفاع والانخفاض في اليوم الواحد وفي الفصول المختلفة.
- تتغير استجابة المريض للدواء تبعا لعدد الجرعات.
- تغير الطلب على المنتجات النفطية للناس في الشتاء عن الصيف.
- تغير المستوى العلمي للطالب بتغير المناهج وطرائق التدريس.
- تغير فصول السنة حسب دوران الأرض حول الشمس.
- عند القيام بأنشطة رياضية فان الشخص يفقد سعرات حرارية تبعا لوزنه.
- بتغير عمق الآبار النفطية تتغير درجة الحرارة والضغط.

وغير ذلك الكثير فالتغير أو التناسب هو سر من أسرار الجمال فالوجه يكون جميلا عندما يكون هناك تناسب متزن بين أطوال أجزائه. والسيارة تكون جميلة إذا كانت أطوالها متناسبة بشكل يريح الناظر، وقطع الأثاث والأدوات الصغيرة وكل ما يحيط بنا سوف يغدو جميلا في حال كانت أطواله

متناسبة ولم تكن عشوائية الأطوال. لذلك فالتناسب أو التغير تعبير يطلق على التحول لظاهرة معينة من حالة إلى أخرى أومن موقع إلى آخر ، وتكون قيمته ثابتة مهما تغيرت العلاقة بين المتغيرين (x, y) (بالزيادة أو النقصان). ولا بد لنا أن نميز بين نوعين من التغير:

الأول هو التغير الطردي والذي تنسجم فيه الكميتان المتغيرتان من ناحية الزيادة أو النقصان حيث أن أي زيادة في أحدهما تسبب زيادة بالنسبة ذاتها لدى الكمية الأخرى، وأي نقصان في أحدهما يسبب نقصاناً بالنسبة ذاتها لدى الكمية الأخرى. ومن أمثلته:

1. إذا كان سعر الكيلوغرام من محصول البطاطا ثابتاً فإن عدد الكيلوغرامات التي يحصل عليها المستهلك يتغير طردياً مع المبلغ الذي يدفعه للبائع.
2. المقاومة في السلك الكهربائي تتغير طردياً تبعاً لطوله (عند ثبوت نوع المعدن المصنوع منه).
3. وزن المحراث يتغير طردياً مع حجمه (عند ثبوت نوع المعدن المصنوع منه).

والثاني هو التغير العكسي والذي تتخالف فيه الكميتان المتغيرتان من ناحية الزيادة والنقصان حيث أن أي زيادة في أحدهما تسبب نقصاناً بالنسبة ذاتها لدى الكمية الأخرى وأي نقصان في أحدهما يسبـــب زيادة بالنسبة ذاتها لدى الكمية الاخرى.ومن أمثلته: -

1. إذا كانت لدينا قطعة أرض زراعية مستطيلة الشكل فأن طول القطعة يتغير عكسياً مع عرضها (عند ثبوت مساحتها).
2. حجم الغاز يتغير عكسياً مع الضغط المسلط عليه (عند ثبوت درجة الحرارة).
3. المقاومة في السلك الكهربائي تتغير عكسياً مع مربع نصف قطره (عند ثبوت نوع المعدن المصنوع منه).

1-5-3 التغير الطردي (Direct Variation)

يقال أن الكمية x تتغير طردياً تبعاً لتغير الكمية y إذا ارتبطت الكميتان x, y ببعضهما البعض بحيث أن أي تغير في قيمة y يصحبه تغير في قيمة x بالنسبة ذاتها.

- يسمى المتغير y بالمتغير المستقل، أما المتغير فيسمى المتغير التابع.
- يرمز لعملية التغير بالرمز $(\propto)$
- يعبر عن العبارة (xتتغير طردياً تبعاً لتغير y) بالرموز الرياضية كما يلي :-

$$\boxed{x \propto y \Rightarrow x = k.y}$$

حيث k عدد ثابت ينتمي الى $\mathbb{R}^+$ (مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة) ويسمى ثابت التغير (أو ثابت التناسب)

- إذا كانت x تتغير طردياً تبعاً لتغير y فإن: -

$$\boxed{\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \quad \text{او} \quad \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}}$$

فكرة المثال الاتي: تعلم طريقة إيجاد ثابت التغير

مثال 12

إذا كانت x تتغير طردياً تبعاً لتغير y وكان $y = 9$ عندما $x = 3$ جد قيمة ثابت التغير.

الحل: $x \propto y \Rightarrow x = k.y$

$$3 = k.(9)$$

$$k = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

فكرة المثال الاتي: تعلم الطريقتين المتاحتين في مسائل إيجاد القيمة المجهولة

مثال 13

إذا كانت x تتغير طردياً تبعاً لتغير y وكان $y = 28$ عندما $x = 7$ جد قيمة x عندما $y = 60$.

الحل: الطريقة الأولى : $x \propto y \Rightarrow x = k.y$

$$7 = k.(28)$$

$$k = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore x = \frac{1}{4}.\ y \ \Rightarrow x = \frac{1}{4} \times (60) \Rightarrow \boxed{x = 15}$$

الطريقة الثانية: -

$$x \propto y \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

$$\frac{7}{x_2} = \frac{28}{60} \Rightarrow \frac{7}{x_2} = \frac{7}{15} \ \Rightarrow \boxed{x_2 = 15}$$

فكرة المثال الاتي: تعلم طريقة استخراج نوع العلاقة بين متغيرين مرتبطين بعلاقة ما

مثال 14

ليكن كل من x, y متغيرين حقيقيين مرتبطين بعلاقة ما، فإذا أخذت x القيمتين $(5, 1.6)$ وكانت قيمتا y المناظرتين لهما هي$(15,\ 4.8)$ على الترتيب.

بين نوع العلاقة بين x, y .

الحل: - $x_1 = 5$ ، $x_2 = 1.6$

$y_1 = 15$ ، $y_2 = 4.8$

سوف نحل المثال بالاعتماد على العلاقة الآتية: -

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{5}{1.6} = \frac{50}{16} = \frac{25}{8}$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{15}{4.8} = \frac{150}{48} = \frac{25}{8}$$

$$\therefore \ \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \quad \Rightarrow x \propto y$$

أي أن العلاقة هي علاقة تغير طردي.

ملاحظة: -يمكن حل السؤال بطريقة أخرى باستخدام العلاقة الآتية: -

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$

وكما يأتي: -

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x_2}{y_2} = \frac{1.6}{4.8} = \frac{16}{48} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \quad \Rightarrow x \propto y$$

أي إن العلاقة هي علاقة تغير طردي.

فكرة المثال الاتي: تعلم أسلوب أثبات كون العلاقة طردية بين متغيرين مرتبطين بعلاقة ما

مثال 15

إذا كان $x \propto y$ أثبت أن $(x^3 + 2xy^2) \propto (x^2y)$

الحل: بما أن $x \propto y \Rightarrow x = k.y$

لأجل أثبات $(x^3 + 2xy^2) \propto (x^2y)$ علينا أن نبرهن أن

$$(x^3 + 2xy^2) = k.(\,x^2y)$$

أي ان: -

$$\frac{x^3 + 2xy^2}{x^2y} = L \qquad ;L \text{ عدد ثابت}$$

ويتم ذلك كالاتي: -

بتعويض $x = k.y$

$$\frac{x^3 + 2xy^2}{x^2y} = \frac{(k.y)^3 + 2(k.y).y^2}{(k.y)^2.y}$$

$$= \frac{k^3y^3 + 2ky^3}{k^2y^3} = \frac{y^3(k^3 + 2k)}{y^3k^2} = \frac{k^3 + 2k}{k^2} = L$$

حيث أن كون عدداً ثابتاً يقتضي أن يكون المقدار L عدداً ثابتاً أيضاً.

$$\therefore (x^3 + 2xy^2) \propto (x^2y)$$

فكرة الأمثلة الثلاثة الأتية: تطبيق عملي على مفهوم التغير الطردي

مثال 16

تحتاج رافعة لرفع جسم وزنه 12 نيوتن إلى قوة مقدارها 0.275 نيوتن أوجد مقدار القوة اللازم استخدامها في هذه الرافعة لرفع جسم اخر وزنه 45 نيوتن إذا علمت ان القوة التي نستخدمها لرفع الجسم تتغير طردي مع وزنه.

الحل: لنرمز للقوة بالرمز F ووزن الجسم بالرمز W

$$F \propto W \quad \Rightarrow \frac{f_1}{w_1} = \frac{f_2}{w_2}$$

$$\frac{f_1}{45} = \frac{0.275}{12} \Rightarrow 45 \times 0.275 = 12.\ f_1$$

$$f_1 = \frac{45 \times 0.275}{12} = 1.0312\ Nt$$

مثال 17 مقدار القوة اللازم استخدامها في هذه الرافعة لرفع جسم وزنه 45 نيوتن.

تبلغ كمية الدم في جسم رجل يزن 75كغم نحو 5 ليترات. فاذا علمت ان كمية الدم في جسم الأنسان تتغير طردياً تبعاً لوزنه جد ثابت التغير واكتب معادلة تربط بين كمية الدم والوزن ثم جد كمية الدم لشخص وزنه 60 نيوتن.

الحل: نجد اولاً ثابت التغير وكالاتي

بما ان الوزن $\propto$ كمية الدم وحسب تعريف التغير الطردي فان

الوزن. k = كمية الدم

$$\therefore k = \frac{\text{كميةالدم}}{\text{الوزن}} = \frac{5}{75} = \frac{1}{15}$$

ولكتابة معادلة التغير الطردي نفرض ان كمية الدم Q والوزن W فيكون

كمية الدم= ثابت التغير× الوزن

$$Q = \frac{1}{15}.W$$

لحساب كمية الدم لشخص وزنه 60 نيوتن:

$$Q = \frac{1}{15}.60 = 4\ litre$$

مثال 18 قطع مظلي ارتفاعاً قدره 1950 مترفي 10 دقائق عند هبوطه بعد فتح مظلته وفي قفزة ثانية هبط 4750 متراً. فاذا كانت المسافة تتغير طرديا مع الزمن، فما هو الوقت المستغرق لنزول المظلي في القفزة الثانية إذا افترضنا ان سرعة هبوطه ثابته في كلا القفزتين

الحل: نفرض أن d تمثل المسافة، t تمثل الزمن

$$d \propto t \Rightarrow d = kt$$

وبالتعويض عن قيم t ، d نحصل على:

$$1950 = k\,(10\ )$$

وتكون معادلة التغير: $d = 195\ t$

الأن نعوض $d = 4750$ لنحصل على الزمن المستغرق للهبوط في القفزة الثانية.

$$4750 = 195\ t \Rightarrow t = \frac{4750}{195} = 24.3 \quad \text{دقيقة}$$

طريقة ثانية: بما ان المسافة تتغير طرديا مع الزمن يكون

$$\frac{d_1}{t_1}=\frac{d_2}{t_2}\Rightarrow\frac{1950}{10}=\frac{4750}{t_2}$$
$$1950\ \ t_2=47500$$
$$t_2=\frac{47500}{1950}$$

$$t_2=24.3\ \ \text{دقيقة}$$

2-5-3 التغير العكسي (Inverse Variation)

يقال ان الكمية x تتغير عكسياً تبعاً لتغير الكمية y إذا ارتبطت الكميتان x,y ببعضهما البعض بحيث أن أي تغير في قيمة y يصحبه تغيراً مخالفاً في قيمة x ولكن بالنسبة ذاتها.

- يعبر عن العبارة ((x تتغير عكسياً تبعاً لتغير y)) بالرموز الرياضية كما يلي :-

$$\boxed{x\propto\frac{1}{y}\Rightarrow x=\frac{k}{y}\ \ \text{او}\ \ xy=k}$$

حيث k عدد ثابت ينتمي إلى $\mathbb{R}^+$ ويسمى ثابت التغير.

- إذا كانت x تتغير عكسياً تبعاً لتغير y فأن: -

$$\boxed{\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_2}{y_1}\qquad\text{او}\qquad\frac{x_1}{y_2}=\frac{x_2}{y_1}}$$

فكرة المثالين الآتيين: تعلم طريقة إيجاد ثابت التغير العكسي.

إذا كانت x تتغير عكسياً تبعاً لتغير y وكان $y=12$ عندما $x=3$
جد قيمة ثابت التغير.

الحل:

$$x\propto\frac{1}{y}\Rightarrow x=\frac{k}{y}$$
$$3=\frac{k}{12}\Rightarrow\ \ k=\ 3.(12)=36$$

مثال 20

إذا كانت x تتغير عكسياً تبعاً لتغير y وكان $y = 2$ عندما $x = 8$
جد قيمة x عندما $y = 0.8$

الحل: - يمكننا حل المثال بطريقتين: -

الطريقة الأولى: -

$$x \propto \frac{1}{y} \Rightarrow x = \frac{k}{y}$$

$$8 = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 8 \times 2 = 16$$

$$\therefore \quad x = \frac{16}{y}$$

$$x = \frac{16}{0.8} = \frac{160}{8} \Rightarrow x = 20$$

الطريقة الثانية: -

$$x \propto \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$$

$$\frac{8}{x_2} = \frac{0.8}{2}$$

$$\frac{8}{x_2} = \frac{8}{20}$$

$$\frac{8}{x_2} = \frac{8}{20} \Rightarrow x_2 = 20$$

فكرة المثال الاتي : توضيح للملاحظة أعلاه

مثال 21

إذا كان: $x \propto \frac{1}{y}$ ، $y \propto \frac{1}{z}$ اثبت أن: $x \propto z$

الحل:

$$x \propto \frac{1}{y} \Rightarrow x = \frac{k_1}{y}, k_1 \in \mathbb{R}^+$$

$$y \propto \frac{1}{z} \Rightarrow y = \frac{k_2}{z}, k_2 \in \mathbb{R}^+$$

$$x = \frac{k_1}{\frac{k_2}{z}} \Rightarrow x = k_1 \times \frac{z}{k_2} \Rightarrow x = \frac{k_1}{k_2} \times z$$

وبفرض ان $\frac{k_1}{k_2} = L$ يكون : $\therefore x = L \times z$

وبما ان كلاً من k_1 ، k_2 ثابت لذلك فان $L = \frac{k_1}{k_2}$ يكون مقداراً ثابتاً أيضاً.

إذن : $x = L \times z \Rightarrow x \propto z$

ملاحظة: اذا ارتبط متغير أول بعلاقة عكسية مع متغير ثاني وكان المتغير الثاني مرتبط مع متغير ثالث بعلاقة عكسية فان المتغير الأول يرتبط بالمتغير الثالث بعلاقة طردية.

فكرة المثال الاتي: تعلم طريقة استخراج نوع العلاقة بين متغيرين مرتبطين بعلاقة ما

مثال 22 ليكن كل من x, y متغيرين حقيقيين مرتبطين بعلاقة ما، فإذا أخذ المتغيران x, y القيمتين (10,22) على الترتيب وازدادت قيمة x لتصبح 15 وصاحب ذلك نقصان في قيمة y لتصبح 12 فهل إن علاقة التغير بين x, y علاقة عكسية؟

الحل: $y_1 = 22$ ، $y_2 = 12$ $x_1 = 10$ ، $x_2 = 15$

سوف نحل المثال بالاعتماد على العلاقة الآتية

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}, \quad \frac{y_2}{y_1} = \frac{12}{22} = \frac{6}{11}$$

$$\therefore \quad \frac{x_1}{x_2} \neq \frac{y_2}{y_1}$$

أي أن العلاقة ليست علاقة تغير عكسي.

ملاحظة: يمكن حل السؤال بطريقة أخرى باستخدام العلاقة الآتية $\frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1}$

$$\frac{x_1}{y_2} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}, \quad \frac{x_2}{y_1} = \frac{15}{22}$$

$$\frac{x_1}{y_2} \neq \frac{x_2}{y_1}$$

أي أن العلاقة ليست علاقة تغير عكسي.

فكرة المثالين الآتيين: تطبيق عملي عن مفهوم التغير العكسي

مثال 23 من المعلوم ان حجم الغاز يتغير عكسياً مع الضغط المسلط عليه عند ثبوت درجة الحرارة. فإذا كان لدينا غاز محصور في حاوية بحجم $480\ cm^3$ ومضغوط بما يساوي 12 ضغط جوي فكم يكون حجم الغاز إذا تم تخفيف الضغط المسلط عليه إلى 8 ضغط جوي؟

الحل: - الطريقة الأولى: بفرض إن حجم الغاز هو V وإن الضغط المسلط عليه يكون: -

$$V \propto \frac{1}{P} \;\Rightarrow\; V = \frac{k}{P} \Rightarrow \; k = V.P$$
$$k = 480.(12) = 5760$$

لذلك يكون $\quad 5760 = V.8$

$$\therefore \text{الحجم الجديد للغاز } V = \frac{5760}{8} = 720\ cm^3$$

طريقة ثانية: -

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow \frac{480}{V_2} = \frac{8}{12} \Rightarrow \text{الحجم الجديد للغاز } V_2 = \frac{480.(12)}{8}$$
$$= 720\ cm^3$$

مثال 24

اذا كان مقدار سرعة تدفق الماء v من فوهة خرطوم رش المياه يتغير عكسيا مع مربع طول نصف قطر فوهة الخرطوم r، وكانت $v = 5\ cm^3/sec$ عندما $r = 3\ cm$ جد قيمة v عندما $r = 2.5cm$

الحل : الطريقة الأولى: -

$$\because v \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow v = \frac{k}{r^2}$$

$$5 = \frac{k}{3^2} \Rightarrow 5 = \frac{k}{9} \Rightarrow k = 5 \times 9 = 45$$

$$\therefore v = \frac{45}{(2.5)^2} = \frac{45}{6.25} = \frac{4500}{625} = 7.2\ cm^3/sec$$

الطريقة الثانية: -

$$\therefore \frac{v_1}{v_2} = \frac{(r_2)^2}{(r_1)^2}$$

$$\frac{5}{v_2} = \frac{(2.5)^2}{3^2} \Rightarrow \frac{5}{v_2} = \frac{6.25}{9} \Rightarrow 6.25v_2 = 45$$

$$v_2 = \frac{45}{6.25} = \frac{4500}{625} = 7.2\ cm^3/sec$$

تمرين 2-3

1. إذا كان $\sqrt[3]{y} \propto \sqrt[2]{x}$ وكانت $y = 27$ عندما $x = 4$ فما قيمة x عندما $y = -1$ ؟
2. إذا كان y يتغير عكسياً تبعاً لتغير x وكان $x = 16$ عندما $y = 25$ ، فما قيمة y عندما $x = 20$ ؟
3. إذا كان x يتغير عكسياً تبعاً لتغير y^2 وكان $x = 8$ عندما $y = 3$ فما قيمة y عندما $x = 2$ ؟

4. إذا كان x يتغير طردياً تبعاً لتغير y وكان $y = 10$ عندما $x = 5$ ، فما قيمة y عندما $x = 15$ ؟

5. إذا كان $x \propto y$ أثبت أن $x^2 - y^2 \propto x \times y$.

6. إذا كانت $7x + 5y \propto 4x + 3y$ اثبت أن $x \propto y$.

7. إذا كان $x \propto y$ و $v \propto w$ اثبت أن $x \times v \propto y \times w$.

8. اثبت ان $y \propto s$ إذا علمت ان:

$$\frac{y}{s} = \frac{21x - y}{7x - s}$$

9. إذا علمت ان الزمن الذي يفصل بين رؤية البرق وسماع صوت الرعد يتغير طردياً تبعاً للمسافة بينك وبين موقع البرق، فاذا سمعت صوت البرق بعد 15 ثانية من مشاهدة الرعد في منطقة تبعد عنك مسافة $5\ km$ اكتب المعادلة التي تمثل العلاقة بين المسافة وزمن سماع الرعد ثم جد المسافة بينك وبين موقع البرق إذا سمعت الرعد بعد 20 ثانية من رؤية البرق.

10. أسطوانة دائرية قائمة حجمها ثابت V ، فاذا كان ارتفاعها h يتغير عكسياً مع مربع طول نصف قطرها r وكان $h = 27\ cm$ عندما $r = 10.5\ cm$، جد h عندما $r = 15.75\ cm$.

1. يتغير عدد الحواسيب المصنعة تغيراً طردياً مع عدد ساعات عمل خط الإنتاج. فاذا علمنا ان المعمل أنتج 65 حاسوباً في 13 ساعة عمل فما نسبة الحواسيب المصنعة إلى ساعات الإنتاج؟
2. المقاومة الكهربائية تتناسب عكسياً مع التيار المار بالدائرة فاذا علمت ان هناك دائرة كهربائية فيها مجموعة مقاومات قيمتها 5Ω يمر بها تيار مقداره $10\ Ampere$. جد ثابت التناسب.
3. تقطع حافلة مسافة $636\ km$ في 6 ساعات. إذا افترضنا أن المسافة المقطوعة تتناسب طردياً مع وقت السفر، فكم تقطع الحافلة في 8 ساعات؟
4. سيارة تتحرك بسرعة $60\ km/h$ تستغرق 20 دقيقة لقطع مسافة معينة، فما السرعة اللازمة التي تتحرك بها السيارة لقطع هذه المسافة خلال 15 دقيقة فقط؟
5. زرع حامد بعض البذور، وبعد أن ظهرت فوق سطح الأرض، وجد أن ارتفاعها يتغير طرديا مع عدد الأيام، فما نسبة نموها بالنسبة للزمن إذا علمت انها بلغت ارتفاع $8\ cm$ في غضون 10 أيام؟
6. حنفيتان تملآن حوض ماء بزمن مقداره 30 ساعة فكم ساعة تستغرق 6 حنفيات ليمتلئ الحوض؟
7. يعمل خالد في توزيع الصحف اليومية، ويتناسب إيراده طردياً مع عدد الصحف التي يوزعها، فما إيراده لكل صحيفة يوزعها إذا علمت انه تقاضى 25 ألف دينار عندما وزع 1000 صحيفة؟
8. يستطيع 7 رجال انجاز بناء حائط خلال 12 ساعة فاذا تغيب احدهم فما الوقت اللازم للعمال المتبقين لإنجاز العمل ؟
9. بعد 10 دقائق من نزول غواصة من قارب البحث، كانت على عمق 1650متراً من السطح، فما هو الوقت اللازم للغواصة للنزول إلى عمق 3000 متراً ؟
10. استعمل عامر 12 لتراً من الدهان لطلاء جدار مساحته $357\ m^2$ ، فكم لترا من الدهـــــان

يحتاج اليه لطلاء جدار اخر مساحته $840\ m^2$ ؟

الفصل الرابع
حساب المثلثات
Trigonometry

البنود (Sections)

Vocabulary	الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
Degree mode	DEG	النظام الستيني
Radian mode	RAD	النظام نصف القطري
Sine ,Cosine ,Tangent	sin, cos, tan	الجيب، الجيب تمام، الظل
Secent,cosecant,cotangent	$sec\ , csc\ , cot$	القاطع،القاطع تمام، الظل تمام
Pythagorean theorem	مربع الوتر=مجموع مربعي الضلعين القائمين	مبرهنة فيثاغورس
Trigonometric Point	$P(\cos\theta, \sin\theta)$	النقطة المثلثية
Central angle measure	$\theta = \frac{L}{r}$, l طول القوس , r نصف القطر	قياس الزاوية المركزية
Pi Fixed ratio	$\pi = \frac{22}{7} = 3.14$	النسبة الثابتة π
The sum of the angles of atriangle	$m\sphericalangle A + m\sphericalangle B + m\sphericalangle C = 180°$	قانون مجموع زوايا المثلث

الفصل الرابع
حساب المثلثات
Trigonometry

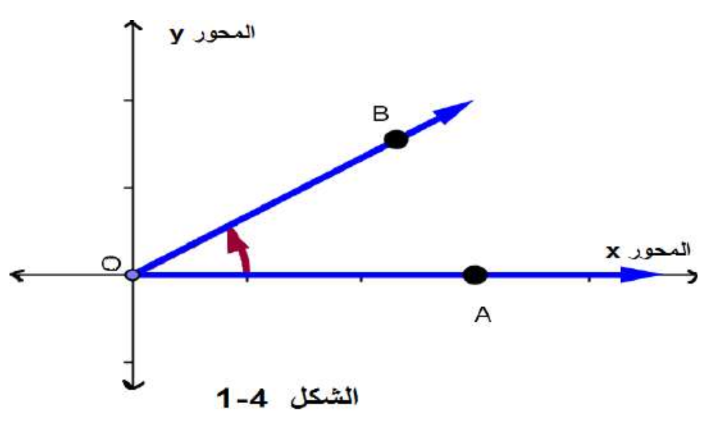
1-4 تمهيد Preface

حساب المثلثات هو علم عربي إسلامي، ويعترف جميع علماء الرياضيات الأوربيين بأن المسلمين أسهموا الإسهام الأساسي في إنشاء علم المثلثات، وأن الفضل يرجع لهم في جعله علماً منتظماً ومستقلاً عن علم الفلك،ومن العلماء المسلمين الذين ساهموا في علم حساب المثلثات ابن سنان البتاني وأبو الوفاء البوزجاني و أبو العباس التبريزي، وأبو جعفر الخازن في القرن الرابع الهجري، والبيروني، والعالم الأندلسي الجليل أبو إسحاق إبراهيم بن يحيى النقاش المعروف بابن الزرقالي عند الغربيين...وغيرهم كثيرون .

لعلم المثلثات تطبيقات كثيرة، منها حساب المسافات والزوايا في إنشاء المباني والطرق وفي صناعة المحركات وأجهزة التلفزيون والأثاث وملاعب الكرة، وكذلك وفي حساب المسافات الجغرافية والفلك، وفي أنظمة الاستكشاف بالأقمار الصناعية.

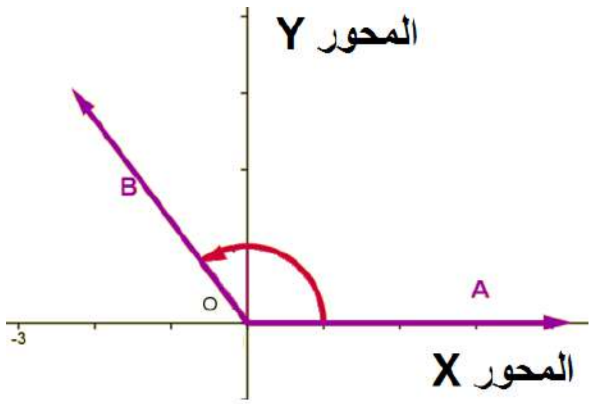
2-4 الزاوية الموجهة بالوضع القياسي Directed Angle in standard Status

قبل التعرف على الزاوية الموجهة لا بد لنا ان نذكر ان الزاوية المستوية هي الزاوية الناشئة من تقاطع شعاعين في نقطة تسمى نقطة التقاطع (رأس الزاوية) والشعاعان هما ضلعي الزاوية. ويرمز للزاوية بأحد الرمزين $(\sphericalangle ABC, A\hat{B}C)$ وكما في الشكل $1-4$ فان $\sphericalangle AOB$ زاوية مستوية، وان O يمثل رأس الزاوية والشعاعان A, B يمثلان ضلعي الزاوية.



الشكل 4-1

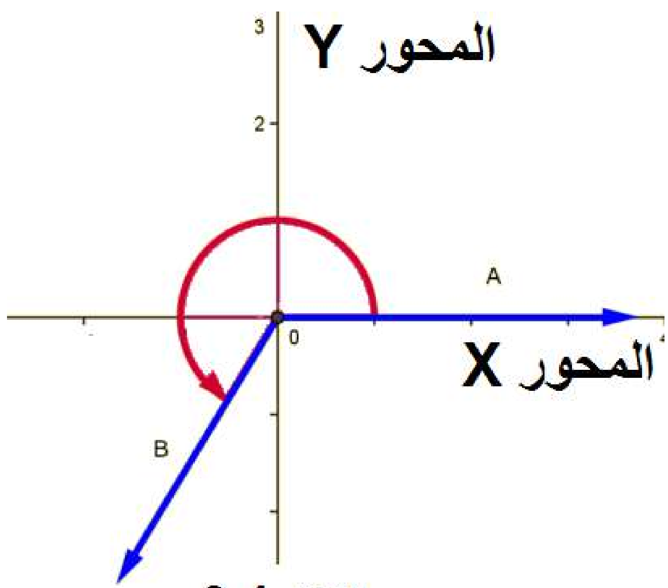
ان الزاوية الموجهة بالوضع القياسي هي الزاوية التي يقع رأسها على نقطة الأصل في المحورين الاحداثيين والذين هما المحور x والمحور y وينطبق ضلعها الاول على المحور x اما الضلع الاخر فانه يقع في أحد الارباع كما في الشكل $(4-1)$ حيث نلاحظ ان الزاوية $\measuredangle AOB$ يكون رأسها على نقطة الاصل وهي نقطة تقاطع المحورين O وان الشعاع OA يقع على المحور x والشعاع OB يقع في الربع الاول.



