תרגיל 1. *מיצאו פונקציה גבולית וקיבעו האם ההתכנסות היא במ"ש בקטע הנתון:*

א. $f_n(x) = \frac{1}{1+3^n x^n}, \quad x \in [1,4]$

.

נשים לב ש x נמצא במכנה והקטע שלנו תמיד יהיה מספר ממשי גדול מ1 ולכן :

$$\forall_{1 \le a \le 4} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+3^n a^n} = 0$$

לכן הפונקצייה הגבולית היא $f(x) = 0$.
כעת כשחישבנו את הפונקצייה הגבולית נבדוק התכנסות במ״ש , ראשית נבטא את d_n באופן כללי כאשר x הוא המשתנה

$$d_n = \sup_{x\in[1,4]} |f_n(x) - f(x)| =$$

$$|f_n(x)| = |\frac{1}{1+3^n x^n}| = \sup_{x\in[1,4]} \frac{1}{1+3^n x^n}$$

נשים לב שכיוון שבקטע הזה לכל x בקטע יתקיים $d_n \le \frac{1}{1+3^n}$ והאגף הימני זאת כמובן סדרה ששואפת ל0 לכן בפרט גם d_n תשאף ל0 כלומר **ההתכנסות במ״ש.**

.

ב. $f_n(x) = \frac{1}{1+3^n x^n}, \quad x \in [\frac{1}{4}, 4]$

כעת נשים לב שיש לנו קטע של מספרים ממשיים קטנים מ 1, נחלק ל3 קטעים:

- $\frac{1}{4} \leq a < \frac{1}{3}$
במצב זה נקבל שהכפל עם 3 ייתן מספר שקטן מ 1 בחזקת n לכן,

$$\forall_{a\in[\frac{1}{4},\frac{1}{3})}\ \lim_{n\to\infty} f_n(a) = 1$$

- $a = \frac{1}{3}$ במצב זה נקבל $1 = \frac{1}{3^n} \cdot 3^n$ ולכן,

$$lim_{n\to\infty} f_n(\frac{1}{3}) = \frac{1}{2}$$

- $\frac{1}{3} < a \leq 4$ במקרה זה נקבל שהכפל עם 3 ייתן מספר גדול מ1 ולכן נקבל שאיפה הזהה למה שקיבלנו בסעיף א, ל 0.

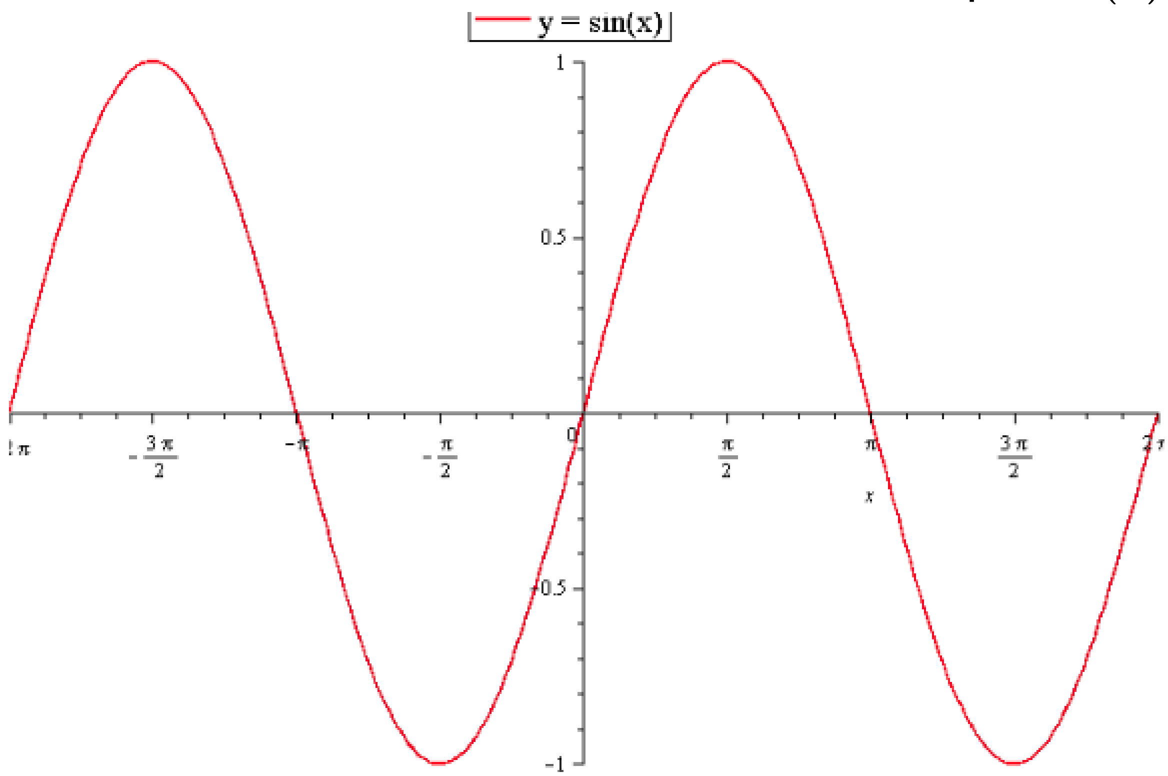
לכן , החלוקה תיתן לנו את את הפונקצייה הגבולית הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}) \\ 0 & x \in (\frac{1}{3}, 4] \\ \frac{1}{2} & x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

