1. האם קיים גרף פשוט שדרגות קודקודיו הן: (אם כן - ציירו אותו, אם לא - הוכיחו שלא קיים!)

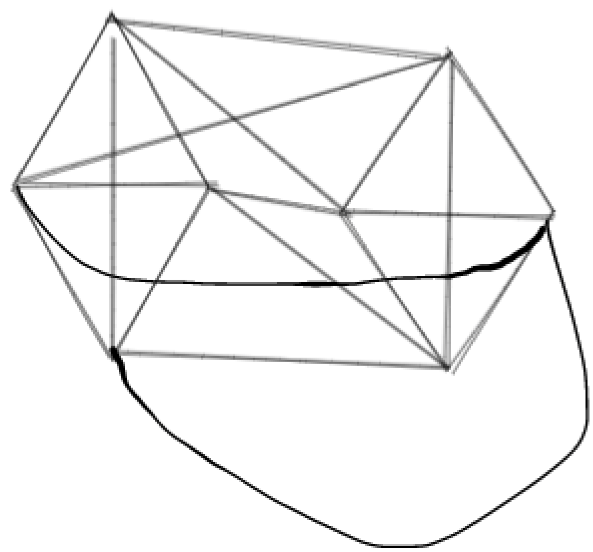
(א) $5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5$.

(ב) $1, 2, 2, 3, 4, 5$.

(ג) $1, 1, 2, 3, 4, 5$.

(ד) $2, 2, 2, 2, 3, 3$.

**א)** לפי למת לחיצת הדיים סכום הדרגות זוגי , נוכיח שאפשרי על ידי ציור

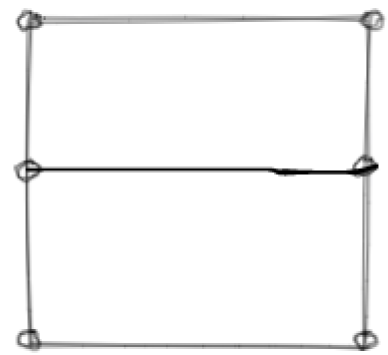


**ב**) לפי למת לחיצת הידיים סכום הדרגות אי זוגי , לכן לא יתכן גרף כזה.

**ג**) לא קיים גרף , אומנם לפי למת לחיצת הידיים סכום הדרגות זוגי, אך נתבונן במספר השכנים שיש לכל קודקוד בנפרד (בסדר יורד).
הקודקוד עם הדרגה הכי גבוהה הוא עם 5 שכנים, לכן כל הקודקודים האחרים ופרט אלו שדרגתם היא 1, שכנים שלו. לכן אין אפשרות שיהיו להם עוד שכנים.
הקודקוד עם הדרגה השנייה הכי נמוכה הוא עם 4 שכנים, וזה בסתירה לכך

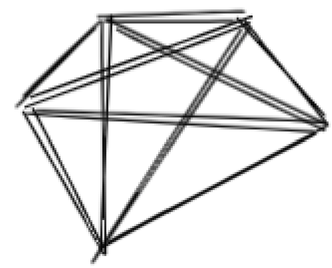
שיש שני קודקודים שיש להם רק שכן אחד. בגלל שלקודקוד הזה יש 4 שכנים הוא בהכרח חייב להיות שכן של לפחות אחד מהם.

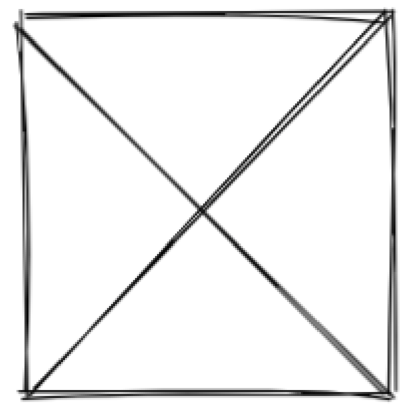
**ד)** אפשרי,



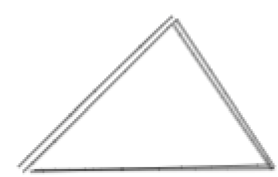
(ה) גרף פשוט עם 100 קודקודים כך שלכל $1 \le k \le 5$ ישנם 20 קודקודים בעלי דרגה $k$. כאן אינכם צריכים לצייר את כל הגרף כמובן, אלא רק את רכיבי הקשירות השונים.

