סיפרון סיכום באלגברה לינארית

תאריך עדכון גרסה: 08.02.2021

תוכן העניינים

1 מבוא- חשוב לקרוא לפי השימוש

לרווחתכם הכנתי סיפרון סיכום של החומר באלגברה לינארית (1+2), אבל ראשית כמה הערות שחשוב לקרוא לפני השימוש:

- זאת גרסה ראשונית של הספרון בתקווה אין בו טעויות כלל, אבל ברגע שמסכמים שני קורסים תמיד יפלו טעויות, לכן במידה ונתקלתם במשהו שנראה שלכם כטעות נא שילחו לי מייל לכתובת uziharush@gmail.com כדי שאוכל לתקן ולעלות גרסה חדשה טובה יותר! ובכלל אשמח לקבל פידבק האם זה עזר לכם כדי לדעת האם להכין דברים דומים קורסים שונים.
- אופן השימוש: יש להדפיס 4 עמודים בדף אחד (גודל הכתב מותאם לדף A6) לגזור ולשדך את העמודים לפי הסדר, והינה לכם סיפרון חמוד שאתם יכולים לקרוא לפני השינה.
- הספרון נוצר לקורס אלגברה לינארית ממחלקות ומוסדות שונים, לכן יתכנו משפטים\הגדרות קצת שונות או דברים שלא למדתם, לכן אינו מחליף את הנוכחות בהרצאות\תרגולים.
- ניסיתי ליצור סיפרון קומפקטי (קצר וקולע), טועה מי שחושב שהוא יכול ללמוד רק אותו לקראת הבחינה ולהצליח!
- בשל הסיבות שצויינו בכל מקרה של אי חפיפה בין החומר שמופיע כאן לבין החומר של ההרצאה\תרגול החומר של בהרצאה\תרגול הוא הקובע, אבל שמח לדעת על זה כדי לשפר את הגרסה.

2 שדות

הגדרה. קבוצת מספרים $\mathbb{F}$ עם הפעולות $+, \cdot$ נקראת **שדה** אם מתקיימים התכונות הבאות:

- חיבור
  - סגירות: $\forall a,b\in\mathbb{F}:\ a+b\in\mathbb{F}$
  - קיבוץ: $\forall a,b,c\in\mathbb{F}:\ (a+b)+c=a+(b+c)$
  - נייטרלי: $\exists 0_{\mathbb{F}}\in\mathbb{F}:\forall a\in\mathbb{F}:\ 0_{\mathbb{F}}+a=a+0_{\mathbb{F}}=a$
  - נגדי: $\forall a\in\mathbb{F}:\exists -a\in\mathbb{F}:\ a+-a=-a+a=0_{\mathbb{F}}$
  - חילופיות: $\forall a,b\in\mathbb{F}:\ a+b=b+a$
- כפל
  - סגירות: $\forall a,b\in\mathbb{F}:\ a\cdot b\in\mathbb{F}$
  - קיבוץ: $\forall a,b,c\in\mathbb{F}:\ (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
  - נייטלי: $\exists 1_{\mathbb{F}}\in\mathbb{F}:\forall a\in\mathbb{F}:\ 1_{\mathbb{F}}\cdot a=a\cdot 1_{\mathbb{F}}=a$
  - הופכי: $\forall a\in\mathbb{F}:\exists a^{-1}\in\mathbb{F}:\ a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1_{\mathbb{F}}$
  - חילופיות: $\forall a,b\in\mathbb{F}:\ a\cdot b=b\cdot a$
- פילוג: $\forall a,b,c\in\mathbb{F}:\ (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$

משפט. בשדה ניתן להוכיח שהופכי והנגדי הם יחידים.

הגדרה. נאמר ש-$a\neq 0, b\neq 0$ **מחלקי אפס**, אם $a\cdot b=0$ למרות ששניהם שונים מ-0.

משפט. בשדה אין מחלקי אפס.

הגדרה. **מאפיין של שדה** $\mathbb{F}$, מסומן ב-$\mathrm{Char}\left(\mathbb{F}\right)$, הוא המספר n הטבעי בקטן ביותר כך ש-

$$\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n}=0$$

כלומר מספר הפעמים שצריך לחבר את האיבר הנייטלי לכפל כדי לקבל את האיבר הנייטרלי של החיבור, במידה ואין כזה נאמר ש-$\mathrm{Char}\left(\mathbb{F}\right)=0$

משפט. מספר האיברים בשדה סופי יכול להיות רק מהצורה q^m - כלומר מספר ראשוני בחזקת מספר טבעי, ומתקיים $\mathrm{Char}\left(\mathbb{F}\right)=q$

מסקנה. מספר האיברים בשדה מחלק את המאפיין של השדה.

הערה. **[שדות שכדאי להכיר]**

1. $(\mathbb{Q},+,\cdot,0,1)$ - אוסף כל המספרים הרציונלים (מנה של שלמים).
2. $(\mathbb{R},+,\cdot,0,1)$ - אוסף כל המספרים הממשיים בדיוק כמו שאנחנו מכירים.
3. $(\mathbb{C},+,\cdot,0,1)$ - אוסף כל המספרים המרוכבים
4. $(\mathbb{Z}_p,\oplus,\otimes,0,1)$ - כאשר אנחנו מגדירים
   (א) קבוצה- $\mathbb{Z}_p=\{0,1,\ldots,p-1\}$
   (ב) פעולות- $a\oplus b=(a+b)\mod p$ ו-$a\otimes b=(ab)\mod p$

הגדרה. יהי $(\mathbb{F},+,\cdot,0,1)$ שדה אז נאמר ש-$\mathbb{H}\subseteq\mathbb{F}$ הוא **תת שדה** של $\mathbb{F}$ אם $(\mathbb{H},+,\cdot,0,1)$ הוא שדה בפני עצמו עם הפעלות ואיברי היחידה של $\mathbb{F}$.

משפט. **[הקריטריון המקוצר של תת שדה]** יהי $(\mathbb{F},+,\cdot,0,1)$ שדה אז $\mathbb{H}\subseteq\mathbb{F}$ הוא תת שדה אם מתקיים

1. $1_{\mathbb{F}}\in\mathbb{H}$
2. $\forall a,b\in\mathbb{H}:\ a-b\in\mathbb{H}$
3. $\forall a,b\in\mathbb{H}:\ a\cdot b^{-1}\in\mathbb{H}$

3 מערכת משוואות לינאריות

הגדרה. מערכת משוואות מהצורה

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

נקראת **מערכת משוואות לינארית עם** n **נעלמים ו-**m **משוואות**

הערה. תהי מערכת משוואת לינארית

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

אנחנו נייצג אותה בעזרת **מטריצה** בצורה הבאה

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

הגדרה. בכל שורה האיבר הראשון השונה מ-0 נקרא **איבר מוביל**, יש כאלו שמשמשים בשם **איבר פותח** או **ציר**.

הגדרה. **צורה מדורגת** של מטריצה היא צורה המקיימת את התכונות הבאות:

1. מתחת לכל איבר מוביל ישנם אפסים.
2. כל איבר מוביל נמצא מימין לאיבר המוביל שמעליו.
3. במידה ויש שורת אפסים היא נמצאת בסוף.

הגדרה. **הצורה המדורגת הקנונית** של מטריצה היא צורה המקיימת את התכונות הבאות:

1. כל איבר מוביל שווה ל-1.
2. מתחת ומעל לכל איבר מוביל ישנם אפסים.
3. כל איבר מוביל נמצא מימין לאיבר המוביל שמעליו.
4. במידה ויש שורת אפסים היא נמצאת בסוף.