الشكل 4-2

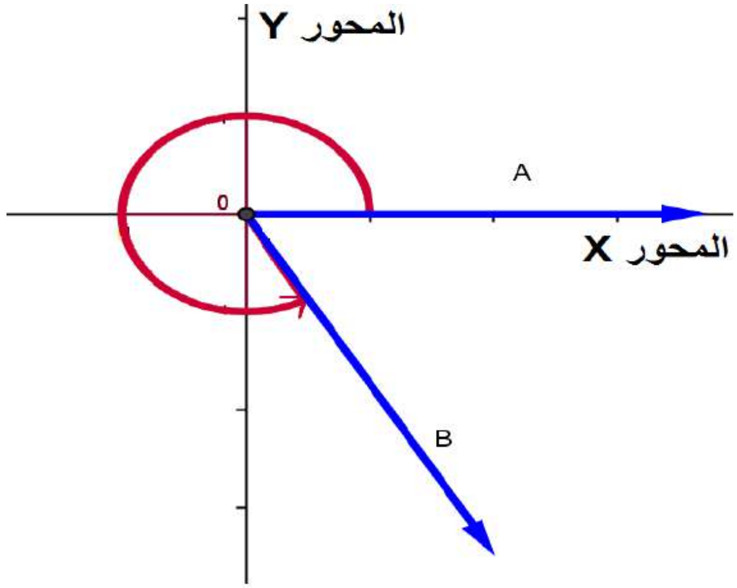
اما إذا كان الشعاع الثاني يقع في الربع الثاني فان الزاوية الموجهة تكون كما في الشكل$4-2$مع ثبات الشعاع الاول على المحور x .

وإذا كان الشعاع الثاني يقع في الربع الثالث فان الزاوية الموجهة تكون كما في الشكل $4-3$



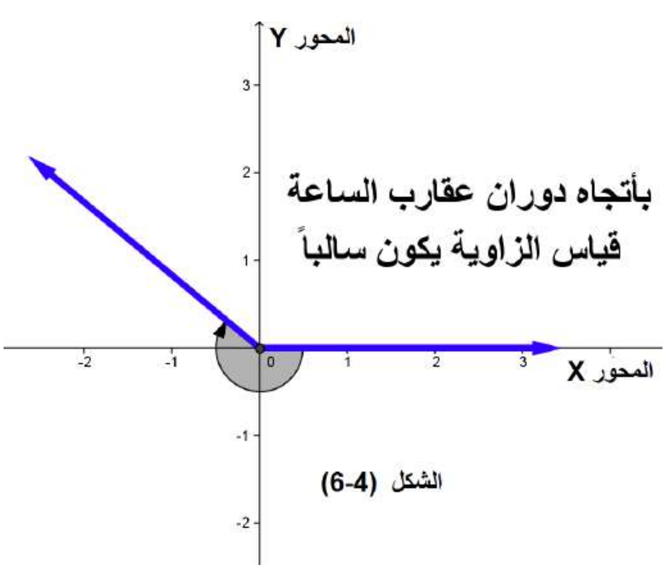
الشكل 4-3

وإذا كان الشعاع الثاني يقع في الربع الرابع فان الزاوية الموجهة تكون كما في الشكل $4-4$

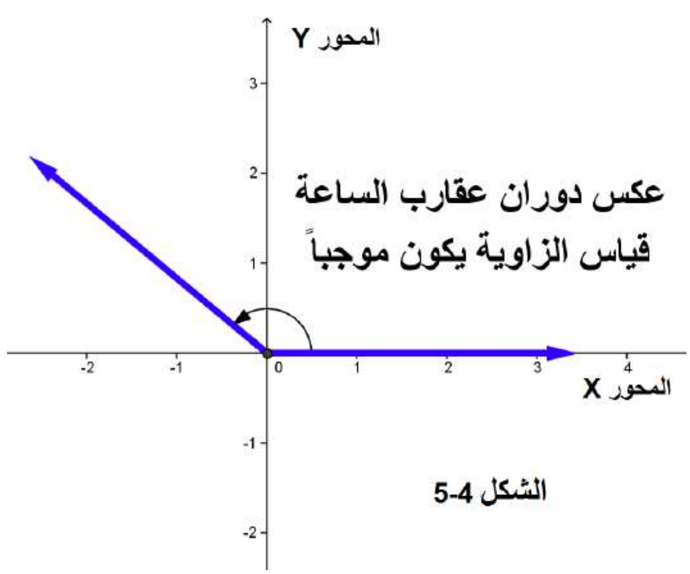


الشكل 4-4

يكون للزاوية الموجهة اتجاهين يمكن تحديدهما بالاعتماد على اتجاه حركة الضلع الثاني للزاوية، فإذا كان اتجاه الدوران بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة فان الزاوية موجبة القياس وكما في الشكل $4-5$ اما إذا كان الدوران بنفس اتجاه دوران عقارب الساعة فان الزاوية تكون سالبة القياس وكما في الشكل $4-6$.



الشكل (6-4)

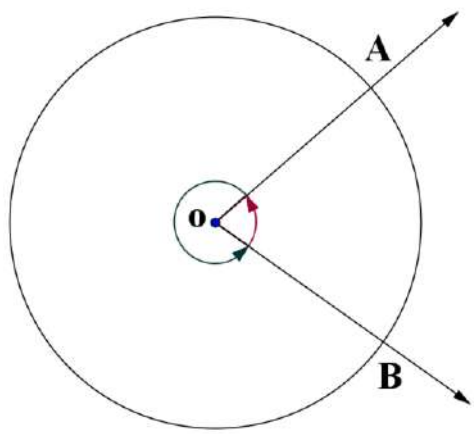


الشكل 5-4

3-4 الزاوية المركزية وقياس الزاوية The Central Angle & Angle measure

1-3-4 الزاوية المركزية The Central Angle :

الزاوية المركزية هي الزاوية التي يقع رأسها على مركز دائرة ويقطع الشعاعان المولدان للزاوية محيط الدائرة، وتكون الزاوية المقابلة للقوس على محيط الدائرة وكما في الشكل $4-7$:



الشكل 4-7

لاحظ وجود زاويتين مركزيتين الأولى هي الزاوية المركزية المقابلة للقوس الأصغر $\measuredangle AOB$ والثانية هي الزاوية المركزية المقابلة للقوس الكبير ولها نفس الاسم ولذا يقتضي الإشارة الى القوس الذي تقابله الزاوية المركزية عند التعامل معها.

2-3-4 قياس الزاوية: Angle Measure

تقاس الزوايا بنظامين هما: -

1. القياس الستيني (التقدير الستيني) (Degree Measure)
2. القياس الدائري (التقدير الدائري أو النصف قطري)(Radian Measure)

القياس الستيني للزاوية

وهو النظام الذي بموجبه تقاس الزاوية ووحدة القياس فيه هي الدرجات. والدرجة تمثل الزاوية المركزية التي يحصر شعاعيها قوساً طوله يعادل $\frac{1}{360}$ من محيط الدائرة التي مركزها رأس الزاوية.

وهذه الزاوية اتخذت كوحدة قياس في النظام الستيني (التقدير الستيني) وسميت (درجة)ستينية واحدة يرمز لها بالرمز $1°$ وقسمت الدرجة الستينية الواحدة الى 60 وحدة متساوية تسمى كل منها (دقيقة) واحدة يرمز لها بالرمز $1'$ كما قسمت الدقيقة الواحدة الى 60 وحدة متساوية تسمى كل منها (ثانية) ويرمز لها بالرمز $1''$. وحيث أن الزاوية القائمة تقابل قوساً طوله يساوي ربع محيط الدائرة لذلك فأن قياس الزاوية القائمة هو $90°$، وبالمثل يكون قياس الزاوية المستقيمة$180°$...... وهكذا.

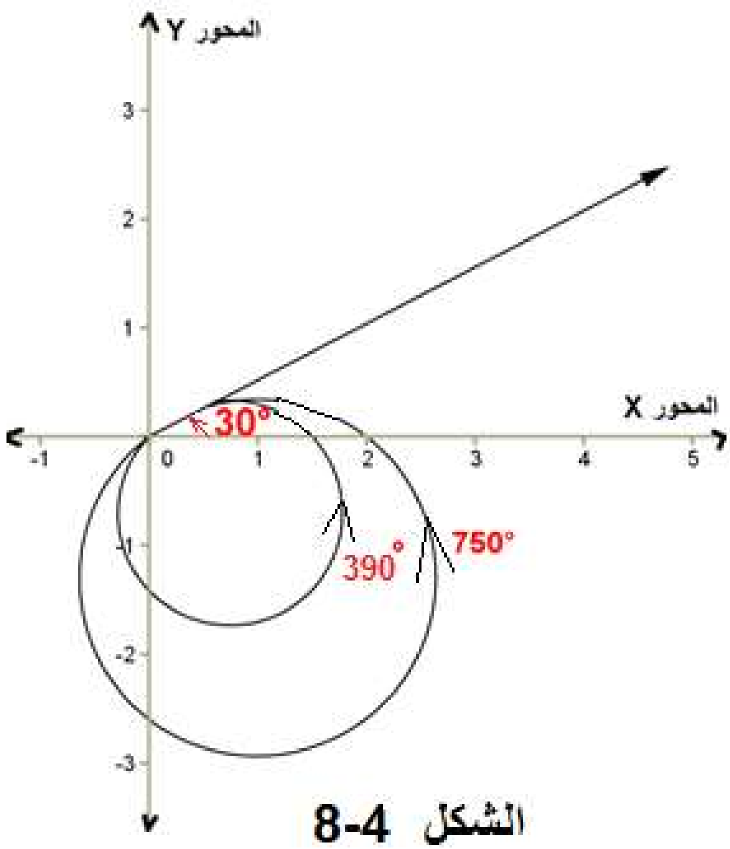
ومن الجدير بالذكر ان الزاوية المركزية التي قيمتها ($45°$) تساوي قوس يساوي ثمن محيط الدائرة والزاوية ($90°$) تقابل قوس يساوي ربع محيط الدائرة والزاوية ($135°$) تقابل قوس يساوي ثلاثة اثمان محيط الدائرة وهكذا بقية الزوايا في القياس الستيني.

قد يدور الشعاع بأحد الاتجاهين (الموجب أو السالب) دورة كاملة أو عدة دورات وبهذا نحصل على قياس آخر أو عدة قياسات للزاوية ذاتها. فمثلاً إذا كان قياس الزاوية $\measuredangle AOB = 30°$ فان:

$30° + 360° = 390°$ هو قياس آخر لها

$30° + 2 \times (360°) = 750°$ هو قياس آخر لها

وهكذا يتضح لنا أن الزاوية الواحدة لها عدد غير منته من القياسات الموجبة أو السالبة كما موضح في الشكل $(4-8)$:



الشكل 4-8

فكرة المثال الاتي: الدرجة تساوي 60 دقيقة والدقيقة تساوي 60 ثانية ومن المفيد كتابة الزاوية $360°$ بالصيغة $359°59'60''$ عند اجراء العمليات الحسابية على قياسات الزوايا.

في الشكل $4-9$ إذا كان قياس الزاوية $((\beta = 122°35'40''))$ (تقرأ هذه الزاوية بيتا) جد قياس الزاوية θ .

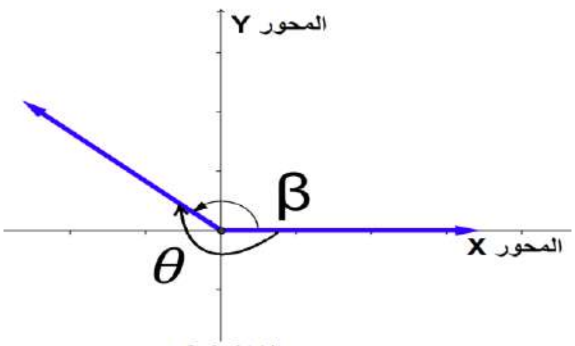
الحل :

$$360° - 122°35'40'' = 237°24'20''$$

ونوضح في أدناه كيفية إيجاد ناتج عملية الطرح

$$\begin{array}{r} 359°59'60'' \\ 122°35'40'' \\ \hline 237°24'20'' \end{array}$$

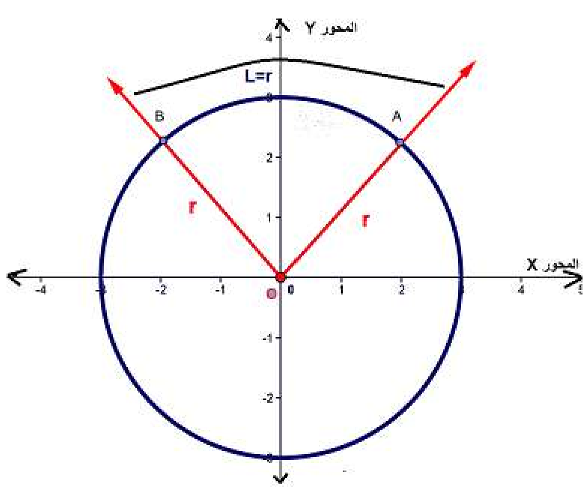
ومن الجدير بالذكر ضرورة كتابة قياس الزاوية بالشكل $(-237°24'20'')$حيث تشير الاشارة السالبة الى كون الزاوية تدور باتجاه عقربي الساعة.



الشكل 4-9

القياس الدائري (أو النصف قطري)

وهو النظام الآخر لقياس الزوايا (التقدير الدائري) وتسمى وحدة القياس فيه الزاوية نصف قطرية حيث ان الزاوية المركزية التي يحصر ضلعيها قوساً طوله يساوي طول نصف قطر تلك الدائرة (r) وكما موضح في الشكل $4-10$:



الشكل 4-10

لاحظ أن قياس $\measuredangle AOB$ تساوي (1) زاوية نصف قطرية وبناء عليه فإن: -

- الزاوية المركزية التي يحصر ضلعيها قوس طوله (l) يساوي قطر تلك الدائرة اي $(2r)$ تكون قيمتها بالقياس الدائري (2) زاوية نصف قطريه
- الزاوية المركزية التي يحصر ضلعيها قوس طوله (l) يساوي 3 أمثال نصف قطر تلك الدائرة أي $(3r)$ تكون قيمتها بالقياس الدائري (3) زاوية نصف قطريه .... وهكذا

مما سبق نستنتج ان: -

$$\boxed{\text{القياس الدائري للزاوية} = \frac{\text{طول القوس المقابل لها}}{\text{طول نصف قطر الدائرة}}}$$

أي إننا لو رمزنا للقياس الدائري للزاوية بالرمز d ولطول القوس بالرمز l يكون

$$\boxed{|\boldsymbol{d}| = \frac{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{r}}}$$

ويرمز لوحدة القياس في القياس الدائري (أي للزاوية النصف قطرية الواحدة) بالرمز Rad .

4-4 العلاقة بين القياسين الستيني والدائري

The Relationship between Degree Measure and Radian Measure

كما نعلم فإن محيط دائرة نصف قطرها (r) هو $2\pi r$ وهذا المحيط يقابل زاوية مركزية مقدارها بالقياس الستيني $(360°)$ ويصبح قياسها بالقياس الدائري:

$$\frac{l}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \ rad = 2\pi \, rad \ \equiv 6.28 \ rad$$

اي ان(2π) من الزوايا النصف قطرية تعادل $360°$ بالقياس الستيني ومن ذلك نستنتج ان: -

$$1° = \frac{2\pi}{360°} rad = \frac{\pi}{180°} rad$$

$$1 \, rad = \frac{360°}{2\pi} = 57°17'42"$$

ملاحظة:

$$360° = 2\pi \ rad$$

$$180° = \pi \ rad$$

$$90° = \frac{\pi}{2} \ rad$$

فإذا كان $(\theta°)$ هو القياس الستيني، d هو القياس الدائري (نصف القطري) فإنه بالإمكان استخدام التناسب الطردي الاتي في التحويل من أحد القياسين الى الآخر .

$$\boxed{\frac{d}{\theta°} = \frac{\pi}{180°}}$$

فكرة المثال الاتي: التدرب على استخدام التناسب الطردي في التحويل من القياس الدائري الى القياس الستيني

حوَل الزوايا التالية الى التقدير الستيني:

$$1)\ \frac{\pi}{4} \qquad 2)\ \frac{3\pi}{4} \qquad 3)\ \frac{1}{2}$$

الحل:

$$1)\ \frac{\pi}{4}$$

$$\because \quad \frac{d}{\theta°} = \frac{\pi}{180°}$$

$$\therefore \quad \frac{\frac{\pi}{4}}{\theta°} = \frac{\pi}{180°}$$

نطبق خاصية حاصل الضرب التبادلي (حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين)

$$\frac{\pi}{4} \times 180° = \theta° \times \pi$$ نقسم طرفي المعادلة على π

$$\therefore \quad \theta° = \frac{180°}{4} = 45°$$

$$2)\ \frac{3\pi}{4}$$

$$\because \quad \frac{d}{\theta°} = \frac{\pi}{180°}$$

$$\therefore \quad \frac{\frac{3\pi}{4}}{\theta°} = \frac{\pi}{180°}$$

نطبق خاصية حاصل الضرب التبادلي (حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين)

$$\therefore \frac{3\pi}{4} \times 180° = \theta° \times \pi$$ نقسم طرفي المعادلة على π

$$\therefore \quad \theta° = \frac{3 \times 180°}{4} = 135°$$

3) $\frac{1}{2}$

لابد في البداية من كتابة الزاوية بالقياس الدائري وكالاتي:

$$\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{\pi}{2 \times \frac{22}{7}} = \frac{7\pi}{44}$$

$$\because \frac{d}{\theta°} = \frac{\pi}{180°}$$

$$\therefore \frac{\frac{7\pi}{44}}{\theta°} = \frac{\pi}{180°}$$

نطبق خاصية حاصل الضرب التبادلي (حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين)

$$\frac{7\pi}{44} \times 180° = \theta° \times \pi$$ نقسم طرفي المعادلة على π

$$\therefore \theta° = \frac{7 \times 180}{44} = \frac{1260}{44} \cong 28.64°$$

فكرة المثال الاتي: التدرب على استخدام التناسب الطردي في التحويل من القياس الستيني الى القياس الدائري

حوّل قياسات كلاً من الزوايا الآتية الى التقدير الدائري

$a)\ 45°$ $\qquad b\ )\ 60°$ $\qquad c)\ 90°$

الحل:

$$a) \because \frac{d}{\theta°} = \frac{\pi}{180°}$$

$$\therefore \frac{d}{45°} = \frac{\pi}{180°}$$

نطبق خاصية حاصل الضرب التبادلي (حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين)

$$d \times 180° = 45° \times \pi$$

$$\therefore d = \frac{45° \times \pi}{180°} = \frac{\pi}{4}\ Rad$$

$$b)\ \because \frac{d}{\theta°} = \frac{\pi}{180°}$$

$$\therefore \frac{d}{60°} = \frac{\pi}{180°}$$

نطبق خاصية حاصل الضرب التبادلي (حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين)

$$d \times 180° = 60° \times \pi$$

$$\therefore d = \frac{60° \times \pi}{180°} = \frac{\pi}{3}\ Rad$$

$$c)\ \because \frac{d}{\theta°} = \frac{\pi}{180°}$$

$$\therefore \frac{d}{90°} = \frac{\pi}{180°}$$

نطبق خاصية حاصل الضرب التبادلي (حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين)

$$d \times 180° = 90° \times \pi$$

$$\therefore d = \frac{90° \times \pi}{180°} = \frac{\pi}{2}\ Rad$$

فكرة المثال الاتي: من الممكن إيجاد قياس الزاوية المركزية إذا علم نصف قطر الدائرة وطول القوس المقابل للزاوية.

زاوية مركزية طول قوسها $(10cm)$ وطول نصف قطرها (28cm) جد الزاوية المركزية بالتقدير الستيني.

الحل: نلاحظ ان المطلوب في السؤال هو مقدار الزاوية بالتقدير الستيني وللوصول الى ذلك لابد ان نحصل على مقدار الزاوية بالتقدير الدائري ثم نقوم بتحويل الزاوية الى التقدير الستيني

$$\because\ d = \frac{L}{r}$$

$$\therefore d = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

$$\because \frac{d}{\theta°} = \frac{\pi}{180°}$$

$$\frac{\frac{5}{14}}{\theta^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

نطبق خاصية حاصل الضرب التبادلي (حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين)

$$\theta \times \pi = 180^\circ \times \frac{5}{14}$$

$$\theta = \frac{180^\circ \times \frac{5}{14}}{\pi} = \frac{64.286}{3.14} = 20.473^\circ$$

فكرة المثال الاتي: من الممكن إيجاد نصف قطر دائرة إذا علم قياس أحد زواياها المركزية وطول القوس المقابل لها.

جد نصف قطر دائرة زاويتها المركزية (35°) وطول القوس المقابل لها يساوي $(21cm)$.

الحل: لكي نجد نصف القطر لابد من تحويل الزاوية الى القياس النصف قطري كالاتي:

$$\because \frac{d}{\theta^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$\therefore \frac{d}{35^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

نطبق خاصية حاصل الضرب التبادلي (حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين)

$$\therefore d \times 180 = \pi \times 35^\circ$$

$$d = \frac{\pi \times 35}{180}$$

$$\therefore d = \frac{7\pi}{36}$$

$$\because \quad d = \frac{L}{r}$$

$$\therefore \frac{7\pi}{36} = \frac{21}{r}$$

نطبق خاصية حاصل الضرب التبادلي (حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين)

$$7\pi\, r = 21 \times 36$$

$$r = \frac{21 \times 36}{7\pi} = \frac{756}{7 \times 3.14} = \frac{756}{21.98} = 34.395\ cm$$

فكرة المثال الاتي: من الممكن إيجاد طول القوس المقابل للزاوية المركزية إذا علم قياس الزاوية ونصف قطر الدائرة.

مثال6 زاوية مركزية قياسها $(40°)$ فما طول القوس الذي تقابله إذا كان طول نصف قطر الدائرة $(27cm)$؟

الحل:

$$\because \frac{d}{\theta°} = \frac{\pi}{180°}$$

$$\therefore \frac{d}{40°} = \frac{\pi}{180°}$$

نطبق خاصية حاصل الضرب التبادلي (حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين)

$$\therefore\ d \times 180 = \pi \times 40°$$

$$d = \frac{\pi \times 40°}{180} = \frac{2\pi}{9}\ rad$$

$$\because d = \frac{l}{r}$$

$$\frac{2\pi}{9} = \frac{l}{27}$$

نطبق خاصية حاصل الضرب التبادلي (حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين)

$$2\pi \times 27 = 9l$$

$$l = \frac{2\pi \times 27}{9}$$

$$l = 6\pi$$

$$l = 6 \times (3.1416)$$

$$l = 18.8496\ cm$$

1. حول الى التقدير الستيني كل من الزوايا الاتية:

$(1)\,\frac{5\pi}{7}$ $(2)\,\frac{3}{2}$ $(3)\,\frac{2\pi}{3}$ $(4)\,\frac{\pi}{6}$

2. حول الى التقدير الدائري كل من الزوايا الاتية:

$(1)40°$ $(2)90°$ $(3)135°$ $(4)225°$

3. دائرة نصف قطرها $(36cm)$ جد طول القوس المقابل للزاوية المركزية التي قياسها $(20°)$.

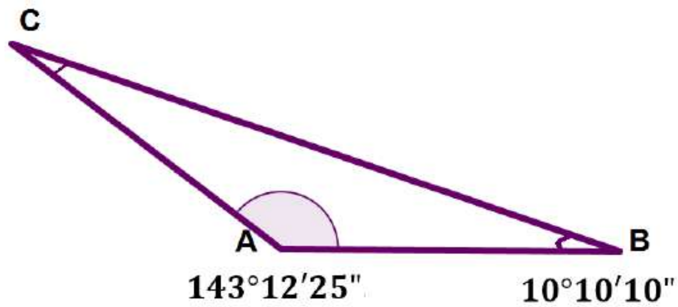
4. زاوية مركزية قياسها $\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ في دائرة وتقابل قوسا طوله (12cm) فما نصف قطر هذه الدائرة؟

5. زاوية مركزية طول القوس المقابل لها في دائرة نصف قطرها (6cm) يساوي $(10cm)$ جد الزاوية بالتقدير الستيني.

6. حدد موقع الزوايا الاتية في الارباع على المحورين الاحداثيين

$(1)\,\frac{4\pi}{3}$ $(2)90°$ $(3)235°$ $(4)\,\frac{5\pi}{2}$

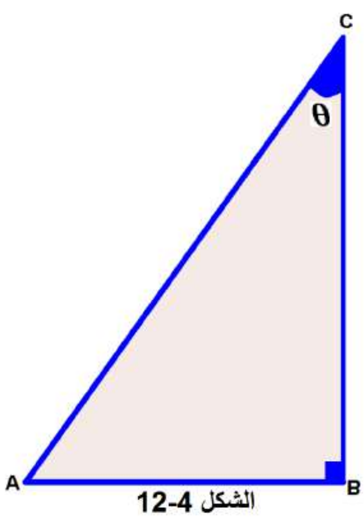
7. في المثلث ABC إذا كان قياس الزاوية A يساوي $143°12'25"$ وكان قياس الزاوية B يساوي $(10°10'10")$ جد قياس الزاوية C. كما في الشكل $4-11$:



الشكل $4-11$

4-5 بعض العلاقات الاساسية في المثلثات Some Essential Trigonometric Relations

في الشكل $4-12$ المثلث ABC قائم الزاوية في B ، فيه الضلع $\overline{AB}$ يقابل الزاوية θ ولذلك نسميه (المقابل) والضلع $\overline{BC}$ يقع بجوار الزاوية θ ولذلك نسميه (المجاور) ومن المعروف انه في المثلث القائم الزاوية يسمى الضلع $\overline{AC}$ المقابل للزاوية القائمة (الوتر).