נתחיל מ $k = 3$ $k = 4$ אותם נסדר בקלות על ידי יצירת 5 ״ריבועים״ עבור $k = 3$ ו 4 ״מחומשים״ עבור $k = 4$. באופן הבא :



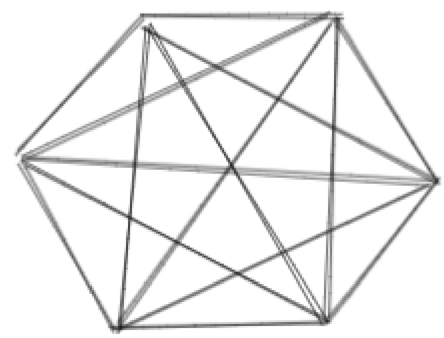


עבור, $k=2$ נבנה 6 ״משולשים״ מ18 קודקודים,

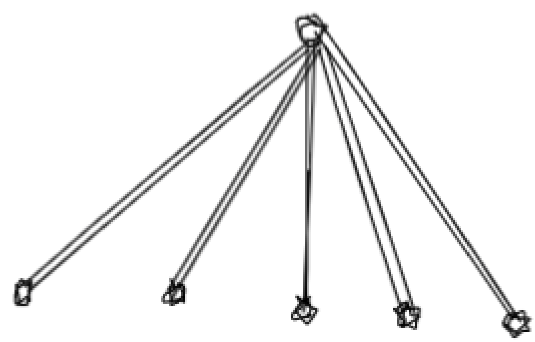


נשארנו עם 2 קודקודים שבהם נטפל בהמשך.
עבור $k=5$ נסדר בקבוצות של 6 קודקודים שלושה רכיבי קשירות נפרדים

באופן הבא (סה״כ 18 קודקודים):

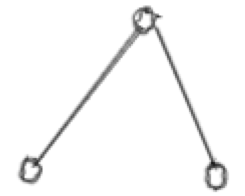


עבור 2 הקודקודים שהנותרים שדרגתם צריכה להיות 5 נשתמש ב8 קודקדים שדרגתם צריכה להיות 1 ונבנה רכיב קשירות באופן הבא:



נבנה 2 כאלה ונשארנו עם 10 קודקודים שדרגתם צריכה להיות 1.

כעת עבור 2 הקודקודים הנותרים שדרגתם צריכה להיות 2 נבנה 2 רכיבי קשירות עם 3 קודקדים כאשר קודקוד 1 דרגתו 2 , והאחרים דרגת 1 באופן הבא :



סה״כ נשארנו עם 6 קודקודים שדרגתם צריכה להיות 1 ואתם נבנה עם רכיב קשירות המורכב מ2 קודקודים שכנים (״קו״).

.2

(א) יהי $G = (V, E)$ גרף סופי פשוט. נסמן:

$$U = \{u \in V \mid \text{אי-זוגי } \deg(u)\}$$

הוכיחו: $|U|$ זוגי.

נסמן ב $M = \sum_{v \in V} deg(v) | deg(v)\ mod(2) \neq 0$ (יכול להיות גם 0).

כעת לפי למת לחיצת הידיים יתקיים :

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$$

כמו כן לפי הגדרת $U$ ו $G$ יתקיים :

$$2|E| = M + \sum_{u \in U} deg(u)$$

כעת כיוון ש $M$ הוא סכום של מספרים זוגיים הרי שהוא זוגי בעצמו, וכמובן ש $2|E|$ גם כן זוגי לכן ההפרש שהוא סכום הדרגות האי זוגיות גם זוגי.

הדרך היחידה שסכום של מספרים אי זוגיים יהיה זוגי אם סך כל המספרים שזה בעצם גודלה של הקבוצה $U$ יהיה זוגי **כדרוש**.

(ב) יהי $G=(V,E)$ גרף סופי פשוט וקשיר, ותהי $e\in E$ קשת כך שהשמטתה הופכת את הגרף ללא-קשיר. הוכיחו שקיים ב-$G$ קודקוד בעל דרגה אי-זוגית.