הגדרה. ישנן שלוש **פעולות שורה אלמנטריות**

1. החלפת שתי שורות: $R_i \leftrightarrow R_j$.
2. הכפלת שורה בסקלר ששונה מ-0: αR_i.

3. הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת: $R_i + \alpha R_j$.

הגדרה. נאמר ששתי **מטריצות שקולות שורה** (או בקיצור שקולות) אם ניתן להגיע מאחת לשנייה בעזרת שלושת פעולות השורה האלמנטריות שצויינו.

משפט. לכל מטריצה היא שקולה לצורה קנונית יחידה.

משפט. לשתי מערכות משוואות יש אותן פתרונות אם ורק אם המטריצות שמייצגות אותן הן מטריצות שקולות.

הגדרה. משתנים שבעמדות שלהם אין איברים מובילים נקראים **משתנים חופשיים**, בעוד שמשתנים שבעמדות שלהם יש איברים מובילים נקראים **משתנים תלויים**.

משפט. תהי $(A|b)$ מטריצה מדורגת המייצגת מערכת משוואות מעל שדה $\mathbb{F}$ אזי

1. אם ישנה שורת סתירה אז אין פתרון למערכת.
2. אחרת, מספר הפתרונות הוא $|\mathbb{F}|^k$ כלומר מספר האיברים בשדה בחזקת המשתנים הופשיים.
   שימו לב, שאם אין משתנים חופשיים אז נקבל שישנו פתרון יחיד, ואם ישנו לפחות משתנה חופשי אחד והשדה אינסופי אז יש אינסוף פתרונות.

4 מטריצות

4.1 אלגברת מטריצות

הגדרה. אוסף כל המטריצות מעל שדה $\mathbb{F}$ עם n שורות ו-m עמודות יסומן כ-$\mathbb{F}^{n\times m}$ (יש מקומות שזה מסומן כ-$M_{n\times m}(\mathbb{F})$)

הגדרה. יהיו שתי מטריצות $A,B\in\mathbb{F}^{n\times m}$ אז

$$\left(A+B\right)_{ij}=A_{ij}+B_{ij}$$

שימו לב אם סדר המטריצות אינו שווה, אז החיבור אינו מוגדר ואסור להוסיף\להוריד שורת אפסים לאחת המטריצות כדי שהחיבור יהיה מוגדר

הגדרה. יהיו מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times m}$ וסקלר $\alpha\in\mathbb{F}$ אז

$$\left(\alpha A\right)_{ij}=\alpha A_{ij}$$

הגדרה. יהיו $A\in\mathbb{F}^{n\times p}$ ו- $B\in\mathbb{F}^{p\times m}$ מטריצות אזי $AB\in\mathbb{F}^{n\times m}$ מוגדרת להיות

$$\left(AB\right)_{ij}=\sum_{k=1}^{p}A_{ik}B_{kj}$$

שימו לב שמספר העמודות המטריצה ראשונה חייב להיות שווה למספר השורות במטריצה השנייה.

הערה. **[תכונות של הפעולות על מטריצות]** במידה וסדר המטריצות מאפשר את הפעולות מתקיים:

1. $\left(A+B\right)C=AC+BC$
2. $C\left(A+B\right)=CA+CB$
3. $\left(AB\right)C=A\left(BC\right)$
4. לא מתקיים - $\cancel{AB=BA}$

הגדרה. יהיו $A\in\mathbb{F}^{n\times p}$ ו- $B\in\mathbb{F}^{p\times m}$ מטריצות אזי

1. **כפל עמודה עמודה** אומר

$$C_{i}\left(AB\right)=AC_{i}\left(B\right)$$

כלומר העמודה ה-i של מטריצת התוצאה מתקבל על ידי צירוף לינארי של עמודות A עם מקדמים של עמודה ה-i של המטריצה B.
או בנוסחא אחרת מתקיים

$$C_{i}\left(AB\right)=\sum_{k=1}^{p}C_{k}\left(A\right)B_{ki}$$

2. **כפל שורה שורה** אומר

$$R_i\left(AB\right)=R_i\left(A\right)B$$

כלומר השורה ה-i של מטריצת התוצאה מתקבל על ידי צירוף לינארי של שורות B עם מקדמים של השורה-i של המטריצה A.
או בנוסחא אחרת מתקיים

$$R_i\left(AB\right)=\sum_{k=1}^{p}A_{ik}R_k\left(B\right)$$

4.2 מערכת המוגנית ולא המוגנית

הגדרה. תהי מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times m}$ $b\in\mathbb{F}^{n}$ אז

1. $H=\left\{v\in\mathbb{F}^{m}|Av=0\right\}$ אוסף כל הפתרונות של המערכת הומוגנית
2. $L=\left\{v\in\mathbb{F}^{m}|Av=b\right\}$ אוסף כל הפתרונות של המערכת הלא הומוגנית

משפט. אם $L\neq\emptyset$ אז לכל $v_0\in L$ מתקיים $L=v_0+H$, כלומר כל פתרון של המערכת הלא הומגונית ניתן לייצג כפתרון פרטי + פתרון כללי של המערכת הומוגנית.

משפט. אם $L\neq\emptyset$ אז מתקיים $|L|=|H|$, כלומר אם קיים פתרון למערכת הלא הומוגנית אז מספר הפתרונות שלה שווה למספר הפתרונות של המערכת ההומוגנית.

4.3 מטריצות ריבועיות

הגדרה. תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית, נאמר ש-

1. A **מטריצת היחידה**, ותסומן כ-I, אם אברי האלכסון שווים ל-1 והאיברים שלא באלכסון שווים ל-0, כלומר
$$A=\left\{\begin{array}{cc}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{array}\right.=\mathrm{diag}\left(1,\ldots,1\right)$$
2. A **מטריצת האפס**, ותסומן כ-0, אם כל אברי המטריצה שווים ל-0.
3. A **מטריצת סקלרית**, אם
$$A=\alpha I=\left\{\begin{array}{cc}\alpha & i=j\\0 & i\neq j\end{array}\right.=\mathrm{diag}\left(\alpha,\ldots,\alpha\right)$$
4. A **מטריצת אלכסונית**, אם האיברים שלא באלכסון שווים ל-0, כלומר
$$A=\left\{\begin{array}{cc}A_{ii} & i=j\\0 & i\neq j\end{array}\right.=\mathrm{diag}\left(A_{11},\ldots,A_{nn}\right)$$
5. A **משולשית עליונה**, אם כל האיברים מתחת לאלכסון שווים ל-0 כלומר
$$A=\left\{\begin{array}{cc}A_{ij} & else\\0 & i>j\end{array}\right.$$

6. A **משולשית תחתונה**, אם כל האיברים מעל לאלכסון שווים ל-0 כלומר
$$A=\begin{cases} A_{ij} & else \\ 0 & i<j \end{cases}$$

משפט. התכונות הבאות מתקיימות:

1. מטריצת היחידה היא נייטרלית לכפל, משמע
$$\forall A\in\mathbb{F}^{n\times n}:AI=IA=A$$
2. מטריצת האפס היא נייטרלית לחיבור, משמע
$$\forall A\in\mathbb{F}^{n\times n}:A+0=0+A=A$$
3. מטריצה מתחלפת עם כל מטריצה אחרת אם ורק אם היא מטריצה סקלרית, כלומר
$$\forall B:AB=BA\quad\Leftrightarrow\ A=\alpha I$$

הגדרה. תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times m}$ מטריצה כלשהי אז **המטריצה המשוחלפת** שלה $A^t\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מתקבלת על ידי החלפת שורות בעמודות משמע $\left(A^t\right)_{ij}=A_{ji}$

משפט. התכונות הבאות מתקיימות:

1. $\left(A^t\right)^t=A$
2. $(AB)^t=B^tA^t$
3. $(A+B)^t=A^t+B^t$

הגדרה. תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית, נאמר ש-

1. **סמטרית** אם $A^t=A$
2. **אנטי סמטרית** אם $A^t=-A$

הגדרה. תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית אז **העקבה** של A היא סכום אברי האלכסון משמע $tr\left(A\right)=\sum_{i=1}^{n}A_{ii}$

משפט. התכונות הבאות מתקיימות

1. $tr\left(A\right)=tr\left(A^t\right)$
2. $tr\left(A+B\right)=tr\left(A\right)+tr\left(B\right)$
3. $tr\left(\alpha A\right)=\alpha tr\left(A\right)$
4. $tr\left(AB\right)=tr\left(BA\right)$
5. $\cancel{tr\left(AB\right)=tr\left(A\right)tr\left(B\right)}$ - לא מתקיים.