الشكل 12-4

كنت قد درست في الصف الثالث المتوسط بعض العلاقات الأساسية في المثلثات وهي:

1. جيب الزاوية $sine$

$$\boxed{1)\ \ sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{AC}}$$

2. جيب تمام الزاوية $cosine$

$$\boxed{2)\ \ cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{BC}{AC}}$$

3. ظل الزاوية $tangent$

$$\boxed{3)\ \ tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{AB}{BC}}$$

4. مبرهنة فيثاغورس والتي تنص على ان مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي الضلعين القائمين

أي:
$$\boxed{4)\ \ (AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2}$$

الان لو قسمنا طرفي مبرهنة فيثاغورس على $(AC)^2$ نحصل على

$$\frac{(AC)^2}{(AC)^2} = \frac{(AB)^2}{(AC)^2} + \frac{(BC)^2}{(AC)^2}$$

$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = 1$$

5. ومن تعويض العلاقتين الاولى والثانية فيها نتوصل الى ان:

$$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$$

وحيث ان $(\cos\theta)^2 = \cos^2\theta \quad , \quad (\sin\theta)^2 = \sin^2\theta$ لذلك يمكننا التوصل الى العلاقة الاتية

$$\boxed{5)\quad sin^2\,\theta + cos^2\,\theta = 1}$$

6. من العلاقة (3)

$$tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

وبقسمة البسط والمقام على AC نحصل على العلاقة الرياضية الاتية:

$$tan\theta = \frac{\left(\frac{AB}{AC}\right)}{\left(\frac{BC}{AC}\right)}$$

ومن تعويض العلاقتين الاولى والثانية فيها نحصل على العلاقة الجديدة الاتية:

$$\boxed{6)\ \ tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

مقلوبات النسب المثلثية

سوف نتعرف في هذا البند على مقلوبات النسب المثلثية وكالاتي: -

1. قاطع الزاوية $(secant)$ وهو مقلوب النسبة المثلثية $(cosine)$ اي

$$\boxed{7)\ sec\theta = \frac{1}{cos\theta}}$$

2. قاطع تمام الزاوية (cosecant) وهو مقلوب النسبة المثلثية $(sine)$ اي

$$\boxed{8)\ cos\theta = \frac{1}{\sin\theta}}$$

3. ظل تمام الزاوية (cotangent) وهو مقلوب النسبة المثلثية $(tangent)$اي

$$\boxed{9)\ \ cot\theta = \frac{1}{tan\,\theta} = \frac{cos\,\theta}{sin\,\theta}}$$

كما يمكننا التوصل الى العلاقات المثلثية الجديدة الاتية: -

$$10)\ \boxed{\begin{array}{l} sec^2\,\theta - tan^2\,\theta = 1 \\ csc^2\,\theta - cot^2\,\theta = 1 \end{array}}$$

فكرة المثال الاتي: المثال الاتي /إيجاد النسب المثلثية باستخدام العلاقات الاساسية

مثال 7 في الشكل 13-4 المثلث ABC قائم الزاوية في B وفيه: $\mathrm{AB} = 5\mathrm{cm}$

$\mathrm{BC} = 12\mathrm{cm}$ ، جد قيمة كل مما يأتي:

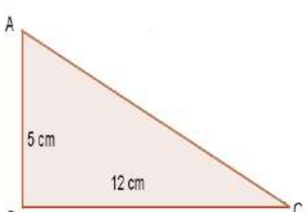
$$\sin \mathrm{C}\ ,\cos \mathrm{C}\ ,\sin \mathrm{A},\tan \mathrm{A},\csc \mathrm{A},\cot \mathrm{A}$$

الحل: نجد طول الضلع AC باستخدام مبرهنة فيثاغورس

$$(\mathrm{AC})^2 = (\mathrm{AB})^2 + (\mathrm{BC})^2$$

$$(\mathrm{AC})^2 = (5)^2 + (12)^2 = 25 + 144 = 169$$

$$\therefore AC = 13\ cm$$



الشكل 13-4

$$\sin C = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{5}{13}\ ,\ \ \cos C = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{12}{13}$$

$$tan\,A = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{12}{5}\ \ ,\ \ \ sin\,A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{12}{13}$$

$$cot\,C = \frac{cos\,C}{sin\,C} = \frac{12}{5}\ \ ,\ \ \ csc\,A = \frac{1}{sin\,A} == \frac{13}{12}$$

فكرة المثال الاتي: إيجاد النسب المثلثية باستخدام العلاقة $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$

إذا كانت θ زاوية في مثلث قائم بحيث $\cos\theta = \frac{1}{2}$ جد:

$\sin\theta, \tan\theta, \csc\theta, \sec\theta$

الحل:

$$\because sin^2\theta + cos^2\theta = 1$$

$$\therefore sin^2\theta + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$sin^2\theta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

بجذر الطرفين نتوصل الى ان:

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\because\ tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1} = \sqrt{3}$$

$$\because\ csc\theta = \frac{1}{sin\theta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\because\ sec\theta = \frac{1}{cos\theta} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \times \frac{2}{1} = 2$$

1.اذاكان ABC مثلث قائم الزاوية في B وفيه $AC = 10cm, BC = 8\ cm$ جد

1) $tan\, C\ \ ,\ \ cot\, A$

2) $sin\, C\ \ ,\ \ cos\, A\ \ ,\ \ csc\, C$

3) $\sin^2 A\ + \cos^2 A$

4) $tan\, A + sin\, C$

2.اذا كانت θ زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية بحيث $0° \leq \theta \leq 90°$ ، $sin\, \theta = \frac{3}{4}$ جد

$cos\, \theta, tan\, \theta, sec\, \theta, cot\, \theta$

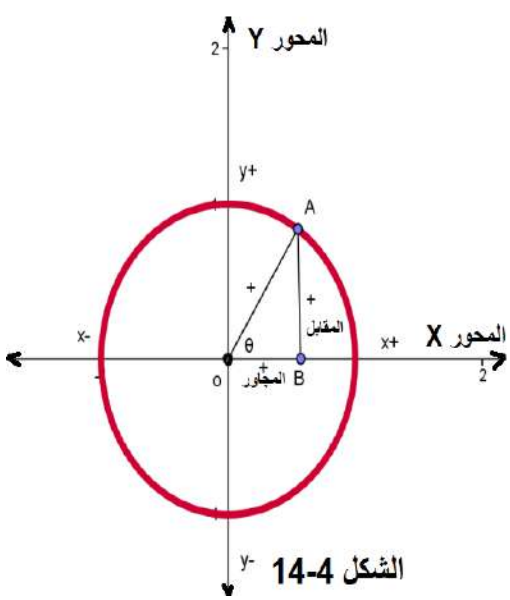
3. اثبت صحة المتطابقات المثلثية الاتية:

1) $sin^3\, \theta + sin\, \theta \cos^2 \theta = sin\theta$

2) $1 + tan^2\, \theta = sec^2\, \theta$

3) $cos^2\, \theta - sin^2\, \theta = 2\, cos^2\, \theta - 1$

6-4 دائرة الوحدة (Unit circle)



الشكل 14-4

هي دائرة مرسومه في المستوي الأحداثي مركزها نقطة الاصل O ونصف قطرها يساوي وحدة واحدة. إن دائرة الوحدة هذه تساعدنا في التعرف على قيم النسب المثلثية آنفة الذكر لأي زاوية كانت (الزاوية θ حادة ، منفرجة ، سالبة ، موجبة) حيث يوضع رأس الزاوية في نقطة الاصل وأحد ضلعيها ينطبق على الاتجاه الموجب للمحور x أما الضلع الثاني للزاوية فسيقع في واحد من الأرباع الأربعة ويقطع محيط الدائرة في نقطة معينة ولتكن A ، العمود النازل من تلك النقطة A على المحور x يقطعه في نقطة ولتكن B ، العمود $\overline{AB}$ يحدد المقابل للزاوية أما المقطع $\overline{OB}$ للمحور x فيحدد المجاور للزاوية θ ، أما الوتر فيمثله نصف قطر الدائرة وطوله وحدة واحدة ويؤخذ موجباً دائماً . ويمكن توضيح ذلك بالرسم كما في الشكـــــــــــل 14-4 المجاور:

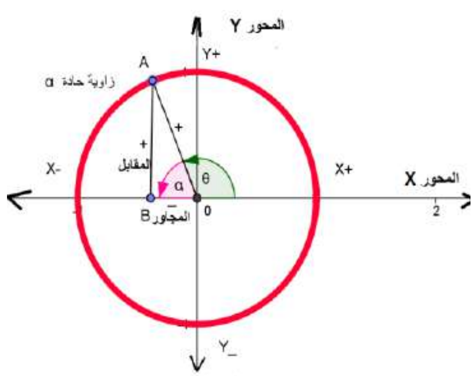
1) الزاوية θ في الربع الأول $(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2})$

لاحظ الشكل $4-14$ اعلاه تجد ان المقابل للزاوية θ يكون موجباً لأنه يقابل الجزء الموجب للمحور y كما أن المجاور يكون موجباً أيضاً لأنه ينطبق على الجزء الموجب للمحور x وعليه تكون النسب المثلثية جميعها موجبة في الربع الأول. كما نلاحظ من هذا الشكل أن الزاوية OAB هي زاوية متممة للزاوية θ اي انها تساوي $\frac{\pi}{2}-\theta$ وإن المقابل لها هو المجاور للزاوية θ وهذا يقودنا الى إن:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) &= \cos\theta \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) &= \sin\theta \\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) &= \cot\theta \end{aligned}}$$

2) الزاوية θ في الربع الثاني $(\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi)$

لاحظ الشكل $4-15$ تجد ان المقابل للزاوية θ يكون موجباً لأنه يقابل الجزء الموجب للمحور y أما المجاور للزاوية θ فيكون سالباً لأنه ينطبق على الجزء السالب للمحور x وعليه تكون جميع النسب المثلثية سالبة عدا $\sin\theta$ ومقلوبها $\csc\theta$ حيث يكونا موجبين. كما نلاحظ من هذا الشكل ان:



الشكل 15-4

$$\sin\theta = \sin(\pi-\propto) = \sin\propto$$

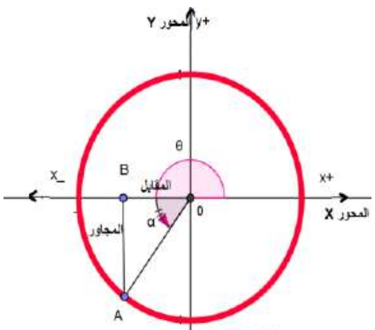
$$\cos\theta = \cos(\pi-\propto) = -\cos\propto$$

$$\tan(\pi-\propto) = \frac{\sin(\pi-\propto)}{\cos(\pi-\propto)} = \frac{\sin\propto}{-\cos\propto} = -\tan\propto$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\pi-\propto) &= \sin\propto \\ \cos(\pi-\propto) &= -\cos\propto \\ \tan(\pi-\propto) &= -\tan\propto \end{aligned}}$$

3) الزاوية θ في الربع الثالث $(\pi < \theta \le \frac{3\pi}{2})$

لاحظ الشكل $4-16$ تجد ان المقابل للزاوية θ يكون سالباً لأنه يقابل الجزء السالب للمحور y كما إن المجاور للزاوية θ يكون سالباً أيضاً لأنه ينطبق على الجزء السالب للمحور x وعليه تكون جميع النسب المثلثية سالبه عدا $tan\,\theta$ ومقلوبها $\cot\theta$ حيث يكونا موجبين. كما نلاحظ من هذا الشكل أن:



الشكل 16-4

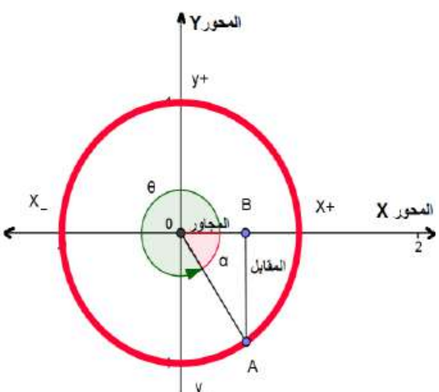
$$\mathbf{sin}\theta = \sin(\pi+\propto) = -\sin\propto$$
$$\mathbf{cos}\,\theta = \sin(\pi+\propto) = -\cos\propto$$
$$\boldsymbol{tan}\ (\pi-\propto) = \frac{\sin(\pi+\propto)}{\cos(\pi+\propto)}$$
$$= \frac{-\sin\propto}{-\cos\propto} = \tan\propto$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{sin}(\boldsymbol{\pi}+\propto) = -\mathbf{sin}\propto\\ \mathbf{cos}(\boldsymbol{\pi}+\propto) = -\mathbf{cos}\propto\\ \boldsymbol{tan}(\boldsymbol{\pi}+\propto) = \boldsymbol{tan}\propto\end{array}}$$

4) الزاوية θ في الربع الرابع $(\frac{3\pi}{2} < \theta \le 2\pi)$

لاحظ الشكل $4-17$ تجد ان المقابل للزاوية θ يكون سالباً لأنه يقابل الجزء السالب للمحور y بينما المجاور للزاوية θ يكون موجباً لأنه ينطبق على الجزء الموجب للمحور x وعليه تكون جميع النسب المثلثية سالبه عدا $cos\,\theta$ ومقلوبها $\sec\theta$ حيث يكونا موجبين. كما نلاحظ من هذا الشكل أن:

$$\sin\theta = \sin(2\pi-\propto) = -\sin\propto$$
$$\cos\theta = \cos(2\pi-\propto) = \cos\propto$$
$$\tan(\pi-\propto) = \frac{\sin(2\pi-\propto)}{\cos(2\pi-\propto)} = \frac{-\sin\propto}{\cos\propto} = -\tan\propto$$



الشكل 17-4

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{sin}(2\boldsymbol{\pi}-\propto) = -\mathbf{sin}\propto\\ \mathbf{cos}(2\boldsymbol{\pi}-\propto) = \mathbf{cos}\propto\\ \mathbf{tan}(2\boldsymbol{\pi}-\propto) = -\boldsymbol{tan}\end{array}}$$

ملاحظات:

1) من خلال دائرة الوحدة يمكن أن نستنتج ما يأتي (لاحظ الشكل 4-18)

- إذا كانت θ تقع بالربع الأول تكون جميع اشارات النسب المثلثية موجبة.
- إذا كانت θ تقع بالربع الثاني تكون اشارة كل من $\sin\theta, \csc\theta$ فقط موجبة.
- إذا كانت θ تقع بالربع الثالث تكون اشارة كل من $\tan\theta, \cot\theta$ فقط موجبة.
- إذا كانت θ تقع بالربع الرابع تكون اشارة كل من $\cos\theta, \sec\theta$ فقط موجبة.

الشكل 18-4

2) قيم النسب المثلثية للزوايا بالصورة $(n \times 90 \pm \theta)$

الربع الاول	$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$	$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta$
الربع الثاني	$\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos\theta$	$\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin\theta$	$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = -\cot\theta$
الربع الثاني	$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$	$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$	$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$
الربع الثالث	$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$	$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$	$\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$
الربع الثالث	$\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta) = -\cos\theta$	$\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta) = -\sin\theta$	$\tan(\frac{3\pi}{2} - \theta) = \cot\theta$
الربع الرابع	$\sin(\frac{3\pi}{2} + \theta) = \cos\theta$	$\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) = \sin\theta$	$\tan(\frac{3\pi}{2} + \theta) = -\cot\theta$
الربع الرابع	$\sin(2\pi - \theta) = -\sin\theta$	$\cos(2\pi - \theta) = \cos\theta$	$\tan(2\pi - \theta) = -\tan\theta$
الربع الاول	$\sin(2\pi + \theta) = \sin\theta$	$\cos(2\pi + \theta) = \cos\theta$	$\tan 2(\pi + \theta) = \tan\theta$

الشكل $19 - 4$

3) بملاحظة تفاصيل دائرة الوحدة في الشكل 19-4 أعلاه يمكننا التوصل بسهولة الى أن: -

الاحداثي y يمثل $\sin\theta$ والاحداثي x يمثل $\cos\theta$ وذلك يقودنا الى ان: -

$\sin 0° = 0$ $\qquad$ $\sin 90° = 1$

$\cos 0° = 1$ $\qquad$ $\cos 90° = 0$

$\tan 0° = 0$ $\qquad$ $\tan 90° = \frac{1}{0} = \infty$ غير معرف

$\sin 180° = 0$ $\qquad$ $\sin 270° = -1$

$\cos 180° = -1$ $\qquad$ $\cos 270° = 0$

$\tan 180° = 0$ $\qquad$ $\tan 270° = \frac{1}{0} = \infty$ غير معرف

وتسهيلاً للحفظ ندرج في الشكل 20-4 ادناه جدولاً بالنسب المثلثية للزوايا الخاصة بدائرة الوحدة.

θ	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin\theta$	0	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	∞	0	∞	0

الشكل $4 - 20$

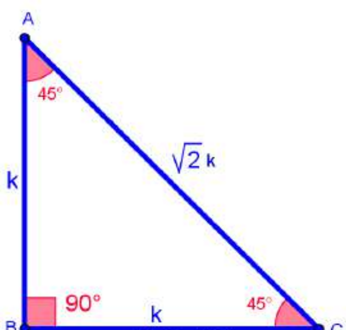
نلاحظ من الجدول أعلاه ان الزاويتين $360°$ و $0°$ زاويتان لهما قيم النسب المثلثية نفسها وذلك لكونهما زاويتين متطابقتين في دائرة الوحدة.

(7-4) النسب المثلثية للزوايا الخاصة Trigonometric Ratios for Special Angles

1) الزاوية التي قياسها $45° = \frac{\pi}{4}$

نرسم المثلث ABC القائم الزاوية في B ومتساوي الساقين كما في الشكل $4 - 21$ فيكون قياس كل من الزاويتين الباقيتين يساوي $45°$ كما يكون

$$AB = BC = k$$



الشكل 21-4

وحسب مبرهنة فيثاغورس يكون:

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$(AC)^2 = (k)^2 + (k)^2 = 2k^2$$

$$AC = \sqrt{2}k$$

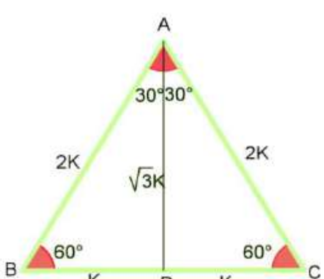
$$\sin 45° = \frac{k}{\sqrt{2}k} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$$

$$\cos 45° = \frac{k}{\sqrt{2}k} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$$

$$\tan 45° = \frac{k}{k} = \mathbf{1}$$

2) الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{6} = 30°$ والزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{3} = 60°$

نرسم مثلثاً متساوي الأضلاع طول ضلعه $2k$ وبالطبع تكون قياسات زواياه متساوية وقياس كل منها يساوي $60°$ ثم نرسم $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ كما في الشكل $4 - 22$ ونلاحظ أن:



الشكل 22-4

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle BAD = 30°$$

$BD = DC = k$ وحدة طول

وباستخدام مبرهنة فيثاغورس نتوصل الى أن: $AD = \sqrt{3}k$

$$\sin 30° = \frac{k}{2k} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \qquad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}k}{2k} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}k}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{k}{\sqrt{3}k} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}k}{k} = \sqrt{3}$$

وتسهيلاً للحفظ ندرج في ادناه جدولاً بالنسب المثلثية للزوايا الخاصة كلها :

θ	0°	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$	180° π	270° $\frac{\pi}{2}$	360° π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0

فكرة المثال الاتي: التدرب على حفظ قيم النسب المثلثية للزوايا الخاصة عن طريق التعويض بقيمها في مسائل متنوعة.

مثال9

جد القيمة العددية للمقادير الاتية:

1) $\cos 60^\circ\ \cos 30^\circ + \sin 60^\circ\ \sin 30^\circ$

2) $(\sin 45^\circ + \cos 45^\circ)^2 + (\sin 30^\circ + \cos 60^\circ)^2$

الحل:

1) $\cos 60^\circ\ \cos 30^\circ + \sin 60^\circ\ \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2) $(\sin 45^\circ + \cos 45^\circ)^2 + (\sin 30^\circ + \cos 60^\circ)^2$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 + (1)^2 \quad = \left(\sqrt{2}\right)^2 + (1) = 3$$

تمرين
3-4

1. جد القيمة العددية لما يأتي:

1) $sin45°(cos^2 60° + csc^2 30°)$

2) $sin\,60° \,.\, cos\,30° + sin\,30° \;.\, cos\,60°$

3) $(\tan^2 45 + \sin^2 30\,)\;(\cos^2 30° + \tan^2 60°)$

4) $\dfrac{(\sin^2 30° + \cos^2 60\,°)}{(2\tan^2 45° - \cos^2 30°)}$

2. اثبت صحة المتطابقات الاتية:

1) $sin\,30°\;\; cos\,60° + cos\,30°\;\; sin\,60° = 1$

2) $sec^2\,45° - tan^2\,45° = 1$

(3) $\sin^2 45° + \sin^2 60° - cos60° = \cos^2 30$

3. سارية علم ترتفع (12m)عن سطح ارض مستوية مثبتة بسلك تثبيت يصنع زاوية مع الأرض مقدارهــا $30°$ جد طول السلك.

4. هبت عاصفة على شجرة تبعد عن جدار (13m)فسقطت متكئة على الجدار من قمتـه فصنعت زاوية مع الأرض مقدارها $45°$ فما طول الشجرة وما ارتفاع الجدار.

5. ليكن ABC مثلث قائم الزاوية في C وإحدى زواياه الحادة تساوي $60°$ جد

a) مقدار الزاوية الحادة الأخرى

b) طول الضلعين القائمين

c) قيم النسب المثلثية الاتية: $\cos A, \cos B, \tan B$

6. (θ) زاوية مركزية تقع على مركز دائرة وتقابل قوس طوله (15cm)جد نصف قطر الدائرة إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

7. دائرة نصف قطرها $(8cm)$ وتقع على مركزها زاوية مركزية مقابلة لقوس طوله $(12cm)$ جد قياس الزاوية ثم استخرج: $\sin\theta\;, \cos\theta\,, tan\,\theta\;, \sec\theta\,, \csc\theta\,, \cot\theta$

8. مهندس مساحة يستخدم جهاز الثيودولايت لإيجاد ارتفاع بناية تبعد عنه $(20m)$ توصل الى ان البناية ترتفع بزاوية قدرها $53°$ عن مستوى سطح الأرض جد ارتفاع هذه البناية. (استخدم الحاسبة اليدوية).

1. جد القيمة العددية لكل مما يأتي:

$a)\quad \sin 30° \cos 60° + \cos 30° \sin 60°$

$b)\quad (\cos 30° - \sin 45°)\,(\sin 60° + \cos 45°)$

$c)\quad (\tan 30° - \tan 60°)\,(2 \tan 60° \tan 45°)$

$d)\quad \dfrac{4 \sin^2 30° - \tan^2 45°}{2 \tan 30° + 3 \sin 30°}$

$e)\quad 3 \sin^2 90° - 4 \cos^2 0° + \tan^2 45°$

2. برهن صحة المتطابقات المثلثية الآتية:

$a)\quad \sin^2 60° + \cos^2 60° = 1$

$b)\quad 2 \sin^3 45° - \sin 45° + \tan 45° = 2 \sin 30°$

$c)\quad \dfrac{\tan 45° - \tan 30°}{1 + \tan 45° \tan 30°} = \dfrac{\tan 60° - \tan 45°}{\tan 45° + \tan 60°}$

3. المثلث ABC قائم الزاوية في C فيه $\overline{BC} = 24cm$, $A = 25cm$ جد قيمة المقدار

$$\sin^2 B + \cos^2 B$$

4. إذا كانت $\sin\theta = \frac{3}{5}$ وكانت $0° \le \theta \le 90°$. جد قيمة كلاً من $\cos\theta , \tan\theta$.

5. اعتماداً على المعلومات المعطاة عن الزاوية θ في كل مما يلي . جد قيم النسب المثلثية الستة

$$\sin\theta , \cos\theta , \tan\theta , \sec\theta , \csc\theta , \cot\theta$$

$a)\quad \sin\theta = \dfrac{1}{6} , \quad 90° \le \theta \le 180°$

$b)\quad \cos\theta = \dfrac{-1}{3} , 180° \le \theta \le 270°$

$c)\quad \tan\theta = \dfrac{-3}{4} , 270° \le \theta \le 360°$

الفصل الخامس

المنطق الرياضي

(*Mathematical Logic*)

البنود (Sections)

Vocabulary	الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
Proposition	$P, Q, \ldots$	التقرير
True	T	صائب ، صحيح
False	F	خاطئ ، مغلوط
Negation Tool	$\sim(not)$	أداة النفي
Conjucation Tool	$\wedge\ (and)$	أداة العطف او الوصل
Disjunction To	$\vee\ (or)$	أداة الفصل
Stipulatio Tool	$\Rightarrow (if \ldots then)$	أداة الاشتراط
Implication Tool	$\Leftrightarrow (if\ and\ only\ if)$	أداة االاقتضاء الشرطي
Tautology		التوافق (تحصيل حاصل)
Contradiction		التناقض
Equivalent	$\equiv$	أداة تكافؤ التقارير
ural Numbers	$\mathbb{N}$	مجموعة الاعداد الطبيعية
nteger Numbers	$\mathbb{Z}$	مجموعة الاعداد الصحيحة
Real Numbers	$\mathbb{R}$	مجموعة الاعداد الحقيقية
Solution set	$S.s$	مجموعة الحل

الفصل الخامس

المنطق الرياضي(*Mathematical Logic*)

(1-5) تمهيد Preface

المنطق الرياضي (Mathematical Logic) هو علم يُعنى بدراسة مبادئ ومعايير صحة الاستدلال ويتعامل مع المسببات والاستنتاجات ويستخدم في معظم الأنشطة الفكرية والعلوم البحتة والتطبيقية، كما أنه يعنى بالمعنى الحديث دراسة طرق البرهان واستخدامها ونستطيع ان نقدم التعريف الاتي ايضاً: -

المنطق الرياضي: هو أحد فروع الرياضيات ويهتم بدراسة العبارات والربط بينها وتحديد ما إذا كان استنتاجاً معيناً منها خاطئاً أو صائباً حسب قواعد محددة باستخدام رموز وإشارات ومصطلحات متعارف عليها بين الرياضيين.

يقوم المنطق الرياضي على مبدأ قبول ثلاثة قوانين فكرية أساسية هي: -

1) قانون الذاتية (الهوية) $[\boldsymbol{Identity\ law}]$
والذي يحكم الفكر بمقتضاه ان الشيء المعيّن هو هو بذاته مهما اختلف سياقه ويعبر عن هذا القانون تعبيراً رمزياً هو $(\mathbf{A} \equiv \mathbf{A})$ وتعني ان القضية $\mathbf{A}$ هي ذاتها القضية $\mathbf{A}$.

2) قانون عدم التناقض $[\boldsymbol{Non-contradiction\ law}]$
والذي يحكم الفكر بمقتضاه انه لا يمكننا ان نصف شيئاً ما بصفة وننفيها عنه في آن واحد. ويعبر عن هذا القانون تعبيراً رمزياً هو: -القضية $(\sim\mathbf{A} \wedge \mathbf{A})$ خاطئة دائماً
مثلاً: -اذا كان العدد الطبيعي a عدداً زوجياً فلا يمكن ان يكون في الوقت نفسه غير زوجي .

3) قانون الثالث المرفوع
وهو الذي يحكم الفكر بمقتضاه بانه يجب ان يتصف الشيء اما بصفة معينة او بنقيضها ولا ثالث لهذين الاحتمالين فمثلاً العدد الطبيعي (25) اما ((يقبل القسمه على 5)) أو ((لا يقبل القسمه على 5)) وليس هنالك احتمال ثالث يصلح ان نصف به هذا العدد من حيث قابلية القسمة على 5. ويعبر عن هذا القانون تعبيراً رمزياً هو: -القضية $(\sim\mathbf{A} \vee \mathbf{A})$ صائبة دائماً.

(2-5) العبارات المنطقية Logical Statements

التقرير (Proposition)

هو عبارة تتضمن موضوعاً وفعلاً كما هي الجملة في اللغة العربية، غير أن التقرير ينحصر فقط في الجمل الخبرية التي تتضمن خبراً، ونستطيع التعبير بشكل أدق عن التقرير بأنه الجملة الخبرية التي تحتمل الصحة أو الخطأ فقط .

فكرة المثال الاتي: الجمل الخبرية الاتية تمثل تقاريراً لأنها تحتمل الصحة أو الخطأ فقط

1) العدد 7 أولي
2) 11=6+4
3) الجو اليوم سيكون ماطراً

اما الجمل الإنشائية التي تستخدم صيغ الأمر والنهي والاستفهام والتعجب فلا نسميها تقاريراً.

فكرة المثال الاتي: الجمل الخبرية الاتية لا تمثل تقاريراً لأنها تستخدم صيغ الأمر والنهي والاستفهام والتعجب.

1. **(اقرأ كتابك)**
2. **(لا تكذب في حديثك)**
3. **(كم تبعد البصرة عن بغداد؟)**
4. **(ما أجمل نهر دجلة!).**

التقارير البسيطة و المركبة : (Simple and Compound Proposition)

- **يسمى التقرير بسيطاً إذا كان عبارة عن جملة خبرية واحدة فقط، بينما يسمى مركباً إذا احتوى أكثر من جملة خبرية.**

فكرة المثال الاتي: الجمل الخبرية الاولى تمثل تقريراً بسيطاً لأنه يحتوي جملة خبرية واحدة بينما الجملتين الخبريتين الثانية والثالثة تمثل تقريراً مركباً لاحتوائهما على جملتين خبريتين.

