

Geometrische Summe

Wie lautet der Binomische Lehrsatz?

Binomialkoeffizient

Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

2

Antwort

Für n und $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$ ist der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ definiert durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (2)$$

1

Antwort

Für alle reellen Zahlen $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$, und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (1)$$

4

Antwort

Eine Abbildung f heißt *injektiv*, wenn für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt:

$$a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2), \quad (4)$$

d.h. zu jedem $b \in B$ gibt es *höchstens* ein $a \in A$ mit $b = f(a)$.

Eine Abbildung f heißt *surjektiv*, wenn jedes Element von B als Bild eines Elements von A auftritt:

$$\forall b \in B : \exists a \in A \text{ mit } b = f(a) \quad (5)$$

d.h. zu jedem $b \in B$ gibt es *mindestens* ein $a \in A$ mit $b = f(a)$.

Eine Abbildung f , die sowohl injektiv als auch surjektiv ist, heißt *bijektiv*. Anders ausgedrückt: Zu jedem $b \in B$ gibt es *genau ein* $a \in A$ mit $b = f(a)$

3

Antwort

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (3)$$

Dreiecksungleichungen

Wie lautet der Satz von Bolzano-Weierstraß?

Typen von Punkten

Geometrische Reihe

6

Antwort

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}$ heißt.

- ▷ *innerer Punkt* von A , wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $K(x, \varepsilon) \subseteq A$;
- ▷ *äußerer Punkt* bezüglich A , wenn x innerer Punkt von A^c ist;
- ▷ *Randpunkt* von A , wenn jede ε -Umgebung $K(x, \varepsilon)$ einen Punkt von A und einen Punkt von A^c enthält;
- ▷ *Häufungspunkt* von A , wenn jede ε -Umgebung von x *unendlich viele* Punkte von A enthält. Gleichbedeutend damit ist, dass jede punktierte ε -Umgebung von x mindestens einen Punkt von A enthält.
- ▷ *isolierter Punkt* von A , wenn $x \in A$ und wenn es eine punktierte ε -Umgebung $K_r(x, \varepsilon)$ gibt, so dass $K_r(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$.

5

Antwort

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

- ▷ $|xy| = |x||y|$
- ▷ $|x \pm y| \leq |x| + |y|$ *Dreiecksungleichung*
- ▷ $|x \pm y| \geq ||x| - |y||$ *inverse Dreiecksungleichung*

8

Antwort

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \text{ für } |q| < 1 \quad (6)$$

7

Antwort

Jede *beschränkte, unendliche* Teilmenge von \mathbb{R} besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

Formulieren Sie das Leibnitz-Kriterium für die Konvergenz von alternierenden Reihen.

Was bedeutet absolute Konvergenz?

Konvergenzkriterien: Majoranten- und Minorantenkriterium

Quotientenkriterium für absolute Konvergenz einer Reihe

10

Antwort

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

9

Antwort

Eine Reihe der Bauart

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k, \text{ mit } a_k > 0 \text{ für } k = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

heißt *alternierende Reihe*.

Falls die Folge $\{a_k\}$ monoton gegen 0 konvergiert, dann ist die alternierende Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \quad (8)$$

konvergent.

12

Antwort

Falls für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ab einem gewissen Index N , also für alle $k \geq N$ gilt

- ▷ $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq q < 1$, dann ist die Reihe absolut konvergent.
- ▷ $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \geq 1$, dann ist die Reihe divergent.
- ▷ $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq 1$, jedoch nicht < 1 , dann ist keine allgemeine Aussage möglich.

11

Antwort

- Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit positiven Glieder, also $a_k > 0$. Falls ein $M \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $k \geq M$ gilt $|c_k| \leq a_k$, dann heißt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *Majorante* der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$
 - ▷ Eine Reihe, die eine konvergente Majorante besitzt, ist absolut konvergent.
- Sei $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine Reihe mit positiven Glieder, also $b_k > 0$. Falls ein $M \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $k \geq M$ gilt $|c_k| \geq a_k$, dann heißt $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *Minorante* der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$
 - ▷ Eine Reihe, die eine divergente Minorante besitzt, kann nicht absolut konvergieren.

