HOJA N°

FECHA

Fibraciones

Def. Una función $p: E \to B$ continua se dice fibración,
si $\forall X$ esp top, $\forall f: X \to E$ continua
$\forall H: X \times I \to B$ continua tal que $H_0 = pf$.
$\exists \tilde{H}: X \times I \to E$ continua tal que $p\tilde{H} = H$ y $\tilde{H}_0 = f$.

B se llama el espacio base, E el espacio total.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

levanta homotopía con una condición inicial.

Prop. Sea $f: E \to B$ fibración.
X esp top. $f, g: X \to B$ continuas. $f \simeq g$.
Entonces: f se levanta sii g se levanta.
Más aún podemos construir levantados homotópicos.

Demo.

Sup. que f se levanta, o sea $\exists \tilde{f}: X \to E$ continua tq $p\tilde{f} = f$.
Sea $H: f \simeq g$.
Como p es fibración, $\exists \tilde{H}: X \times I \to E$ levantado de H tq $\tilde{H}_0 = \tilde{f}$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

Luego $\tilde{H}_1: X \to E$ y $p\tilde{H}_1 = H_1 = g$.
O sea $\tilde{g} := \tilde{H}_1$ levantado de g.
Además como $\tilde{H}_0 = \tilde{f}$, $\tilde{H}: \tilde{f} \simeq \tilde{g}$. $\square$

Prop. 1). Homeomorfismos son fibraciones.
2). Composición de fibraciones son fibraciones
3). Las fibraciones son estables por cambio de base.

Demo.

1). Sea $p: E \to B$ homeo.
Sean $f: X \to E$, $H: X \times I \to B$ continuas tq $H_0 = pf$.
Sea $\tilde{H} := p^{-1} \circ H : X \times I \to E$.
$p\tilde{H} = p \circ p^{-1} \circ H = H$ $\qquad \tilde{H}_0 = p^{-1} \circ H_0 = p^{-1} \circ p \circ f = f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

NOTA

2). Sean $p: E \longrightarrow B$, $q: E' \longrightarrow E$ fibraciones.

Sean $f: X \longrightarrow E'$, $H: X\times I \longrightarrow B$ continuas tq $H_0 = p\circ q\circ f$.

Luego $\exists H': X\times I \longrightarrow E$ tq $H'_0 = q\circ f$ y $pH' = H$. (usando que p fib)

$\exists \tilde{H}: X\times I \longrightarrow E'$ tq $\tilde{H}_0 = f$ y $q\tilde{H} = H'$ (usando que q fib.)

Entonces $pq\tilde{H} = pH' = H$. O sea $\tilde{H}$ es levantado de H con $\tilde{H}_0 = f$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dd, "i_0"'] & E' \arrow[d, "q"] \\
 & E \arrow[d, "p"] \\
X\times I \arrow[r, "H"'] \arrow[uur, dashed, "\tilde{H}"] \arrow[ur, dashed, "H'"] & B
\end{tikzcd}$$

3). Sea $p: E \longrightarrow B$ fibración.

Y sea
$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d, "\bar{p}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{pull.}"] & E \arrow[d, "p"] \\
Y \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

Queremos ver que $\bar{p}$ es fibración.

Sea $f: X \longrightarrow W$, $H: X\times I \longrightarrow Y$ continuas tq $H_0 = \bar{p}f$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & W \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d, "\bar{p}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{pull}"] & E \arrow[d, "p"] \\
X\times I \arrow[r, "H"'] & Y \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

Como p es fibración $\exists H': X\times I \longrightarrow E$

tal que $H'_0 = \bar{g}\circ f$ y $pH' = g\circ H$.

Luego tenemos diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X\times I \arrow[dr, dashed, "\tilde{H}"] \arrow[drr, bend left, "H'"] \arrow[ddr, bend right, "H"'] & & \\
 & W \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d, "\bar{p}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{pull}"] & E \arrow[d, "p"] \\
 & Y \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

Como es pullback $\exists!\ \tilde{H}: X\times I \longrightarrow W$

tal que $\bar{g}\tilde{H} = H'$ y $\bar{p}\tilde{H} = H$.

$\bar{g}\tilde{H} = H' \Rightarrow \bar{g}\tilde{H}_0 = H'_0 = \bar{g}f$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tilde{H}_0"'] & W \arrow[d, "\bar{g}"] \\
W \arrow[r, "\bar{g}"'] & E
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "j"] \arrow[drr, bend left, "\bar{g}\circ f"] \arrow[ddr, bend right, "H_0"'] & & \\
 & W \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d, "\bar{p}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{pull}"] & E \arrow[d, "p"] \\
 & Y \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

$\exists!\ j: X \longrightarrow W$ tq

$\bar{g}\circ j = \bar{g}\circ f$ y $\bar{p}\circ j = H_0$.

Luego $j = f$.

Pero además $j = \tilde{H}_0$. (porque $\bar{p}\tilde{H} = H$.)

Por lo tanto $\tilde{H}_0 = f$.

O sea, hemos hallado $\tilde{H}: X\times I \longrightarrow W$ con $\bar{p}\tilde{H} = H$ y $\tilde{H}_0 = f$.

Por tanto $\bar{p}$ es fibración. $\square$

Prop. Fibraciones levantan caminos con una condición inicial.

Demo:

Sea $p: E \longrightarrow B$ fibración. $w: I \longrightarrow B$ camino con $b_0 := w(0)$

Sea $e_0 \in E_{b_0}$. $\exists\, \tilde{w}: I \longrightarrow E$ tal que $p\tilde{w} = w$ y $\tilde{w}(0) = e_0$.

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r, "cte_{e_0}"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ * \times I \arrow[r, "w"'] \arrow[ur, "\tilde{w}"] & B \end{tikzcd}$$

$\square$

Def. Se dice que $p: E \longrightarrow B$ continua tiene la LUC (Propiedad de levantado único de caminos), si: $\forall b_0 \in B \ \forall e_0 \in E_{b_0} \ \forall w: I \longrightarrow B$ camino con $w(0) = b_0$

$\exists!\, \tilde{w}: I \longrightarrow E$ levantado de w que empieza en e_0.

Teorema. Sea $p: E \longrightarrow B$ fibración con LUC.

Sean w, w' caminos en E con $w(0) = w'(0) = e_0$.

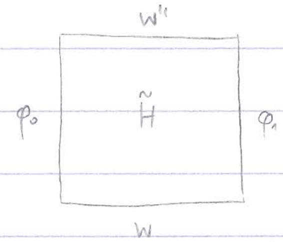
Si $pw \underset{p}{\simeq} pw'$, entonces $w \underset{p}{\simeq} w'$.