4.4 הפיכת מטריצות

הגדרה. המטריצה $E\in\mathbb{F}^{n\times n}$ נקראת **מטריצה אלמנטרית** אם ניתן ליצור אותה בעזרת פעולת שורה אלמנטרית אחת על מטריצת היחידה.

משפט. ביצוע פעולת שורה אלמנטרית שקולה לביצוע כפל משמאל במטריצה האלמנטרית המתאימה לפעולה, משמע $\rho\left(A\right)=\rho\left(I\right)A$

הגדרה. המטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ נקראת **הפיכה** אם קיימת מטריצה $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש-$AB=BA=I$ ובמקרה זה B היא יחידה ונסמן אותה כ-$B=A^{-1}$

אלגוריתם. **[אלגוריתם למציאת A^{-1}]**

1. הצג את המטריצות A ו-I אחת ליד השנייה כך $\left(A|I\right)$
2. דרג את A לצורה קנונית על ידי הפעולת $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_k$ כלומר

$$\left(A|I\right)\overset{\rho_1}{\to}\left(\rho_1\left(I\right)A|E_1\right)\overset{\rho_2}{\to}\ldots\overset{\rho_k}{\to}\left(\rho_k\left(I\right)\ldots\rho_1\left(I\right)A|\rho_k\left(I\right)\ldots\rho_1\left(I\right)\right)$$

3. במידה והצורה קנונית של Aהיא I אז A היא הפיכה ומתקיים
$$A^{-1}=\rho_k\left(I\right)\cdot\ldots\cdot\rho_1\left(I\right)$$
כלומר המטריצה שרשומה בצד ימין בסוף התהליך.
4. במידה והצורה הקנונית של A אינה I אז A אינה הפיכה.

משפט. התכונות הבאות מתקיימות

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$
2. $\left(A^{t}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{t}$
3. $\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
4. $\left(A_1A_2\ldots A_m\right)^{-1}=A_m^{-1}\ldots A_2^{-1}A_1^{-1}$
5. $\cancel{\left(A+B\right)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}}$ - לא מתקיים.

הערה. כדי להציג את A ככפל של מטריצות אלמנטריות ניתן לעשות

$$A=\left(A^{-1}\right)^{-1}=\left(\rho_k\left(I\right)\cdot\ldots\cdot\rho_1\left(I\right)\right)^{-1}=\rho_1^{-1}\left(I\right)\cdot\ldots\cdot\rho_k^{-1}\left(I\right)$$

5 מרחבים ווקטורים

5.1 מרחבים ווקטורים

הגדרה. הקבוצה V עם שדה $\mathbb{F}$ ועם הפעולות חיבור ווקטורים וכפל בסקלר נקראת **מרחב ווקטורי** במידה ומתקיים מתקיים

- חיבור
  - סגירות:
$$\forall v,w\in V:\ v+w\in V$$
  - קיבוץ:
$$\forall v,w,u\in V:\ (v+w)+u=v+(w+u)$$
  - נייטרלי:
$$\exists 0_V\in V:\forall v\in v:\ 0_V+v=v+0_V=v$$
  - נגדי:
$$\forall v\in V:\ \exists -v\in V:\ v+-v=-v+v=0_{\mathbb{F}}$$
  - חילופיות:
$$\forall v,w\in V:\ v+w=w+v$$

- כפל בסקלר
  - סגירות:
$$\forall a\in\mathbb{F},v\in V:\ av\in\mathbb{F}$$
  - קיבוץ:
$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{F},v\in V:\ (\alpha\beta)\,v=\alpha\,(\beta v)$$
  - פילוג 1 :
$$\forall a,b\in\mathbb{F},v\in V:\ (a+_{\mathbb{F}}b)\cdot v=av+_V bv$$
  - פילוג 2 :
$$\forall a\in\mathbb{F},v,w\in V:\ a\,(v+_V w)=av+_V aw$$
  - שמירה על הנייטרלי:
$$\forall v\in V:\ 1_{\mathbb{F}}v=v$$

דוגמה. [מרחבים ווקטורים סטנדרטים]

1. **[מרחב ווקטורי העמודה]** יהי $\mathbb{F}$ שדה אז
$$V=\mathbb{F}^n=\left\{\left(\begin{array}{c}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{array}\right)\middle|\,x_i\in\mathbb{F}\right\}$$

מעל $\mathbb{F}$ עם הפעולות

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \\ \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

2. **[מרחב המטריצות]** יהי $\mathbb{F}$ שדה אז

$$V = \mathbb{F}^{n\times m} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in \mathbb{F} \right\}$$

מעל $\mathbb{F}$ עם הפעולות

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{mn}+b_{nm} \end{pmatrix} \\ \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} \end{cases}$$

3. **[מרחב הפולינומים עד דרגה n]** יהי $\mathbb{F}$ שדה אז

$$V = \mathbb{F}_n\left[x\right] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \middle| a_i \in \mathbb{F} \right\}$$

מעל $\mathbb{F}$ עם הפעולות

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \left(a_i + b_i\right) x^i \\ \alpha \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \alpha a_i x^i \end{cases}$$

הגדרה. נאמר ש-$W \subseteq V$ הוא **תת מרחב ווקטורי** של V אם הוא מ״ו בפני עצמו עם אותן פעולות ושדה שהוגדרו ב-V.

משפט. **[הקריטריון המקוצר לתת מ״ו]** יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ אז תהי $W \subseteq V$ הוא תת מ״ו של V מעל $\mathbb{F}$ אם הוא מקיים את התכונות הבאות:

1. סגירות:

$$\forall v, w \in W, \alpha \in \mathbb{F}: \ v + \alpha w \in W$$

2. נייטרלי לחיבור:

$$0_V \in W$$

הגדרה. יהיו U,W תתי מרחבים ווקטורים של V אז

1. איחוד של תתי מרחבים ווקטורים
$$U\cup W=\{\ v\mid v\in U\ \ \vee\ \ v\in W\}$$
<u>אינו בהכרח</u> תת מרחב ווקטורי
2. חיתוך של תתי מרחבים ווקטורים
$$U\cap W=\{\ v\mid v\in U\ \ \wedge\ \ v\in W\}$$
<u>הינו</u> תת מרחב ווקטורי
3. סכום של תתי מרחבים ווקטורים
$$U+W=\{\ u+w\mid u\in U\ \ \wedge\ \ w\in W\}$$
<u>הינו</u> תת מרחב ווקטורי

סימון. יהיו U,W תתי מרחבים ווקטורים של V נסמן $V=W\oplus U$ ונאמר ש-V הוא **סכום ישר** של U,W אם מתקיים

1. $U+W=V$.
2. $U\cap W=\{0\}$.