Quotientenkriterium (Grenzwertformulierung)

Wurzelkriterium (Grenzwertformulierung)

Wurzelkriterium für absolute Konvergenz einer Reihe

Reihendarstellung für e , allgemeine Exponentialreihe

14

Antwort

Falls für eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ab einem gewissen Index, also für alle $k \geq N$ gilt:

- ▷ $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1$, dann ist die Reihe absolut konvergent.
- ▷ $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$, dann ist die Reihe divergent.
- ▷ $\sqrt[k]{|a_k|} \leq 1$, jedoch nicht $\leq q < 1$, dann ist keine Aussage möglich.

13

Antwort

Falls der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| =: r \quad (9)$$

existiert, dann gilt:

- ▷ für $r < 1$ ist die Reihe absolut konvergent,
- ▷ für $r > 1$ ist sie divergent,
- ▷ für $r = 1$ ist keine Aussage möglich.

16

Antwort

Die Eulersche Zahl

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad (11)$$

besitzt die Darstellung als unendliche Reihe:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad (12)$$

allgemeine Exponentialreihe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots =: e^x \quad (13)$$

15

Antwort

Falls der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = r \quad (10)$$

existiert, dann gilt:

- ▷ für $r < 1$ ist die Reihe absolut konvergent,
- ▷ für $r > 1$ ist sie divergent,
- ▷ für $r = 1$ ist keine Aussage möglich.

Stetigkeit (Limes-Definition)

Stetigkeit (ε - δ -Definition)

Formulieren Sie die Definition der gleichmäßigen Stetigkeit.

Lipschitz-Stetigkeit einer Funktion f .

18

Antwort

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ offen. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stetig an der Stelle* $c \in D$, wenn zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so dass für alle x mit $|c - x| < \delta$ gilt

$$|f(c) - f(x)| < \varepsilon \quad (15)$$

17

Antwort

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ offen. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stetig an der Stelle* $c \in D$, wenn für jede konvergente Folge $\{x_n\}$ in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(c), \quad \text{kurz: } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) \quad (14)$$

20

Antwort

Eine Funktion f heißt *Lipschitz-stetig* auf dem Intervall I , wenn es eine Konstante $L \geq 0$ gibt, so dass gilt

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in I \quad (17)$$

Man beachte, dass die Lipschitzkonstante von dem betrachteten Intervall abhängt. Viele Funktionen (z. B. Polynome) sind Lipschitz-stetig auf jedem beschränkten Intervall, aber nicht auf ganz \mathbb{R}

Lipschitz-Stetigkeit impliziert gleichmäßige Stetigkeit.

19

Antwort

Eine Funktion f heißt *gleichmäßig stetig* auf dem Intervall I , wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so dass für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$ gilt

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad (16)$$

Beachte: In der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit darf δ nur von ε abhängen, aber nicht von der Stelle x (wie in der Definition der Stetigkeit an einer festen Stelle c)

Fundamentalsatz der Algebra

allgemeine Lösungsformel

(Natürliche und allgemeine) Exponentialfunktion und
Logarithmus

Pythagoräische Identität, Sinussatz,
Additionstheoreme

22

Antwort

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (18)$$

21

Antwort

Jedes Polynom vom Grad ≥ 1 hat mindestens eine (reelle oder komplexe) Nullstelle

24

Antwort

▷ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ *Pythagoräische Identität*

▷ $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$ *Sinussatz*

▷ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ *Cosinussatz*

▷ $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$

▷ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

23

Antwort

$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad e^{x \cdot y} = (e^x)^y, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad (19)$$

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y, \quad \ln x^k = k \ln x, \quad \ln \frac{1}{x} = -\ln x \quad (20)$$

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{x \cdot y} = (a^x)^y \quad (21)$$

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a} \quad (22)$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad 0 < x < \infty \quad (23)$$