כעת, נשים לב שלכל n הפונקצייה $f_n(x)$ תהיה רציפה אך קיבלנו פונקצייה גבולית שאינה רציפה, ולפי משפט : אם $f_n(x)$ מתכנסת במ״ש אז :
f_n רציפות $\leftarrow f$ רציפה, ניתן להגיד ש הפונקצייה לא **מתכנסת במ״ש**

ג. $f_n(x) = \sin^{2n}(x), \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

על מנת להבין איך סדרת הפונקציות מתנהגות בקטע נביט בגרף הפונקצייה $sin(x)$ בקטע הנ"ל :



נשים לב החזקה של סדרת הפונקציות היא $2n$ כלומר חזקה שתמיד תהיה זוגית כלומר כיוון שהפונקצייה sinx היא אי זוגית : $sin(-x) = -sin(x)$ אז יתקיים שבחזקות זוגיות הקטעים השליליים והקטעים האי שליליים יתנהגו אותו דבר. לכן נחלק ל 3 קטעים :

- $a = \pm\frac{\pi}{2}$
  במצב זה נקבל : שהפונקצייה הגבולית שואפת ל 1 לכל n
- $a = 0$
  נקבל שהפונקצייה הגבולית שואפת ל 0 לכל n
- $else$
  בכל שאר המקרים נקבל מספרים ממשיים בין 0 ל 1 ולכן נקבל שבר בחזקת $n \to \infty$ כלומר הפונקצייה הגבולית בקטע הזה שואפת ל 0 גם כן

סה"כ נקבל :

$$f(x)=\begin{cases}1 & x=\pm\frac{\pi}{2}\\ 0 & else\end{cases}$$

כעת, נשים לב שלכל n הפונקצייה $f_n(x)$ תהיה רציפה אך קיבלנו פונקצייה גבולית שאינה רציפה, ולפי משפט : אם $f_n(x)$ מתכנסת במ"ש אז :
f_n רציפות $\leftarrow f$ רציפה, ניתן להגיד ש הפונקצייה **לא מתכנסת במ"ש**

$$f_n(x)=n^2\sin\left(\frac{x^2}{n^2}\right),\quad x\in\mathbb{R}$$ **.ד**

נשים לב שלכל מספר $x\in\mathbb{R}$ נקבל ביטוי מהצורה $\frac{0}{0}$ ולכן נוכל להשתמש בכללי לופיטל באופן כללי כך שנתייחס ל n כנעלם של פונקצייה ול x כקבוע.

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}n^2sin\left(\frac{x^2}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{sin\left(\frac{x^2}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}\underset{\text{LHopitals rule}}{=}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{cos(\frac{x^2}{n^2})\cdot x^2\cdot -2n^{-3}}{-2n^{-3}}=\lim_{n\to\infty}cos\left(\frac{x^2}{n^2}\right)x^2\underset{\frac{a}{n^2}\to 0}{=}x^2$$

אם $x=0$ נקבל כמובן ש הפונקצייה הגבולית היא 0 אך זה תואם לממצאים הנ"ל.