5.2 בסיסים

הגדרה. יהי V מ״ו מעל שדה $\mathbb{F}$ אז **צירוף לינארי (צ״ל)** של הווקטורים $B=\{v_1,v_2,\ldots v_n\}$ הוא ביטוי מהצורה $\alpha_1v_1+\ldots+\alpha_nv_n$ ובקצרה $\sum_{i=1}^{n}\alpha_iv_i$

הגדרה. יהי V מ״ו מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי $B=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ קבוצה של הווקטורים, אז **המרחב הנפרש** של B הוא אוסף כל הצירופים הלינארים של B כלומר
$$\text{Span}\left(B\right)=\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_iv_i|\forall a_i\in\mathbb{F}\right\}$$

משפט. יהי V מ"ו ו-A,B קבוצות ב-V אז מתקיים

1. $\text{Span}\left\{A\right\}$ תת מרחב של -V
2. $\text{Span}\left\{A\right\}+\text{Span}\left\{B\right\}=\text{Span}\left\{A\cup B\right\}$
3. אם $A\subseteq B$ אז $\text{Span}\left\{A\right\}\subseteq\text{Span}\left\{B\right\}$
4. $\text{Span}\left\{\emptyset\right\}=\{0\}$

הגדרה. יהי V מ״ו מעל שדה $\mathbb{F}$ אז ותהי $B=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ קבוצה של הווקטורים נאמר ש-B **בלתי תלויה לינארית (בת״ל)** אם רק הצירוף הלינארי הטריוואלי נותן את ווקטור ה-0 משמע

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i=0\\ \Downarrow\\ \forall i:\alpha_i=0\end{gathered}$$

והיא תקרא **תלויה לינארית (ת״ל)** אם היא לא מקיימת את זה, כלומר קיים צירוף לינארי לא טריוואלי שנותן את ווקטור ה-0

הגדרה. יהי V מ״ו מעל שדה $\mathbb{F}$ אז ותהי B קבוצה של הווקטורים נאמר ש-B **בסיס** של V האם מתקיים

1. B בת״ל
2. B פורשת את V כלומר $\text{Span}(B)=V$.

ובמקרה זה נאמר ש**המימד** של V הוא מספר האיברים ב-B כלומר $\dim(V)=|B|$

משפט. **[השלמה לבסיס]** יהי V מ״ו מעל שדה $\mathbb{F}$ בעל מימד n, ותהי $B=\{v_1,\ldots,v_k\}$ קבוצת הווקטורים בת״ל שאינה פורשת את V אז קיימת קבוצת ווקטורים $C=\{u_1,\ldots,u_{n-k}\}$ כך ש-$B\cup C$ תהיה בסיס ל-V

אלגוריתם. **[השלמה לבסיס]** איך מוצאים את קבוצת הווקטורים $C=\{u_1,\ldots,u_{n-k}\}$ מהמשפט הקודם?

יש לחפש ווקטורים בת״ל $C=\{u_1,\ldots,u_{n-k}\}$ כך ש-$u_i\notin\text{Span}(B)$ כדי לעשות זאת נבצע את השלבים הבאים

1. נציג את $\text{Span}(B)$ בצורה של מערכת אילוצים הומוגית- במערכת ההומוגנית אמורים להיות $n-k$ משוואות
2. נבחר ווקטור u_i כך הוא מקיים את כל האילוצים בסעיף הקודם פרט לאילוץ ה-i, דבר זה מבטיח שהווטורים $\{u_1,\ldots,u_{n-k}\}$ יהיו בת״ל.

משפט. **[משפט שלישי חינם]** יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ אז ותהי B קבוצה של הווקטורים. אם מתקיימים שתים מהתכונות הבאות אז השלישית מתקיימת וניתן לומר ש-B היא בסיס של V

1. B בת״ל
2. B פורשת את V
3. $\dim(V)=|B|$

משפט. יהי V מ״ו ו-$W\subseteq V$ תת מרחב כך ש-

$$\dim(W)=\dim(V)$$

אז $W=V$

משפט. **[משפט המימדים]** יהיו U,W תתי מרחבים של V אז

$$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$$

5.3 מרחבי מטריצה

הגדרה. תהי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה, נגדיר

1. **מרחב שורות** של A הוא המרחב הנפרש על ידי שורות A
$R(A) = \text{Span}\{R_1(A), \ldots, R_m(A)\}$
2. **מרחב עמודות** של A הוא המרחב הנפרש על ידי עמודות A
$C(A) = \text{Span}\{C_1(A), \ldots, C_n(A)\}$
3. **מרחב האפס** של A הוא אוסף כל הפתרונות של המערכת ההומוגנית
$N(A) = \{v \in \mathbb{F}^n | Av = 0\}$
4. **מרחב האפס השמאלי** של A הוא אוסף כל הפתרונות של המערכת ההומוגנית
$N(A^t) = \{v \in \mathbb{F}^m | A^t v = 0\}$

משפט. [**מציאת בסיסים ל-**$R(A), C(A), N(A)$]

1. הבסיס ל-$R(A)$ הן השורות שלא התאפסו בצורה המדורגת.
2. הבסיס ל-$C(A)$ הן העמודות המקוריות של A שבהן יש איבר מוביל.
3. הבסיס ל-$N(A)$ מתקבל על ידי מציאת בסיס למרחב הפתרונות של $Ax = 0$
4. הבסיס ל-$N(A^t)$ מתקבל על ידי מציאת בסיס למרחב הפתרונות של $A^t x = 0$

משפט. לכל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מתקיים $\dim R(A) = \dim C(A)$ ולמספר הזה נקרא **הדרגה** של A ונסמנו ב-$\text{rank}(A)$

משפט. לכל שתי מטריצות מתקיים (במידה והכפל מוגדר)

1. $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B)$
2. $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$
3. אם A הפיכה אז $\text{rank}(AB) = \text{rank}(B)$
4. אם B הפיכה אז $\text{rank}(AB) = \text{rank}(A)$

משפט. [**משפט הדרגה למטריצות**] לכל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מתקיים
$$\text{rank}(A) + \dim N(A) = n$$

משפט. [**תנאים שקולים להפיכות**] תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה אז התנאים הבאים שקולים:

1. A הפיכה

2. הצורה הקנונית של A היא I.
3. A ניתנת להצגה ככפל של מטריצות אלמנטריות
4. $C\left(A\right)=\mathbb{F}^{n}$
5. $R\left(A\right)=\mathbb{F}^{n}$
6. $N\left(A\right)=\left\{ \overrightarrow{0}\right\}$
7. $\mathrm{rank}\left(A\right)=n$
8. למערכת $Ax=b$ יש פתרון יחיד

6 קואורדינאטות

הגדרה. יהי V מ"ו ו-$B=\{v_1,..,v_n\}$ **בסיס של מ"ו** V אז לכל $v\in V$ מתקיים $v=\alpha_1v_1+...+\alpha_nv_n$ במקרה זה נאמר ש-

$$[v]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

הוא **וקטור הקואורדינאטות** של v לפי B.

הגדרה. יהי V מ"ו ויהיו $\left\{\begin{array}{c}B_1=\{v_1,..,v_n\}\\ B_2=\{u_1,..,u_n\}\end{array}\right.$ בסיסים אז **מטריצת מעבר מ-** B_1 **ל-** B_2 היא מטריצה שמקיימת

$$\forall v\in V:\quad [I]_{B_2}^{B_1}[v]_{B_1}=[v]_{B_2}$$

משפט. יהי V מ"ו וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $\left\{\begin{array}{c}B_1=\{v_1,..,v_n\}\\ B_2=\{u_1,..,u_n\}\end{array}\right.$ בסיסים אז מטריצת המעבר מקיימת

$$[I]_{B_2}^{B_1}=\begin{pmatrix}| & | & & |\\ [v_1]_{B_2} & [v_2]_{B_2} & \cdots & [v_n]_{B_2}\\ | & | & & |\end{pmatrix}$$

משפט.