Differenzierbarkeit

Ableitungen von $\ln x$, $\log_a x$ und den zyklometrischen Funktionen

Ableitung der Umkehrfunktion

Ableitung von $\operatorname{arsinh} x$, $\operatorname{arcosh} x$ und $\operatorname{artanh} x$

26

Antwort

Sei $f(x)$ in (a, b) differenzierbar und streng monoton, weiters sei $f'(x) \neq 0, x \in (a, b)$. Dann existiert die Umkehrfunktion f^{-1} und ist differenzierbar. Es gilt

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad (25)$$

25

Antwort

Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ und $x \in (a, b)$. Wenn $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existiert, dann heißt f *differenzierbar* an der Stelle x . Man schreibt

$$f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (24)$$

und bezeichnet $f'(x)$ als die *1. Ableitung* oder *Differentialquotient* von f an der Stelle x .

28

Antwort

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arsinh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (30)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcosh} x = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1 \quad (31)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{artanh} x = \frac{1}{1 - x^2}, \quad x \in (-1, 1) \quad (32)$$

27

Antwort

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}, \quad \frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x} \quad (26)$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1) \quad (27)$$

$$\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1) \quad (28)$$

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (29)$$

Wie lautet der 1. Mittelwertsatz der
Differentialrechnung?

Wie lautet der 2. Mittelwertsatz der
Differentialrechnung?

Wie lautet der Satz von Rolle?

Maximalbetrag der Ableitung als Lipschitzkonstante

30

Antwort

Seien f, g stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf a, b . Dann existiert $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)) \quad (34)$$

(Der Spezialfall $g(x) = x$ ergibt wiederum den 1. Mittelwertsatz.)

29

Antwort

Sei $f(x)$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) . Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (33)$$

Geometrische Interpretation: Es gibt mindestens einen Punkt $\xi \in (a, b)$, an dem die Steigung der Tangente an den Graphen von f gleich der Steigung der Geraden durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist. Siehe Abb. 9.4 im Skript.

32

Antwort

Sei f stetig differenzierbar auf $[a, b]$. Dann ist f Lipschitzstetig auf $[a, b]$, d.h. es gilt

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b] \quad (35)$$

mit $L = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ als kleinstmöglicher Lipschitzkonstante.

31

Antwort

Sei $f(x)$ stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf (a, b) und gilt $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$

Regel von de l'Hospital für $0/0$

Wie lautet die Leibnizsche Produktregel

Wie lautet der Satz von Taylor?

Lokale Extrema

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad (39)$$

Die Funktionen $f, g : [c, c + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig und auf $(c, c + \varepsilon)$ differenzierbar. Es gelte

$$f(c) = g(c) = 0 \quad \text{und} \quad g'(x) \neq 0, x \in (c, c + \varepsilon) \quad (36)$$

Falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow c+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \gamma \quad (\gamma = \pm\infty \text{ zugelassen!}) \quad (37)$$

existiert, dann gilt auch

$$\lim_{x \rightarrow c+} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma \quad (38)$$

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. $x_0 \in (a, b)$ heißt *lokales Minimum* (*Maximum*), wenn ein $\delta > 0$ existiert, so dass $f(x_0) \leq f(x)$ ($f(x_0) \geq f(x)$) für $|x - x_0| < \delta$.

Präziser gesprochen ist x_0 eine lokale *Extremalstelle* (Minimal- oder Maximalstelle), und $f(x_0)$ ist der lokale *Extremalwert* (Minimal- oder Maximalwert).

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine $(n + 1)$ mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle $x_0 \in [a, b]$ und $x = x_0 + h \in [a, b]$ die Taylorsche Formel,

$$f(x) = f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_{n+1}(x) \quad (40)$$

mit dem Restglied der Ordnung $n + 1$.