לכן יתקיים:
$f(x)=x^2$
כעת , נרצה לבדוק התכנסות במ"ש : נתחיל מלמצוא את d_n

$$d_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |n^2 sin\left(\frac{x^2}{n^2}\right) - x^2|$$

כעת , נשים לב שלכל n אם נציב $x = n$ נקבל :

$$n^2 sin(1) - n^2 = n^2(sin(1) - 1) > 0.1n^2$$

כלומר , מצאנו x שעבורו כל איבר בסדרת הפונקציות יהיה גדול יותר מ $0.1n^2$ שכמובן שואפת לאינסוף, ולכן d_n יכולה לשאוף ל 0 (אם הנקודה $x = n$ איננה sup הרי שבהכרח גם סדרת ערכי הסופרימום תשאף לאינסוף)

לכן אין התכנסות במ״ש כדרוש

ה. $f_n(x) = nxe^{-n^2x}, \quad x \in [0,\infty)$

ראשית, נחשב התכנסות נקודתית ,

- $x = 0$:
  אז יתקיים $lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$
- אם $x > 0$:
  אז יתקיים

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} nxe^{-n^2x} = x \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{n^2x}} \underset{\text{x>0}}{=} 0$$

כלומר הפונקצייה הגבולית היא 0 בכ״מ .

כעת נבדוק התכנסות במ״ש על ידי מציאת d_n : כיוון ש $f(x) = 0$ וגם $x > 0$ אז ניתן להפטר מהערך המוחלט בחישוב של d_n כלומר.

נרצה למצוא את הערך המקסימלי של $f_n(x)$ לכל n על ידי גזירה ונקבל :

$$f_n'(x) = ne^{-n^2x} + nx(-n^2)e^{-n^2x} = ne^{-n^2x}(1-n^2x)$$

נשווה את הנגזרת ל 0 ונקבל : $x = \frac{1}{n^2} \to f_n(x) = \frac{1}{n}e^{-1}$
קיבלנו נקודה יחידה חשודה לקיצון בקטע ולכן זאת נקודת הקיצון החידה,
נשים לב שבקצה השמאלי $f_n(x) = 0$ ולכן הנקודה הנ״ל היא מקסימום מוחלט.

כעת כיוון ש : $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\cdot e} = 0$
אז הפונקצייה שלנו רציפה במ״ש **כדרוש**.

ו. $f_n(x) = x^n e^{-n^2x}, \quad x \in (0,\infty)$

נבדוק התכנסות נקודתית כאשר $x > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} x^n e^{-n^2x} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{e^{n^2x}}$$

כיוון ש x קבוע קשה להתקדם משם לפי סדרי גודל ולכן , נעזר בחוקי ln
כלומר להוכיח שהביטוי הנ״ל שואף ל 0 זה כמו להוכיח ש ln של אותו הביטוי שואף ל $-\infty$ ואם הביטוי שואף ל∞ אז גם ln של אותו הביטוי ישאף לשם. ולכן:

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(x^n e^{-n^2x}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln(x^n) + \ln(e^{-n^2x})$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(n\ln(x) - n^2x\right) = \lim_{n\to\infty} n(ln(x) - nx) = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

אם כך, ln של הביטוי שלנו שואף ל מינוס אינסוף ולכן הביטוי שלנו ישאף ל 0 כלומר הפונקצייה הגבולית היא הפונקצייה הקבועה 0 .

כעת נבדוק התכנסות במ״ש על ידי מציאת נקודות חשודות של הנגזרת , נגזור ונשווה ל 0 נקבל :

$$f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-n^2x}(1-nx)$$

נשווה ל 0 ונקבל :

$$x = \frac{1}{n} \to f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^n}e^{-n}$$

נשים לב שב 0 ערכה של סדרת הפונקציות תהיה 0 לכל n ולכן הפונקצייה עולה לנקודה הנ״ל לכל n , לכן זאת תהיה נקודת מקסמום ויתקיים :

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\geq 0}|f_n(x)| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^ne^n} = 0$$

לכן, מדובר בהתכנסות במ״ש. **כדרוש**

ד. $f_n(x) = \frac{2}{nx+4},\ x \in (0,\infty)$

קל לראות שהפונקצייה הגבולית הינה 0 לכל $x > 0$ כיוון שn במכנה בכפל של x שמייצג קבוע.
נשים לב שעבור $\varepsilon = 0.5$ נקבל שלכל N ניקח $x = \frac{1}{n},\ n = 2N$ ויתקיים :
$|f_n(x) - 0| = \frac{2}{4} = 0.5 = \varepsilon$
כלומר לעבור האפסילון הנ״ל תמיד נוכל להראות שהפונקציות הגבוליות לא ייכנסו לטווח האפסילוני שיצרנו. כלומר ההתכנסות אינה במידה שווה **כדרוש**