1. $[I]_{B_1}^{B_2}[I]_{B_2}^{B_3}=[I]_{B_1}^{B_3}$
2. מטריצת מעבר תמיד הפיכה ומתקיים $\left([I]_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}=[I]_{B_2}^{B_1}$

7 העתקות לינארית

הגדרה. יהיו V,W מ"ו מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ אז העתקה $T:V\to W$ נקראת **לינארית (ה"ל)** אם היא מקיימת

$$\forall v_1,v_2\in V,\alpha\in\mathbb{F}:\ T\left(v_1+\alpha v_2\right)=T\left(v_1\right)+\alpha T\left(v_2\right)$$

הערה. תהי $T:V\to W$ ה"ל אז $T\left(0\right)=0$, כלומר אם $T\left(0\right)\neq 0$ אז <u>בהכרח T אינה</u> ה"ל.

משפט. **[משפט ההגדרה]** יהיו V,W מ"ו ו-$\{v_1,...v_n\}$ בסיס ל-V ו-$\{w_1,...w_n\}$ וקטורים כלשהם ב-W ואז <u>קיימת</u> ה"ל <u>יחידה</u> כך ש-

$$\forall i:\ T\left(v_i\right)=w_i$$

הגדרה. תהי $T:V\to W$ ה"ל נגדיר

1. **הגרעין** של T להיות

$$\ker\left(T\right)=\{v\in V|T\left(v\right)=0\}$$

2. **התמונה** של T להיות

$$\operatorname{Im}\left(T\right)=\{T\left(v\right)|v\in V\}=\{w\in W|\exists v\in V:T\left(v\right)=w\}$$

משפט. יהיו $T:V\to W$ ה"ל ו- $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס ל-V אז

$$\operatorname{Im}\left(T\right)=\operatorname{Span}\left\{T\left(v_1\right),T\left(v_1\right),\ldots,T\left(v_n\right)\right\}$$

כלומר התמונה של וקטורי הבסיס פורשים $\operatorname{Im}\left(T\right)$, וכדי למצוא בסיס ל-$\operatorname{Im}\left(T\right)$ יש לבדוק את התלות שלהם.

משפט. **[משפט הדרגה להעתקות לינאריות]** תהי $T:V\to W$ ה"ל אז

$$\dim\left(\ker\left(T\right)\right)+\dim\left(\operatorname{Im}\left(T\right)\right)=\dim\left(V\right)$$

הגדרה. תהא $T:\underset{E}{V}\to\underset{F}{W}$ ה"ל. $E=\{v_1,\ldots v_n\}$ בסיס ל-V ו-$F=\{w_1,\ldots w_m\}$ בסיס ל W, אזי מטריצה A המקיימת כך שלכל $v\in V$ מתקיים $\left[T\left(v\right)\right]_F=A\left[v\right]_E$ ונסמן $A=\left[T\right]_F^E$ ונקרא לה **המטריצה המייצגת של T מ-E ל-F**

משפט. תהא $T:\underset{E}{V}\to\underset{F}{W}$ ה"ל. $E=\{v_1,\ldots v_n\}$ בסיס ל-V ו-$F=\{w_1,\ldots w_m\}$ בסיס ל W. אזי המטריצה המייצגת של T לפי הבסיסים E,F הינה

$$\left[T\right]_F^E=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \left[T\left(v_1\right)\right]_F & \left[T\left(v_2\right)\right]_F & \cdots & \left[T\left(v_n\right)\right]_F \\ | & | & & | \end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{m\times n}$$

הערה. תכונות של מטריצה מייצגת

1. יהיו $T, S : \underset{E}{V} \to \underset{F}{W}$ העתקות לינארית אז $[T+S]_F^E = [T]_F^E + [S]_F^E$.
2. יהיו $T : \underset{E}{V} \to \underset{F}{W}, S : \underset{F}{W} \to \underset{H}{U}$ העתקות לינארית אז $[S \circ T]_H^E = [S]_H^F [T]_F^E$.
3. אם $T : \underset{E}{V} \to \underset{F}{W}$ הפיכה אז מתקיים $\left([T]_F^E\right)^{-1} = [T^{-1}]_E^F$ (הראו בהמשך)

משפט. תהא $T : \underset{E}{V} \to \underset{F}{W}$ עם בסיסים E, F בהתאמה. אזי

1. $[\ker T]_E = N\left([T]_F^E\right)$
2. $[\mathrm{Im} T]_F = C\left([T]_F^E\right)$

7.1 הפיכות העתקה לינארית

הגדרה. תהי $T : V \to W$ ה"ל נאמר ש-

1. T **חד-חד-ערכית (חח"ע)** אם מתקיים $T(v_1) = T(v_2) \Leftarrow v_1 = v_2$
2. T **על** אם מתקיים $\forall w \in W : \exists v \in V |\ T(v) = w$
3. T **הפיכה** אם קיימת $S : W \to V$ כך ש- $S \circ T = Id_V$ ו- $T \circ S = Id_W$

משפט. תהי $T : V \to W$ ה"ל אזי

1. T חח"ע אם ורק אם $\ker T = \{0\}$
2. אם T חח"ע אז $\dim(V) \le \dim(W)$
3. T על אם ורק אם $\mathrm{Im} T = W$
4. אם T חח"ע אז $\dim(V) \ge \dim(W)$

משפט. תהי $T : V \to W$ ה"ל אזי

1. אם T חח"ע אז
2. T על אם ורק אם $\mathrm{Im} T = W$

משפט. תהי $T : \underset{E}{V} \to \underset{F}{W}$ ה"ל אזי התנאים הבאים שקולים

1. T הפיכה.
2. T חח"ע ועל

3. $[T]_F^E$ מטריצה הפיכה לכל בסיס E ו-F.

משפט. קיימת $T: V\to W$ הפיכה אם ורק אם $\dim V = \dim W$ ובמקרה זה נאמר ש-V, W **איזומורפים** ול-T נקרא **איזומורפיזים**.

אלגוריתם. **[מציאת** T^{-1}**]** ידוע ש-$[T^{-1}]_E^F = \left([T]_F^E\right)^{-1}$ לכן כדי למצוא נוסחא ל-T^{-1} נבצע את השלבים הבאים:

1. נבחר בסיסים E, F כרצוננו (אלא אם הם נתונים לנו)
2. נמצא את המטריצה המייצגת, $[T]_F^E$.
3. נהפוך את המטרציה המייצגת על ידי האלגריתם של גאוס וכך נמצא את $\left([T]_F^E\right)^{-1}$
4. המטריצה מסעיף הקודם היא המטריצה המייצגת של T^{-1}, קרי $[T^{-1}]_E^F$.
5. נמצא את $[T^{-1}(v)]_E$ בעזרת הנוסחא $[T^{-1}(v)]_E = [T^{-1}]_E^F [v]_F$.
6. בעזרת ההגדרה של וקטור קואורדינטות נמצא נוסחא מפורשת ל-$T^{-1}(v)$.

8 דטרימננטות

8.1 תמורות ודטרמיננטה לפי תמורות

הגדרה. **תמורה** היא פונקציה חח"ע ועל מ-$\{1,..,n\}$ לקבוצה $\{1,...,n\}$

סימון. איך מציגים את התמורה?