1) (العدد 35 يقبل القسمة على 5) تقرير بسيط .

2)(العدد 35 يقبل القسمة على 5 ويقبل القسمة على 7) تقرير مركب .

3)(المثلث ABC متساوي الاضلاع أو قائم الزاوية) تقرير مركب.

كما اننا نستطيع أن نقول عن التقرير انه ((تقرير بسيط)) إذا لم يكن ممكناً تجزئته الى جملتين خبريتين مفيدتين بإحدى أدوات الربط، فيما نقول عن التقرير انه ((تقرير مركب)) إذا كان مؤلفاً من مجموعة من القضايا البسيطة المربوطة بواحدة أو أكثر من أدوات الربط. وحيث ان التقارير تحتمل الصحة أو الخطأ كما أسلفنا فانه: ـ

- **إذا كان التقرير P صائباً نرمز له بالرمز T**
- **إذا كان التقرير P خاطئاً نرمز له بالرمز F**
- **نسمي كلاً من T ، F (قيمة الصدق) للعبارة P**

حيث: (صائبة او صحيحة (T=True و (خاطئة او مغلوطة F=False)

وعندما نريد التحقق من صحة أو خطأ مجموعة من التقارير مرتبطة مع بعضها بعلاقة نستخدم جداول الصواب (Truth Tables)وهي جداول يتم أنشائها من قبلنا كالاتي :

P
T
F

P	Q
T	T
T	F
F	T
F	F

P	Q	R
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

أدوات الربط (Connecting tools)

تستخدم الرموز $(\sim, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow)$ للربط بين التقارير وتسمى (أدوات الربط)

أولاً) - أداة النفي(Negation Tool)

أداة النفي في علم المنطق يرمز لها بالرمز $(\sim)$ فاذا كانت P عبارة صائبة فأن نفيها $(\sim P)$ عبارة خاطئة وإذا كانت P خاطئة فان نفيها $(\sim P)$ عبارة صائبة وكما موضح في الجدول الاتي حيث نضع في العمود الأول احتمالات قيمة الصدق للعبارة P فيما يعطي العمود الثاني قيمة الصدق للعبارة المنفية.

P	$\sim P$
T	F
F	T

فكرة المثال الاتي: نفي الجملة الصائبة يعطي جملة خاطئة ونفي الجملة الخاطئة يعطي جملة صائبة.

- النيل من أنهار آسيا جملة خاطئة (F)، نفيها هو: ليس النيل من أنهار آسيا جملة صائبة (T)
- تمد الشمس الأرض بالدفء وهي جملة صائبة (T)، نفيها هو: لا تمد الشمس الأرض بالدفء وهي جملة خاطئة (F)

نفي التقارير

ان نفي التقرير P هو التقرير $(\sim P)$، كما أن تنفيذ عملية النفي لغوياً على التقرير يكون بوضع عبارة (ليس صحيحاً أن) فضلاً عن أن عملية المساواة $(=)$ تنفى بالرمز $(\neq)$ (لا يساوي) ويتضمن الجدول التالي سرداً للعمليات ونفيها.

العملية	$=$	$>$	$\geq$	$<$	$\leq$	$\wedge$	$\vee$	$\in$	$\subset$
نفيها	$\neq$	$\leq$	$<$	$\geq$	$>$	$\vee$	$\wedge$	$\notin$	$\not\subset$

فكرة المثال الاتي: التمرن على كيفية نفي التقارير البسيطة والمركبة.

أنف التقارير الاتية: -

$a) P: \{1,2,3\} \subset \{1,2,3,4,5\}$

$b) P: \sqrt{3} \in \mathbb{R}$

$c) (P \vee \sim Q) \Rightarrow (P \wedge \sim Q)$

$d) (P \Rightarrow Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$

$e) (P \vee Q) \wedge (\sim Q \wedge R)$

الحل: -

$a) \sim P: \{1,2,3\} \not\subset \{1,2,3,4,5\}$

$b) \sim P: \sqrt{3} \notin \mathbb{R}$

$c) (\sim P \wedge Q) \Rightarrow (\sim P \vee Q)$

$d) (\sim P \Rightarrow \sim Q) \wedge (P \vee Q)$

$e) (\sim P \wedge \sim Q) \vee (Q \vee \sim R)$

ثانياً - أداة العطف أو التزامن (Conjunction Tool)

العلاقة P و Q اي: $P \wedge Q$ تكون صائبة فقط عندما يكون كل من التقريرين P ، Q صائبين ويكون جدول الصواب لها كما في الجدول الاتي :-

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

فكرة المثال الاتي: إيضاح منطقي لجدول الصواب الخاص بأداة العطف

1. ليكن P تقريراً بسيطاً هو (الشمس تشرق صباحاً) وهو تقرير صائب (T) وليكن Q تقريراً بسيطاً اخراً هو $\left(\sqrt{25} = 5\right)$ وهو تقرير صائب ايضاً (T) فان:

التقرير المركب $(P \wedge Q)$ وهو] الشمس تشرق صباحاً و $\left(\sqrt{25} = \pm 5\right)$ [تقرير صائب والسبب

في ذلك هو ان كل من التقريرين صائبين.

2. ليكن P تقريراً بسيطاً هو (الشمس تشرق صباحاً) وهو تقرير صائب (T) وليكن Q تقريراً بسيطاً اخراً هو $\left(\sqrt{25} = 3\right)$ وهو تقرير خاطئ (F) فان:

التقرير المركب $(P \wedge Q)$ وهو] الشمس تشرق صباحاً و$\left(\sqrt{25}=3\right)$ [تقرير خاطئ والسبب في ذلك هو ان أحد التقريرين كان خاطئاً.

3. ليكن P تقريراً بسيطاً هو (الشمس تشرق مساءً) وهو تقرير خاطئ (F) وليكن Q تقريراً بسيطاً اخراً هو $\left(\sqrt{25}=\pm 5\right)$ وهو تقرير صائب (T) فان:

التقرير المركب $(P \wedge Q)$ وهو] الشمس تشرق مساءً و$\left(\sqrt{25}=\pm 5\right)$]تقرير خاطئ والسبب في ذلك هو ان أحد التقريرين كان خاطئاً.

4. ليكن P تقريراً بسيطاً هو (الشمس تشرق مساءً) وهو تقرير خاطئ (F) وليكن Q تقريراً بسيطاً اخراً $\left(\sqrt{25}=3\right)$ وهو تقرير خاطئ ايضاً (F) فان:

التقرير المركب $(P \wedge Q)$ وهو] الشمس تشرق مساءً و$\left(\sqrt{25}=3\right)$ [تقرير خاطئ والسبب في ذلك هو ان كلا التقريرين كان خاطئاً.

ثالثاً – اداة الفصل (Disjunction Tool)

العلاقة P أو Q اي : $P \vee Q$ تكون خاطئة فقط عندما يكون كلاً من التقريرين P, Q خاطئين ويكون جدول الصواب لها كالاتي :-

P	Q	$P \vee Q$
T	*T*	*T*
T	*F*	*T*
F	*T*	*T*
F	*F*	*F*

فكرة المثال الاتي: إيضاح منطقي لجدول الصواب الخاص بأداة الفصل

1. ليكن P تقريراً بسيطاً هو $(3+5=8)$ وهو تقرير صائب (T) وليكن Q تقريراً بسيطاً اخراً هو $(2^3=8)$ وهو تقريرصائب ايضاً (T) فان :

التقرير المركب $(P \vee Q)$ وهو] اما $(3+5=8)$ أو $(2^3=8)$ [تقرير صائب والسبب في ذلك هو ان كل من التقريرين صائبين.

2. ليكن P تقريراً بسيطاً هو $(3+5=8)$ وهو تقرير صائب (T) وليكن Q تقريراً بسيطاً اخراً هو $(3^3=8)$ وهو تقرير خاطئ (F) فان:

التقرير المركب $(\mathbf{P \vee Q})$ وهو [اما $(3+5=8)$ أو$(3^3=8)$]تقرير صائب والسبب في ذلك هو ان احد التقريرين كان خاطئاً.

3. ليكن P تقريراً بسيطاً هو $(3+5=9)$ وهو تقرير خاطئ (F) وليكن Q تقريراً بسيطاً اخراً هو $(2^3=8)$ وهو تقريرصائب (T) فان:

التقرير المركب $(\mathbf{P \vee Q})$ وهو[$(3+5=9)$أو $(2^3=8)$]تقرير صائب والسبب في ذلك هو ان احد التقريرين كان صائباً.

4. ليكن P تقريراً بسيطاً هو $(3+5=9)$وهو تقرير خاطئ (F) وليكن Q تقريراً بسيطاً اخراً $(3^3=8)$ وهو تقرير خاطئ ايضاً (F) فان:

التقرير المركب $(\mathbf{P \vee Q})$ وهو [$(3+5=9)$ أو $(3^3=8)$]تقرير خاطئ والسبب في ذلك هو ان كلا التقريرين كان خاطئاً.

(3-5) إنشاء جداول الصواب للتقارير المركبة Creating Truth Tables

ان قيم الصواب للتقرير المركب يمكن معرفتها عن طريق تدقيق قيم الصواب لمكوناته والطريقة الاسهل والاسرع لتوضيح العلاقة بين قيم الصواب للتقارير المركبة ومكوناتها هي عن طريق انشاء جداول الصواب لها وكما موضح في المثال أدناه: -

فكرة المثال الاتي: التدرب على إنشاء جداول الصواب للتقارير المركبة

أنشئ جدول الصواب للتقرير المركب الآتي $\sim(P \wedge Q)$

الحل: -

P	Q	$P \wedge Q$	$\sim (P \wedge Q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

فكرة المثال الاتي: التدرب على إنشاء جداول الصواب للتقارير المركبة

أنشئ جدول الصواب للتقرير المركب الآتي $P \wedge [(\sim P) \vee (\sim Q)]$

الحل: -

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$(\sim P)\vee(\sim Q)$	$P\wedge[(\sim P)\vee(\sim Q)]$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	F
F	F	T	T	T	F

(1-3-5) التوافق أو (تحصيل حاصل) (Tautology)

يسمى التقرير المركب (توافق) أو (تحصيل حاصل) عندما يحتوي العمود الاخير لجدول الصواب له فقط على الرمز (T) (صائبة) لجميع الحالات.

(2-3-5) التناقض (Contradiction)

يسمى التقرير المركب (تناقض) عندما يحتوي العمود الاخير في جدول الصواب له فقط على الرمز (F) (خاطئة) لجميع الحالات .

فكرة المثال الاتي: في (تحصيل الحاصل) يكون العمود الأخير في جدول الصواب T دائماً وفي (التناقض)يكون العمود الأخير في جدول الصواب F دائماً

1) بين ان التقرير المركب $\sim p \vee (p \vee q)$ يمثل توافقاً (تحصيل حاصل).

P	Q	$\sim P$	$(P \vee Q)$	$\sim P \vee (P \vee Q)$
T	T	F	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	F	T

2) بيّن ان التقرير المركب $(P \wedge Q) \wedge \sim (P \vee Q)$ يمثل تناقضاً.

الحل: -

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\sim(P \vee Q)$	$(P \wedge Q) \wedge \sim(P \vee Q)$
T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F

(4-5) التراكيب الشرطية Conditional Compositions

نستعمل في لغتنا العربية تراكيب شرطية تتكون من جملتين الاولى تسمى جملة الشرط، والثانية تسمى جواب الشرط وتربط بينهما اداة ربط تسمى اداة الشرط مثل قولنا ((أذا كان المثلث متساوي الساقين، فأن العمود النازل من رأسه ينصف قاعدته)). ونلاحظ ان هنالك رابط بين الجملة الاولى والجملة الثانية فالجملة الاولى سبب للجملة الثانية، وإنّ تحقق الجملة الاولى شرط لتحقق الجملة الثانية، كما ان تحقق الجملة الثانية ناتج عن تحقق الجملة الاولى، ويقال في علم المنطق ((ان تحقق الجملة الاولى يؤدي الى تحقق الجملة الثانية)) أو ((ان تحقق الجملة الثانية يقتضي تحقق الجملة الاولى)).

رابعاً)- أداة الاشتراط (Stipulation Tool)

وتسمى اداة الربط (إذا كان... فأن) وتكون الجملة المركبة باستخدام اداة الربط هذه خاطئة فقط عندما تكون المعطيات صائبة والنتيجة خاطئة ويكون جدول الصواب لها كما في الجدول الاتي: -

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

فكرة المثال الاتي: إيضاح منطقي لجدول الصواب الخاص بأداة الاشتراط

1. التقرير المركب $(P \Rightarrow Q)$ وهو ((أذا كان $\sqrt[3]{8} = 2$ فان 2 هو عدد أولي)) تقرير صائب والسبب في ذلك هو ان المعطيات صائبة والنتيجة صائبة ايضاً.

2. ليكن P تقريراً بسيطاً هو $(\sqrt[3]{8} = 2)$ وهو تقرير صائب (T) وليكن Q تقريراً بسيطاً اخراً هو: (1 عدد أولي)وهو تقرير خاطئ (F) فان:

التقرير المركب $(P \Rightarrow Q)$ وهو ((أذا كان $2 = \sqrt[3]{8}$ فان 1 هو عدد أولي)) تقرير خاطئ
والسبب في ذلك هو ان الجملة المركبة باستخدام اداة الربط (إذا كان... فأن) تكون خاطئة فقط عندما تكون المعطيات صائبة والنتيجة خاطئة.

3. ليكن P تقريراً بسيطاً هو $(\sqrt[3]{8} = 3)$ وهو تقرير خاطئ (F) وليكن Q تقريراً بسيطاً اخراً هو: (2 عدد أولي) وهو تقرير صائب (T) فان:

التقرير المركب $(P \Rightarrow Q)$ وهو ((إذا كان $3 = \sqrt[3]{8}$ فان 2 هو عدد أولي)) تقرير صائب
والسبب في ذلك هو ان الجملة المركبة باستخدام اداة الربط (إذا كان... فأن) تكون خاطئة فقط عندما تكون المعطيات صائبة والنتيجة خاطئة.

4. ليكن P تقريراً بسيطاً هو $(3 + 5 = 9)$وهو تقرير خاطئ (F) وليكن Q تقريراً بسيطاً اخراً هو $(3^3 = 8)$ وهو تقرير خاطئ ايضاً (F) فان:

التقرير المركب $(P \Rightarrow Q)$ وهو ((أذا كان $3 + 5 = 9$فان $3^3 = 8$)) تقرير خاطئ
والسبب في ذلك هو الجملة المركبة باستخدام اداة الربط (اذا كان... فأن) تكون خاطئة فقط عندما تكون المعطيات صائبة والنتيجة خاطئة.

5. ان التقرير المركب (اذا كانت $\sqrt{2} = 3$ فأن $5^2 = 200$) يعدّ تقريراً صائباً منطقياً على الرغم من ان جملة الشرط وجملة جواب الشرط خاطئة ونحن نستعمل هذا الاسلوب في حياتنا اليومية فيما يعرف أدبياً بأسلوب (السخرية أو التهكم) اي عندما نقول مثلاً (اذا كان الاسد اليفاً ، فأن الفيل يستطيع الطيران) ولـهذا فأن $\mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{F}$ تعطي تقريراً صائباً .

6. ليكن P: $(1 + 1 = 5)$ وليكن Q: $(3 + 4 = 7)$ تقريران منطقيان وليكن التقرير المركب $p \Rightarrow q$ والذي يمكن التعبير عنه كلامياً بالقول (اذا كان $1 + 1 = 5$ فأن $3 + 4 = 7$) .
من الواضح انه يمكننا ان نحكم على هذا التقرير المركب بانه تقرير صائب منطقيا لان التقرير البسيط المستنتج Q صائب رغم كون التقرير البسيط P خاطئاً، اذ ليس هنالك ربط منطقي في هذا المثال بين P و Q أو بمعنى آخر لا يمكن استنتاج Q من P ولذلك فان $\mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{T}$ تعطي عبارة صائبة.

خامساً – اداة الاقتضاء (Implication Tool)

وتسمى اداة الربط (اذا وفقط اذا) وتكون الجملة المركبة باستخدام اداة الربط هذه صائبة فقط عندما تكون المعطيات و النتيجة من جنس واحد اي كلاهما صائبة او كلاهما خاطئة ويكون جدول الصواب لها كما في الجدول الاتي :-

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

فكرة المثال الاتي: إيضاح منطقي لجدول الصواب الخاص بأداة الاقتضاء (اذا وفقط اذا)

مثال12

1. ليكن P تقريراً بسيطاً هو (اضلاع المربع متساوية بالطول) وهو تقرير صائب (T) وليكن Q تقريراً بسيطاً اخراً هو (للمكعب ستة اوجه) وهو تقرير صائب ايضاً (T) فان:
التقرير المركب $(P \Leftrightarrow Q)$ وهو ((اضلاع المربع متساوية بالطول إذا وفقط إذا كان للمكعب ستة أوجه)) تقرير صائب والسبب في ذلك هو ان المعطيات والنتيجة من جنس واحد اي كلاهما صائب.
2. ليكن P تقريراً بسيطاً هو (اضلاع المربع متساوية بالطول) وهو تقرير صائب (T) وليكن Q تقريراً بسيطاً اخراً هو (للمكعب اربعة اوجه) وهو تقرير خاطئ (F) فان:
التقرير المركب $(P \Leftrightarrow Q)$ وهو (اضلاع المربع متساوية بالطول إذا وفقط إذا كان للمكعب اربعة أوجه) تقرير خاطئ والسبب في ذلك هو ان المعطيات والنتيجة ليست من جنس واحد.
3. ليكن P تقريراً بسيطاً هو (اضلاع المربع مختلفة الاطوال) وهو تقرير خاطئ (F) وليكن Q تقريراً بسيطاً اخراً هو (للمكعب ستة اوجه) وهو تقرير صائب (T) فان:
التقرير المركب $(P \Leftrightarrow Q)$ وهو((اضلاع المربع تكون مختلفة الاطوال إذا وفقط إذا كان للمكعب ستة أوجه)) تقرير خاطئ والسبب في ذلك هو ان المعطيات والنتيجة ليست من جنس واحد.
4. ليكن P تقريراً بسيطاً هو (اضلاع المربع مختلفة الاطوال) وهو تقرير خاطئ (F) وليكن Q تقريراًبسيطاً اخراً هو (للمكعب اربعة اوجه) وهو تقرير خاطئ ايضاً (F) فان:
التقرير المركب $(P \Leftrightarrow Q)$ وهو ((اضلاع المربع مختلفة الاطوال إذا وفقط إذا كان للمكعب أربعة أوجه)) تقرير صائب والسبب في ذلك هو ان المعطيات والنتيجة من جنس واحد اي كلاهما خاطئ.
5. ان التقرير المركب $(\sqrt{2} = 3 \Leftrightarrow 5^2 = 200)$ يعدّ تقريراً صائباً منطقياً على الرغـــم من ان المعطيات والنتائج خاطئة ونحن نستعمل هذا الاسلوب في حياتنا اليومية عندما نريد ان نضع شروطاً مشددة لإنجاز عمل ما فمثلاً عندما يقول لك والدك (سأشتري لك هدية فقط وإذا فقط حصلت على معدل تخرج عالي) فان عبارته تكون (صائبة) (اي يلتزم بمضمونها) في الحالات الاتية:
- حصلت على معدل عالي وأشتري لك والدك الهدية الموعودة (بسبب تحقق الشرط المطلوب للشراء)
- لم تحصل على المعدل العالي ولم يشتري لك والدك الهدية الموعودة (بسبب عدم تحقق الشرط المطلوب للشراء).

ومن الممكن ان تكون عبارة والدك (خاطئة) (اي لا يلتزم بمضمونها) في الحالات الاتية: -
- حصلت على معدل عالي ولم يشتري لك والدك الهدية الموعودة (ربما لأسباب خارجة عن ارادته مثلا).
- لم تحصل على المعدل العالي وأشتري لك والدك الهدية الموعودة (ربما تشجيعا لك ولإظهار محبته رغم عدم حصولك على المعدل المطلوب).

(5-5) الاقتضاء $(Implication)$

الحالة الاولى: -الاقتضاء باتجاه واحد الذي نستعمل فيه اداة الربط (اذا كان... فأن) باتجاه واحد ونرمز له بالرمز($P \Rightarrow Q$)وفيه يكون $(P \Rightarrow Q)$ لكن $(Q \nRightarrow P)$

ولتوضيح ذلك نرمز للتقرير البسيط ($x = 1$) بالرمز P وللتقرير البسيط الاخر $((x^2 = 1))$ بالرمز Q

سنرى انه من الواضح ان التقرير المركب : $P \Rightarrow Q = \{(x = 1) \Rightarrow (x^2 = 1)\}$ تقرير صائب لأن المعطيات صائبة والنتيجة صائبة ايضاً، أما التقرير المركب : $Q \Rightarrow P = \{(x^2 = 1) \Rightarrow (x = 1)\}$

فهو تقرير خاطئ ، لأن المعطيات صائبة و النتيجة خاطئة إذ يقتضي كون $(x^2 = 1)$ ان تكون $(x = \pm 1)$.

الحالة الثانية: الاقتضاء باتجاهين متعاكسين الذي نستعمل فيه اداة الربط ((أذا وفقط أذا)) ونرمز له بالرمز $(\Leftrightarrow)$وفيه يكون $(P \Rightarrow Q)$ و $(Q \Rightarrow P)$ ولتوضيح ذلك نرمز للتقرير البسيط $(x = 1)$ بالرمز P

وللتقرير البسيط الاخر $(x^3 = 1)$ بالرمز Q سنرى انه من الواضح ان التقرير المركب :-

$P \Rightarrow Q = \{(x = 1) \Rightarrow (x^3 = 1)\}$ تقرير صائب لأن المعطيات صائبة والنتيجة صائبة ايضاً في مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، وكذلك التقرير المركب :- $Q \Rightarrow P = \{(x^3 = 1) \Rightarrow (x = 1)\}$

تقرير صائب أيضاً لأن المعطيات صائبة والنتيجة صائبة ايضاً في مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$إذ يقتضي كون $(x^3 = 1)$ ان تكون $(x = 1)$.

فكرة المثال الاتي: التمييز بين الاقتضاء باتجاه واحد والاقتضاء باتجاهين

مثال13 **أختر أحد الرمزين $((\Rightarrow$ أو $\Leftrightarrow))$ لوضعه كاداة ربط بين الجمل الآتية لتصبح تقاريراً صائبةً .**

1) $x = 3$ ، $x^3 = 27$
2) $x < 7$ ، $x < 9$
3) $x^2 \geq 0$ ، $x \leq 0$

الحل :- 1) $x = 3 \Leftrightarrow x^3 = 27$

2) $x < 7 \Rightarrow x < 9$

لأن العكس $x < 9 \Rightarrow x < 7$ يكون تقريراً خاطئاً فمثلاً العدد 8 أقل من العدد 9 لكنه ليس أقل من العدد7

3) $x \leq 0 \Rightarrow x^2 \geq 0$

لأن العكس $x^2 \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$ يكون تقريراً خاطئاً لكون الجذر التربيعي لأي عدد موجب ينتج عددين احدهما موجب والاخر سالب .

(6-5) التقارير المتكافئة[*Equivalent Propositions*]

يقال للتقرير P انه مكافيء منطقياً للتقرير Q اذا كان الحقل الاخير في جدول الصواب لكل منهما متطابقاً

ويرمز للتكافؤ بالرمز $(\equiv)$ ونعبرعن ذلك رمزياً كالتالي $P \equiv Q$.

فكرة المثال الاتي: في التقارير المتكافئة منطقياً يحتوي العمود الأخير في جدول الصواب لكل منهما على قيم متشابهة تماماً

اثبت ان $\sim(P\wedge Q) \equiv \sim P\vee\sim Q$

الحل :- بأنشاء جدولي الصواب لكل من التقريرين نلاحظ تطابق محتويات الحقلين الاخيرين فيهما .

P	Q	$P\wedge Q$	$\sim(P\wedge Q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P\vee\sim Q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

فكرة المثال الاتي: نفس فكرة المثال السابق

اثبت ان: - $\sim(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [P\wedge(\sim Q)\vee[Q\wedge(\sim P)]]$

الحل :- بأنشاء جدول الصواب لكل من القضيتين نلاحظ تطابق محتويات الحقلين الاخيرين.

P	Q	$(P \Leftrightarrow Q)$	$\sim(P \Leftrightarrow Q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	F	F	T
F	F	T	F

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P\wedge(\sim Q)$	$Q\wedge(\sim P)$	$P\wedge(\sim Q)\vee[Q\wedge(\sim P)]$
T	T	F	F	F	F	F
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	F	F

(7-5) الجمل الرياضية المفتوحة [$Open\ Mathimatical\ Sentences$]

في المنطق الرياضي، الجملة المفتوحة هي تقرير بسيط او مركب يحتوي متغيرات، وعلى خلاف الجملة العادية التي تحوي على ثوابت فالجملة المفتوحة لا تعطي حقائق و لا يمكن الحكم عليها إن كانت صائبة أم خاطئة. مثلاً: ((x عدد يقبل القسمة على 3)) ، (($z + 2 = 10$)) ، ((.......... له أربع زوايا قائمة)).
لكننا أذا أستبدلنا الرمز x في التقرير الاول بالعدد 9 لتصبح ((عدد يقبل القسمة على 3)) لأصبح تقريراً صائباً، ولو أردنا جعله تقريراً خاطئاً لاستبدلنا الرمز x فيها بالعدد 8 مثلا. وكذلك الحال بالنسبة للتقرير الثاني فأن استبدال الرمز z بالعدد 8 يجعله تقريراً صائباً واستبداله بالعدد 6 مثلاً يجعله تقريراً خاطئاً وكذلك الحال بالنسبة للتقرير الثالث حيث أن وضع كلمة ((مستطيل)) أو ((مربع)) في الفراغ المخصص له يجعله تقريراً صائباً ووضع كلمة ((مثلث)) يجعله تقريراً خاطئاً.

استنتاج: -
1) **المتغير هو رمز يمكن استبداله بمجموعة قيم من مجموعة التعويض المتاحة له.**
2) **الجملة المفتوحة هي جملة تحتوي متغيراً أو أكثر ويمكن تحويلها الى تقرير منطقي عن طريق أعطاء كل متغير فيها قيمة معينة من ضمن القيم المتاحة في مجموعة التعويض والتي تصاحب الجملة المفتوحة دائماً .**

مما سبق يمكننا التوصل الى الاستنتاج الاتي: -

(1-7-5) تكافؤ الجمل الرياضية المفتوحة

بصورة عامه نقول إن الجملتين المفتوحتين متكافئتان أذا كان لهما مجموعة الحل ($Solution\ set$) نفسها.

فكرة المثال الاتي :إذا كانت مجموعة الحل للجملة المفتوحة مساوية لمجموعة الحل للجملة المفتوحة الثانية فان الجملتين المفتوحتين متكافئتان

لتكن $x + 2 = 8$ جملة مفتوحة، مجموعة التعويض لها هي $\mathbb{Z}$ ، حيث $\mathbb{Z}$ مجموعة الاعداد الصحيحة ولتكن $2x = 12$ جملة مفتوحة اخرى لها مجموعة التعويض $\mathbb{Z}$ نفسها، نلاحظ ان مجموعة الحل للجملة المفتوحة الاولى $x + 2 = 8$ هي $S.s_1 = \{6\}$ وان مجموعة الحل للجملة المفتوحة الثانية $2x = 12$ هي $S.s_2 = \{6\}$ وهي مساوية لمجموعة الحل الاولى $S.s_1$ لذلك فان الجملتين المفتوحتين متكافئتان وذلك لتساوي مجموعة الحل لكل منهما.

(2-7-5) نفي الجمل المفتوحة

يتم النفي لغوياً على الجمل المفتوحة بوضع عبارة (ليس صحيحاً أن) ورياضياً باستخدام جدول النفي الذي اوردناه في بند نفي التقارير.