Demo.

Sea $H: I \times I \longrightarrow B$, $H: pw \underset{p}{\simeq} pw'$.

Sea $\tilde{H}: I \times I \longrightarrow E$ levantado de H con $\tilde{H}_0 = w$.

Sea $w'' := \tilde{H}_1$.



Sean $\varphi_0: I \longrightarrow E$, $\varphi_0(t) = \tilde{H}(0,t)$; $\varphi_1: I \longrightarrow E$, $\varphi_1(t) = \tilde{H}(1,t)$.

$p\varphi_0(t) = b_0$ y $\varphi_0(0) = e_0$. Luego, por unicidad del levantado $\varphi_0 = cte_{e_0}$.

Análogamente $\varphi_1 = cte_{e_1}$.

Además $pw'' = pw'$ y $w''(0) = e_0 = w'(0)$. Por la LUC, $w'' = w'$.

Por tanto $H: w \underset{p}{\simeq} w'$. $\square$

Corolario. $p: E \longrightarrow B$ fibración con LUC. $b_0 \in B$, $e_0 \in E_{b_0}$.

Entonces $p_*: \Pi_1(E, e_0) \longrightarrow \Pi_1(B, b_0)$ es monomorfismo.

Demo. Sean $[w], [w'] \in \Pi_1(E, e_0)$ con $p_*[w] = p_*[w']$.

Luego $pw \underset{p}{\simeq} pw'$. Además $w(0) = e_0 = w'(0)$. Por el teorema $w \underset{p}{\simeq} w'$. $\square$

Corolario. $p: E \longrightarrow B$ fibración con LUC. $b_0 \in B$, $e_0 \in E_{b_0}$.

Se tiene función bien definida $\varphi_{e_0}: \Pi_1(B, b_0) \longrightarrow E_{b_0}$ $\varphi_{e_0}[w] = \tilde{w}^{e_0}(1)$,

donde $\tilde{w}$ es levantado de w a partir de e_0.

Demo. 1). $\tilde{w}^{e_0}(1) \in E_{b_0}$, ya que w es lazo en b_0.

2). Si $[w] = [w']$, entonces $\tilde{w}^{e_0} \underset{p}{\simeq} \tilde{w}'^{e_0}$ por el teorema y por tanto $\tilde{w}^{e_0}(1) = \tilde{w}'^{e_0}(1)$. $\square$

eoreme $p: E \longrightarrow B$ fibración con LUC. $b_0 \in B$

Se tiene acción a derecha $E_{b_0} \circlearrowleft \pi_1(B,b_0)$ $\quad e_0[w] = \widetilde{w}^{e_0}(1)$.

Si E es arcoconexo, entonces la acción es transitiva,

y el grupo de isotopía $(\pi_1(B,b_0))_{e_0} = p_*(\pi_1(E,e_0))$.

Por tanto $\forall e_0 \in E_{b_0}$, se tiene biyección $\pi_1(B,b_0)/p_*(\pi_1(E,e_0)) \longrightarrow E_{b_0}$.

emo.

La acción es bien definida por el corolario anterior.

Es acción: 1). $e_0[c_{b_0}] = \widetilde{c}_{b_0}^{e_0}(1) = c_{e_0}(1) = e_0$. (porque p tiene LUC).

2). $e_0([w]*[w']) = e_0[w*w'] = \widetilde{w*w'}^{e_0}(1) = \widetilde{w}^{e_0} * \widetilde{w'}^{e_1}(1)$ donde $e_1 = \widetilde{w}^{e_0}(1)$.

$= \widetilde{w'}^{e_1}(1) = e_1[w'] = \widetilde{w}^{e_0}(1)[w'] = (e_0[w])[w']$.

Supongamos que E es arcoconexo. Sea $e_0, e_1 \in E_{b_0}$. Sea γ camino de e_0 a e_1.

Entonces $e_1 = \gamma(1) = \widetilde{p\gamma}^{e_0}(1) = e_0[p\gamma]$. Esto vale $\forall e_1 \in E_{b_0}$. Luego $\mathcal{O}_{e_0} = \{e_0[w] \mid [w] \in \pi_1(B,b_0)\} = E_{b_0}$.

$(\pi_1(B,b_0))_{e_0} = \{[w] \in \pi_1(B,b_0) \mid e_0[w] = e_0\} = \{$los lazos en b_0 en B que son también lazos en e_0 en $E\}$

$= p_*(\pi_1(E,e_0))$. $\square$

olario Si E es simplemente conexo, entonces se tiene biyección $\pi_1(B,b_0) \longrightarrow E_{b_0}$.

H

HOJA N°

FECHA

Revestimientos.

Def. $p: E \to B$ continua. Sea $\mathcal{U} \subseteq B$ abierto.

$\mathcal{U}$ se dice parejamente cubierto, si $p^{-1}(\mathcal{U}) = \dot{\bigcup}_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha$, $V_\alpha \subseteq E$ abierto.

y $p|_{V_\alpha}: V_\alpha \longrightarrow \mathcal{U}_\alpha$ es homeo $\forall \alpha \in \Lambda$.

Def. $p: E \longrightarrow B$ continua se dice revestimiento, si $\forall b \in B$ $\exists \mathcal{U}$ entorno parejamente cubierto de b.

Def. $p: E \longrightarrow B$. continua se dice homeomorfismo local si $\forall e \in E$ y $\exists V$ entorno abierto de e y $\mathcal{U} \subseteq B$ abierto tal que $p(e) \in \mathcal{U}$ y $p|_V: V \longrightarrow \mathcal{U}$ es homeo.

Obs. p revestimiento $\Rightarrow$ p homeo local.

Porque: Dado $e \in E$, $\exists \mathcal{U} \subseteq B$ parejamente cubierto con $p(e) \in \mathcal{U}$.

i.e. $p^{-1}(\mathcal{U}) = \dot{\bigcup}_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha$, $V_\alpha \subseteq E$ abierto y $p|_{V_\alpha}: V_\alpha \longrightarrow \mathcal{U}$. homeo. $e \in V_\alpha$ para algún $\alpha \in \Lambda$.

p homeo local $\not\Rightarrow$ p revestimiento.

Porque: $p: \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow S^1$ $\quad p(t) = e^{2\pi i t}$.

✓ homeo local

X revestimiento. $p^{-1}(\mathcal{U})$ no es unión disj. de abiertos. tq cada abierto es homeomorfo a $\mathcal{U}$.

Propiedades de revestimientos.

1). p rev $\Rightarrow$ p sobre

2). p rev $\Rightarrow$ p homeo local $\Rightarrow$ p abierta

3). 1)+2) $\Rightarrow$ p cociente.