1. כפונקציה: $\left(\begin{array}{c|cccccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \sigma(x) & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right)$

2. כמחזורים: $(1\ 5\ 3)\ (2\ 6)\ \cancel{(4)}$

משפט. **נסמן ב-** S_n את אוסף כל התמורות על הקבוצה $\{1,..,n\}$

משפט. $|S_n| = n!$

הגדרה. **חילוף בתמורה** הוא מקרה כאשר $j > i$ אך $\sigma(i) < \sigma(j)$

הערה. כדי למצוא את מספר החילופים בתמורה כותבים את התמורה בצורה של פונקציה לאחר מכן מותחים קווים בין המספרים הזהים ואז מספר הצלבות בין הקווים הוא מספר החילופים.

הגדרה. תהי σ תמורה אז **סימן התמורה**, $\mathrm{Sign}(\sigma) = (-1)^{h(\sigma)}$, כאשר $h(\sigma)$ הוא מספר החילופים בתמורה.

הגדרה. תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ אז **הדטרמיננטה** של A היא

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)}$$

8.2 מציאת דטרמיננטה בצורות שונות

משפט. תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה אז

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |M_{ij}|$$

כאשר M_{ij} הוא **המינור** מ-ij והוא מתקבל על ידי מחיקת שורה i עמודה j מ-A.

משפט. באותו אופן ניתן לעשות פיתוח לפי עמודה, משמע

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |M_{ij}|$$

משפט. איך דירוג מטריצות משפיע על דטרמיננטה?

1. החלפת שורות: $B \overset{R_i \leftrightarrow R_j}{\longrightarrow} A$ אז $|A| = -|B|$
2. הכפלת שורה בסקלר: $B \overset{\alpha R_i}{\longrightarrow} A$ אז $|A| = \frac{1}{\alpha}|B|$
3. הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת: $B \overset{R_i \leftrightarrow R_j}{\longrightarrow} A$ אז $|A| = |B|$

משפט. דטרמיננטה של מטריצה אלכסונית היא כפל איברי אלכסון,

מסקנה. כדי לחשב דטרמיננטה של מטריצה ניתן לדרג אותה תוך כדי התחשבות בשינוי של הדטרמיננטה בעקבות הדירוג ואז להכפיל את אברי האלכסון.

הערה. תוכנות של דטרמיננטה:

1. $|A| = |A^t|$
2. $|AB| = |A|\,|B|$
3. $|A^k| = |A|^k$
4. A הפיכה אם ורק אם $|A| \neq 0$ ובמקרה זה $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
5. $|\alpha A| = \alpha^n\,|A|$
6. $\cancel{|A+B| = |A| + |B|}$-לא מתקיים

8.3 כלל קרמר והמטריצה קלאסית

8.3.1 המטריצה הצמודה קלאסית

הגדרה. תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ אז נגדיר את **הצמודה הקלאסית** להיות

$$[\mathrm{Adj}(A)]_{ij} = (-1)^{i+j}\,|M_{ji}|$$

משפט. $A \cdot \mathrm{Adj}\,(A) = |A| \cdot I$

משפט. $|\mathrm{Adj}\,(A)| = |A|^{n-1}$

8.3.2 כלל קרמר

משפט. **[כלל קרמר]** תהי A מטריצה הפיכה אז למערכת $Ax = b$ ישנו פתרון אחד והוא $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$ כאשר $|A_i|$ היא המטריצה המתקבלת על ידי החלפת עמודה i של A ב-b.

9 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

9.1 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים למטריצה

הגדרה. תהי A מטריצה. אם קיים וקטור $v \neq 0$ כך ש-$Av = \lambda v$ אז λ נקרא **ערך עצמי (ע״ע)** של A ו-v נקרא **וקטור עצמי (ו״ע)** של A המתאים ל-λ.

הגדרה. תהי A מטריצה נגדיר את **הפולינום האופייני** של Aלהיות
$$p_A\left(x\right) = \left|xI - A\right|$$

משפט. $p_A(\lambda) = 0$ אם ורק אם λ הוא ע״ע של A

הגדרה. **המרחב העצמי** של A המתאים לע״ע λ הוא
$$V_\lambda = \{v|Av = \lambda v\} = N\left(\lambda I - A\right)$$
, כלומר כל הו״ע המתאימים ל-λ איחוד עם ווקטור ה-0.

הערה. המרחב העצמי הוא תת מרחב ווקטורי של $\mathbb{F}^n$.

הגדרה. המטריצות A ו-B נקראות **דומות** אם קיימת מטריצה P כך ש-
$$A = P^{-1}BP$$

משפט. כמה תכונות שימושיות (נסו להוכיח אותם לבד)

1. A הפיכה אם ורק אם 0 <u>אינו</u> ע״ע של A.
2. אם λ ע״ע של A אזי λ^k ע״ע של A^k לכל k
3. אם λ ע״ע של A ו-A הפיכה אזי λ^{-1} ע״ע של A^{-1}
4. אם A היא מטריצה נילפוטנטית, אז 0 הוא ע״ע היחיד של A.
5. ל- A, A^t יש אותם ע״ע, אך לא חייבים להיות להם אותם ו״ע.
6. אם A, B דומות אז יש להם אותם ע״ע, פולינום אופייני, עקבה, דטרמיננטה, דרגה ואותה כמות של ו״ע בת״ל לכל ע״ע
7. אם v, w הם ו״ע של ע״ע שונים אז הם בת״ל.
8. האיבר החופשי בפולינום האופייני שווה ל-$\left(-1\right)^n\left|A\right|$.
9. המקדם של x^{n-1} בפולינום האופייני שווה ל-$-tr\left(A\right)$

הגדרה. תהי A מטריצה, אם קיים k כך ש-$A^k = 0$ו-$A^{k-1} \neq 0$ נאמר ש-A **נילפוטנטית מסדר** k

משפט. אם A נילפוטנטית אז כל הע״ע שלה שווים ל-0.

9.2 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים להעתקה לינארית

הגדרה. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית. אם קיים וקטור $v\neq 0$ כך ש-$T(v)=\lambda v$ אז λ נקרא **ערך עצמי (ע״ע)** של T ו-v נקרא **וקטור עצמי (ו״ע)** של T המתאים ל-λ.

משפט. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית ו-B בסיס ל-V, אז λ ו-v הם ע״ע/ו״ע של העתקה T אם ורק אם λ ו-$[v]_B$ הם ע״ע/ו״ע של המטריצה $[T]_B^B$.

מסקנה. כדי למצוא ע״ע וו״ע של העתקה לינארית נבחר כל בסיס שנרצה (לשם הפשטות לרוב ניקח את הבסיס הסטנדרטי) ונמצא את הע״ע והו״ע של המטריצה $[T]_B^B$ ואלו הם הע״ע של T, אך הווקטורים הם ווקטורי הקואורדינטות של הו״ע של T.

10 לכסון

10.1 לכסון מטריצה

הגדרה. תהי A מטריצה ו-λ ע״ע של A.

1. **הריבוי האלגברי** של הע״ע λ הוא החזקה של הגורם $(x-\lambda)$ בפולינום האופייני.
2. **הריבוי הגאומטרי** של הע״ע λ הוא המימד של מ״ע כלומר $\dim\left(N\left(V_{\lambda_0}\right)\right)$.

משפט. לכל ע״ע מתקיים $n \leq$ הר״א $\leq$ הר״ג ≤ 1.

הגדרה. נאמר ש-A **לכסינה** אם היא דומה למטריצה אלכסונית, כלומר קיימת D אלכסונית ו-P הפיכה כך ש-$D=P^{-1}AP$.

משפט. אם A לכסינה אז $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ו-$P = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ כאשר v_i הוא הו״ע של הע״ע λ_i.

משפט. התנאים הבאים שקולים:

1. A לכסינה
2. קיים בסיס ל-$\mathbb{F}^n$ המורכב מו״ע.
3. הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינארים + לכל ע״ע ר״א=ר״ג
4. סכום של הר״ג שווה ל-n.