مثال 17

أنف الجمل الرياضية المفتوحة الاتية: -

$a)\ x^2-4\le 0 \qquad b)\ \frac{1}{2}\notin\mathbb{N} \qquad c)\ x=3 \ \vee\ x\ne 2$

الحل :-

$a)\ x^2-4>0 \qquad b)\ \frac{1}{2}\in\mathbb{N} \qquad c)\ x\ne 3\wedge x=2$

تمرين (1-5)

1. ليكن P تقريراً بسيطاً مفاده " محمد طالب ذكي " ، Q تقريراً بسيطاً اخراً مفاده " محمد طالب مجتهد"

أكتب كل من العبارات الاتية باستخدام الرموز الرياضية:

a) محمد ليس بطالب ذكي ولا مجتهد.
b) ليس صحيحا ان محمد طالب غير ذكي او انه غير مجتهد.
c) محمد إما طالب ذكي او انه طالب مجتهد.

2. ليكن P تقريراً بسيطاً مفاده " x عدد نسبي "، Q تقريراً بسيطاً اخراً مفاده " x ليس مربع عدد صحيح"، أكتب ما تعنية التقارير المركبة الاتية: -

$a)\ \sim P \Rightarrow \sim Q$
$b)\ \sim P \Leftrightarrow \sim Q$
$c)\ \sim(P\vee Q)$

3. انف التقارير الاتية: -

$a)(P\vee Q)\wedge[\sim(P\vee Q)]$
$b)\ (P\vee\sim Q)\Rightarrow[(\sim P)\wedge Q]$

4. أنشئ جدول الصدق للتقارير المركبة الاتية:

$a)(P\vee\sim Q)\Rightarrow(P\wedge\sim Q)$
$b)(P\Rightarrow Q)\vee(\sim P\vee\sim Q)$
$c)(P\vee Q)\wedge(\sim Q\vee R)$
$d)(P\ \Rightarrow Q)\vee(\sim P\vee\sim Q)$

5. بيّن فيما إذا كانت التقارير الاتية تمثل (توافقاً) أو (تناقضاً)

$a)\ (P\wedge Q)\Rightarrow p$
$b)\ (P\vee Q)[\sim(P\vee Q)]$
$c)\ \sim(P\vee Q)\Leftrightarrow[(\sim P)\wedge(\sim Q)] \qquad d)\ (P\wedge Q)\wedge\sim(P\vee Q)$

الاختبار الختامي
Final Test

1. بين اي من العبارات الاتية صحيحة وايا منها خاطئة مع ذكر السبب :
   a) العدد 3 يقسم العدد 9 والعدد 2 يقسم العدد 9
   b) العدد 3 يقسم العدد 9 أو العدد 2 يقسم العدد 9
   c) العدد 7 ليس عددا زوجيا أو العدد 5 عدد زوجي
2. اثبت صحة تكافؤ التقارير المركبة الاتية: -

$1)\ P \Rightarrow Q \ \equiv {\sim}Q \Rightarrow {\sim}P$

$2)\ {\sim}(P \Rightarrow Q) \ \equiv P \wedge {\sim}Q$

3. إنف الجمل المفتوحة الآتية ثم جد مجموعة الحل للجملة المنفية اذا علمت ان مجموعة التعويض هي $\{x: x \in \mathbb{N}\ ,\ x < 10\}$

$a)\ 4x = 20$ $\qquad b)\ x + 4 \leq 7$

$c)\ x + 3 = 5 \ \wedge \ x^2 = 25$ $\qquad d)\ x - 1 = 3 \ \wedge \ x^2 = 16$

4. . بين أي من ازواج الجمل المفتوحة الاتية يمثل جملتين مفتوحتين متكافئتين أذا علمت ان مجموعة التعويض هي مجموعة الاعداد الصحيحه $\mathbb{Z}$

$a)\ [12x - 2 = 2x + 8]$ ، $[\ 3x - 2 = 1\ ]$

$b)\ [x^2 = 16\ ]$ ، $[x = 4 \ \vee \ x = -4]$

$c)\ [0 \leq x \leq 4]$ ، $[(x - 2)(x - 3) = 0]$

5. اثبت صحة تكافؤ التقارير المركبة الاتية: -

$a)\ (P \Leftrightarrow Q) \equiv ({\sim}P \Leftrightarrow {\sim}Q)$

$b) P \vee (P \wedge Q) \equiv P$

$c) {\sim}\ (P \vee Q) \equiv ({\sim}P \wedge {\sim}Q)$

$d) {\sim}\ (P \wedge Q) \equiv ({\sim}P \vee {\sim}Q)$

$e)\ (P \wedge Q) \vee {\sim}Q \equiv (\ P \vee {\sim}Q)$

6. أكتب مجموعة الحل لكل جملة مفتوحة من الجمل الآتية: -

ت	الجملة	مجموعة التعويض
A	$0 \leq x \leq 6$	$\mathbb{N}$
B	$x^2 - 5x + 6 = 0$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
C	x تقبل القسمة على 2 و3 معاً	$\{3, 6, 9, 12\}$
D	$(x^2 - 6x + 5 = 0) \wedge \ (x < 2)$	$\mathbb{N}$

الفصل السادس
الهندسة الاحداثية
(Analytic Geometry)

البنود (Sections)

1-6	تمهيد
2-6	مراجعة وتعميق لما درسه الطالب في الصف الثالث المتوسط.
3-6	تقسيم قطعة مستقيم بنسبة معلومة من الداخل.
4-6	ميل المستقيم.
5-6	المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة .
6-6	معادلة الخط المستقيم .
7-6	إيجاد ميل المستقيم ومقطعه للمحور y من معادلته .
8-6	طرق إيجاد معادلة المستقيم .
1-8-6	معادلة المستقيم بمعلومية الميل ونقطة التقاطع مع المحور y .
2-8-6	معادلة المستقيم بمعلومية الميل وأحدى النقاط التي تنتمي له .
3-8-6	معادلة المستقيم الذي يمر بنقطتين معلومتين.
9-6	إيجاد بُعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم .

Vocabulary	الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
Distance between 2 points	$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$	المسافة بين نقطتين
midpoint of a Straight line	$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$	إحداثيات نقطة تنصيف مستقيم
Division of a straight line by known proportion	$M\left(x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n},y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$	تقسيم قطعة مستقيم بنسبة معلومة
Slope of a line	$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	ميل المستقيم
Parallelism of two lines	$L_1//L_2 \Leftrightarrow \quad m_1=m_2$	توازي مستقيمين
Orthogonal of two lines	$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1\times m_2=-1$	تعامد المستقيمين
The equation of a straight line in terms of two points	$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	معادلة المستقيم بدلالة نقطتين
The equation of a Straight line in terms of one point & slope	$y-y_1=m(x-x_1)$	معادلة مستقيم بدلالة نقطة وميل
Distance between apoint & a Straight line	$d=\frac{\lvert ax_1+by_1+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$	بعد نقطة عن مستقيم

الفصل السادس

الهندسة الإحداثية Analytic Geometry

1-6 تمهيد Preface

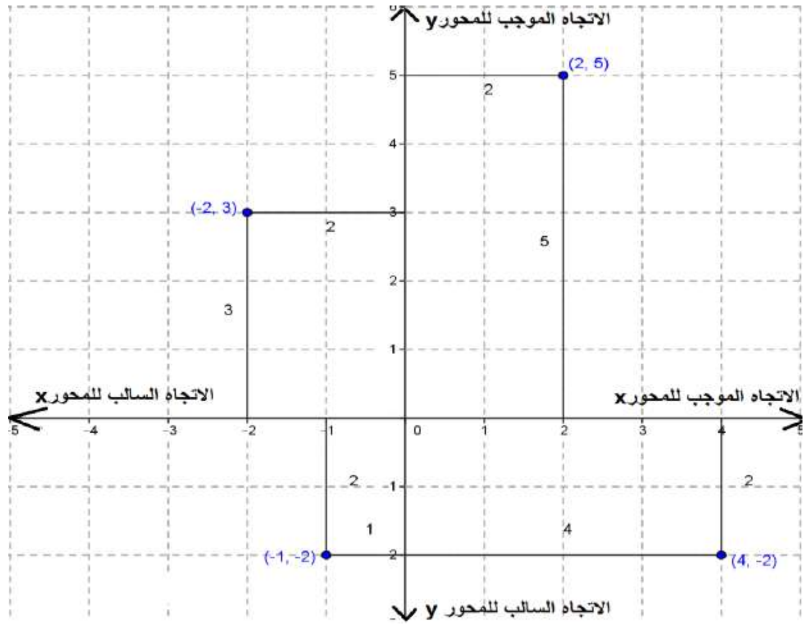
المعروف ان علم الرياضيات قد تطور تطوراً جذرياً منذ أن اكتشف العالم الرياضي والفيلسوف الفرنسي رينيه ديكارت ($1596 - 1650$م) نظم الإحداثيات وتطبيقاتها في الهندسة . الأمر الذي آل إلى أمكانية تناول المسائل الهندسية بطرق جبرية. وبدا أن الجبر والهندسة يتجهان إلى التكامل معاً... الأمر الذي أدى لظهور حساب التفاضل والتكامل فيما بعد على يد كل من أسحق نيوتن ($1642 - 1727$م) وليبنز(($1646 - 1716$م) . ولا بد من الاشارة إلى دور العرب في هذا المجال حيث ان العالم العربي (ثابت بن قرة) وضع قرابة 850 كتابا في العلاقة بين الهندسة والجبر فخطا بذلك خطوة كبيرة بأتجاه الهندسة الإحداثية .

إن ما يعرف الآن بالهندسة الإحداثية هو علم استخدام العلاقات الجبرية في دراسة المجموعات النقطية مثل تمثيل المستقيم والدائرة والقطوع المخروطية بمعادلات جبرية مما يجعل الهندسة الإحداثية أداة رياضية تفوق الهندسة الإقليدية فهي أشد اختصاراً وأدق تعبيراً فضلاً عن كونها قابلة للتمدد والاتساع.

(2-6) مراجعة وتعميق لما درسه الطالب في الصف الثالث المتوسط

Review and deepening

في هذا البند سوف نذكّر الطالب ان المستوي الأحداثي يتكون من مستقيمين متعامدين في نقطة نسميها نقطة الاصل (*Origin*) يرمز لها بالرمز O ويسمى هذان المستقيمان بالمحورين الإحداثيين وهما يقسمان المستوي الأحداثي *xy* (*xy- plane*) إلى أربعة أجزاء تسمى الأرباع الأربعة *(quadrants)* يسمى المستقيم الافقي بالمحور xويسمى المستقيم العمودي بالمحور y ويقسم كل منهما إلى اجزاء متساوية بالطول ، قياس كل جزء منها هو وحدة الطول . يعتبر يمين نقطة الاصل على المحور x الاتجاه الموجب لهذا المحور فيما يمثل يسار نقطة الأصل الاتجاه السالب للمحور هذا. أما بالنسبة للمحور y فإن الاتجاه العلوي يمثل الاتجاه الموجب لهذا المحور فيما يمثل الاتجاه السفلي الاتجاه السالب للمحور هذا. والشكل 6-1 في الصفحة الاتية يوضح ما تم وصفه.



الشكل 6-1

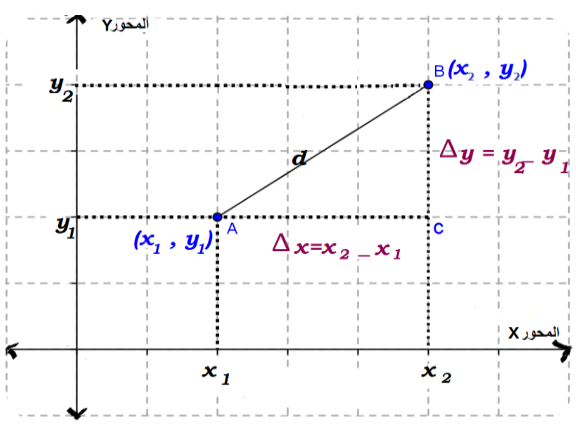
نعبر عن نقاط المستوي xy ($x\,y$-plane) بالزوج المرتب (x,y) حيث يمثل الأحداثي x القيمة العددية للبعد الافقي للنقطة $P(x,y)$ عن المحور y وكذلك يمثل الأحداثي y القيمة العددية للبعد العمودي للنقطة عن المحور x ، وبهذا فإن كل نقطة في المستوي يعبر عنها بزوج من الاعداد الحقيقية (زوج من القيم) تسمى (الإحداثيات)(*Coordinates*) ولهذا السبب تكون إحداثيات نقطة الأصل $(0،0)$.

إيجاد المسافة (البُعد) بين نقطتين على المستوي الاحداثي (*Distance Between Two Points*)

إذا كانت $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$، نقطتين في المستوي فإن المسافة بينهما ويرمز لها بالرمز d تمثل طول القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ والتي يمكن حسابها باستخدام العلاقة الآتية :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

الشكل 6-2 المجاور يوضح لنا التفسير العلمي للعلاقة هذه حيث أن القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ تمثل الوتر في المثلث ABC القائم الزاوية في C و باستخدام مبرهنة فيثاغورس نتوصل إلى أن:



الشكل 6-2

$$d^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

وبجذر الطرفين نحصل على

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

حيث أن : $\Delta x = (x_2 - x_1), \Delta y = (y_2 - y_1)$

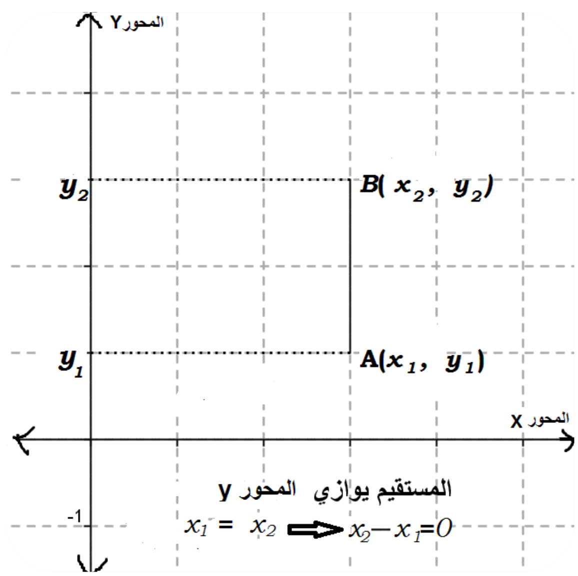
ونستطيع أن نستنتج أيضاً أنه إذا كانت $x_2 - x_1 = 0$ فإن

$$d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |(y_2 - y_1)|$$

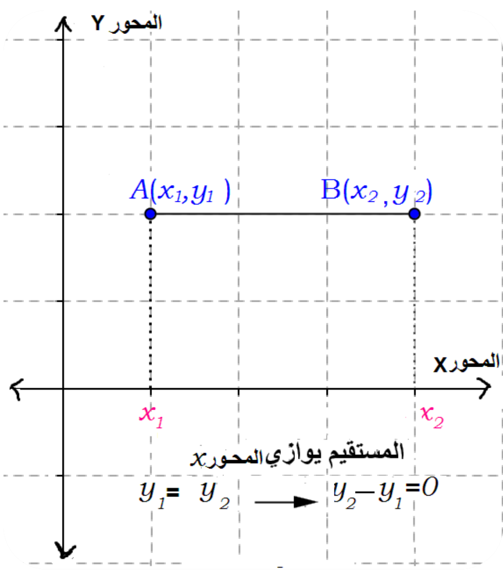
وكذلك إذا كانت $y_2 - y_1 = 0$ فإن

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |(x_2 - x_1)|$$

(أنظر الشكلين 6-3 و 6-4 أدناه).



الشكل 6-3



الشكل 6-4

اوجد المسافة بين النقطتين $B\ (5,2)$ ، $A(1,4\ )$

الحل: -

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(5-1)^2 + (2-4)^2}$$
$$= \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$ وحدة طول

مثال 2 اذا كانت النقاط $A(3,2a)$، $B(a,1)$ ، $C(4,1)$ هي رؤوس مثلث متساوي الساقين فيه $AB = AC$ جد قيمة a حيث $a \in \mathbb{R}$.

الحل : $\because \quad AB = AC$

$$\sqrt{(3-a)^2 + (2a-1)^2} = \sqrt{(3-4)^2 + (2a-1)^2}$$

بتربيع الطرفين $(3-a)^2 + (2a-1)^2 = 1 + (2a-1)^2$

باخذ الجذر التربيعي للطرفين $(3-a)^2 = 1$

إما $3 - a = 1 \Rightarrow a = 2$ أو $3 - a = -1 \rightarrow a = 4$

إيجاد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة (Coordinates of Mid-Point)

لتكن $C\,(x,y)$ نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي نهايتيها النقطتين $A(x_1,y_1)$ ، $B(x_2,y_2)$ ان احداثيا نقطة المنتصف C يمكن حسابهما باستخدام العلاقة الآتية: -

$$\boxed{C(x,y) = C\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)}$$

مثال 3 جد إحداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي نهايتيها $B(6,2)$ ،$A(2,4)$.

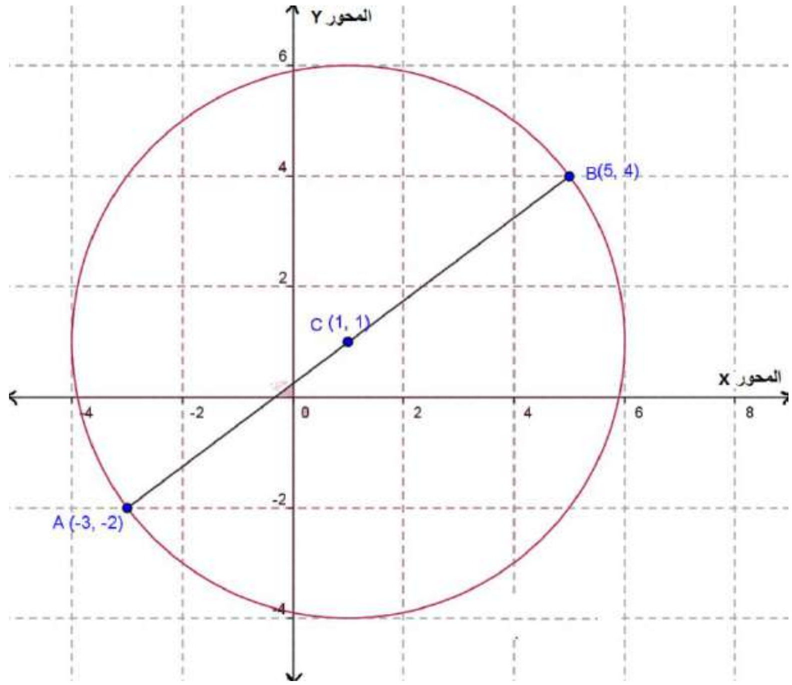
الحل :- نفرض ان نقطة المنتصف هي $C(x,y)$ وعليه تكون إحداثياتها هي :-

$$C(x,y) = C\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \Rightarrow C\left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = C(4,3)$$

مثال 4 نقطتا نهايتي قطر دائرة هما $A(-3,-2), B(5,4)$ جد إحداثيات مركز الدائرة مع الرسم .

الحل :- المركز ينصف قطر الدائرة كما في الشكل 6-5.

$$C(x,y) = C\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = C\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = C(1,1)$$

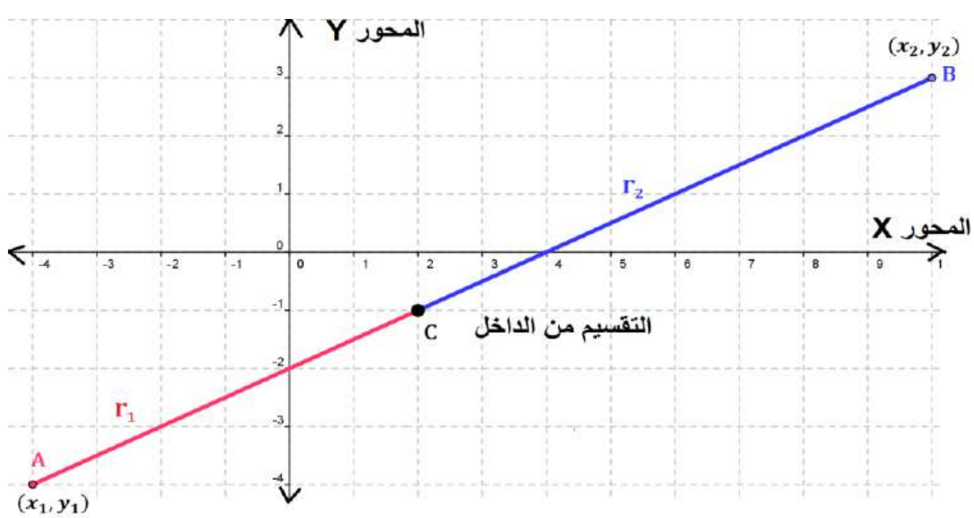


الشكل 6- 5

3-6 تقسيم قطعة مستقيم من الداخل بنسبة معلومة

لتكن $C\ (x, y)$ نقطة تقسم القطعة المستقيمة التي نهايتيها $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ بنسبة معلومة $\frac{r_1}{r_2}$ من الداخل كما في الشكل (6-6) الاتي، أن احداثيا نقطة C يمكن حسابهما باستعمال العلاقة الآتية (والتي يمكن التوصل اليها باستعمال خواص التناسب):-

$$\boxed{C(x, y) = \left(\frac{x_1 . r_2 + x_2 . r_1}{r_1 + r_2}, \frac{y_1 . r_2 + y_2 . r_1}{r_1 + r_2}\right)}$$

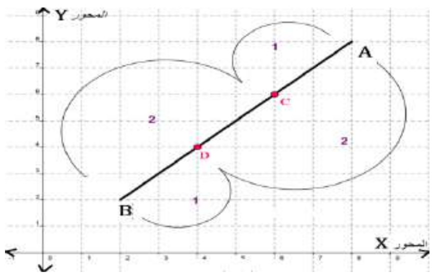


الشكل 6-6

ملاحظة :- أذا كانت C, D نقطتان تقسمان القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ الى ثلاثة أجزاء متساوية في الطول فأن نسبة التقسيم تكون كالاتي :

- نسبة التقسيم بالنسبة للنقطة C تكون $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2}$
- نسبة التقسيم بالنسبة للنقطة D تكون $\frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{1}$

وكما موضح في الشكل 6 -7



الشكل 6-7

مثال5 أذا كانت $A(3,-2), B(-1,5)$ جد أحداثي النقطة التي تقسم القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ من الداخل بنسبة $\frac{3}{2}$.

الحل :- نستعمل علاقة التقسيم من الداخل

$$C(x,y) = \left(\frac{x_1.r_2 + x_2.r_1}{r_1 + r_2}, \frac{y_1.r_2 + y_2.r_1}{r_1 + r_2}\right)$$

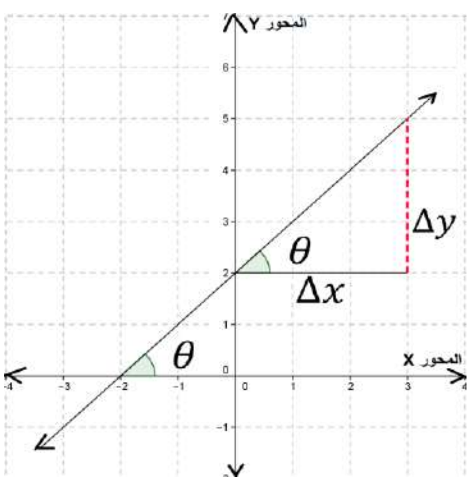
$$C(x,y) = \left(\frac{3.2+(-1).3}{3+2}, \frac{(-2).2+5.3}{3+2}\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{11}{5}\right)$$

(4-6) ميل المستقيم (The Slope of the Line)

يعرف ميل المستقيم بأنه ظل (tan) الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب للمحور x .

يرمز لميل المستقيم بالرمز m فإذا كانت الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب للمحور y هي θ

فأن $\boxed{m = \tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$



الشكل 6-8

ويمكننا استنتاج ما يأتي من الشكل 6-8 المجاور:

1) إذا كانت الزاوية θ حادة فإن $m > 0$ (كما في الشكل 6-9)

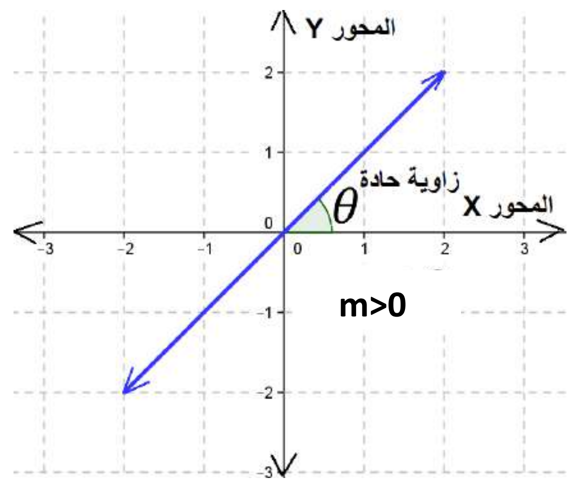
2)إذا كانت الزاوية θ منفرجة فإن $m < 0$ (كما في الشكل 6-10)

3)إذا كان $m = 0$ فإن المستقيم يوازي المحور X (كما في الشكل6-11)

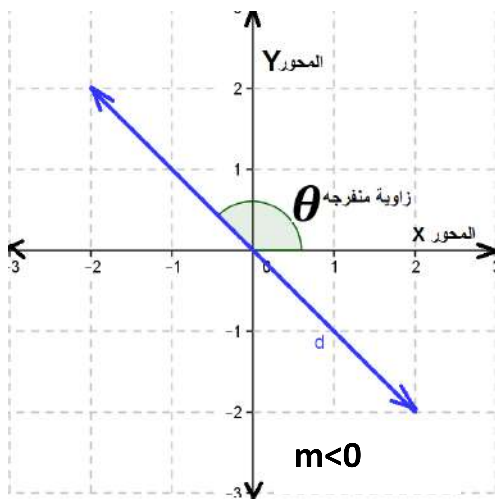
4)إذا كان m يساوي كمية غير معرّفة اي $(\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}})$ فإن المستقيم يوازي المحور y (كما في الشكل6-12)

5) الميل ليس له وحدات لأنه نسبة بين قيمتين.