ח. $f_n(x) = \frac{\arctan(2x)}{n+\sin(2n)}, \quad x \in \mathbb{R}$

כיוון שבמכנה מדובר בפונקצייה חסומה + ביטוי ששואף לאינסוף הרי ש החלק החסום זניח וכמובן שהפונקצייה הגבולית שואפת ל 0 לכל $x \in \mathbb{R}$.
כעת נבדוק התכנסות במ״ש על ידי מציאת $limsup$:

$$d_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\frac{\arctan(2x)}{n+\sin(2n)}| \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

כלומר d_n היא קטנה יותר מסדרה ששואפת ל 0 ולכן היא שואפת ל0 בעצמה לפי משפט הסנדוויץ. סך הכל , סדרת הפונקציות **מתכנסות במ״ש** כדרוש.

תרגיל 2. *תהי $f_n(x)$ סדרת פונקציות המתכנסת נקודתית ל- $f(x)$ בקטע $[a,b]$ אך איננה מתכנסת במ"ש ל- $f(x)$ בקטע זה. הוכיחו כי היא לא מתכנסת במ"ש ל- $f(x)$ בקטע (a,b).*

נניח בשלילה ש $f_n(x)$ מתכנסת במ״ש בקטע הפתוח (a,b) כלומר :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(a,b)} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

נסמן $A = \sup_{x\in(a,b)} |f_n(x) - f(x)|$ כעת נשים לב שבקטע הסגור $[a,b]$ יתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \max\left(A, |f_n(a) - f(a)|, |f_n(b) - f(b)|\right)$$

כלומר יכול להיות שנשארנו עם אותם ערכים ויכול להיות שהקצוות השפיעו על התוצאה... תחילה זה נראה כך, עם זאת , נשים לב ש:

- $|f_n(a)-f(a)|=0 \wedge |f_n(b)-f(b)|=0$ בגלל הפונקצייה מתכנסת נקודתית בקטע הסגור $[a,b]$

ולכן גם בקטע הסגור $\lim_{n\to\infty} d_n=0$ כלומר גם בקטע הסגור ישנה התכנסות במ״ש **בסתירה** לנתון.
לכן אין התכנסות במ״ש גם בקטע הפתוח (a,b) כדרוש.

תרגיל 3.

א. תהי $f_n(x)$ סדרת פונקציות המוגדרות בקטע $[a,b]$ ומתכנסת שם לפונקציה הגבולית $f(x)$. הוכיחו/הפריכו: אם $f(x)$ לא רציפה אז ההתכנסות שם לא במ"ש.

הפרכה : אינטואיטיבית אנחנו יודעים שאם יש התכנסות במידה שווה אז אם כל פונקצייה בסדרה רציפה אז הפונקצייה הגבולית רציפה ואם הפונקצייה הגבולית לא רציפה אז קיימת פונקצייה לא רציפה בסדרת הפונקציות. אך זה לא אומר שהפונקצייה הגבולית לא מתכנסת במ״ש ...

נוכיח את זה על ידי דוגמה נגדית -
נגדיר את סדרת הפונקציות הקבועה :

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ 1 & else\end{cases}$$

הפונקצייה הגבולית היא אותה פונקצייה וכמובן שיש התכנסות במ״ש אך זאת פונקצייה לא רציפה **כדרוש**.

ב. תהי $f_n(x)$ סדרת פונקציות לא רציפות המוגדרות בקטע $[a,b]$ ומתכנסת שם במ"ש לפונקציה הגבולית $f(x)$. הוכיחו/הפריכו: $f(x)$ לא רציפה ב- $[a,b]$.

הפרכה

ניקח סדרת פונקציות לא רציפות שהפונקצייה הגבולית שלה כן רציפה.

יהי קטע$[a,b]$ כך ש a קטן מ 0 ו b גדול מ 0 נגדיר:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ \frac{1}{n} & else \end{cases}$$

זאת פונקצייה לא רציפה שתקיים שהפונקצייה הגבולית שלה היא 0 שהיא אכן רציפה כי היא הפונקצייה הקבועה. *כדרוש*