הערה. **[העלאה בחזקה]** תהי A מטריצה לכסינה אז ניתן לעלות את A בחזקה $k\in\mathbb{N}$ בקלות באופן הבא

$$
\begin{aligned}
A^k &= \\
(PDP^{-1})^k &= \\
\underbrace{\left(PDP^{-1}\right)\ldots\left(PDP^{-1}\right)}_{k} &= \\
PD^kP^{-1} &= \\
P\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n^k} \end{pmatrix}P^{-1}
\end{aligned}
$$

10.2 לכסון העתקה לינארית

הגדרה. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית נאמר ש-T **לכסינה** אם קיים בסיס B כך ש-$[T]_B^B$ אלכסונית, ו-B נקרא **הבסיס המלכסון** של T

משפט. תהי $T:V\to V$ לכסינה אז הבסיס המלכסון, B, הוא הבסיס המורכב מו״ע של T ו-$[T]_B^B$ היא מטריצה אלכסונית שעל האלכסון יש את הע״ע לפי הסדר שבו סידרנו את הו״ע ב-B.

11 פולינום מינימלי

משפט. **[משפט קיילי המילטון]**- תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה, אז מתקיים $p_A(A)=0$ כלומר אם נציב בפולינום האופייני את המטריצה נקבל את מטריצת ה-0

משפט. מטריצה הפיכה אם ורק אם המקדם החופשי בפולינום האופייני שלה שונה מ-0 אם ורק אם אין לה ע״ע השווה ל-0

הגדרה. **הפולינום המינימלי** של A הוא הפולינום המתוקן בעל חזקה מינימלית המקיים $m_A(A)=0$

משפט. אם

$$p_A(x)=\prod_{i=1}^{l}(x-\lambda_i)^{q_i^{(1)}}\left(x^2+ax+b\right)^{q_i^{(2)}}$$

אז

$$m_A(x)=\prod_{i=1}^{l}(x-\lambda_i)^{m_i^{(1)}}\left(x^2+ax+b\right)^{m_i^{(2)}}$$

כאשר $1\le m_i\le q_i$, בקיצור לפולינום המינימלי קיימים אותם גורמים אי פריקים כמו לפולינום האופייני, בפרט הפולינום האופייני מחלק את הפולינום מינימלי.

משפט. לכל פולינום $f(x)$ המקיים $f(A)=0$ הפולינום המינימלי מחלק אותו.

משפט. תהי A מטריצה, אז A לכסינה אם ורק אם $m_A(x)$ מתפרק לגורמים לינארים בעלי חזקה אחת

משפט. למטריצות דומות יש אותו פולינום מינימלי.

12 שילוש

הגדרה.

1. מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ תקרא **ניתנת לשילוש** אם היא דומה למשולשית.
2. העתקה $T : V \to V$ תקרא **ניתנת לשילוש** אם המטריצה $[T]_E^E$ ניתנת לשילוש עבור כל בסיס E . או באופן שקול קיים בסיס B כך ש $[T]_B^B$ משולשית.

משפט. תהא A מטריצה אזי הפ״א מתפרק לגורמים לינארית (מל״ל) אמ״מ היא ניתנת לשילוש ובמקרה זה על האלכסון יהיו את הע״ע.

13 ז׳ירדון

הגדרה. **בלוק ז׳ורדן** הוא מטריצה מהצורה

$$J_k(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{k\times k}$$

משפט. עובדות על בלוק ז׳ורדן

1. בלוק ז׳ורדן אינו לכסין (עבור $k>1$).
2. $p_{J_k(\lambda)}(x)=m_{J_k(\lambda)}(x)=(x-\lambda)^k$
3. $J_k(\lambda)=J_k(0)+\lambda I$
4. לבלוק ז׳ורדן יש ו״ע יחיד והוא $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$

הגדרה. מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ היא **בצורת ז׳ורדן** אם היא מטריצת אלכסונית בלוקים כאשר כל בלוק הוא בלוק ז׳ורדן. כלומר מהצורה

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{k_t}(\lambda_t)\end{array}\right)$$

משפט. $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ **ניתנת לז׳ירדון** (דומה למטריצה מצורת ז׳ורדן) אם ורק אם $p_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינארים.

ובמקרה זה המטריצה J מקיימת

1. מספר הפעמים שע״ע λ_0 מופיע על האלכסון יהיה הריבוי האלגברי של λ_0
2. מספר הבלוקים של λ_0 שווה לריבוי הגאומטרי של λ_0
3. גודל הבלוק הגדול ביותר שווה לחזקה של $(\lambda-\lambda_0)$ בפולינום המינימלי.

משפט. המטריצה J נקראת צורת ז׳ורדן של A והיא <u>יחידה</u> עד כדי סדר בלוקים.

משפט. יהיו שתי מטריצות ניתנות לז׳ירדון אז הן דומות אם ורק אם יש להן אותה צורת ז׳ורדן.

14 מכפלה פנימית

14.1 מבוא

הגדרה. יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ כאשר $\mathbb{F}$ הוא $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$. **מכפלה פנימית** היא פונקציה

$$\langle *, * \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$$

שמקיימת את התכונות הבאות:

- לינאריות ברכיב הראשון: $\langle v + \alpha u, w \rangle = \langle v, w \rangle + \alpha \langle u, w \rangle$
- הרמטיות: $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$
- אי שליליות: לכל $v \in V$, $\langle v, v \rangle \geq 0$, ו $\langle v, v \rangle = 0$ רק עבור $v = 0$.

ומרחב ווקטורי עם מכפלה פנימית נקרא מרחב מכפלה פנימית

הערה. תכונות:

1. מעל $\mathbb{R}$ יש סימטריות:
$$\langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle$$
2. מעל $\mathbb{C}$ יש "כמעט לינאריות" ברכיב השני:
$$\langle v, u + \alpha w \rangle = \langle v, u \rangle + \bar{\alpha} \langle w, u \rangle$$
3. מעל $\mathbb{R}$ יש לינאריות גם ברכיב השני:
$$\langle v, u + \alpha w \rangle = \alpha \langle w, u \rangle$$
4. הכללה של לינאריות:
$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \bar{\beta_j} \langle v_i, w_j \rangle$$

דוגמה. מרחבי מכפלה פנימית סטנדרטים

1. $V = \mathbb{R}^n$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ עם המכפלה הפנימית
$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = x^t y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
2. $V = \mathbb{C}^n$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ עם המכפלה הפנימית
$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = x^t \overline{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$
3. $V = \mathbb{R}^{n \times n}$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ עם המכפלה הפנימית
$$\left\langle \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \right\rangle = \operatorname{tr}(xy^t)$$

4. $V=\mathbb{C}^{n\times n}$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ עם המכפלה הפנימית
$$\left\langle \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \right\rangle = \operatorname{tr}\left(x\overline{y}^t\right)$$

14.2 נורמה

הגדרה. V ממ״פ אזי לכל ווקטור נגדיר את **הנורמה המושרית מהמכפלה הפנימית** שלו להיות $\|v\| := \sqrt{\langle v,v\rangle}$

משפט. תכונות של הנורמה:

1. **אי שליליות**: $\|v\|\geq 0$ **ושיוון** אמ״מ $v=0$.
2. **כפל בסקלר**:
$$\|\alpha v\| = |\alpha|\cdot\|v\|$$
3. **אי שיוון המשולש**:
$$\|v+u\| \leq \|v\| + \|u\|$$
4. **כלל המקבלית**:
$$2\left\|v\right\|^2 + 2\left\|w\right\|^2 = \left\|v+w\right\|^2 + \left\|v-w\right\|^2$$