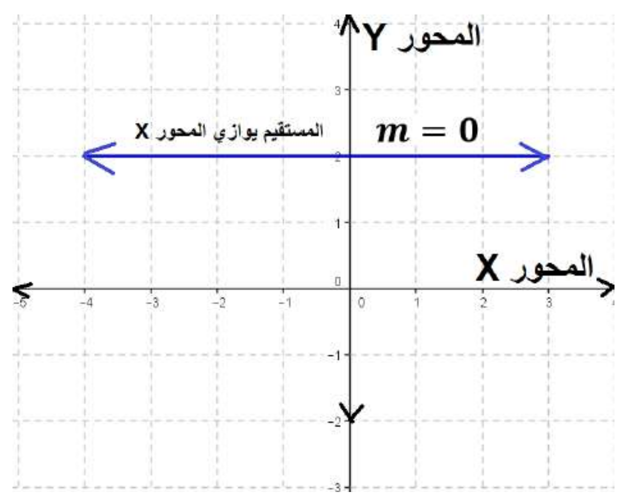
ويمكننا ملاحظة ما ورد أعلاه من الاشكال التوضيحية الآتية:



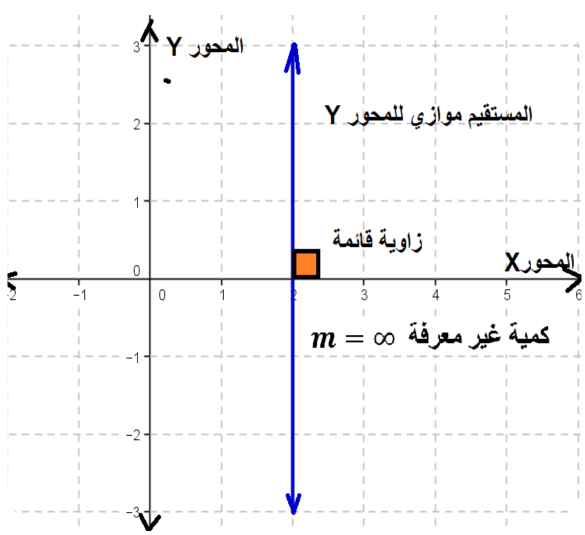
الشكل 6-9



الشكل 6-10



الشكل 6-11



الشكل 6-12

ملاحظة : يمكننا ان نستنتج من الشكل 6-8 ان

$$m = \tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

حيث : $\theta \in (0, n\pi)/\{90\}, \Delta x \neq 0$

حيث إن الرمز Δy يشير إلى مقدار التغير في قيمة الأحداثي y أي إنه يساوي $y_2 - y_1$ كما إن الرمز Δx يشير إلى مقدار التغير في قيمة الأحداثي x أي إنه يساوي $x_2 - x_1$ وعليه فأننا نستطيع أعادة صياغة العلاقة أعلاه لتصبح:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad , x_2 \neq x_1$$

جد ميل المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب للمحور x زاوية مقدارها $60°$

الحل:- $m = tan60° = \sqrt{3}$

$\overleftrightarrow{AB}$ مستقيم يصنع مع الاتجاه الموجب للمحور x زاوية مقدارها $45°$ فإذا كانت $A(9, k)$, $B(6,2k)$ فما قيمة k ؟

الحل :-

$$m = tan45° = 1$$

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$1 = \frac{2k - k}{6 - 9} \Rightarrow 1 = \frac{k}{-3} \Rightarrow k = -3$$

ملاحظة: الرمز $m_{\overline{AB}}$ يقصد به ميل المستقيم المار بالنقطتين A, B

جد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين المبينة إحداثياتهما في كل مما يأتي

a) $A(-2,0),\ B(3,1)$

b) $C(-1,2), D(2,2)$

c) $E(0,4),\ F(1,-1)$

d) $G(3,4),\ B(3,1)$

الحل :

$$a)\ m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{3-(-2)} = \frac{1}{3+2} = \frac{1}{5}$$

$$b)\ m_{\overline{CD}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-2}{2-(-1)} = \frac{0}{2+1} = 0$$

$$c)\ m_{\overline{EF}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-4}{1-0} = \frac{-5}{1} = -5$$

$$d)\ m_{\overline{GB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-4}{3-3} = \frac{-3}{0} = (\text{كمية غير معرفة})$$

خلاصة :

- **اذا كانت الزاوية θ حادة فان m>0 أي ان قيمة الميل تكون موجبة.**
- **اذاكانت الزاويةθ منفرجة فإن m <0 أي ان قيمة الميلتكون سالبة.**
- **اذا كانت m تسلوي كمية غير معرفة فان المستقيم يكون موازي المحورY.**
- **الميل ليس له وحدات لأنه نسبة بين قيمتين.**

5-6 المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة(Parallel and Perpendicular Lines)

أولا. المستقيمات المتوازية (*Parallel Lines*)

إذا كان لدينا مستقيمان متوازيان $\overleftrightarrow{L_1}$, $\overleftrightarrow{L_2}$

كمافي الشكل 13-6 ولكل منهما ميل معلوم

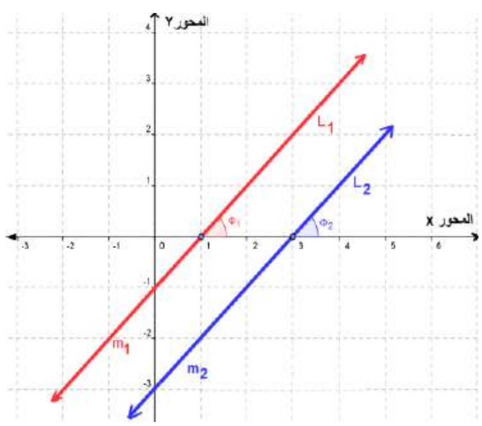
m_1 ، m_2 على التوالي فإن

البرهان:

$$\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} \Rightarrow \Phi_1 = \Phi_2 \quad (\text{بالتناظر})$$

$$\Rightarrow \tan\Phi_1 = \tan\Phi_2$$

$$\boxed{m_1 = m_2} \Rightarrow \quad m_2 = m_1$$

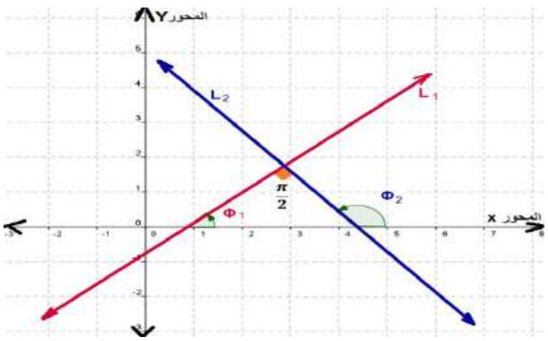


الشكل 13-6

ثانيا. المستقيمات المتعامدة (*Perpendicular Lines*)

إذا كان لدينا مستقيمان متعامدان $\overleftrightarrow{L_1}\,,\overleftrightarrow{L_2}$ ولكل منهما ميل معلوم m_2 ، m_1 على التوالي فإن

$$m_1 = \frac{-1}{m_2} \quad \text{أي} \quad \boxed{m_1 \times m_2 = -1}$$



الشكل 14-6

البرهان: - في الشكل 14-6

$$\because \overleftrightarrow{L1} \perp \overleftrightarrow{L2} \quad \Rightarrow \phi_2 = \frac{\pi}{2} + \phi_1$$

(قياس الزاوية الخارجية في المثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخليتين غير المجاورتين لها)

$$\tan \Phi_2 = \tan(\frac{\pi}{2} + \Phi_1)$$

$$\tan \Phi_2 = -\cot\phi_1$$

$$\tan \Phi_2 = -\frac{1}{\tan\phi_1}$$

$$m_2 = \frac{-1}{m_1} \quad \leftrightarrow \quad m_1 \times m_2 = -1$$

ملاحظة : ميل العمود على المستقيم يساوي المقلوب السالب لميل المستقيم

مثال 9

إذا كانت $A(6,2), B(8,6), C(4,8), D(2,4)$ اثبت ما يلي :-

(1) المستقيمان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متوازيان (2) المستقيمان $\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{DC}$ متعامدان

الحل :-

(1)
$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-2}{8-6} = 2$$

$$m_{CD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-8}{2-4} = 2$$

$$\because m_{AB} = m_{CD} \quad \Rightarrow \quad \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$$

أي ان المستقيمين $\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{DC}$ متوازيان

(2)
$$m_{DC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-8}{2-4} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$m_{AD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-2}{2-6} = \frac{-1}{2}$$

$$\because m_{DC} \times m_{AD} = 2 \times \left(\frac{-1}{2}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DC}$$

أي أن المستقيمين $\overleftrightarrow{A},\overleftrightarrow{DC}$ متعامدان

مثال 10

اثبت إن النقاط $A(4,2), B(1,-1), C(-1,-3)$ تقع على استقامة واحدة.

الحل :-

$$\because m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\therefore m_{AB} = \frac{-1-2}{1-4} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$m_{BC} = \frac{-3-(-1)}{-1-1} = \frac{-2}{-2} = 1$$

بما أن القطعتين المستقيمتين $\overline{B},\overline{AB}$ لهما الميل نفسه وتشتركان بالنقطة B فإن النقاط A, B, C تقع على استقامة واحدة.

مثال 11

برهن باستخدام الميل أن المثلث الذي رؤوسه النقاط:
$A(3,-1), B(10,4), C(5,11)$ مثلث قائم الزاوية في B

الحل:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-(-1)}{10-3} = \frac{5}{7}$$

$$m_{\overline{BC}} = \frac{11-4}{5-10} = \frac{-7}{5}$$

$$m_{\overline{AB}} \times m_{\overline{BC}} = \frac{5}{7} \times \frac{-7}{5} = -1$$

$$\because AB \perp BC$$

$\therefore$ المثلث قائم الزاوية في B

مثال 12

إذا كانت النقاط $A(3k, 4k), B(5k, 20), C(7k, 28)$ تقع على استقامة واحدة فما قيمة k؟

الحل :-

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\therefore\ m_{AB} = \frac{20-4k}{5K-3k} = \frac{20-4k}{2k}$$

$$m_{BC} = \frac{28-20}{7k-5k} = \frac{8}{2k} = \frac{4}{k}$$

وبما ان النقاط تقع على استقامة واحدة فان:

$$m_{AB} = m_{BC}$$

$$\therefore \frac{20-4k}{2k} = \frac{4}{k}$$

وباستخدام خاصية التناسب (حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين) نحصل على:

$$20k - 4k^2 = 8k$$

$$4k^2 - 12k = 0 \quad (\div 4)$$

$$k^2 - 3k = 0$$

$$k(k-3) = 0$$

اما $k = 0$ او $k = 3$

مثال 13

اثبت إن المستقيم المار بالنقطتين $(3,1), (8,5)$ والمستقيم المار بالنقطتين $(6,7), (2,12)$ متعامدان

الحل :

$$\because m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_1 = \frac{1-5}{3-8} = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$$

$$m_2 = \frac{12-7}{2-6} = \frac{5}{-4}$$

$$\because m_1 \times m_2 = \frac{4}{5} \times \frac{5}{-4} = -1$$

اذن المستقيمان متعامدان

مثال 14

إذا علمت أن $A(k,4), B(6,8), C(10,7), D(9,2k)$ رؤوس شكل رباعي فيه $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$. جد قيمة k .

الحل :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{AC} = \frac{7-4}{10-K} = \frac{3}{10-K}$$

$$m_{BD} = \frac{2k-8}{9-6} = \frac{2k-8}{3}$$

$$\because \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD} \Rightarrow m_{AC} \times m_{BD} = -1$$

$$\frac{3}{10-k}\times\frac{2k-8}{3} = -1$$
$$\frac{2k-8}{10-k} = -1$$
$$2k-8 = -10+k$$
$$2k-k = -10+8$$
$$k = -2$$

تمرين (1-6)

1. اثبت إن النقاط $A(1,1), B(13,6), C(10,10), D(-2,5)$ تمثل رؤوس متوازي أضلاع
ثم جد طول قطريه .
2. اثبت إن النقاط $A(-1,-5), B(5,1), C(2,4), D(-4,-2)$ تمثل رؤوس مستطيل ثم جد محيطه .
3. اثبت إن النقاط $A(0,-1), B(2,1), C(0,3), D(-2,1)$ تمثل رؤوس مربع وجد مساحته.
4. اثبت إن الشكل الرباعي الذي رؤوسه $A(0,0), B(6,2), C(4,-4), D(-2,-6)$ هو معين وجد مساحته ومحيطه.
5. اثبت إن الشكل الرباعي الذي رؤوسه $A(-2,2), B(2,-2), C(4,2), D(2,4)$ هو شبه منحرف متعامد القطرين .

6. جد قيمة k التي تجعل المستقيم المار بالنقطتين $(3,5), (k,-1)$ عموداً على المستقيم المار بالنقطتين $(-1,-2), (2,-3)$.
7. جد طول المستقيم المتوسط $\bar{A}$ للمثلث ABC حيث $A(4,12), B(4,2), C\ (14,12)$ ثم برهن إن $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$.
8. إذا كان $A(3,5),\ B\ (1,-3)$ طرفي قطعة مستقيمة وكان العمود المقام عليها من منتصفها يمر بالنقطة $C(k\ ,k\ )$ جد قيمة k .
9. اثبت أن الشكل الرباعي الذي رؤوسه منتصف أضلاع الشكل الرباعي $ABCD$ يكون متوازي
أضلاع حيث $A(2,6), B(-4,2), C(-4,-4), D(4,-2)$.
10. إذا كان المستقيم المار بالنقطتين $(2,1), (-8, k)$ يوازي المستقيم المار بالنقطتيـــــــــن $(7,2k+1), (11,-1)$ فما قيمة k ؟

11. لكل فقرة مما يلي أربع إجابات إختر الإجابة الصحيحة:

1) اذاكان $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{H}$ ، $\overleftrightarrow{H}$ يمر بالنقطتين $(2,3)\,,\big(1,5\big)$ فأن ميل $\overleftrightarrow{L}$ يساوي :

$a\,)\frac{1}{2}$ $\quad b)\frac{3}{2}$ $\quad c)\ \frac{2}{3}$ $\quad d)\ \ \frac{-2}{3}$

2) اذاكان $\overleftrightarrow{L}//\overleftrightarrow{H}$ ، $\overleftrightarrow{H}$ يمر بالنقطتين $(2,3)\,,(1,5)$ فأن ميل $\overleftrightarrow{L}$ يساوي :

$a)\frac{-3}{2}$ $\quad b)-2$ $\quad c)\ \frac{2}{3}$ $\quad d)\ \ \frac{-2}{3}$

3) اذاكان $\overleftrightarrow{L}//\overleftrightarrow{H}$ وكان $(-1,3),(-1,5) \in \overleftrightarrow{H}$ ، و $(3,4),(x,6) \in \overleftrightarrow{L}$ فأن قيمة x تساوي:

$a)-3$ $\quad b)3$ $\quad c)\ 1$ $\quad d)$ ليس أي مما سبق

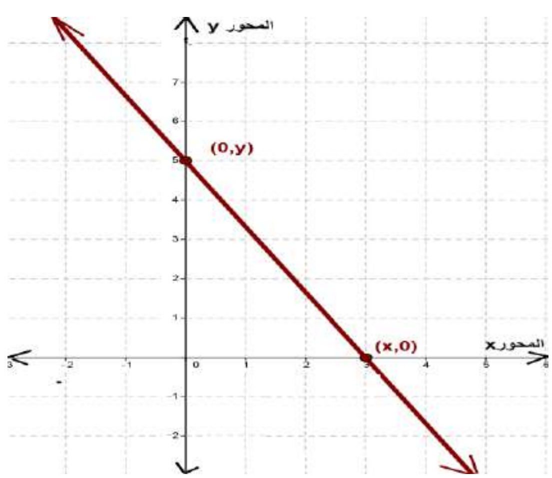
6-6 معادلة الخط المستقيم (Straight- Line Equation)

سوف نتعرف في البند هذا على معادلة الخط المستقيم (المعادلة الخطية) والتي هي معادلة من الدرجة الاولى في متغيرين هما $x\,,y$ وصيغتها العامة هي $ax+by+c=0$ حيث ان كلاً من $a\,,b\,,c$ ثوابت بحيث لا يكون كل من $a\,,b$ صفراً في وقت واحد. كما ان مجموعة الازواج المرتبة (x,y) والتي تمثل مجموعة النقاط المنتمية للخط المستقيم تحقق المعادلة أعلاه. وفيما يلي أمثلة لمعادلات تمثل خطوطاً مستقيمة:

1) $3x-2y+5=0 \ \Rightarrow (\mathrm{a}=3,\mathrm{b}=-2,\mathrm{c}=5)$
2) $x+y=0 \ \Rightarrow \ (\mathrm{a}=1,\mathrm{b}=1,\mathrm{c}=0)$
3) $x=5 \Rightarrow (\mathrm{a}=1,\mathrm{b}=0,\mathrm{c}=-5)$
4) $y=-3 \Rightarrow \ (\mathrm{a}=0,\mathrm{b}=1,\mathrm{c}=3)$

التمثيل البياني لمعادلة الخط المستقيم

لرسم أي مستقيم معلوم يكفي أن نعين نقطتين من نقاطه ونوصل بينهما باستخدام المسطرة. وسنعرض في ادناه اسلوباً مبسطاً لرسم المستقيم يعتمد على إيجاد النقطتين اللتين يقطع بهما المستقيم كلاً من المحورين الإحداثيين (المحور x ، المحور y) وكما يلي :



الشكل 6-15

1. نجد نقطة التقاطع مع المحور x بتعويض $y = 0$ في المعادلة، لنحصل على الزوج المرتب $(x, 0)$.
2. نجد نقطة التقاطع مع المحور y بتعويض $x = 0$ في المعادلة، لنحصل على الزوج المرتب $(0, y)$.
3. نعين النقطتين على ورق المربعات المثبت عليه المحورين الإحداثيين ونوصل بين النقطتين بخط مستقيم مستخدمين المسطرة. هذا الخط المستقيم هو التمثيل البياني المطلوب وكما موضح في الشكل 6-15 اعلاه.
4. اذا كان الحد المطلق $c = 0$ فان معادلة المستقيم تصبح $ax + by = 0$ والمستقيم يمر بنقطة الأصل.

6-7 إيجاد ميل المستقيم ومقطعة للمحور y من معادلته

ذكرنا في البند السابق أن الصيغة العامة لمعادلة الخط المستقيم هي $ax + by + c = 0$

حيث أن كلاً من a , b , c ثوابت بحيث لا يساوي a , b صفراً في وقت واحد.

وبحل المعادلة هذه بالنسبة للمتغير y نحصل على: -

$$by = -ax - c \;\Rightarrow\; y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$$

فتكون الصيغة الجديدة لمعادلة المستقيم هي :- $\boxed{y = m\,x + k}$ حيث:-

$$\boxed{\text{ميل المستقيم } (b \neq 0)\; m = \frac{-a}{b}\;,\; \text{المقطع للمحور } y \quad k = \frac{-c}{b}}$$

ويقصد بالمقطع للمحور y (y-intercept) هو الأحداثي y لنقطة تقاطع المستقيم مع المحور y

ملاحظة: من الصيغة العامة لمعادلة الخط المستقيم $(ax + by + c = 0)$ يمكن ايجاد ميل المستقيم m كالاتي:

$$\boxed{m = -\frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = -\frac{a}{b} \quad (b \neq 0)}$$

مثال 15 جد ميل المستقيم ومقطعه للمحور y في الحالات التي تكون فيه معادلة المستقيم كالاتي:

1. $2x - 3y - 6 = 0$
2. $y = x + 7$

الحل :

1. $2x - 3y - 6 = 0$

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$k = -\frac{c}{b} = -\frac{6}{-3} = -2$$

2. $y = x + 7$

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{1}{-1} = 1$$

$$k = -\frac{c}{b} = -\frac{7}{-1} = 7$$

مثال 16

جد ميل كلاً من المستقيم الموازي والمستقيم العمودي على المستقيم الذي معادلته

$$2x - 3y - 6 = 0$$

الحل: -

$$m_{\text{المستقيم}} = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$m_{\text{العمودي}} = \text{المقلوب السالب لميل المستقيم} = -\frac{3}{2}$$

8-6 طرق إيجاد معادلة المستقيم

سوف نتطرق في هذا البند إلى كيفية إيجاد معادلة المستقيم.

1-8-6 معادلة المستقيم بمعلومية الميل (m) ونقطة التقاطع مع المحور y [النقطة $(0, b)$]

$$\boxed{y = mx + k} \quad k : (\text{المقطع للمحور } y)$$

مثال 17

جد معادلة المستقيم الذي ميله $(m = 3)$ و مقطعه للمحور y يساو ي $\frac{6}{7}$

الحل :- بما ان معادلة المستقيم $y = mx + k$

$$m = 3\ ,\ \ k = \frac{6}{7}$$

$$y = 3x + \frac{6}{7}$$

2-8-6 معادلة المستقيم بمعلومية الميل (m) واحدى النقاط التي تنتمي له ولتكن $(x\ ,y)$

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

مثال 18

جد معادلة المستقيم الذي ميله $(m = -7)$ ويمر بالنقطة $(6,2)$

الحل:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = -7(x - 6)$$

$$y - 2 = -7x + 42$$

$$7x + y - 44 = 0$$

3-8-6 معادلة المستقيم الذي يمر بنقطتين معلومتين $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad , x_2 \neq x_1}$$

جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(1,4)$, $(3,-2)$.

الحل:

معادلة المستقيم الذي يمر بنقطتين $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$\frac{y - (-2)}{x - 3} = \frac{4 - (-2)}{1 - 3}$$

$$\frac{y + 2}{x - 3} = \frac{4 + 2}{1 - 3}$$

$$\frac{y + 2}{x - 3} = \frac{6}{-2} \Rightarrow \frac{y + 2}{x - 3} = \frac{-3}{1}$$

$$y + 2 = -3x + 9$$

$$3x + y - 7 = 0$$

طرق ايجاد معادلة الخط المستقيم

1) الصيغة العامة $ax + by + c = 0 \ , a \neq 0$ أو $b \neq 0$
2) إذا علم الميل واحدى نقاط المستقيم $y - y_1 = m(x - x_1)$
3) إذا علم الميل والمقطع للمحور y $y = mx + k$
4) معادلة المستقيم الموازي للمحور x $y = b$
5) معادلة المستقيم الموازي للمحور y $x = a$

مثال 20

لتكن $2x-3y+6=0$ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{L_1}$. استخرج ما يلي: -

a) معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{L_2}$ الموازي للمستقيم $\overleftrightarrow{L_1}$ ويمر بالنقطة $(1,1)$

b) معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{L_3}$ العمود على المستقيم $\overleftrightarrow{L_1}$ ويمر بالنقطة $(1,1)$.

c) ارسم المستقيمات الثلاثة

الحل: نجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{L_1}$ من معادلته $\quad 2x-3y+6=0$

$$m=-\frac{b}{a}=-\frac{2}{-3}=\frac{2}{3}$$

1. المستقيم L_2 الموازي للمستقيم $\overleftrightarrow{L_1}$ له نفس الميل m_1 أي $m_2=\frac{2}{3}$ ويمربالنقطه $(1,1)$

$$y-1=\frac{2}{3}(x-1)$$

$$3y-2x-1=0 \qquad (\overleftrightarrow{L_2})$$ معادلة المستقيم

2. المستقيم $\overleftrightarrow{L_3}$ العمود على المستقيم $\overleftrightarrow{L_1}$ يكون ميله المقلوب السالب لميل المستقيم $\overleftrightarrow{L_1}$ ،

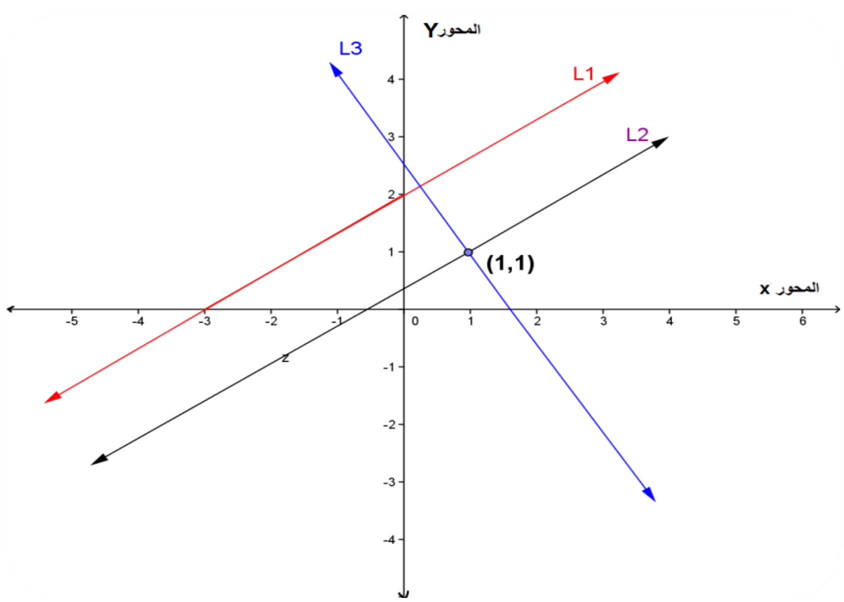
أي إن ميله $m_3=\frac{-3}{2}$

$$(y-y_1)=m(x-x_1)$$

$$y-1=\frac{-3}{2}(x-1)$$

$$2y+3x-5=0 \quad (\overleftrightarrow{L_3})$$ معادلة المستقيم

3. المخطط البياني للمستقيمات الثلاثة في الشكل 6-16

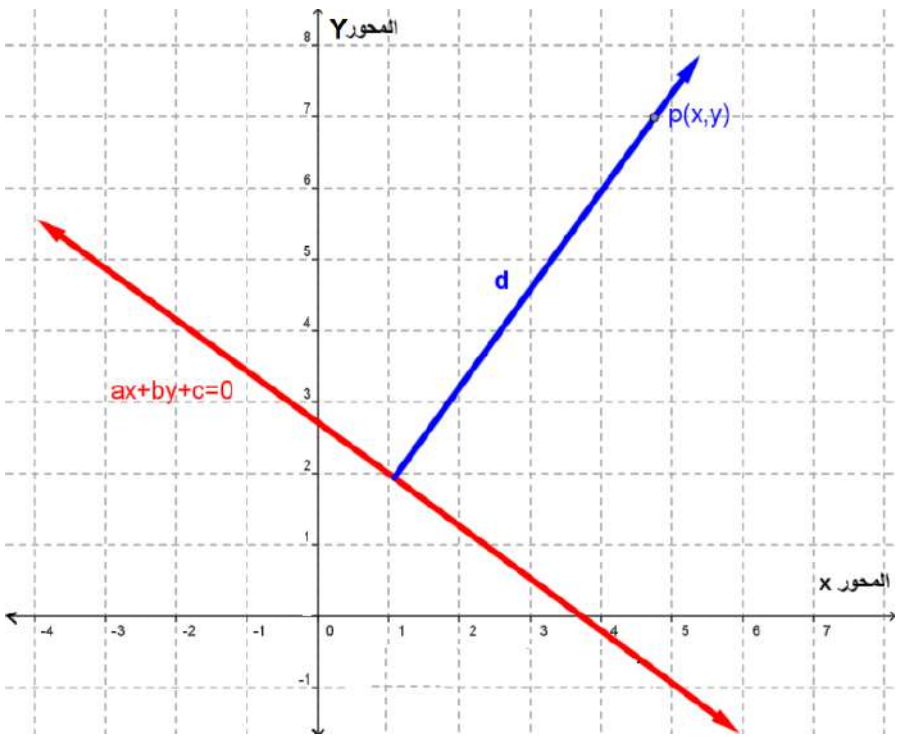


الشكل 6-16

9-6 إيجاد بُعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم

تعريف: اذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{L}: ax + by + c$ والنقطة $P(x, y)$ معلومة فيعرف بعد النقطة P عن المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ بانه المسافة العمودية(d) بين النقطة P والمستقيم $\overleftrightarrow{L}$ ويحسب بالعلاقة الآتية:

$$\boxed{d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}, a, b \neq 0}$$



الشكل 17-6

جد بُعد النقطة $P(-1,1)$ عن المستقيم $3x - 4y + 5 = 0$.