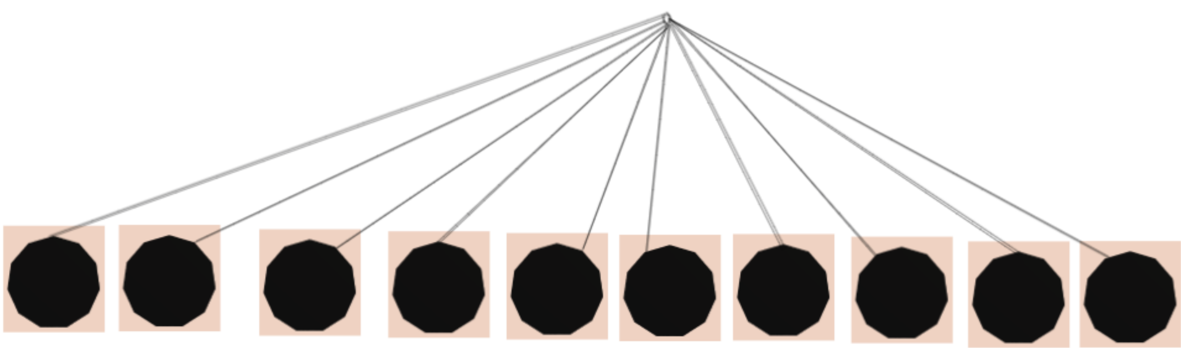
נב״ש שלא קיים ב $G$ קודקוד בעל דרגה אי זוגית. כעת נניח שהשמטת $e$ הופכת הגרף ללא קשיר. נסמן את שני הקודקדים שאין בינהם מסלול לאחר ההשמטה ב $v,u$ , כעת כיוון שהגרף היה קשיר ולאחר הסרת הקשת הוא לא אנחנו יודעים שבין שתי הקודקודים הנ״ל , אין מסלול (אם היה מסלול חלופי אז הסרת הקשת לא הייתה משפיע על הקשירות של הגרף). כלומר כעת יש לנו שני רכיבי קשירות , הרכיב של הקודקודים שאפשר לבנות מסלול עם $u$ והרכיבים שכל הקודקודים שאפשר לבנות מסלול עם $v$ (רכיבי שקילות זה מחלקות שקילות ולכן זרות). לפי ההנחה כל הקודקודים היו בעלי דרגה דרגה זוגית ובפרט $u,v$ ולכן לאחר ההשמטה הם מדרגה אי זוגית. ובכל רכיב קשירות נקבל תת גרף, שבו יש קודקוד אחד מדרגה אי זוגית אך זה **בסתירה לסעיף א** , שם אמרנו שלכל גרף סופי כמות הקודקודים מדרגה אי זוגית הינה מספר זוגי. *בסתירה.*
**נשים לב שהסתכלנו על רכיב הקשירות כגרף בפני עצמו וזה אפשרי כיוון שרכיבי קשירות הן זרות ולכן אנחנו יודעים שכל המסלולים ,הקודקודים והשכנים בתוך רכיב קשירות שייכים לרכיב הקשירות הזה בלבד ונוכל להגדיר אותו כגרף.**

3. בנו גרף פשוט שבו דרגת כל הקודקודים גדולה מ-10, ויש בו קודקוד שאינו שייך לאף מעגל פשוט.

נבנה 10 רכיבי קשירות מהצורה [hendecagon]

לפי משפט לכל קודקוד במצולע משוכלל ניתן להעביר $n-1$ צלעות כלומר לכל קודקוד בגרף יש $10$ שכנים.

כעת נצייר קודקוד נוסף וניצור לו שכן עם כל אחד מ10 רכיבי הקשירות שיצרנו (לא משנה באיזו נקודה) . קודקוד זה בהכרח לא יהיה שייך לאף מעגל פשוט.



4. יהא $G=(V,E)$ גרף פשוט, סופי וקשיר, עם $|V|\geq 3$. נניח שיש בגרף מעגל יחיד. הוכיחו: $|V|=|E|$.

יהי $G$ גרף, המקיים את נתוני השאלה.
**למת עזר** : אם לכל קודקוד ב $G$ יש 2 שכנים בלבד אז ישנו מעגל יחיד:
*הוכחה*- ראשית הוכחנו כבר שאם יש למעלה מ2 שכנים אז בהכרח יש מסלול מעגלי בגרף, כעת
נב"ש שיש שני מסלולים מעגליים עבור קודקוד $v_0$ המופרדים על ידי קודקוד

יחיד :

$(v_0, v_1, \ldots., v_k, v_0)$

$(v_0, v_1, \ldots., w_p, v_0)$

במצב שכזה ל $v_0$ יהיו יותר מ2 שכנים וזה **בסתירה** לנתון.

(ואם נחליף בין כל הקודקודים או בחלקם זה לא ישנה את העובדה הזו).

נוכיח באינדוקצייה:

**בסיס :** $|V| = 3$ נקבל מעגל יחיד על ידי בניית קשת בין כל הקודקודים.

יתקיים שיש 3 קשתות בסה״כ.