4). $p: E \longrightarrow B$ rev, $b \in B$ $\Rightarrow$ E_b discreta. (con la top subesp de E).

NOTA

Teorema 1. $p: E \longrightarrow B$ revestimiento.
X esp top conexo, $f, g: X \longrightarrow E$ continuas tq $pf = pg$.
Si $\exists x_0 \in X$ tq $f(x_0) = g(x_0)$, entonces $f(x) = g(x)$ $\forall x \in X$.

Demo:

Sea $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$.

Supongamos que $\exists x_0 \in X$ tq $f(x_0) = g(x_0)$. Entonces $A \neq \emptyset$.

Como X es conexo, basta ver que A es abierto y cerrado.

A abierto: Sea $x \in A$.

Sea $b = pf(x) = pg(x) \in B$. Sea $\mathcal{U} \subseteq B$ abierto parej. cub. con $b \in \mathcal{U}$.

Es decir $p^{-1}(\mathcal{U}) = \dot{\bigcup}_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha$, donde $V_\alpha \subseteq E$ ab y $p|_{V_\alpha}: V_\alpha \longrightarrow \mathcal{U}_\alpha$ homeo. $\forall \alpha \in \Lambda$

$\exists \alpha \in \Lambda$ tq $f(x) = g(x) \in V_\alpha$.

Sea $V = f^{-1}(V_\alpha) \cap g^{-1}(V_\alpha)$. $x \in V$ y $V \subseteq X$ abierto.

Sea $y \in V$. $f(y) \in V_\alpha$ y $g(y) \in V_\alpha$, además $pf(y) = pg(y)$.

Como $p|_{V_\alpha}$ es homeo $f(y) = g(y)$, o sea $y \in A$.

Por tanto tenemos $x \in V \subseteq A$. Esto vale $\forall x \in A$, luego es abierto.

A cerrado: Veamos que A^c es abierto.

Supongamos que $x \in A^c$.

Como antes $\exists \mathcal{U} \subseteq B$ abierto parej. cub tal que $b = pf(x) = pg(x) \in \mathcal{U}$.

$p^{-1}(\mathcal{U}) = \dot{\bigcup}_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha$, $p|_{V_\alpha}: V_\alpha \longrightarrow \mathcal{U}$ homeo $\forall \alpha \in \Lambda$

$\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda$ tq $f(x) \in V_{\alpha_1}$, $g(x) \in V_{\alpha_2}$. Como $p|_{V_{\alpha_1}}, p|_{V_{\alpha_2}}$ son homeos y $g(x) \neq f(x)$ con $p|_{V_{\alpha_1}}(f(x)) = p|_{V_{\alpha_2}}(g(x))$, entonces $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Sea $V = f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cap g^{-1}(V_{\alpha_2})$. $x \in V$. V es abierto.

Sea $y \in V$. $f(y) \in V_{\alpha_1}$, $g(y) \in V_{\alpha_2}$. Como $V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2} = \emptyset$, $f(y) \neq g(y)$.

Luego $x \in V \subseteq A^c$. $\square$

NOTA

HOJA Nº

FECHA

Teorema 2. Revestimientos son fibraciones.

Demo: NO ENTRA EN EL FINAL (clase 28/10).

Corolario. Revestimientos son fibraciones con LUC.

Demo. por teor. 2, son fibraciones, por tanto levantan caminos.

por teor. 1, tienen la LUC.

Corolario. $p: E \longrightarrow B$ revestimiento. $b_0 \in B$.

Si E es arcoconexo, entonces se tiene $\forall e_0 \in E_{b_0}$:

1). $p_*: \pi_1(E, e_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0)$ mono.

2). $\pi_1(B, b_0)/Fix e_0 \equiv E_{b_0}$ (biyección) $\qquad Fix e_0 = p_*(\pi_1(E, e_0))$.

Demo. Resultados de fib. con LUC.

Corolario. $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$.

Demo.

Consideramos el revestimiento $p: \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \qquad p(t) = e^{2\pi i t}$.

$\mathbb{R}$ es arcoconexo. Luego tenemos biyección $\varphi_0: \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow E_1 = \mathbb{Z}$. $\varphi_0[w] = \tilde{w}^0(1)$

Queremos ver que φ es morfismo de grupos, o sea que $\varphi_0([w]*[w']) = \varphi_0[w] + \varphi_0[w']$.

Sean $[w], [w'] \in \pi_1(S^1, 1)$, con $\varphi_0[w] = n$, $\varphi_0[w'] = m$.

Definimos: $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \tilde{w}^0(2t) & t \in [0, 1/2] \\ n + \tilde{w}'^0(2t-1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

($t = 1/2$: $\tilde{w}^0(2t) = n = n + 0 = n + \tilde{w}'^0(0) = n + \tilde{w}'^0(2t-1)$ $\Rightarrow \gamma$ continua por lema del pegado).

Observamos que $\gamma(0) = 0$.

Además para $t \in [0, 1/2]$ $\quad p \circ \gamma(t) = p \circ \tilde{w}^0(2t) = w(2t)$

para $t \in [1/2, 1]$ $\quad p \circ \gamma(t) = p \circ (n + \tilde{w}'^0(2t-1)) \overset{\triangledown}{=} p \circ \tilde{w}'^0(2t-1) = w'(2t-1)$ $\qquad \overset{\triangledown}{p}$ periódica con periodo 1.

Luego $p\gamma = w * w'$, y por unicidad del levantado de caminos $\gamma = \widetilde{w * w'}^0$.

Entonces, se tiene

$$\varphi_0[w]*[w'] = \varphi_0[w * w'] = \widetilde{w * w'}^0(1) = \gamma(1) = n + \tilde{w}'^0(1) = \varphi_0[w] + \varphi_0[w'].$$

Por lo tanto φ_0 es isomorfismo y $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$. $\qquad \square$.

NOTA

HOJA Nº

FECHA

Clasificación de Revestimientos. (obs y props previas.)

Def. B esp top arcoconexo. Dos revestimientos $p: E \longrightarrow B$, $p': E' \longrightarrow B$, se dicen equivalentes, si $\exists \varphi: E \longrightarrow E'$ homeo tal que $p' \circ \varphi = p$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & E' \\ & {\scriptstyle p}\searrow \; \cong \; \swarrow{\scriptstyle p'} & \\ & B & \end{array}$$

Es relación de equivalencia en el cjto de revestimientos sobre B.

Prop. $p: E \longrightarrow B$ revestimiento arcoconexo, $b_0 \in B$.