الحل: -

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$= \frac{|3 \times (-1) - 4 \times (1) + 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

$$= \frac{|-2|}{5} = \frac{2}{5}$$ وحدة طول

جد البُعد بين المستقيمين المتوازيين

$$2x - 3y + 6 = 0$$
$$2x - 3y - 4 = 0$$

الحل: -

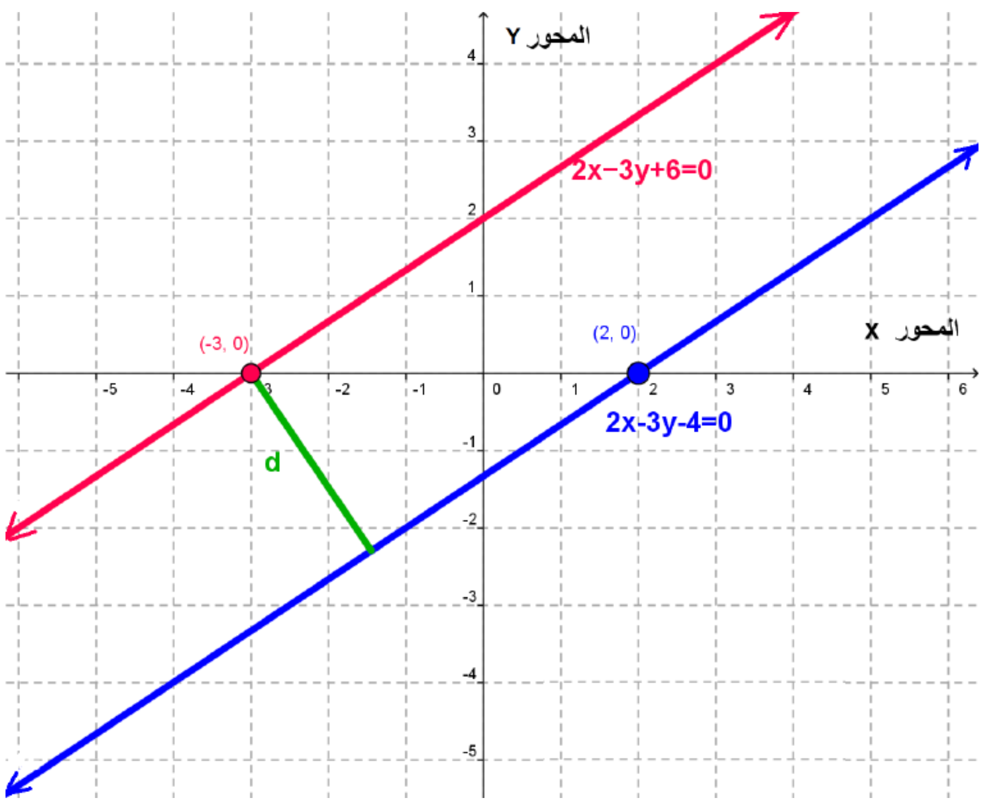
في الشكل18-6 أدناه نأخذ أي نقطة مناسبة على اي من المستقيمين ولتكن $(-3,0)$

وهي نقطة تقاطع المستقيم $2x - 3y + 6 = 0$ مع المحور x ثم نجد البعد بين

النقطة هذه والمستقيم الثاني $2x - 3y - 4 = 0$

$$d = \frac{|2 \times (-3) - 3 \times (0) - 4|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{13}} \text{ وحدة طول}$$



الشكل 18-6

ملاحظة : يمكن إيجاد البعد بين مستقيمين متوازيين $\overleftrightarrow{L_2}$, $\overleftrightarrow{L_1}$ حيث

$$\overleftrightarrow{L_1}: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad , \quad \overleftrightarrow{L_2}: a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

وفقا للعلاقة الاتية

$$\boxed{d = \frac{C_1 - C_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

وكما يأتي :-

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d = \frac{|6 - (-4)|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{|6 + 4|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{10}{\sqrt{13}}$$ وحدة طول

تمرين (2-6)

1. جد معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{1}{5}$ ويمر بالنقطه $(1,-3)$.

2. جد معادلة المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب للمحور x زاوية قياسها $45°$ ويمر بالنقطة $(3,2)$

3. جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(-2,11)$ ، $(7,-4)$.

4. جد معادلة المستقيم الذي ميله 7 و مقطعه للمحور هو (11).

5. جد ميل المستقيم $2x + 4y - 7 = 0$ وجد مقطعه للمحور y .

6. برهن ان المستقيم $3x + 9y - 7 = 0$ يوازي المستقيم $12y + 4x = 25 = 0$.

7. برهن ان المستقيمين $5x + y + 32 = 0$ ، $x - 5y + 27 = 0$ متعامدان .

8. جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(3,-2)$ والموازي للمستقيم $4x - 2y + 5 = 0$.

9. جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-5,2)$ والعمود على المستقيم $3x - 6y = 10$.

10. جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(4,6)$ والموازي للمستقيم المار بنقطة الاصل والنقطة $(-5,2)$.

11. جد معادلة المستقيم الموازي للمستقيم $x + 2y = 5$ و مقطعه للمحور y يساوي (-2).

12. مستقيمان متعامدان أحدهما يمر بالنقطتين $(-5,-2)$, $(4,6)$ والآخر يمربالنقطة $(5,1)$ فما معادلة كل منهما

الاختبار الختامي
Final Test

1. اذا كانت $A(2,3), B(-3,h)$ ، جد قيمة h عندما $m_{\overleftrightarrow{AB}} = \frac{1}{2}$

2. المستقيم $\overleftrightarrow{L}: 2y = ax + 1$ يمر بالنقطة $(1,2)$ جد :

a) مقطعه الصادي   b) ميل المستقيم   c) $a \in \mathbb{R}$

3. جد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم

$$\overleftrightarrow{L}: 2x - 3y + 5 = 0$$

4. جد الميل والمقطع السيني والصادي لكل مستقيم مما يلي:

$a)\ \overleftrightarrow{L_1}: 2x - 3y + 5 = 0$

$b)\ \overleftrightarrow{L_2}: 8y = 4x - 16$

$c)\ \overleftrightarrow{L_3}: 3y = -4$

$d)\ \overleftrightarrow{L_4}: 3x - 4y - 12 = 0$

5. ضع علامة (✓) اذا كانت العبارة صائبة وعلامة (✗) اذا كانت العبارة خاطئة

a) بعد نقطة الأصل عن المسنقيم $y = 3$ هو 3 وحدات.

b) بعد نقطة الأصل عن المستقيم $y = -5$ هو 5 وحدات.

c) البعد بين المستقيمين المتوازيين $y = -1$ ،$y = 4$ هو 3 وحدات.

6. جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(7,1)$ ، $(0,3)$ وهل ان النقطة $(3,4)$ تنتمي إليه أم لا؟

7. ليكن $\overleftrightarrow{L}$ مستقيما معادلته $x + y - 2 = 0$ جد ميله ونقطة تقاطعه مع محور الصادات ثم إرسمه.

8. جد معادلة المستقيم الذي ميله يساوي -3 ويقطع جزءا موجبا من محور الصادات طوله 7 وحدات.

9. جد معادلة المستقيم الذي ميله يساوي 2 ويقطع جزءا سالبا من محور السينات طوله يساوي 6 وحدات.

10. جد مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط . $A(1,2)$ ، $B(3,5)$ ، $C(-1,3)$.

الفصل السابع
الاحصاء
(*Statistics*)

البنود (Sections)

Vocabulary	الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
Sum	$\sum$	المجموع
Arithmetic Mean	$\bar{X}$	الوسط الحسابي
Median	Me	الوسيط
Mode	Mo	المنوال
RANGE	R	المدى
Standard Deviation	S	الانحراف المعياري
Variance	S^2	التباين

1-7تمهيد Preface

تعلمنا سابقاً طرق جمع وتصنيف وتبويب البيانات وكيفية تمثيلها جدولياً وبيانياً، وفي هذا الفصل سوف نتعلم كيفية تمثيل مجموعة من البيانات بقيمة واحدة فقط تعبر عن جميع القيم من أجل اعطاء صورة سريعة وتوضح ما هي هذه البيانات من خلال مقاييس تسمى مقاييس النزعة المركزية، مثلاً قياس معدل عمر الانسان، أو معدل أوزان مجموعة من الطلبة.

ان مقاييس النزعة المركزية هي تلك القيم التي تقترب منها أو تتركز حولها أو تتوزع بالقرب منها معظم البيانات والتي تمثل تلك البيانات.

وهناك عدة مقاييس للنزعة المركزية منها: -

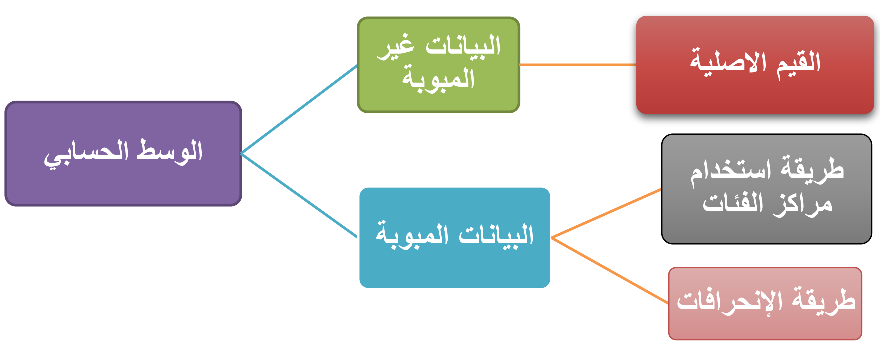
1. الوسط الحسابي Arithmetic Mean.
2. الوسيط Median .
3. المنوال Mode.

ولكل مقياس من هذه المقاييس طريقة خاصة لحسابه ولكل منها مزايا وعيوب وسوف نتطرق إلى شرح كل واحدة من هذه المقاييس: -

1) الوسط الحسابي (المتوسط الحسابي) Arithmetic Mean.

1-1-7 تعريف الوسط الحسابي Definition of the Arithmetic Mean

الوسط الحسابي يسمى ايضاً بالمتوسط أو المعدل الحسابي Average ويعرَف بانه القيمة التي لو وزعت على كل فرد من افراد العينة لكان مجموع هذه القيم بعد التوزيع هو نفسه المجموع الحقيقي للقيم الاصلية. ويعتبر الوسط الحسابي من أكثر المقاييس الاحصائية انتشاراً واستخداماً لوصف المجموعات أوللمقارنة بينها، ويرمز له ($\bar{X}$) ويقرأ (أكس بار) .



ولا بد لنا قبل المضي في تفاصيل شرح طرق استخراج الوسط الحسابي من التطرق الى البند الاتي :

التعرف على رمز المجموع $\sum$:

مثال 1

اذا كانت لدينا مجموعة من المشاهدات $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ فان حاصل جمع هذه لمشاهدات يمكن التعبير عنها بما يلي:-

$$\sum_{i=1}^{n} Xi = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n$$

$\sum_{i=1}^{n} X_i$ وهو يعني حاصل جمع قيم X

حيث الرمز $\sum$ يشير الى عملية الجمع، i :يمثل دليل لتسلسل المتغيرعند عملية الجمع ويأخذ القيم اويبدأ $i = 1$ وينتهي عند $i = n$ واذا كان لدينا متغير آخر ولنفرض هو Y وله مجموعة أخرى من المشاهدات مثل $(Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n)$ فان:

$$1) \sum_{i=1}^{n} (X_i \pm Y_i) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} X_i \pm \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} Y_i$$

$$2) \sum_{i=1}^{n} C = nC$$ حيث C يمثل مقدار ثابت

$$3) \sum_{i=1}^{n} CX_i = C \sum_{i-1}^{n} X_i$$

استخراج الوسط الحسابي:

يستخرج الوسط الحسابي حسب طبيعة البيانات كما يأتي :

1) إيجاد الوسط الحسابي للقيم غير المبوبة في جداول تكرارية:بقسمة مجموع قيم العينة على عددها

$$\boxed{\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}}$$

فاذا كان لدينا (n) من الاعداد $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ فان الوسط الحسابي لهذه الاعداد هو :

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n}{n}$$

فكرة المثال الاتي : إيجاد الوسط الحسابي لعدد من القيم هو مجموعها مقسوماً على عددها

مثال 2

جد الوسط الحسابي للمشاهدات الاتية: 4 , 11 , 0 , 13 , 8 , 22

الحل:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n}{n}$$

$$\bar{X} = \frac{22 + 8 + 13 + 0 + 11 + 4}{6}$$

$$\bar{X} = \frac{58}{6} = 9.66$$

فكرة المثال الاتي: استخدام رمز المجموع لإيجاد الوسط الحسابي

البيانات الاتية تمثل اوزان (10) طلاب. المطلوب ايجاد الوسط الحسابي لوزن الطلاب في هذه العينة.

50, 80, 66, 64, 52, 67, 54, 63, 60, 55

الحل:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

$$\bar{X} = \frac{50+80+66+64+52+67+54+63+60+55}{10}$$

$$\bar{X} = \frac{611}{10} = 61.1$$

2) إيجاد الوسط الحسابي للقيم المبوبة في جداول تكرارية:

توجد طريقتان لإيجاد الوسط الحسابي للقيم المبوبة في جداول تكرارية:

1.طريقة مراكز الفئات Class Point Method

لإيجاد الوسط الحسابي بهذه الطريقة نستخدم الصيغة الاتية:

$$\boxed{\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}}$$

حيث ان: $\overline{X}$: الوسط الحسابي ، F_i هو التكرار المقابل للفئة i

X_i: يمثل مركز الفئة يمكن الحصول على مراكز الفئات بالطريقة الاتية:

$$\boxed{\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الادنى للفئة} + \text{الحد الاعلى للفئة}}{2}}$$

فكرة المثال الاتي: الوسط الحسابي للقيم المبوبة يساوي مجموع حاصل ضرب مركز كل فئة في تكرارها مقسوما على مجموع تكرارها.

احسب الوسط الحسابي للتوزيع التكراري الاتي: -

مركز الفئة X	5	10	15	20	25
التكرار F	4	3	6	2	3

الحل : بما ان مراكز الفئات معلومة فيطبق القانون مباشرة.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$$

$$\bar{X} = \frac{5\times4+10\times3+15\times6+20\times2+25\times3}{4+3+6+2+3} = \frac{255}{18} = 14.16$$

فكرة المثال الاتي: التدرب على إيجاد مراكز الفئات عند إيجاد الوسط الحسابي للتوزيع التكراري

الجدول أدناه توزيع تكراري لعينة تتكون من (60) اسرة حسب عدد افراد الاسرة والمطلوب ايجاد الوسط الحسابي لعدد افراد الاسرة في هذه العينة.

عدد الافراد	2-4	5-7	8-10	11-13	14-16	17-19
عدد الأسر	20	14	10	8	5	3

الحل : في هذا المثال مراكز الفئات مجهولة لذا يجب حسابها اولاً:

$$\text{مركز الفئة الاولى} = \frac{2+4}{2} = 3$$

$$\text{مركز الفئة الثانية} = \frac{5+7}{2} = 6$$

بنفس الطريقة يمكن ايجاد بقية مراكز الفئات (لاحظ ان مركز الفئة يزداد بمقدار3 لكل فئة لاحقة)
الان نعمل الجدول الاتي:

الفئات (عدد الافراد)	التكرار عدد الأسر	مراكز الفئات X_i	مركز الفئة×التكرار $X_i F_i$
2-4	20	3	60
5-7	14	6	84
8-10	10	9	90
11-13	8	12	96
14-16	5	15	75
17-19	3	18	54
المجموع	60		459

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$$

$$\bar{X} = \frac{459}{60} = 7.65$$

وحيث ان المطلوب هو متوسط عدد افراد الاسرة فإننا نقرب الناتج الى القيمة 8 كما إننا نلاحظ ان تمركز الوسط الحسابي وسط التوزيع هو ضمن الفئة الثالثة.

2. طريقة الوسط الفرضي Assumption Mean Method

تستخدم هذه الطريقة عندما تكون قياسات العينة أعدادا كبيرة يصعب التعامل معها فيفضل إختزال هذه الأعداد إلى أعداد أصغر يسهل التعامل معها. فاذا كانت $X_1, X_2, \dots X_n$ تمثل مراكزفئات توزيع تكراري عدد فئاته n ، وإن $F_1, F_2, \dots F_n$ تمثل التكرارات المقابلة لفئات هذا التوزيع ، ليكن A ثابت إختياري كوسط فرضي ويستحسن ان يكون مركز الفئة الاكثر تكراراً. ثم نجد انحراف كل فئة عن الوسط الفرضي ويتم تطبيق الصيغة التالية:

$$\text{الوسط الحسابي} = \text{الوسط الفرضي} + \frac{\text{مجموع (انحرافات مراكز الفئات عن وسطها الفرضي}}{\text{مجموع التكرار}}$$

وعليه فالصيغة العامة لإيجاد الوسط الحسابي بالطريقة المختصرة(الوسط الفرضي) كالاتي:

$$\boxed{\bar{X} = A + \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}}$$

حيث ان: A يمثل الوسط الفرضي، F_i التكرار المقابل للفئة i ، di انحرافات القيم عن وسطها الفرضي $(di = X_i - A)$

فكرة المثال الاتي: ترتيب الخطوات عند إيجاد الوسط الحسابي للجدول التكراري بطريقة الوسط الفرضي

جد الوسط الحسابي للجدول التكراري الاتي بطريقة الوسط الفرضي.

الفئات	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	المجموع
التكرار	3	4	6	7	6	4	30

الحل:

1.نستخرج مراكز الفئات.

2. نختار الوسط الفرضي A من بين مراكز الفئات وليكن (54.5) الذي يقابل اكبر تكرار وهو (7) .

3.نستخرج انحراف مركز كل فئة عن الوسط الفرضي $(di = X_i - A)$

4.نستخرج حاصل ضرب تكرار كل فئة × انحراف مركزها عن الوسط الفرضي $(F_i \times d_i)$

4. نطبق القانون ونستخرج قيمة الوسط الحسابي.

$F_i \times di$	الانحراف عن الوسط الفرضي $d_i = X_i - A$	مراكز الفئات	F_i التكرار	الفئات
$3 \times (-30) = -90$	$24.5 - 54.5 = -30$	24.5	3	20-29
$4 \times (-20) = -80$	$34.5 - 54.5 = -20$	34.5	4	30-39
$6 \times (-10) = -60$	$44.5 - 54.5 = -10$	44.5	6	40=49
$7 \times 0 = 0$	$54.5 - 54.5 = 0$	54.5=A	7	50-59
$6 \times (10) = 60$	$64.5 - 54.5 = 10$	64.5	6	60-69
$4 \times (20) = 80$	$74.5 - 54.5 = 20$	74.5	4	70-79
-90			30	المجموع

$$\bar{X} = A + \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$$

$$\bar{X} = 54.5 + \frac{-90}{30}$$

$$\bar{X} = 54.5 - 3$$

$$\bar{X} = 51.5$$

نشاط: -

1. احسب الوسط الحسابي في المثال السابق باختيار وسط فرضي اخر.
2. احسب الوسط الحسابي في المثال السابق بطريقة مراكز الفئات.

ملاحظة مهمة :لا تتغير قيمة الوسط الحسابي بتغير الوسط الفرضي.

مزايا وعيوب الوسط الحسابي

المزايا

- سهولة حسابه والتعامل معه جبرياً.
- لا يحتاج لترتيب البيانات.
- تدخل في حسابه جميع القيم.

العيوب

- لا يمكن إيجاده للبيانات الوصفية كالجنس وصنف الدم والقومية.
- يتأثر بالقيم الشاذة.
- قد لا يساوي عدداً صحيحاً أو أي من القيم الداخلة في حسابه.
- لايمكن ايجاده في حالة الجداول التكرارية المفتوحة.

تمرين
1-7

1. استخرج الوسط الحسابي للبيانات الاتية:

$a)$ 65 70 85 69 94 100 62 79.

$b)$ 95 47 66 75 82 50.

$c)$ 17 20 0 9 12 14 21 5

2.استخرج الوسط الحسابي للتوزيعات التكرارية الاتية:

حدود الفئات	22-26	27-31	32-36	37-41	42-46	47-51	المجموع
التكرار	8	4	10	9	11	8	50

حدود الفئات	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	لمجموع
التكرار	9	17	20	9	5	60

مراكز الفئات	10	15	20	25	30	المجموع
التكرار	3	4	5	6	2	20

3.جد قيمة X إذا كانت درجات خمسة طلاب لمادة الحاسوب هي: X , 23 , 87 , 70 , 40
علماً ان الوسط الحسابي لدرجات الطلبة هو 57.

2-7 تكوين جداول التكرار المتجمع

درسنا الجدول التكراري للبيانات وهو عبارة عن ترتيب بيانات المتغير العشوائي التي سبق أن تم جمعها وتصنيفها وتوزيعها الى عدد من المجاميع كل منها تسمى بالفئة. وهذه الفئات قد تكون مرتبة تصاعدياً او تنازلياً حسب طبيعة البيانات ويسمى توزيع عدد قيم X حسب الفئات ب(التوزيع التكراري) وقد تكون فئات التوزيع التكراري متساوية في الطول او غير متساوية ، قد نحتاج في

بعض الأحيان إلى معرفة عدد المشاهدات التي تقل أو تزيد عن قيمة معينة فمثلا اذا كان لدينا طلاب إعدادية معينة ونحتاج إلى عدد الطلاب في مرحلة معينة فنستخدم الجداول التكرارية المتجمع.

ويكون جدول التوزيع التكراري المتجمع على نوعين هما :

- الجدول التكراري المتجمع الصاعد
- الجدول التكراري المتجمع النازل

وتمتاز الجداول التكرارية بانها منتظمة من ناحية اتجاه التغيير أي ان تغيير التكرار فيها يكون إما تصاعدياً او تنازلياً ولا يمكن اجراء الاتجاهين معاً في نفس الوقت.

1-2-7الجدول التكراري المتجمع الصاعد Ascending Cumulative Frequency Table

وهو جدول ذو عمودين العمود الأول يمثل (حدود الفئات العليا)والعمود الثاني يمثل (التكرار المتجمع الصاعد) الذي يبين تراكم التكرارات ابتداء من الفئة الأولى في التوزيع وانتهاء بالفئة الأخيرة ويتم صياغة حدود الفئات العليا استخدام الحدود الدنيا لفئات الجدول التكراري بالأضافة إلى الحد الأعلى للفئة الأخيرة ويستخدم عند حساب عدد التكرارات التي تقل عن كل قيمة من قيم المتغير أو الظاهرة محل الدراسة.

ويحسب كالاتي :

التكرار الأول مقابل الحد الأعلى للفئة الأولى

التكرار المتجمع الصاعد لأي فئة=تكرار تلك الفئة مضافا إليه مجموع تكرارات ما قبلها

اما التكرار المتجمع الصاعد لأخر فئة = مجموع التكرارات= N

ويمكن حسابه كما موضح في الجدول ادناه.

الفئات		التكرار	الحدود العليا للفئات	التكرارالمتجمع الصاعد
الفئة(1)		F_1	اقل من الحدالأعلى للفئة(1)	F_1
الفئة(2)		F_2	أقل من الحدالاعلى للفئة (2)	$F_1 + F_2$
⋮		⋮	⋮	⋮
الفئة(n-1)		F_{n-1}		$F_1 + + F_2 + \cdots + F_{n-1}$
الفئة(n)		F_n	أقل من الحد لأعلى للفئة الأخيرة	$F_1 + F_2 + \cdots + F_{\mathrm{n}-1} + F_n$
$\sum$		$\sum F$		

فكرة المثالين الاتيين :التدريب على إنشاء جدول للتكرار المتجمع الصاعد

مثال 6 الجدول الآتي يمثل درجات40 طالب في مادة الرياضيات ، والمطلوب ايجاد:
التكرار المتجمع الصاعد - عدد الطلبة الحاصلين على درجة اكثر من 79.5

الفئات	$49.5-59.5$	$59.5-69.5$	$69.5-79.5$	$79.5-89.5$	$89.5-99.5$	$\sum$
التكرار	2	3	15	14	6	40

الحل : الجدول الاتي يمثل التكرار المتجمع الصاعد. اما عدد الطلبة الحاصلين على اكثر من درجة 79.5 فهم 20 طالبا .

حدود الفئات	التكرار المتجمع الصاعد
<59.5	2
<69.5	$2+3=5$
<79.5	$5+15=20$
<89.5	$20+14=34$
<99.5	$34+6=40$
$\sum$	40

مثال 7 عينة تتكون من 50 عاملا فاذا كانت أجورهم كما في الجدول أدناه جد التكرار المتجمع الصاعد للأجور بآلاف الدنانير

الفئات	-100	-150	-200	-250	-300	-350	$400-450$	$\sum$
التكرار	3	6	10	15	8	5	3	50

الحل:التكرار المتجمع للفئة الاولى = نفس التكرار الاصلي لعدم وجود فئة قبلها
التكرار المتجمع الصاعد لأي فئة=تكرار تلك الفئة مضافا إليه مجموع تكرارات ما قبلها
التكرار المتجمع الصاعد لأخر فئة = مجموع التكرارات= N

فئات اجور العمال بألاف الدنانير	التكرار F_i عدد العمال	الحدودالعليا للفئات	التكرار المتجمع الصاعد
-150	3	اقل من 150	$F_1=3$
-200	6	اقل من 200	$F_2+F_1=3+6=9$
-250	10	اقل من 250	$F_3+F_2+F_1=9+10=19$
-300	15	اقل من 300	$19+15=34$
-350	8	اقل من 350	$34+8=42$
-400	5	اقل من 400	$42+5=47$
$400-450$	3	اقل من 450	$47+3=50=N$
$\sum$	50		

2-2-7 الجدول التكراري المتجمع النازل: Descending Cumulative Frequency Table

وهو جدول ذو عمودين العمود الاول يمثل الحدود الدنيا للفئات والعمود الثاني يمثل التكرار المتجمع النازل للتوزيع الذي يتناقص فيه التكرار ابتداء بالفئة الأولى في التوزيع وانتهاء بالفئة الأخيرة منه. يتم صياغة الحدود الدنيا للفئات باستخدام إشارة اكبر من أويساوي ($\geq$) ويستخدم عند حساب عدد التكرارات التي تزيد عن أو تساوي كل قيمة من قيم المتغير أو الظاهرة محل الدراسة كما هو واضح في الجدول الاتي:

التكرار المتجمع النازل	الحدود الدنيا للفئات	التكرارات fi	الفئات
$F_h + F_{h-1} + \cdots + F_2 + F_1 = N$	الحد الأدنى للفئة الأولى فأكثر	F_1	الفئة (1)
$F_{h-1} + \cdots + F_2 + F_1$	الحدالأدنى للفئة الثانية فاكثر	F_2	الفئة (2)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$F_h + F_{h-1}$		F_{h-1}	الفئة (h-1)
	الحد الأدنى للفئة الأخيرة فأكثر	F_h	الفئة (h)
		$\sum F = N$	$\sum$

فكرة المثال الاتي: التدريب على إنشاء جدول للتكرار المتجمع النازل

من المثال السابق جد التكرار المتجمع النازل لأجور العمال.

الحل:نحصل على التكرار المتجمع النازل بتناقص جميع التكرارات بطريقة متتالية من بداية الجدول .

التكرار المتجمع النازل	الحد الادنى للفئة فأكثر	التكرار F_i عدد العمال	فئات اجور العمال بألاف الدنانير
$N = 50$	100 فأكثر	3	100–150
$50 - 3 = 47$	150 فأكثر	6	150–200
$47 - 6 = 41$	200 فأكثر	10	200–250
$41 - 10 = 31$	250 فأكثر	15	250–300
$31 - 15 = 16$	300 فأكثر	8	300–350
$16 - 8 = 8$	350 فأكثر	5	350–400
$8 - 5 = 3$	400 فأكثر	3	$400 - 450$
		50	$\sum$

فكرة المثال الاتي: التدريب على إنشاء جدول للتكرار المتجمع الصاعد والنازل

الجدول الآتي بيانات لأعمار 30 موظف وتكرار مراجعتهم للمستشفى خلال شهر والمطلوب حساب التكرار المتجمع الصاعد والنازل.

الفئات (الاعمار)	18-20	21-23	24-26-	27-29	30-32	33-35	Σ
التكرار (مراجعة المستشفى)	8	4	7	6	2	3	30

الحل:

الفئات (الاعمار)	التكرار مراجعة المستشفى	الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمع الصاعد	الحدود الدنيا للفئات	التكرار المتجمع النازل
18-20	8	أقل من20	8	أكبرمن 18	30
21-23	4	أقل من23	$8+4=12$	اكبرمن 21	$30-8=22$
24-26	7	أقل من26	$12+7=19$	أكبرمن 24	$22-4=18$
27-29	6	أقل من29	$19+6=25$	أكبرمن 27	$18-7=11$
30-32	2	أقل من32	$25+2=27$	اكبرمن 30	$11-6=5$
33-35	3	أقل من35	$27+3=30$	أكبرمن 33	$5-2=3$
Σ	30				

3-7 الوسيط للبيانات المبوبة وغير المبوبة مزاياه وعيوبه Median

هو أحد مقاييس النزعة المركزية المعروفة ويعّرف لمجموعة من البيانات المرتبة ترتيب تصاعدياً أو تنازلياً بانه (العدد الأوسط) أي (ان الاعداد على يمين الوسيط يكون مساوياً للأعداد على يسار الوسيط).
ويرمز له بالرمز Me.