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta h)}{(n + 1)!}h^{(n+1)} \quad \text{mit } \vartheta \in [0, 1] \quad (41)$$

Charakterisierung stationäre Punkte

Rekursive Definition des Newton-Verfahrens

Wie lautet der erste Mittelwertsatz der
Integralrechnung

Zweiter Mittelwertsatz der Integralrechnung

38

Antwort

$$x_{(n+1)} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (42)$$

37

Antwort

Sei $f'(x_0) = 0$, $f^{(k)}(x_0) = 0$ für $k = 2 \dots n$, jedoch $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$.

- ▷ Im Fall $(n+1)$ gerade, ist x_0
 - für $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ ist ein *lokales Minimum*,
 - für $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ ist ein *lokales Maximum*.
- ▷ Im Fall das $(n+1)$ ungerade ist $x_{(0)}$ ein sogenannter *Sattelpunkt*, d.h. in jeder Umgebung von x_0 gibt es Punkte mit $f(x) > f(x_0)$ und mit $f(x) < f(x_0)$.

Beachte: Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit $f'(x_0) = 0$.

40

Antwort

Sei $f(x)$ stetig auf $[a, b]$, und $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei integrierbar, wobei $g(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, $\int_a^b g(x) dx > 0$. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx \quad (44)$$

39

Antwort

Ist $f(x)$ stetig auf $[a, b]$, dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (43)$$

Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

Punktweise, gleichmäßige Konvergenz

Wie lautet das Restglied der Taylorreihe in
Integraldarstellung

Wie lautet das Taylorpolynom

# 42	Antwort
<p>▷ Existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\xi)$ für $\xi \in D$, dann heißt $\{f_n\}$ an der Stelle ξ <i>konvergent</i>.</p> <p>▷ Konvergiert $\{f_n\}$ an x für alle $x \in I \subseteq D$, so heißt $\{f_n\}$ <i>punktweise konvergent in I</i>, und dann existiert eine <i>Grenzfunktion</i> $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit</p> $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad x \in I \quad (47)$ <p>▷ Die Funktionenfolge f_n heißt <i>gleichmäßig konvergent</i> auf I gegen die Funktion f, wenn</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} f_n(x) - f(x) = 0 \quad (48)$ <p>In „ε-$N(\varepsilon)$-Terminologie“ ausgedrückt bedeutet dies: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein Index $N = N(\varepsilon) > 0$, so dass für alle $x \in I$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N(\varepsilon)$ gilt</p> $ f_n(x) - f(x) < \varepsilon \quad (49)$	

# 44	Antwort
<p>Das Polynom vom Grad $\leq n$</p> $T_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (51)$ <p>heißt <i>n-tes Taylorpolynom der Funktion f zur Entwicklungsstelle x_0</i>, und $R_{n+1}(x)$ heißt das <i>Restglied</i> $(n+1)$-ter Ordnung.</p>	

# 41	Antwort
<p>(i) Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion $F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi$ auf $[a, b]$ stetig differenzierbar, und es gilt</p> $F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(\xi) d\xi = f(x) \quad (45)$ <p>(ii) Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und F sei eine Stammfunktion von f. Dann gilt für $a, b \in I$</p> $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) =: F(x) _a^b \quad (46)$	

# 43	Antwort
$R_{n+1}(x) = \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1 - \sigma)^n f^{(n+1)}(x_0 + \sigma h) d\sigma = \mathcal{O}(h ^{n+1})$ <p style="text-align: right;">für $h \rightarrow 0$ (50)</p>	

Taylor-Restglied: Lagrange-Darstellung

Taylorentwicklung der Exponentialfunktion, des natürlichen Logarithmus und der trigonometrischen Funktionen

Taylorentwicklung der Hyperbelfunktionen, des Arcustangens und der Binomischen Reihe

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (53)$$

$$\ln(1-x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (54)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (55)$$

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine $(n+1)$ mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für das Taylor-Restglied die Darstellung

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta h)}{(n+1)!} h^{n+1}, \quad h = x - x_0 \text{ für ein } \vartheta \in [0, 1] \quad (52)$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (56)$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}, \quad \text{für } x \in [-1, 1] \quad (57)$$

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n, \quad \text{für } |x| < 1 \quad (58)$$