1) Si $e_0, e_1 \in E_{b_0}$, entonces $Fix\,e_0$ y $Fix\,e_1$ son conjugados.

2). Si $e_0 \in E_{b_0}$ y $H \subseteq \pi_1(B, b_0)$ conjugado de $Fix\,e_0$, entonces $\exists e_1 \in E_{b_0}$ tq $H = Fix\,e_1$.

Dem.

1). Sean $e_0, e_1 \in E_{b_0}$. Sea $\gamma: I \longrightarrow E$ camino de e_1 a e_0.

Sea $[w] \in Fix\,e_0$; entonces $[\tilde{w}] \in \pi_1(E, e_0)$.

$[p \circ \gamma] \in \pi_1(B, b_0)$

Luego $[p\circ\gamma][w][\overline{p\circ\gamma}] = [p\circ\gamma][p\circ\tilde{w}][p\circ\bar{\gamma}] = p_*([\gamma * \tilde{w} * \bar{\gamma}]) \in Fix\,e_1$.

Por tanto $[p\circ\gamma]\, Fix\,e_0\, [p\circ\bar{\gamma}] \subseteq Fix\,e_1$. (pues cambiando γ y $\bar{\gamma}$ vale la $\supseteq$).

2). $H = [\gamma]\, Fix\,e_0\, [\bar{\gamma}]$ para algún $[\gamma] \in \pi_1(B, b_0)$.

Sea $e_1 = \bar{\gamma}^{e_0}(1)$.

Sea $[w] \in Fix\,e_0$. Entonces $[\tilde{w}] \in \pi_1(E, e_0)$

$[\gamma][w][\bar{\gamma}] = [p\circ\tilde{\bar{\gamma}}^{e_0}][p\circ\tilde{w}][p\circ\tilde{\gamma}^{e_0}] = p_*([\tilde{\bar{\gamma}}^{e_0} * \tilde{w} * \tilde{\gamma}^{e_0}]) \in Fix\,e_1$.

Sea $[w] \in Fix\,e_1$. Entonces $[\tilde{w}] \in \pi_1(E, e_1)$

$[\gamma][w][\bar{\gamma}] \in Fix\,e_0$, lo cual implica que $[w] \in [\bar{\gamma}]\, Fix\,e_0\, [\gamma]$.

Luego $Fix\,e_1 = [\bar{\gamma}]\, Fix\,e_0 [\gamma] = H$. $\square$

Prop. $p: E \longrightarrow B$, $p': E' \longrightarrow B$ revestimientos arcoconexos. $b_0 \in B$. B arcoconexo.

Si son equivalentes entonces definen la misma clase de conjugación en $\pi_1(B, b_0)$

Es decir $\forall e_0 \in E_{b_0}$, $e_0' \in E'_{b_0}$, $Fix\,e_0$ y $Fix\,e_0'$ son conjugados.

Equivalente $\forall e_0 \in E_{b_0}$ $\exists e_0' \in E'_{b_0}$ tq $Fix\,e_0 = Fix\,e_0'$.

Dem.

Supongamos que son equivalentes y sea $\varphi: E \longrightarrow E'$ homeo tq $p' \circ \varphi = p$.

Sea $e_0 \in E_{b_0}$. Sea $e_0' = \varphi(e_0)$. Observamos que $\pi_1(E', e_0') = \varphi_*(\pi_1(E, e_0))$ (φ homeo $\Rightarrow \varphi_*$ iso)

Entonces $Fix\,e_0' = p'_*(\pi_1(E', e_0')) = p'_* \circ \varphi_*(\pi_1(E, e_0)) = p_*(\pi_1(E, e_0)) = Fix\,e_0$. $\square$

NOTA

Corolario. B arcoconexo, $b_0 \in B$.

Se tiene función bien definida

$$\psi : \{\text{clases de equiv de rev. arcocon. sobre } B\} \longrightarrow \{\text{clases de conjugación de subgrupos de } \pi_1(B,b_0)\}. \quad (*)$$

Teorema: Levantado de funciones

Sea $p: E \longrightarrow B$ revestimiento arcoconexo. $b_0 \in B$.

Sea Y esp top arcoconexo y localmente arcoconexo.

Sea $f: Y \longrightarrow B$ continua. $y_0 \in Y$ tq $f(y_0) = b_0$. Sea $e_0 \in E_{b_0}$.

$\exists \tilde{f} : Y \longrightarrow E$ continua tal que $p\tilde{f} = f$ y $\tilde{f}(y_0) = e_0$

sii $f_*(\pi_1(Y,y_0)) \subseteq \mathrm{Fix}\, e_0$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] & e_0 \\ y_0 \quad Y \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B & b_0 \end{tikzcd}$$

Más aún, si existe el levantado, entonces es único.

Dem.

La unicidad de $\tilde{f}$ sale de unicidad de levantados.

$\Rightarrow$). Supongamos que $\tilde{f} : Y \longrightarrow E$ levanta a f y $\tilde{f}(y_0) = e_0$.

Entonces vale que $f_*(\pi_1(Y,y_0)) = p_* \tilde{f}_*(\pi_1(Y,y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E,e_0)) = \mathrm{Fix}\, e_0$.

$\Leftarrow$). Supongamos que $f_*(\pi_1(Y,y_0)) \subseteq \mathrm{Fix}\, e_0$.

Definimos $\tilde{f} : Y \longrightarrow E$.

Sea $y \in Y$. Sea $\gamma : I \longrightarrow Y$ camino de y_0 a y.

$f\circ\gamma$ es camino de $f(y_0)$ a $f(y)$. Sea $\widetilde{f\circ\gamma}^{e_0}$ levantado de $f\circ\gamma$ a partir de e_0

(revestimientos levantan caminos).

Definimos $\tilde{f}(y) := \widetilde{f\circ\gamma}^{e_0}(1)$. $\quad p\tilde{f} = f$. por definición.

Veamos que $\tilde{f}$ está bien definida.

Sean γ, β caminos de y_0 a y. $\gamma * \overline{\beta}$ es lazo en y_0,

Luego $f_*[\gamma * \overline{\beta}] \in f_*(\pi_1(Y,y_0)) \subseteq \mathrm{Fix}\, e_0$.

Por tanto $\widetilde{f\circ\gamma * \overline{f\circ\beta}}^{e_0}$ es lazo en e_0, o sea $\widetilde{f\circ\gamma * \overline{f\circ\beta}}^{e_0}(1) = e_0$.