$|V| = 4$ - נבחר קודקוד יחיד נסמנו $v$ עבור גרף עם מסלול מעגלי יחיד המקיים $|V| = 3$ ננתק אותו מאחר השכנים שלו, נסמנו $u$ וכעת נוסיף קודקוד חדש נסמנו $w$ ונבנה שתי שכנים קשתות כך ש :

$(v, w) \in E$ , $(u, w) \in E$ כעת יש 4 קשתות ו4 קודקודים נוכיח שהמעגל הוא יחיד :

הוכחנו כבר שאם מספר הקשתות גדול או שווה למספר הקודקודים ומספר הקודקודים גדול מ 3 אז בהכרח יש מעגל, כיוון שלפי הצורה שהגדרנו לכל קודקוד יש 2 שכנים בלבד ניתן להגיע למעגל רק אם עבור קודקוד $v$ נעבור על כל הקודקודים האחרים ב $V$, לכן זהו מעגל יחיד.

כלומר הוכחנו בבסיס האינדוקצייה שעל מנת לעבור מגרף עם 3 קודקודים לגרף עם 4 קודקודים ולשמור על המעגל היחיד, נצטרך להוסיף קודקוד נוסף ולנתק שתי קודקודים קיימים אחד מהשני כך שלא יהיו שכנים אלא יהיו שכנים של הקודקוד החדש.

**צעד**: נניח שלכל גרף עם $k \leq n$ קודקודים ו $k$ קשתות יש מעגל יחיד ונוכיח עבור $n + 1$ .

נלך לפי האלגוריתם שהראנו בבסיס :

נסתכל על הגרף עם $n + 1$ קודקודים כגרף עם $n$ קודקודים שלכל קודקוד

יש 2 שכנים בלבד. (לפי הנחת האינדוקצייה זה מה שיצטרך לקרות כדי שהמעגל יהיה יחיד), ניקח את הקודקוד ה$n+1$ , ננתק שכנות בין שני קודקודים בגרף וניצור שני שכנים חדשים עם הקודקוד הנ"ל. באופן זה נשמור על התכונה שלכל קודקוד יש 2 שכנים בלבד ולכן לפי משפט יש מעגל. והסברנו למה הוא מעגל יחיד (כיוון שלכל מסלול שניקח מ $v_0$ נצטרך לעבור בכל הקודקודים האחרים ב $V$ כדי להגיע אליו בחזרה).

5. יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט סופי. נסמן את המשלים שלו ב:

$$\overline{G}=(V,E'=\{X\in P(V)\mid |X|=2\}\setminus E)$$

כלומר: אותה קבוצת קודקודים ומתקיים:

$$\{v,u\}\in E' \iff \{v,u\}\notin E$$

הוכיחו או הפריכו:

(א) אם $G$ קשיר אז $\overline{G}$ לא קשיר.

**הפרכה** , נגיד $G=(V,E)$ כך ש $|V|=1$ ולכן לפי משפט $|E|=0$ .
כלומר אין קשתות , ולכן הגרף קשיר באופן ריק.
המשלים שלו במקרה זה יקיים :
$G=\overline{G}$ כי $E$ היא הקבוצה הריקה ו$P(V)$ זה גם הקבוצה הריקה (כי יש רק איבר אחד ב $V$ ולכן לא קיימת קבוצה ב קבוצת החזקה של הקודקודים שגודלה הוא 2), כלומר $E'=\varnothing$ .

(ב) אם $G$ לא קשיר אז $\overline{G}$ קשיר.

**הוכחה** נניח $G$ גרף קשיר נגדיר חלוקה לפי מחלקת השקילות ~ :
$V=\bigcup_{i=1}^{k}A_i$
כיוון $G$ לא קשיר אזי $k>1$ (כלומר יש לפחות 2 חלוקות).
כמו כן קיימים לפחות $u,v$ ומחלקת שקילות $A_j,A_i$ כך ש :

$v \in A_i \wedge u \notin A_i$

ובאותו אופן : $u \in A_j \wedge v \notin A_j$

(בלי הגבלת הכלליות).

**נשים לב שיכולות להיות חלוקות נוספות וקודקודים נוספים ששייכים לחלוקות אחרות ולא לחלוקות הנ"ל כלומר יש קודקודים נוספים המשפיעים על אי קשירות הגרף אבל ההוכחה עבורן תהיה דומה.**

כיוון שמחלקות שקילות הן זרות אז יש קבוצת קודקודים ב $A_j$ שיש להן מסלול עם $u$ ולא עם $v$ והפוך לגבי $A_i$.

ולפי תכונות המשלים תיווצר חלוקה חדשה נסמנה $\overline{A}$ שהקשתות בה יהיו $\overline{E}$ כך ש:

$$\overline{E} = \{(a_i, a_j) | a_i \in A_i \wedge a_j \in A_j\}$$

ולכן $u, v$ יהיו שייכים ל $\overline{A}$ כלומר קיים מסלול עבורם ב $\overline{G}$ ובאותו אופן יווצר מסלול כלשהו לכל הקודקודים במחלקות השקילות השונות.