1-3-7 حساب الوسيط للبيانات غيرالمبوبة في جداول تكرارية (بيانات خام):

طريقة حساب الوسيط

الحالة الاولى: إذا كان عدد البيانات فرديا فان هناك قيمة واحد فقط في الوسط تكون هي قيمة الوسيط.

الحالة الثانية: إذا كان عدد البيانات زوجيا فان هناك قيمتان في الوسط، وتكون قيمة الوسيط هي الوسط الحسابي للقيمتين.

إذا كان لدينا مجموعة من الاعداد ولتكن $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ المرتبة ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً فان ترتيب الوسيط يساوي: -

اذا كان n فردياً	ترتيب الوسيط $= \dfrac{n+1}{2}$
اذا كان n زوجياً	ترتيب الوسيط $= \left(\dfrac{n}{2}, \dfrac{n}{2}+1\right)$

فكرة المثال الاتي: كيفية إيجاد الوسيط عندما يكون عدد البيانات فردياً.

جد قيمة الوسيط للبيانات الآتية:

8	2	10	5	1	7	9

الحل: الطريقة الاولى:

لإيجاد قيمة الوسيط يجب ترتيب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً

3 مفردات				3 مفردات		
1	2	5	7	8	9	10

ترتيب تصاعدي

إن عدد القيم عدد فردي (7) فهناك قيمة واحدة في الوسط وهي 7 وهي التي تمثل قيمة الوسيط.

الطريقة الثانية: -

استخراج رتبة الوسيط وحيث ان عدد القيم فردي في هذا المثال $(n = 7)$ لذا فان رتبة الوسيط للبيانات اعلاه هي:

$$\frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$$

ويقع العدد 7 في الرتبة الرابعة بعد الترتيب التصاعدي او التنازلي وعليه تكون قيمة الوسيط تساوي7، لان هناك ثلاث قيم اقل من 7 وثلاث قيم أكبر من 7 .

فكرة المثال الاتي: كيفية إيجاد الوسيط عندما يكون عدد البيانات زوجياً.

مثال 11 جد الوسيط للبيانات الاتية:

19	11	18	21	17	27	25	27	40	33	7	15

الحل: الطريقة الاولى:

لإيجاد قيمة الوسيط يجب ترتيب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً

5 مفردات   5 مفردات

7	11	15	17	18	19	21	25	27	27	33	40

اذا كان الترتيب تصاعدي

بما ان عدد المفردات او القيم زوجي (12) فهناك قيمتين في الوسط وهما 19,21 وتكون قيمة الوسيط هي الوسط الحسابي لهاتين القيمتين، أي:

$$\text{الوسيط} = \frac{19+21}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

الطريقة الثانية:

استخراج رتبة الوسيط في حالة وحيث ان عدد القيم زوجي في هذا المثال $(n = 12)$ لذا فان رتبة الوسيط للبيانات اعلاه هي:

$$\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1\right) = \left(\frac{12}{2}, \frac{12}{2}+1\right) = (6,7)$$

ويقع العددين 19, 21 في الرتبتين السادسة والسابعة بعد الترتيب التصاعدي او التنازلي وعليه تكون قيمة الوسيط هي المتوسط للقيمتين وكمايلي:

$$\text{الوسيط} = \frac{19+21}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

2-3-7 حساب الوسيط للبيانات المبوبة في جداول تكرارية:

عزيزي الطالب بعد ان تعرفت على طريقة ايجاد الوسيط للبيانات غير المبوبة، فانت في حاجة لمعرفة ايجاد الوسيط للبيانات المبوبة في جدول تكراري.

لحساب الوسيط من بيانات مبوبة في جدول توزيع تكراري يتم إتباع الخطوات الاتية:

- ❖ تكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد من الجدول التكراري.
- ❖ ايجاد ترتيب الوسيط $= \frac{\text{مجموع التكرارت}}{2} = \left(\frac{\sum F_i}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)$

  سواء أكان n فردياً أم زوجياً، حيث ان $\sum F_i$ تمثل مجموع التكرارت.
- ❖ نحدد الفئة الوسيطية: هي الفئة التي يكون التكرار المتجمع الصاعد لها أول عدد أكبر أو يساوي ترتيب الوسيط.
- ❖ نرمز للحد الأدنى للفئة الوسيطية بالرمز A ولطول الفئة بالرمز L .
- ❖ نحسب الوسيط بتطبيق المعادلة الاتية:

$$\textbf{الوسيط} = \textbf{الحد الأدنى للفئة الوسيطة} + \frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطية}}{\text{تكرار الفئة الوسيطية}} \times \textbf{طول الفئة الوسيطية}$$

والصيغة العامة لإيجاد الوسيط للبيانات المبوبة:

$$\boxed{Me = A + \frac{\frac{n}{2} - F_1}{F_2 - F_1} \times L}$$

حيث :

$\frac{n}{2}$ يمثل ترتيب الوسيط

A يمثل الحد الأدنى للفئة الوسيطية المقابلة لأكبر تكرار

F_1 : التكرار المتجمع الصاعد السابق للفئة الوسيطية

F_2 : التكرار المتجمع الصاعد اللاحق للفئة الوسيطية

L: طول الفئة الوسيطية

فكرة المثال الاتي: حساب الوسيط للبيانات المبوبة في جداول تكرارية

مثال 12 الجدول الاتي تمثل درجات 46 طالب في مادة الرياضيات احسب الوسيط للدرجات.

الدرجات	5 –	20 –	35 –	50 –	65 –	85 – 100
عدد الطلاب	2	4	6	7	17	10

الحل: نكون الجدول التكراري المتجمع الصاعد.

الدرجات	عدد الطلبة	الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمع الصاعد
$5 - 20$	2	اقل من 20	2
$20 - 35$	4	اقل من 35	6
$35 - 50$	6	اقل من 50	12
$50 - 65$	7	اقل من 65	19
$65 - 85$	17	اقل من 85	36
$85 - 100$	10	اقل من 100	46
$\sum$	46		

طول الفئة الوسيطية $L = 65 - 50 = 15$

$$\text{ترتيب الوسيط} = \left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{\sum F_i}{2}\right) = \frac{46}{2} = 23$$

الفئة الوسيطية المقابلة لأكبر تكرار هي $(65 - 85)$

$$Me = A + \frac{\frac{n}{2} - F_1}{F_2 - F_1} \times L$$

$$Me = 65 + \frac{23 - 19}{36 - 19} \times 15$$

$$Me = 65 + \frac{4}{17} \times 15$$

$$Me = 65 + 0.235 = 65.23 \cong 65$$

فكرة المثال الاتي: حساب الوسيط للبيانات المبوبة في جداول تكرارية

الجدول التكراري يبين مقدار الاحتياج اليومي من الغذاء بالكيلوغرام لـ 50من الماشية.

احسب الوسيط

فئات الاحتياجات اليومية/كغم	1.5-	4.5-	7.5-	10.5-	13.5-16.5
عدد الاغنام	4	12	19	10	5

الحل: نكون الجدول التكراري المتجمع الصاعد.

الفئات	التكرار	الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمع الصاعد
$1.5 -$	4	اقل من 1.5	4
$4.5 -$	12	اقل من 4.5	16
$7.5 -$	19	اقل من 7.5	35
$10.5 -$	10	اقل من 10.5	45
$13.5 - 16.5$	5	اقل من 16.6	50
$\sum$	50		

طول الفئة الوسيطية $L = 7.5 - 4.5 = 3$

ترتيب الوسيط $= \left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{\sum F_i}{2}\right) = \frac{50}{2} = 25$

الفئة الوسيطية المقابلة لأكبر تكرار هي $(7.5 -)$

$$Me = A + \frac{\frac{n}{2} - F_1}{F_2 - F_1} \times L$$

$$Me = 7.5 + \frac{25 - 16}{35 - 16} \times 3$$

$$Me = 7.5 + \frac{9}{19} \times 3$$

$$Me = 7.5 + 0.47 = 7.97\ kgm$$

مزايا وعيوب الوسيط

المزايا

- سهولة حسابه.
- لا يتأثر الوسيط بالقيم المتطرفة (الشاذة) من البيانات لذا يستخدم بدل المتوسط في مثل هذه الحالات.
- يمكن استخدامه في حالة الجداول ذات الفئات المفتوحة لأنه لا يعتمد على مراكز الفئات.

العيوب

- لا تدخل في حسابه جميع القيم فهو يعتمد على القيم التي في المنتصف.
- لا يمكن حساب الوسيط للبيانات الوصفية.

4-7 المنـــــوال Mode:

هو أحد مقاييس النزعة المركزية وأقلها دقة ويعّرف بأنه تلك القيمة أو القيم الأكثر تكراراًمن غيرها أو الخاصية الأكثر انتشاراً أو شيوعاً بين القيم المختلفة للمتغير العشوائي. ويكثر استخدامه في حالة البيانات الوصفية ويرمزله بالرمز Mo .

ملاحظة: التوزيعات التي لها منوال واحد تسمى احادية المنوال، واما التي لها منوالان تسمى بثنائية المنوال، وان كان أكثر من ذلك تسمى بمتعددة المنوالات، واما التي لا تحتوي على قيم متكررة فهي عديمة المنوال.

1-4-7 حساب المنوال للبيانات غير المبوبة:

فكرة المثال الاتي:: لا نحتاج عند إيجاد المنوال الى ترتيب تصاعدي او تنازلي.

جد المنوال للقيم الاتية : 8، 7 ، 5 ، 8 ، 4 ، 8 ، 9 ، 7

الحل: بما ان الرقم 8 تكرر 3 مرات فهو الاكثر في العينة وعليه فان المنوال هو 8

فكرة المثال الاتي:: لا يشترط ان يكون المنوال عدداً ومن الممكن ان يكون حالة تتكرر أكثر من غيرها

جد المنوال لفصيلة الدم لمجموعة من الطلبة حسب البيانات الاتية:

O+ ,AB+ , O+, B- , A+, O- ,O+, A- , B+ , AB-

الحل: نلاحظ ان فصيلة الدم O^+ تكررت ثلاث مرات ولذلك فهي تمثل المنوال.

فكرة المثال الاتي:: لا يشترط دائماً وجود المنوال إذ في حالة عدم وجود قيمة مكررة لا يوجد منوال.

جد المنوال للبيانات الاتية: 6 , 0 , 9 , 8 , 3 , 1 , 4 , 2

الحل: هذه البيانات عديمة المنوال لعدم وجود قيمة متكررة.

فكرة المثال الاتي:: يمكن أن يكون لمجموعة من القيم أكثر من منوال واحد.

جد المنوال للبيانات الاتية:

6, 8 , 11, 6 , 5 , 3 , 8 , 12 , 6 , 11 , 7, 8 , 1 , 11

الحل: ان لهذه البيانات ثلاث منوالات هي: 6 , 8 , 11 اي انها متعددة المنوال

2-4-7 حساب المنوال للبيانات المبوبة:

فكرة المثال الاتي:: المنوال هو الفئة المقابلة لأكبر تكرار

التحصيل الدراسي	عدد الموظفين
دكتوراه	6
ماجستير	13
بكالوريوس	25
اعدادية	18
متوسطة	11
ابتدائية	6
يقرأ ويكتب	3
امي	0

جد المنوال لبيانات عينة عشوائية من الموظفين موزعين حسب التحصيل الدراسي.

الحل: المنوال هو (البكالوريوس) لأنه الأكثر تكراراً من بين البيانات .

3-4-7 حساب المنوال للبيانات المبوبة (الجداول التكرارية):

تعّرف الفئة المنوالية بانها الفئة الاكبر تكراراً وهي الفئة التي يقع فيها المنوال، في الجداول التكرارية قد يكون هنالك فئة منوالية واحدة أو أكثر أو قد لا يوجد فئة منوالية.

طريقة بيرسون في حساب المنوال:

$$\boxed{Mo = A + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right) \times h}$$

$$\text{المنوال} = \text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + \frac{\text{تكرار الفئة المنوالية} - \text{التكرار السابق للفئة المنوالية}}{(\text{تكرار الفئة المنوالية} - \text{التكرار السابق للفئة المنوالية}) + (\text{تكرار الفئة المنوالية} - \text{التكرار اللاحق للفئة المنوالية})} \times \text{طول الفئة المنوالية}$$

A : الحد الأدنى للفئة الوسيطية المقابلة لأكبر تكرار

Δ_1 : تكرار الفئة المنوالية – التكرار السابق للفئة المنوالية

Δ_2 : تكرار الفئة المنوالية – التكرار اللاحق للفئة المنوالية

h : طول الفئة المنوالية وتساوي الحد الاعلى للفئة – الحد الأدنى للفئة+ 1

فكرة المثال الاتي: الاعتماد على الجدول لتحديد الفئات التي نحتاجها في الحل

الجدول الاتي يمثل عدد التكرارات لكل فئة عمرية لمجموعة من الأطفال والمطلوب ايجاد المنوال.

الفئة بعد المنوالية الفئة المنوالية الفئة قبل المنوالية

فئات الاعمار	5-6	7-8	9-10	11-12	13-14
التكرار	2	5	8	4	1

الحل: من الجدول نجد ان أكبر تكرار = 8 وعليه فان الفئة المنوالية هي (9-10)

A يمثل الحد الأدنى للفئة المنوالية (المقابلة لأكبر تكرار) ويساوي 9

$$\Delta_1 = [8-5] = 3 \ , \ \Delta_2 = [8-4] = 4 \ , h = 10 - 9 + 1 = 2$$

وبالتعويض في الصيغة العامة للمنوال بطريقة بيرسون:

$$Mo = A + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right) \times h$$

$$Mo = 9 + \left(\frac{[8-5]}{[8-5] + [8-4]}\right) \times 2$$

$$Mo = 9 + 0.86 = 9.86$$

4-4-7 العلاقة الخطية بين الوسط الحسابي والوسيط والمنوال:

توجد علاقة خطية في التوزيعات احادية المنوال تربط مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابي والوسيط والمنوال) وهي علاقة تقريبية والعلاقة هي:

(الوسط الحسابي – المنوال) = 3 × (الوسط الحسابي – الوسيط)

$$(\bar{X} - \mathrm{Mo}) = 3(\bar{X} - Me)$$

فكرة المثال الاتي: إظهار فائدة العلاقة الخطية بين مقاييس النزعة المركزية.

إذا كان الوسط الحسابي لتوزيع احادي المنوال يساوي 60 والمنوال 50 فماهي قيمة الوسيط؟

الحل : $(\bar{X} - \mathrm{Mo}) = 3(\bar{X} - Me)$

$$(60 - 50) = 3(60 - Me)$$

$$10 = 3(60 - Me)$$

$$10 = 180 - 3Me$$

$$3Me = 170 \Rightarrow Me = \frac{170}{3} = 57.66$$

مزايا وعيوب المنوال

المزايا

- مقايس سهل حسابه ولا يتأثر بالقيم الشاذة.
- يمكن ايجاده للقيم الوصفية والتوزيعات التكرارية المفتوحة.

العيوب

- عند حساب المنوال لا تؤخذ جميع قيم البيانات في الاعتبار.
- قد يكون لبعض البيانات أكثر من منوال وبذلك لا يمكن تحديد قيمة واحدة للمنوال.
- لايمكن إيجاده في حالة عدم وجود قيم مكررة

1.اختر الاجابة الصحيحة مما يأتي:

- في جدول تكراري متجمع صاعد لأطوال مجموعة من الطلاب كان عدد الطلاب الذين يقل طولهم عن $155.5cm$ هو (10) طلاب، وعدد الذين يقل طولهم عن $165.5\ cm$هو (22). فما عدد الطلاب الذين يقع طولهم بين $155.5cm$ و $165.5cm$ ؟

$a)11 \quad b)32 \quad c)12 \quad d)16 \quad e)11$

- يتكون صف من طلاب وطالبات فاذا كان عدد الطلاب (12) ومعدل درجاتهم يساوي (75) وعدد الطالبات (18) ومعدل درجاتهم يساوي (80) فان الوسط الحسابي لدرجات جميع الطلبة يساوي:

$a)75.5 \quad b)76 \quad c)78 \quad d)77.5 \quad e)78.5$

- الجدول الاتي تكرار متجمع صاعد لأعمار (25) شخص

الحدود الفعلية العليا للفئات	20.5	25.5	30.5	35.5	40.5
التكرار المتجمع الصاعد	2	5	13	22	25

تكرار الفئة (26-30) يساوي:

$a)7 \quad b)13 \quad c)9 \quad d)5 \quad e)8$

2. عينة تتكون من 12 طالب وفي امتحان اللغة الانكليزية حصل (3) منهم على درجة (94) و(2) منهم حصل على درجة 85) و(3) منهم حصل على (66) وحصل الباقي على درجة (57) جد الوسط الحسابي للعينة.

3. جد المنوال لكل عينة:

عينة 1	7	8	8	5	4	4	5		
عينة 2	5	3	6	4	7	2	9	8	1
عينة 3	9	3	6	3	6	6	3	9	

4. اي مقياس من مقاييس النزعة المركزية هو الافضل استخدامه لاستخراج المعدل بالنسبة للعينة الاتية.

95	23	20	12	22	11	21	17	25	19

5-7 مقاييـــس التشـتت Dispersion Measurements

درسنا في البند السابق مقاييس النزعة المركزية، وجدنا ان هذه المقاييس غير كافية لتمثل الواقع بشكل كامل أو لمقارنة مجموعتين من المشاهدات. عند ملاحظة المجموعتين الاتيتين من القيم:

مجموعة	الوسط الحسابي	البيانات						
(1)	81	78	83	82	83	80	79	82
(2)	81	68	75	83	86	90	72	93

نلاحظ أن الوسط الحسابي لكل مجموعة هو 81، وعند مشاهدة المجموعتين نلاحظ وجود اختلاف بين مفردات المجموعة الأولى عن مفردات المجموعة الثانية، ويمكن أن نقول إن تشتت المجموعة الثانية أكبر من تشتت المجموعة الأولى فهناك اختلاف كبير بين المجموعتين من حيث مدى تباعد أوتقارب البيانات فيما بينها، أو تباعد وتقارب القيم عن مقاييس النزعة المركزية.

- ما هي مقاييس التشتت:

تركز هذه المقاييس على معرفة مدى تجانس قيم مجموعة من المفردات، أي مقدار تباعد أو انتشار هذه القيم فيما بينها أو عن قيمة ثابتة كالوسط الحسابي، فيكون التشتت صغيراً إذا كانت البيانات متقاربة وكبيراً إذا كانت البيانات متباعدة، فالبيانات المتساوية لا تشتت فيها، وتكون مقاييس التشتت على نوعين:

- مقاييس التشتت المطلقة:

فهي تبين مدى تجانس قيم مجموعة من البيانات بشكل مطلق وتقاس بنفس وحدات قياس المتغير العشوائي مثل (الطول، الوزن، الكثافة، ...وغيرها). ومن هذه المقاييس المدى، الانحراف المعياري، التباين.

• مقاييس التشتت النسبية:

هذه المقاييس تبين مدى تجانس قيم مجموعة من البيانات بشكل نسبي وتكون خالية من وحدات قياس المتغير العشوائي، وهذه المقاييس هي معاملات التشتت.

وفي هذا الفصل يتم التعرف على مقاييس التشتت المطلقة فقط وهي: المدى، والانحراف المعياري، والتباين.

1-5-7 المدى Range:

هو أبسط مقاييس التشتت تعريفاً وحساباً ويرمز له R، ويعتبر من أسهل المقاييس لأنه يعطينا فكرة سريعة عن مدى تشتت البيانات ويتم حسابه بالفرق ما بين القيمة المشاهدة العليا والصغرى.

أولاً: حساب المدى للبيانات غير المبوبة:

ويحسب المدى في هذه الحالة بتطبيق المعادلة الاتية:

المدى= أكبر قيمة في العينة – اقل قيمة في العينة

فكرة المثال الاتي:: المدى ورمزه (R) هو الفرق بين اعلى قيمة وأقل قيمة في البيانات.

الاتي درجات سبعة طلاب في مادة الحاسوب جد المدى لدرجاتهم.

55، 70، 34، 80، 44، 90، 61

الحل: $X_{max} = 90 \quad , X_{min} = 34$

$$R = X_{max} - X_{min}$$

$$R = 90 - 34 = 56$$

ثانيا: حساب المدى للبيانات المبوبة (الجداول التكرارية).

لإيجاد المدى في حالة البيانات المبوبة في جداول تكرارية يكون بتطبيق المعادلة الاتية:

المدى= الحد الأعلى للفئة الاخيرة – الحد الأدنى للفئة الاولى

فكرة المثال الاتي: فكرة المثال الاتي:: ان مقياس المدى لا يعتمد عليه، لأنه يستند على قيمتين متطرفتين ويهمل بقية القيم.

الجدول التكراري الاتي يبين توزيع 60 مزرعة حسب المساحة المزروعة بالنخيل بالألف دونم.

المساحة	15-20	21-26	27-32	33-38	39-44	45-50
عدد المزارع	3	9	15	18	12	3

والمطلوب حساب المدى للمساحة المزروعة بالنخيل.

الحل: المدى = (الحد الأعلى للفئة الأخيرة) – (الحد الأدنى للفئة الأولى)

$R = 50 - 15 = 35$ دونم

2-5-7 الانحراف المعياري Standard Deviation:

هو مقياس يحدد مدى تباعد أو تقارب عن الوسط الحسابي، ويعتبر من افضل مقاييس التشتت، يرمز له بالرمز (S) ، ويسمى في بعض الاحيان بالانحراف القياسي.

يعرَف الانحراف المعياري بانه الجذر التربيعي لمتوسط مجموع مربعات انحرافات القيم عن الوسط الحسابي.

طرق حساب الانحراف المعياري:

فيما يلي حساب الانحراف المعياري للبيانات المبوبة وغير المبوبة.

أولاً: حساب الانحراف المعياري للبيانات غير المبوبة:

لنفرض $X_1, X_2, X_3, \dots X_n$ بيانات عينة عشوائية حجمها n و $\bar{X}$ يمثل الوسط الحسابي لهذه القراءات ومن التعريف اعلاه فان الانحراف المعياري يساوي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}}$$

فكرة المثال الاتي: الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي لمتوسط مجموع مربعات انحرافات القيم عن الوسط الحسابي.

جد الانحراف المعياري للمفردات الاتية: $-2,5,6,9,7$

الحل: اولاً نجد الوسط الحسابي كالاتي:

$$\bar{X} = \frac{-2+5+6+9+7}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

ثم نطبق الصيغة العامة لإيجاد الإنحراف المعياري :
$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n}}$$

$$S = \sqrt{\frac{(-2-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2 + (9-5)^2 + (7-5)^2}{5}}$$

$$S = \sqrt{\frac{49 + 0 + 1 + 16 + 4}{5}}$$

$$S = \sqrt{\frac{70}{5}}$$

$$S = \sqrt{14}$$

$$S = 3.74$$

ثانياً: حساب الانحراف المعياري للبيانات المبوبة في (جداول تكرارية):

a) باستخدام الصيغة الاتية (القيم الأصلية):

$$\boxed{S = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2 . F_i}{\sum F_i}}}$$

حيث ان :

X_i = مركز الفئة، $\bar{X}$ = الوسط الحسابي ، F_i =تكرار الفئة ، $\sum F_i$ = مجموع تكرارات التوزيع

b) باستخدام طريقة الإنحرافات (وسط فرضي) وباستخدام القانون الاتي:

$$\boxed{S = \sqrt{\frac{\sum {d_i}^2 . F_i}{\sum F_i} - \left(\frac{d_i . F_i}{\sum F_i}\right)^2}}$$

حيث: $d_i = X_i . A$ يمثل انحراف مراكز الفئات عن الوسط الفرضي

ملاحظة

جميع مقاييس التشتت لا تتأثر بإضافة ثابت حقيقي لجميع المفردات ولكنها تتأثر بضرب جميع المفردات بثابت حقيقى.

مثال 24 الصيغتينين الخاصتين بالانحراف المعياري تتيحان الحصول على نفس النتائج .

احسب الانحراف المعياري للتوزيع الاتي باستخدام الصيغتين السابقتين.

الفئات	8-10	11-13	14-16	17-19	20-22	23-25	26-28
التكرار	1	2	5	5	3	3	1

الحل:

الفئات	التكرار F	مركز الفئة X_i	$F.X_i$	$X_i-\bar{X}$	$(X_i-\bar{X})^2$	$(X_i-\bar{X})^2.F_i$
8-10	1	9	9	-9	81	81
11-13	2	12	24	-6	36	72
14-16	5	15	75	-3	9	45
17-19	5	18	90	0	0	0
20-22	3	21	63	3	9	27
23-25	3	24	72	6	36	108
26-28	1	27	27	9	81	81
$\sum$	20		360			414

1. باستخدام القانون الاول:

$$\bar{X}=\frac{360}{20}=18$$

$$S=\sqrt{\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2.F}{\sum F_i}}$$

$$\mathrm{S}=\sqrt{\frac{414}{20}}=\sqrt{20.7}=4.55$$

2. باستخدام الوسط الفرضي:

الفئات	تكرار F_i	مركز الفئة X_i	$d_i = X_i.A$	$F_i.d_i$	$F_i.(d_i)^2$
8-10	1	9	-6	-6	36
11-13	2	12	–3	–6	18
14-16	5	15	0	0	0
17-19	5	18	3	15	45
20-22	3	21	6	18	108
23-25	3	24	9	27	243
26-28	1	27	12	12	144
$\sum$	20			60	594

$$S = \sqrt{\frac{\sum {d_i}^2 . F_i}{\sum F_i} - \left(\frac{d_i . F_i}{\sum F_i}\right)^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{594}{20} - \left(\frac{60}{20}\right)^2} = \sqrt{29.7 - 9}$$

$$S = \sqrt{20.7} = 4.55$$

3-5-7 التباين Variance :

هو أحد مقاييس التشتت، وأكثرها استخداما في النواحي التطبيقية، وهو عبارة عن متوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي. وبذلك فان التباين ما هو الا مربع الانحراف المعياري لتلك المجموعة من القيم. ويرمز له بالرمز S^2 أي ان:

$$\boxed{S^2 = \frac{\sum {d_i}^2 . F_i}{\sum F_i} - \left(\frac{d_i . F_i}{\sum F_i}\right)^2}$$

فكرة المثال الاتي:: التباين هو مربع الانحراف المعياري أي متوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي

جد التباين للجدول التكراري الاتي: -

الفئات	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	$\sum$
التكرار	1	2	3	3	1	10

الحل:

$$s^2 = \frac{\sum d_i^2 \times F_i}{\sum F_i} - \left(\frac{\sum d_i \times F_i}{\sum F_i}\right)^2$$

$$S^2 = \frac{1300}{10} - \left(\frac{10}{10}\right)^2 = 130 - 1 = 129$$

الفئات	التكرار F_i	مراكز لفئات X_i	الوسط الفرضي $d_i = X_i \times A$	$F_i \times d_i$	$d_i{}^2$	$d_i{}^2.F_i$
10-19	1	14.5	-20	-20	400	400
20-29	2	24.5	-10	-20	100	200
30-39	3	34.5	0	0	0	0
40-49	3	44.5	10	30	100	300
50-59	1	54.5	20	20	400	400
$\sum$	10			10		1300

الاختبار الختامي
Final Test

1.اذا كان انحرافات (5) قيم عن وسطها الحسابي هي 3، -1 , 2 , 1, -5 احسب الانحراف المعياري لهذه القيم.

2. احسب الوسط الحسابي للتوزيع الاتي باستخدام الوسط الفرضي.

$\sum$	25-29	20-24	15-19	10-14	5-9	الفئات
10	2	2	2	2	1	التكرار

3.من الجدول التكراري الاتي:

$\sum$	180-199	160-179	140-159	120-139	100-119	الفئات
10	2	2	3	2	1	التكرار

أحسب

a) الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي.

b) الانحراف المعياري بطريقة الوسط الفرضي.

c) المدى.

4. إذا كانت $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ مجموعة من القيم وكان الانحراف المعياري لهذه القيم يساوي (4) جد قيمة n إذا علمت ان:

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = 272$$

تم بحمد الله