$\widetilde{f\circ\gamma * \overline{f\circ\beta}}^{e_0} = \widetilde{f\circ\gamma}^{e_0} * \widetilde{\overline{f\circ\beta}}^{\widetilde{f\circ\gamma}^{e_0}(1)}$. Luego $w := \widetilde{\overline{f\circ\beta}}^{\widetilde{f\circ\gamma}^{e_0}(1)}$ es camino de $\widetilde{f\circ\gamma}^{e_0}(1)$ a e_0.

$p\overline{w} = f\circ\beta$. y $\overline{w}(0) = e_0$. Luego $\overline{w} = \widetilde{f\circ\beta}^{e_0}$.

Por lo tanto $\widetilde{f\circ\beta}^{e_0}(1) = \overline{w}(1) = \widetilde{f\circ\gamma}^{e_0}(1)$.

Hemos probado que la definición no depende del camino.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Veamos que $\tilde{f}$ es continua.

Sea $W \subseteq E$ abierto. Sea $y \in \tilde{f}^{-1}(W)$.

Consideramos $\mathcal{U}$ ab. parej. cub. con $f(y) \in \mathcal{U}$. $\quad \mathcal{U} = \dot{\bigcup}_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$, $\quad p|_{V_\alpha} : V_\alpha \longrightarrow \mathcal{U}$ homeo.

Como $p\tilde{f} = f$, $\exists \alpha \in \Lambda$ tq $\tilde{f}(y) \in V_\alpha$.

HOJA Nº

FECHA

Sea $V := V_\alpha \cap W$. y sea $\tilde{\mathcal{U}} := p|_{V_\alpha}(V_\alpha \cap W) \subseteq \mathcal{U}$. V es ab. y como $p|_{V_\alpha}$ es homeo, $\tilde{\mathcal{U}}$ es ab. en X. (ab en $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}$ ab).

$f^{-1}(\tilde{\mathcal{U}})$ es abierto en Y, ya que f es continua.

$y \in f^{-1}(\tilde{\mathcal{U}})$, porque $\tilde{f}(y) \in V \Rightarrow f(y) = p\tilde{f}(y) \in \tilde{\mathcal{U}}$.

Sea $\check{\mathcal{U}}$ entorno abierto arcoconexo tq $y \in \check{\mathcal{U}} \subseteq f^{-1}(\tilde{\mathcal{U}})$.

Veamos que $\check{\mathcal{U}} \subseteq \tilde{f}^{-1}(W)$.

Sea $y' \in \check{\mathcal{U}}$. Sea γ camino de y a y' en $\check{\mathcal{U}}$.

$f\circ\gamma$ es camino de $f(y)$ a $f(y')$ y $f\circ\gamma(I) \subseteq \tilde{\mathcal{U}}$.

Luego $p|_{V_\alpha}^{-1} \circ f \circ \gamma$ es camino de $p|_{V_\alpha}^{-1} \circ f(y) = \tilde{f}(y)$ a $p|_{V_\alpha}^{-1} \circ f(y') = \tilde{f}(y')$. ← Porque: sea $\eta : I \to Y$ camino de y_0 a y. Entonces $\eta * \gamma$ es camino de y_0 a y', y $\tilde{f}(y') = \widetilde{f\alpha * f\gamma}_{e_0}(1) = \tilde{f\gamma}^{\eta(1)}(1) = \tilde{f\gamma}^{y}(1) = p|_{V_\alpha}^{-1} \circ f\gamma(1) = p|_{V_\alpha}^{-1} \circ f(y')$

y además $p|_{V_\alpha}^{-1} \circ f \circ \gamma(I) \subseteq V_\alpha \cap W \subseteq W$.

En particular $\tilde{f}(y') \in W$.

Luego $\tilde{f}^{-1}(W)$ es abierto. $\square$.

Corolario. B arcoconexo, localmente arcoconexo. $b_0 \in B$.

Sean $p : E \longrightarrow B$, $p' : E' \longrightarrow B$ revestimientos arcoconexos, $e_0 \in E_{b_0}$, $e_0' \in E'_{b_0}$ tales que $\mathrm{Fix}\, e_0$ y $\mathrm{Fix}\, e_0'$ son conjugados. Entonces p y p' son equivalentes.

Demo.

Podemos suponer $\mathrm{Fix}\, e_0 = \mathrm{Fix}\, e_0'$ (eligiendo otro elemento de la fibra, usando que E arcoconexo).

Por el teorema $\exists! \psi : E' \longrightarrow E$ cont. tq $p\psi = p'$ $\psi(e_0') = e_0$.

Análogamente $\exists! \varphi : E \longrightarrow E'$ cont. tq $p'\varphi = p$ $\varphi(e_0) = e_0'$.

E, E' son loc. arcoconexos porque B lo es, y p, p' son homeos locales.

$p\psi\varphi = p'\varphi = p = p \circ \mathbb{1}_E$ Además $\psi\varphi(e_0) = e_0$.

Por unicidad del levantado $\psi\varphi = \mathbb{1}_E$.

Análogamente vemos que $\varphi\psi = \mathbb{1}_{E'}$

Por tanto $\psi : E' \longrightarrow E$ es homeo con $p\psi = p'$. $\square$.

Corolario. B arcoconexo, localmente arcoconexo. $b_0 \in B$.

Sean $p : E \longrightarrow B$, $p' : E' \longrightarrow B$ revestimientos arcoconexos, $e_0 \in E_{b_0}$, $e_0' \in E'_{b_0}$, tales que $\mathrm{Fix}\, e_0 \subseteq \mathrm{Fix}\, e_0'$.

Entonces $\exists! \varphi\ E \longrightarrow E'$ tq $p' \circ \varphi = p$ y $\varphi(e_0) = e_0'$.

NOTA

HOJA N°

FECHA

CLASIFICACIÓN DE REVESTIMIENTOS.

Def. X esp top se dice semilocalmente simplemente conexo, si $\forall x \in X$ $\exists \mathcal{U} \subseteq X$ entorno abierto de x tal que $i_*: \Pi_1(\mathcal{U}, x) \longrightarrow \Pi_1(X, x)$, inducido por la inclusion, es el morfismo cero.

Def $p: E \longrightarrow B$ revestimiento se dice revestimiento universal, si E es simplemente conexo.
(Equiv. E arcoconexo y $\text{Fix}_{e_0} = 0$. (Porque: $\Pi_1(E, e_0) = 0 \iff p_*(\Pi_1(E, e_0)) = 0$ ($\Leftarrow$ p_* mono) por la LLC.))

Teorema 1. B arcoconexo, localmente arcoconexo y semilocalmente simplemente conexo. Entonces B admite revestimiento universal.