סה"כ לא משנה כמה מחלקות שקילות יש לנו ב $G$ נקבל רכיב קשירות אחד ב $\overline{G}$ ולכן זהו גרף קשיר **כדרוש**.

(ג) אם $G$ גרף רגולרי (כלומר, כל הקודקודים בעלי אותה דרגה) אז גם $\overline{G}$ גרף רגולרי.

**הוכחה** כיוון ש $G$ גרף רגולרי אזי , יש לכל קודקוד ב $V$ $k$ קודקודים שכנים ולכן בהכרח לכל קודקוד יש $n-1-k$ קודקודים שאינם שכנים כלומר לכל קודקוד ב $\overline{G}$ יש $n-1-k$ קודקודים שכנים ולכן הוא גם כן גרף רגולרי.

(ד) נניח $|V| = 6$. אזי ב-$G$ או ב- $\overline{G}$ יש משולש (= מעגל פשוט באורך 3).

**הוכחה**

יהי $v \in V$

- **אם** $3 < deg(v)$ : אז בגרף המשלים הדרגה תהיה בהכרח לפחות 3 .
כלומר ב $\overline{G}$ יש ל $v$ לפחות 3 שכנים נסמנם $v_1, v_2, v_3$ .
אם לפחות אחד מהם שכן אחד של השני אז סיימנו וקיבלנו מעגל פשוט במשלים , אחרת בהכרח יתקיים ש $v_1, v_2, v_3$ הם עצמם שכנים אחד של השני בגרף $G$ וקיבלנו משולש. **כדרוש**.

- **אם** $3 \geq deg(v)$ : יתקיים הנ"ל באותו אופן על $G$ , כלומר ל $v$ יש 3 שכנים , אם לפחות אחד מהם שכן של השני בגרף אז סיימנו אחרת שלושתם בהכרח שכנים בגרף המשלים.

6. יהי $G = (V, E)$ גרף פשוט וסופי. נסמן את המרחק בין שני קודקודים שונים $u \neq v$ ע"י $d(u, v)$: האורך המינימלי של מסלול ביניהם (אם קיים מסלול ביניהם). אם אין מסלול ביניהם אז נגדיר $d(u, v) = \infty$. נגדיר את קוטר הגרף להיות המקסימום על המרחקים:

$$\mathrm{diam}(G) = \max\{d(u, v) \mid u \neq v \in E\}$$

(א) מהו הקוטר המירבי של גרף קשיר עם $n$ קודקודים? כלומר, מצאו חסם עליון לקוטר, והראו שהוא הדוק ע"י מציאת גרף שקוטרו כחסם.

החסם העליון של קוטר הוא כמספר המקסימלי של הקשתות כלומר $n - 1$ וזה חסם הדוק כיוון שבגרף המייצג עץ ליניארי (גרף שהוא פשוט קו ישר המחבר בין הקודקדים) קוטר הגרף הזה יהיה $n - 1$ לכל גרף מהסוג הזה.

(ב) מהו המספר המזערי של קשתות בגרף עם $n$ קודקודים שקוטרו 2? כלומר, מצאו חסם תחתון למספר הקשתות, והראו שהוא הדוק ע"י מציאת גרף עם $|E|$ כחסם.

אם קוטר הגרף הוא 2 זה אומר שהגרף קשיר (אחרת היו שני קודקודים שהמרחק בינהם היה אינסוף וזה אוטומטית היה הופך להיות הקוטר), לכן על מנת שמצב כזה יתאפשר צריך שמספר הקשתות יהיה לפחות $2n - 3$, נבנה בין כל הקודקודים קשתות באופן הבא:
עבור $n - 1$ קודקודים נבנה מסלול פשוט בין קודקוד התחלתי שנסמנו $v_0$ לבין קודקוד סופי שנסמנו $v_n$ , באופן זה לכל קודקוד חוץ מההתחלתי

והסופי שהגדנו יהיו 2 שכנים . כעת ניקח את הקודקוד הנותר, ונבנה לו $n-1$ קשתות כך שיקיים שהוא שכן עם כל שאר הקודקודים. באופן זה יתקיים שלקודקודים $v_0$ ו $v_n$ יש דרגה 2 , לקודקוד הנותר יש דרגה $n-1$ ולכל השאר יש דרגה 3. מצאנו גרף שיקיים שקוטרו הוא 2 עם מספר קשתות מינימלי של לפחות $2n-3$ **כדרוש**.