משפט. [**אי שיוון קושי שוורץ**] יהי V ממ״פ, אז מתקיים
$$\forall v,u\in V:\ \ |\langle v,u\rangle| \leq \|v\|\cdot\|u\|$$

משפט. [**אי שיוון בסל**] יהי V ממפ ותהי $\{v_1,\ldots,v_k\}$ קבוצה אורתונורמלית אז לכל $v\in V$ מתקיים
$$\|v\| \geq |\langle v,v_1\rangle| + \ldots + |\langle v,v_k\rangle|$$

14.3 אורתוגונליות ואורתונורמלית

הגדרה. יהי V ממ"פ אז **הזווית בין** v **ל-**u מוגדרת להיות $\cos(\theta) := \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}$

הגדרה. יהי V ממ"פ אז נאמר ש-

1. $v,u\in V$ **ניצבים/מאונכים/אורתוגונליים** אם $\langle v,u\rangle = 0$ (מסומן $u\perp v$)
2. הקבוצה $S=\{v_1,\ldots,v_k\}$ תקרא **אורתוגונלית** אם כל שני וקטורים שונים ב-S ניצבים זה לזה.
3. הווקטור $v\in V$ יקרא **נורמלי/מנורמל** אם $\|v\|=1$

4. הקבוצה $S=\{v_1,\dots,v_k\}$ תקרא **אורתונומלית** אם היא אורתוגונלית וכל וקטור בה מנורמל כלומר
$$\langle v_i,v_j\rangle=\left\{\begin{array}{cc}0 & i=j\\ 1 & i\neq j\end{array}\right.$$

משפט. תהי A קבוצה אוג׳ כך ש-A $0\notin$ אז A בת״ל, בפרט כל קבוצה אונ׳ היא קבוצה בת״ל

משפט. יהא V ממ״פ . יהיו $v,u\in V$ אזי אם v,u אוג׳ אז
$$\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$$

משפט. יהא V ממ״פ ויהא $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס אוג׳ אזי מתקיים

1. $\forall v\in V:\quad v=\sum_{i=1}^{n}\frac{\langle v,v_i\rangle}{\langle v_i,v_i\rangle}v_i$.
2. $\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right\|^2=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2\|v_i\|^2$

הגדרה. יהי V ממ״פ, ו- $S\subseteq V$ תת קבוצה. **המרחב הניצב** ל-S הוא אוסף כל הווקטורים ב-V הניצבים לכל הווקטורים ב-S, כלומר
$$S^{\perp}=\{v\in V:\langle v,S\rangle=0\}=\{v\in V:\forall u\in S,\langle v,u\rangle=0\}$$

משפט. המרחב הניצב מקיים

1. לכל קבוצה S המרחב הניצב הוא $S^{\perp}$ הוא תת מרחב של V
2. $(\mathrm{Span}\,(S))^{\perp}=S^{\perp}$
3. $\mathrm{Span}\,(S)=(S^{\perp})^{\perp}$
4. אם U,W תתי מרחבים של V אז
   (א) $(U+W)^{\perp}=U^{\perp}\bigcap W^{\perp}$
   (ב) $(U\bigcap W)^{\perp}=U^{\perp}+W^{\perp}$

משפט. **[משפט פירוק הניצב]** יהי V ממ״פ ו-U תת מרחב של V אז
$$U\oplus U^{\perp}=W$$

משפט. יהי $A\in\mathbb{R}^{n\times m}$. אזי, $N(A)=R(A)^{\perp}$ עבור המכפלה הסקלרית של $\mathbb{R}^n$

14.4 היטלים וגרם שימדט

הגדרה. יהא V ממ"פ, $W \subset V$ תת מרחב ו- $v \in V$ ווקטור אזי **ההטלה** של v על W הוא וקטור המסומן $\pi_W(v)$ ומקיים

- $\pi_W(v) \in W$
- $v - \pi_W(v) \in W^{\perp}$

במידה ו-$\dim W = 1$ כלומר $W = \mathrm{Span}\{w\}$ אז ניתן לומר ש-$\pi_W(v)$ היא ההטלה של הווקטור v על הווקטור w.

משפט. איך מוצאים את ההטלה?
יהי $B = \{w_1, \ldots, w_k\}$ בסיס אורתוגונלי ל-W, אזי

$$\pi_W(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{< v, w_i >}{||w_i||^2} w_i$$

משפט. **[גרם שמידט]** יהי V ממ"פ ו- $B = \{v_1, \ldots, v_k\}$ קבוצה בת"ל. אז

$$\begin{cases} w_1 := v_1 \\ w_2 := v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{||w_1||^2} w_1 \\ w_3 := v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{||w_1||^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{||w_2||^2} w_2 \\ \vdots \\ w_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_i\rangle}{||w_i||^2} w_i \end{cases}$$

$C = \{w_1, \ldots, w_k\}$ היא קבוצה אורתוגנלית המקיימת $\mathrm{Span}\{w_1, \ldots w_i, v_{i+1}, \ldots, v_k\} = \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$ כלומר בכל שלב המרחב הנפרש אינו השתנה.

14.5 אופרטורים מיוחדים

עוד תכונות, לאופרטור מיוחד יש רק עע ממשיים

סימון. תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ אז נסמן $A^* = \overline{A^t}$

הגדרה. מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ אז נאמר ש-

1. A **אוניטרית** אם $A^*A = AA^* = I$
2. A **נורמלית** אם $A^*A = AA^*$
3. A **צמודה לעצמה** או הרמיטית אם $A^* = A$

הגדרה. מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אז נאמר ש-

1. A **אורתוגונלית** אם $A^tA = AA^t = I$
2. A **נורמלית** אם $A^tA = AA^t$
3. A **צמודה לעצמה** או סימטרית אם $A^t = A$

משפט. תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה, אז התנאים הבאים שקולים

1. A אוניטרית
2. A שומרת מרחק כלומר $\forall v \in \mathbb{C}^n : \ \|Av\| = \|Av\|$
3. A שומרת על מכפלה סקלרית $\forall v, w \in \mathbb{C}^n : \ \langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle$
4. העמודות של A אורתונורמליות עבור המכפלה הסקלרית.
5. השורות של A אורתונורמליות עבור המכפלה הסקלרית.

משפט. תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה אוניטרית ו-λ הוא ע״ע של A אז $|\lambda| = 1$.

14.6 לכסון אורתוגונלי

הגדרה.

1. תהי A מטריצה, נאמר שהיא **ניתנת ללכסון אורתוגונלי**, אם קיימת מטריצה אורתוגונלית P ו-D אלכסונית כך ש-
$$D = P^{-1}AP = P^tAP$$
2. תהי A מטריצה, נאמר שהיא **ניתנת ללכסון אוניטרי**, אם קיימת מטריצה אוניטרית P ו-D אלכסונית כך ש-
$$D = P^{-1}AP = P^*AP$$

משפט. תהי A מטריצה אז A ניתנת ללכסון אוניטרי אם ורק אם $p_A\left(x\right)$ מל״ל ו-A נורמלית

משפט. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית אז A ניתנת ללכסון אורתוגונלי.

אלגוריתם. **[לכסון אורתוגונלי ולכסון אוניטרי]**

1. מצא ע״ע וו״ע למטריצה A
2. עבור בסיס מ״ע בצע גרם שמידט.
3. $D = \operatorname{diag}\left(\lambda_1, \dots, \lambda_n\right)$ היא המטריצה האלכסונית ו-$P = \begin{pmatrix} | & & | \\ w_1 & \cdots & w_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ כאשר $w_1, \dots, w_n$ הם הווקטורים אחרי גרם שמידט.