Demo

Obs. Dado $b \in B$, sea $\mathcal{U} \subseteq B$ abierto arcoconexo tal que $b \in \mathcal{U}$ y $i_*: \Pi_1(\mathcal{U}, b) \longrightarrow \Pi_1(B, b)$ es cero.
Sea $b' \in \mathcal{U}$ y γ camino de b a b' (usando que $\mathcal{U}$ es arcoconexo).
Entonces $i_*: \Pi_1(\mathcal{U}, b') \longrightarrow \Pi_1(B, b')$ es cero, porque
$\hat{\gamma}$ es isomorfismo.

$$\begin{tikzcd} \Pi_1(\mathcal{U}, b) \arrow[r, "i_* = 0"] \arrow[d, "\hat{\gamma}"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & \Pi_1(B, b) \arrow[d, "\hat{\gamma}"] \\ \Pi_1(\mathcal{U}, b') \arrow[r] & \Pi_1(B, b') \end{tikzcd}$$

Decimos que $i_* = 0$ $(\forall b' \in \mathcal{U})$.

Obs. $\mathscr{U} = \{ \mathcal{U} \subseteq B \mid \mathcal{U} \text{ arcoconexo}, i_* = 0 \}$. es una base para la topología de B.
Queremos ver que dado $x \in B$ y $\mathcal{U}$ entorno de x, $\exists V \in \mathscr{U}$ tq $x \in V \subseteq \mathcal{U}$.
Sea $x \in B$ y $\mathcal{U}$ entorno de x.
Sea $\mathcal{U}' \subseteq B$ abierto tq $x \in \mathcal{U}'$ y $i_*: \Pi_1(\mathcal{U}', x) \longrightarrow \Pi_1(B, x)$ es cero (B semiloc. simpl. con).
Sea V abierto arcoconexo tal que $x \in V \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$.
Como $V \subseteq \mathcal{U}'$, $i_*: \Pi_1(V, x) \longrightarrow \Pi_1(B, x)$ es cero.

PASO 1. Construcción del conjunto E y la función $p: E \longrightarrow B$.
Sea $b_0 \in B$. Sea $E = \{ [\gamma] \mid \gamma: I \longrightarrow B \text{ camino con } \gamma(0) = b_0 \}$. *
Definimos $p: E \longrightarrow B$ $\quad p[\gamma] = \gamma(1)$.
p es bien definida y es sobreyectiva, porque B es arcoconexo.

* $[\gamma] = [\omega]$ si $\gamma(1) = \omega(1)$ y $\gamma \underset{p}{\simeq} \omega$ en B.

NOTA

PASO 2. Una topología para E.

Dado $U \in \mathcal{U}$ y $[\gamma] \in E$, sea $U_{[\gamma]} = \{[\gamma * \eta] \mid \eta : I \longrightarrow U$ camino con $\eta(0) = \gamma(1)\}$.

Obs. $p|_{U_{[\gamma]}} : U_{[\gamma]} \longrightarrow U$ es biyectiva:

Es sobre, porque U es arcoconexo.

Es inyectiva: Sean $[\gamma * \eta_1], [\gamma * \eta_2] \in U_{[\gamma]}$ con $p[\gamma * \eta_1] = p[\gamma * \eta_2]$.

Es decir $\gamma * \eta_1(1) = \gamma * \eta_2(1)$, o sea $\eta_1(1) = \eta_2(1)$.

Luego $\eta_1 * \overline{\eta}_2$ es lazo en $\gamma(1)$.

Como i_* es cero $[\eta_1 * \overline{\eta}_2] = 0$ en X.

Por tanto $\eta_1 \underset{p}{\simeq} \eta_2$, ie $[\eta_1] = [\eta_2]$.

Obs. Si $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$, entonces $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']}$:

Si $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$, entonces $[\gamma'] = [\gamma * \eta]$ para algún η camino en U con $\eta(0) = \gamma(1)$.

Sea $[w] \in U_{[\gamma']}$. $[w] = [\gamma' * \varphi] = [\gamma * \eta * \varphi] = [\gamma * (\eta * \varphi)] \in U_{[\gamma]}$, $\eta * \varphi$ es camino en U y empieza en $\gamma(1)$.

Sea $[w] \in U_{[\gamma]}$. $[w] = [\gamma * \varphi] = [\gamma * \eta * \overline{\eta} * \varphi] = [\gamma' * (\overline{\eta} * \varphi)] \in U_{[\gamma']}$, $\overline{\eta} * \varphi$ camino en U y empieza en $\gamma'(1)$.

Obs. $\beta = \{U_{[\gamma]} \mid U \in \mathcal{U}, [\gamma] \in E\}$ es base de una topología en E.

Sean $U_{[\gamma]}, U'_{[\gamma']} \in \beta$. Sea $[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap U'_{[\gamma']}$.

Por la observación anterior $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma'']}$, $U'_{[\gamma']} = U'_{[\gamma'']}$.

Sea $V \in \mathcal{U}$ tq $V \subseteq U \cap U'$. $[\gamma''] \in V_{[\gamma'']}$. $V_{[\gamma'']} \subseteq U_{[\gamma'']}$ y $V_{[\gamma'']} \subseteq U'_{[\gamma'']}$.

$V_{[\gamma'']} \subseteq U_{[\gamma'']} \cap U'_{[\gamma'']} = U_{[\gamma]} \cap U'_{[\gamma']}$.

β cubre a E porque $U_{[\gamma]} \in \beta$ $\forall [\gamma] \in E$ donde $U \in \mathcal{U}$ tq $\gamma(1) \in U$.

Le damos a E la topología con base β.

PASO 3. p es revestimiento:

p continua: Basta ver para abiertos básicos. Sea W abierto.

Sea $[\gamma] \in p^{-1}(W)$. Entonces $p[\gamma] \in W$, o sea $\gamma(1) \in W$. $\exists U \in \mathcal{U}$ tq $\gamma(1) \in U \subseteq W$.

Luego $[\gamma] \in U_{[\gamma]} \subseteq p^{-1}(W)$.

p abierta: $p(U_{[\gamma]}) = U$. $\forall U_{[\gamma]} \in \beta$.

Además $p|_{U_{[\gamma]}}$ es continua, abierta y biyectiva y por tanto homeomorfismo.

y $p^{-1}(U) = \dot{\bigcup} U_{[\gamma]}$

es unión disjunta, porque si $U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']} \neq \emptyset$, entonces $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']}$.

Por tanto U es parejamente cubierto.

HOJA Nº

FECHA

PASO 4. E es simplemente conexo:

- Veamos que E es arcoconexo.

  Consideramos $[c_{b_0}] \in E$.

  Sea $[\gamma] \in E$.

  Definimos $\forall t \in I$ $\gamma_t : I \longrightarrow B$ $\quad \gamma_t(s) = \begin{cases} \gamma(s) & \text{si } s \in [0,t] \\ \gamma(t) & \text{si } s \in [t,1]. \end{cases}$

  Sea $\tilde{\gamma} : I \longrightarrow E$, $\tilde{\gamma}(t) = [\gamma_t]$.

  $\tilde{\gamma}$ es continua, porque $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Por tanto dado $U_{[\alpha]} \subseteq E$ abierto básico!!

  $$\tilde{\gamma}^{-1}(U_{[\alpha]}) = \tilde{\gamma}^{-1} \circ p|_{U_{[\alpha]}}^{-1}(U) = (p|_{U_{[\alpha]}} \circ \tilde{\gamma})^{-1}(U) = \gamma^{-1}(U) \subseteq I \text{ es abierto.}$$

  $\tilde{\gamma}$ es camino en E de $\tilde{\gamma}(0) = [c_{b_0}]$ a $\tilde{\gamma}(1) = [\gamma]$.

  Por tanto E es arcoconexo.

- Veamos que $\pi_1(E, [c_{b_0}]) = 0$.

  Basta ver que $Fix[c_{b_0}] = 0$. ya que p_* es mono.

  Sea $[\varphi] \in Fix[c_{b_0}]$.

  Entonces el levantado de φ, $\tilde{\varphi}^{[c_{b_0}]}$, a partir de $[c_{b_0}]$ es un lazo en $[c_{b_0}]$.

  Sea $\tilde{\varphi}$ el camino de antes que une a $[c_{b_0}]$ y $[\varphi]$.

  Por unicidad del levantado de caminos $\tilde{\varphi}^{[c_{b_0}]} = \tilde{\varphi}$

  Luego $[\varphi] = \tilde{\varphi}(1) = \tilde{\varphi}^{[c_{b_0}]}(1) = [c_{b_0}]$.

  Por tanto $Fix[c_{b_0}] = 0$. $\square$

NOTA

Teorema 2.

B arcoconexo, localmente arcoconexo y semilocalmente simplemente conexo. $b_0 \in B$.
Sea $H \leq \pi_1(B, b_0)$. Entonces $\exists\, p: E \longrightarrow B$ revestimiento arcoconexo tal que $\text{Fix}\, e_0 = H$, donde $p(e_0) = b_0$.

me. Sea $\tilde{p}: \tilde{E} \longrightarrow B$ revestimiento universal construido en teorema 1.

Definimos una relación de equivalencia en $\tilde{E}$.

$$[\gamma] \sim [\omega] \quad \text{si} \quad \gamma(1) = \omega(1) \quad y \quad [\gamma * \bar{\omega}] \in H.$$

Sea $E = \tilde{E}/\sim$ con la top cociente.

Sea $q: \tilde{E} \longrightarrow E$ el cociente.

Como $\gamma(1) = \omega(1)$ $\forall [\gamma] \sim [\omega]$, $\tilde{p}$ es constante en las fibras de q.

Por tanto pasa al cociente. Lo llamamos p.

$$\begin{tikzcd} \tilde{E} \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "\tilde{p}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Si $[\gamma] \sim [\gamma']$, entonces $q(U_{[\gamma]}) = q(U_{[\gamma']})$ $\forall U \in \mathcal{U}$:

<u>porque</u> $\gamma(1) = \gamma'(1)$. Luego si η: camino en U con $\eta(0) = \gamma(1) = \gamma'(1)$

$[\gamma * \eta] \in U_{[\gamma]}$ y $[\gamma' * \eta] \in U_{[\gamma']}$

$\gamma * \eta(1) = \gamma' * \eta(1)$ y $[\gamma * \eta * \overline{(\gamma' * \eta)}] = [\gamma * \bar{\gamma}'] \in H$.

Luego $q[\gamma * \eta] = q[\gamma' * \eta]$. (ie $[\gamma * \eta] \sim [\gamma' * \eta]$.)

Esto vale $\forall \eta$ camino con $\eta(0) = \gamma(1) = \gamma'(1)$, por tanto $q(U_{[\gamma]}) = q(U_{[\gamma']})$.

Mas aún $q|_{U_{[\gamma]}}: U_{[\gamma]} \longrightarrow q(U_{[\gamma]})$ es homeo.

<u>porque</u>: si $[\omega], [\omega'] \in U_{[\gamma]}$ tq $[\omega] \sim [\omega']$.

$[\omega] = [\gamma * \eta]$ y $[\omega'] = [\gamma * \eta']$.

$\eta \underset{p}{\simeq} \eta'$, pues $\eta(1) = \eta'(1)$ y $i_* = 0$.

Luego $\omega \underset{p}{\simeq} \gamma * \eta \underset{p}{\simeq} \gamma * \eta' \underset{p}{\simeq} \omega'$. o sea $[\omega] = [\omega']$. $\Rightarrow q|_{U_{[\gamma]}}$ iny.

Sea $U \in \mathcal{U}$.

$p^{-1}(U) = \dot{\bigcup} q(U_{[\gamma]})$ (disjunta porque si $[\gamma] \sim [\gamma']$, entonces $q(U_{[\gamma]}) = q(U_{[\gamma']})$.)

<u>Porque</u>: $[\omega]_q \in p^{-1}(U)^* \Rightarrow p[\omega]_q \in U \Rightarrow \tilde{p}^{-1}(p[\omega]_q) \subseteq \dot{\bigcup} U_{[\gamma]} \Rightarrow q(\tilde{p}^{-1}(p[\omega]_q)) \subseteq \dot{\bigcup} q(U_{[\gamma]})$

y $[\omega]_q \in q(\tilde{p}^{-1}(p[\omega]_q))$ (porque $[\omega] \in \tilde{p}^{-1}(\omega(1))$).

$[\omega]_q \in \dot{\bigcup} q(U_{[\gamma]}) \Rightarrow [\omega] \in U_{[\gamma]} \Rightarrow \omega(1) = \tilde{p}[\omega] \in U \Rightarrow p[\omega]_q = \omega(1) \in U$.

*$[\omega]_q$ la clase de equiv por q.

Además como $p \circ q = \tilde{p}$ y $q|_{U_{[\gamma]}}$ y $\tilde{p}|_{U_{[\gamma]}}$ son homeos, entonces $p|_{q(U_{[\gamma]})}$ es homeo. Por tanto p es revestimiento.

Queremos ver ahora que $\text{Fix}\, e_0 = H$. ($e_0 = q[c_{b_0}]$.)

Sea $[\omega] \in \text{Fix}\, e_0$. Por la misma cuenta como en la demostración del teorema 1 (construyendo $\tilde{\omega}$ levantado de ω, con $\tilde{\omega}(1) = [\omega]$), obtenemos que $[\omega] = 0$ en E.

HOJA Nº

FECHA

Luego $[w] \in H$. Por tanto $\mathrm{Fix}_{e_0} \subseteq H$.

Sea $[w] \in H$. $[w] = [w * \bar{c}_{b_0}]$ y $w(1) = b_0 = c_{b_0}(1)$. Por tanto $[w] \sim [c_{b_0}]$.

Sea $\tilde{\tilde{w}}$ levantado de w (como antes $\tilde{\tilde{w}}(0) = [c_{b_0}]$, $\tilde{\tilde{w}}(1) = [w]$). por $\tilde{p}$.

Entonces $pq\tilde{\tilde{w}} = \tilde{p}\tilde{\tilde{w}} = w$, o sea $q\tilde{\tilde{w}}$ es levantado de w por p a partir de $q[c_{b_0}]$.

Además $q\tilde{\tilde{w}}(1) = q[w] = q[c_{b_0}]$.

Por tanto $[q\tilde{\tilde{w}}] \in \pi_1(E, e_0)$ y $[w] \in \mathrm{Fix}_{e_0}$. $\square$

NOTA

Transformaciones Deck.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & \arrow[d, phantom, "\equiv"] & E \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Def. $p: E \longrightarrow B$ revestimiento arcoconexo.

$\varphi: E \longrightarrow E$ se dice transformación deck si φ es homeomorfismo tal que $p \circ \varphi = p$.

Es decir φ cumple que $\varphi(e) \in E_{b_0}$ $\forall e \in E_{b_0}$.

Obs. Por unicidad de levantados, φ queda determinado por su valor en algún punto.

Def. Se define el grupo de transformaciones deck como

$$G_E = \{\varphi: E \longrightarrow E \text{ trans. deck}\}.$$

con operación la composición y neutro $\mathbb{1}_E$.

Def. $p: E \longrightarrow B$ revestimiento arcoconexo se dice normal,

si $\forall b \in B$ $\forall e, e' \in E_b$ $\exists \varphi: E \longrightarrow E$ trans deck tq $\varphi(e) = e'$.

Teorema

$p: E \longrightarrow B$ revestimiento arcoconexo y localmente arcoconexo.

Sea $b_0 \in B$ y $e_0 \in E_{b_0}$.

Entonces: 1). $p: E \longrightarrow B$ es normal sii $\mathrm{Fix}\, e_0 \lhd \pi_1(B, b_0)$

2). $G_E \cong N / \mathrm{Fix}\, e_0$, donde N es el normalizador de $\mathrm{Fix}\, e_0$.

En particular, si $p: E \longrightarrow B$ es normal, entonces $G_E \cong \pi_1(B, b_0) / \mathrm{Fix}\, e_0$.

Más en particular, si $p: E \longrightarrow B$ es revestimiento universal, entonces $G_E \cong \pi_1(B, b_0)$.

Demo.

1). $\mathrm{Fix}\, e_0 \lhd \pi_1(B, b_0) \iff \mathrm{Fix}\, e_0 = \mathrm{Fix}\, e_1$ $\forall e_1 \in E_{b_0}$ (ya sabemos que son conjugados)

$\iff \exists \varphi: E \longrightarrow E$ homeo tq $p \circ \varphi = p$ y $\varphi(e_0) = e_1$ $\forall e_1 \in E_{b_0}$.

2). Sea $N = \{[w] \in \pi_1(B, b_0) \mid [w]\, \mathrm{Fix}\, e_0 [\bar{w}] = \mathrm{Fix}\, e_0\}$.

Sea $[w] \in N$. Entonces $\mathrm{Fix}\, e_0 = [w]\, \mathrm{Fix}\, e_0 [\bar{w}] = \mathrm{Fix}\, e_1$, donde $e_1 = \tilde{w}^{e_0}(1)$

$\exists \varphi_{[w]}: E \longrightarrow E$ bien def. y homeo* tq $p \circ \varphi_{[w]} = p$ y $\varphi_{[w]}(e_0) = e_1$. Note $\varphi_{[w]} \in G_E$. * inversa $\varphi_{[\bar{w}]}$.

Sea $\psi: N \longrightarrow G_E$, $\psi[w] = \varphi_{[w]}$.

Veamos que ψ es morfismo de grupos:

$[w], [w'] \in N$. Queremos ver que $\varphi_{[w * w']} = \varphi_{[w]} \circ \varphi_{[w']}$.

$\exists !$ trans deck que manda e_0 en $\tilde{w}^{e_0}(1)$, $\varphi_{[w]}$.

$\exists !$ trans deck que manda e_0 en $\tilde{w}'^{e_0}(1)$, $\varphi_{[w']}$.

NOTA

HOJA Nº

FECHA

$\exists!$ trans deck que manda e_0 en $\widetilde{w*w'}^{e_0}(1)$, $\varphi_{[w*w']}$.

Sea $\gamma = \tilde{w}^{e_0} * (\varphi_{[w]} \circ \tilde{w}'^{e_0})$. $p \circ \gamma = w * w'$. Por unicidad del levantado $\tilde{\gamma} = \widetilde{w*w'}^{e_0}$.

Luego $\varphi_{[w*w']}(e) = \widetilde{w*w'}^{e_0}(1) = \tilde{w}^{e_0} * (\varphi_{[w]} \circ \tilde{w}'^{e_0})(1) = \varphi_{[w]} \circ \tilde{w}'^{e_0}(1) = \varphi_{[w]} \circ \varphi_{[w']}(e) \quad \forall e \in E$.

Por tanto $\varphi_{[w*w']} = \varphi_{[w]} \circ \varphi_{[w']}$, ya que las trans. deck quedan determinados por su valor en un punto.

Veamos que $\ker \psi = Fix_{e_0}$.

$[w] \in Fix_{e_0} \Rightarrow \tilde{w}^{e_0}$ lazo en $e_0 \Rightarrow \varphi_{[w]}(e_0) = \tilde{w}^{e_0} = e_0 \Rightarrow \varphi_{[w]} = \mathbb{1}_E \Rightarrow [w] \in \ker \psi$.

$[w] \in \ker \psi \Rightarrow \varphi_{[w]} = \mathbb{1}_E \Rightarrow \tilde{w}^{e_0} = \varphi_{[w]}(e_0) = \mathbb{1}_E(e_0) = e_0 \Rightarrow \tilde{w}^{e_0}$ lazo en $e_0 \Rightarrow [w] \in Fix_{e_0}$.

Por tanto $G_E \cong N / Fix_{e_0}$. $\square$

NOTA