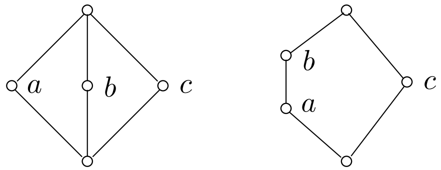
M_3-N_5 sætningen
– Et dyk ned i gitterteorien

Dan Saattrup Nielsen

I denne artikel vil det vise sig, hvordan gitre kan klassificeres som ikke-distributive ud fra gitterdiagrammet alene, et fascinerende resultat fundet af Birkhoff [3]. Det viser sig, at man blot skal tjekke, om et af de to nedenstående gitre $\mathbf{M}_3$ eller $\mathbf{N}_5$ kan indlejres i det pågældende gitter.



$\mathbf{M}_3$ $\mathbf{N}_5$

Til at vise dette, skal der først bruges et lemma omkring modulære gitre:

Lemma 1 *Et gitter $\boldsymbol{L}$ er ikke-modulært, hvis og kun hvis der findes et delgitter $\boldsymbol{S} \leq \boldsymbol{L}$ med $\boldsymbol{N}_5 \cong \boldsymbol{S}$.*

Bevis. $' \Leftarrow'$: I $\mathbf{N}_5$ ses det, hvor a, b, c er defineret ift. relationerne angivet i ovenstående hassediagram, at $a \leq b$, men $a \vee (b \wedge c) \neq b \wedge (a \vee c)$, som medfører at $\mathbf{N}_5$ er ikke-modulært. Dermed vil et gitter, med et delgitter isomorft til $\mathbf{N}_5$, heller ikke være modulært.

$' \Rightarrow'$: Antag at $\mathbf{L}$ ikke er modulær. Så vil der findes $a, b, c \in L$, som opfylder $a \leq b$, men $a \vee (b \wedge c) < b \wedge (a \vee c)$. Lad $a_1 := a \vee (b \wedge c)$

og $b_1 := b \wedge (a \vee c)$. Da gælder:

$$c \wedge b_1 = c \wedge (b \wedge (a \vee c)) = c \wedge (c \vee a)) \wedge b = c \wedge b$$
$$c \vee a_1 = c \vee (a \vee (b \wedge c)) = (c \vee (c \wedge b)) \vee a = c \vee a$$

Da $c \wedge b \leq a \vee (b \wedge c) = a_1 \leq b_1$ gælder at $c \wedge b \leq c \wedge a_1 \leq c \wedge b_1 = c \wedge b$, som betyder at $c \wedge a_1 = c \wedge b_1 = c \wedge b$. Analogt gælder at $c \vee b_1 = c \vee a_1 = c \vee a$. Det ses nu, at dette netop beskriver et gitter, isomorft til $\mathbf{N}_5$, bestående af c, a_1, b_1, $c \wedge a_1$ og $c \vee a_1$. $\square$

Sætningen kan da formuleres som:

Sætning 2 (M_3-N_5 sætningen) *Et gitter $\boldsymbol{L}$ er ikke-distributivt, hvis og kun hvis der findes et delgitter $\boldsymbol{S} \leq \boldsymbol{L}$, med enten $\boldsymbol{M}_3 \cong \boldsymbol{S}$ eller $\boldsymbol{N}_5 \cong \boldsymbol{S}$.*

Bevis. $' \Leftarrow'$: Da det hverken for $\mathbf{M}_3$ eller $\mathbf{N}_5$ gælder at $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, er begge ikke-distributive og med samme argument som i beviset for Lemma 1 følger det, at $\mathbf{L}$ er et ikke-distributivt gitter.

$' \Rightarrow'$: Antag at $\mathbf{L}$ er ikke-distributivt og ikke indeholder en kopi af $\mathbf{N}_5$ (da sætningen ellers følger fra Lemma 1) - dermed kan det antages, uden tab af generalitet, at $\mathbf{L}$ er modulært jf. Lemma 1. Der må da findes elementer $a, b, c \in L$, som opfylder $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) < a \wedge (b \vee c)$. Definér nu:

$$\begin{aligned} d &:= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \\ e &:= (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c) \\ a_1 &:= (a \wedge e) \vee d \\ b_1 &:= (b \wedge e) \vee d \\ c_1 &:= (c \wedge e) \vee d. \end{aligned}$$

Det ses let, at $d \leq a_1, b_1, c_1 \leq e$. Det vil vises at $d < e$. Først ses det fra absorptionsloven at

$$a \wedge e = a \wedge (b \vee c)$$

og ved brug af den modulære lov (bruges ved understregninger)

$$\begin{aligned} a \wedge d &= \underline{a} \wedge (\underline{(a \wedge b) \vee (a \wedge c)} \vee (b \wedge c)) \\ &= ((a \wedge b) \vee (a \wedge c)) \vee (a \wedge (b \wedge c)) \\ &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \end{aligned}$$

følger det at $d < e$, ud fra ikke-distributivitetsantagelsen og den tidligere ulighed. Det vil nu vises, at diagrammet for $\mathbf{L}$ indeholder en kopi af diagrammet for $\mathbf{M}_3$, med $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$, bund d og top e. For at vise dette, er det nok at vise at $a_1 \wedge b_1 = a_1 \wedge c_1 = b_1 \wedge c_1 = d$ og $a_1 \vee b_1 = a_1 \vee c_1 = b_1 \vee c_1 = e$. Vi viser at $a_1 \wedge b_1 = d$, resten forløber analogt. Modulære lov understreges igen:

$$\begin{aligned} a_1 \wedge b_1 &= ((a \wedge e) \vee \underline{d}) \wedge (\underline{(b \wedge e) \vee d)} \\ &= ((a \wedge e) \wedge ((b \wedge \underline{e}) \vee \underline{d})) \vee d \\ &= ((a \wedge e) \wedge ((b \vee d) \wedge e)) \vee d \\ &= ((a \wedge e) \wedge e \wedge (b \vee d)) \vee d \\ &= ((a \wedge e) \wedge (b \vee d)) \vee d \\ &= (a \wedge \underline{(b \vee c)} \wedge (\underline{b} \vee (a \wedge c))) \vee d \\ &= (a \wedge (b \vee ((b \vee c) \wedge (a \wedge c)))) \vee d \\ &= (\underline{a} \wedge (b \vee \underline{(a \wedge c)})) \vee d \\ &= (a \wedge c) \vee (b \wedge a) \vee d \\ &= (a \wedge d) \vee d \\ &= d. \end{aligned}$$

$\square$

Litteratur

[1] B.A Davey, H.A. Pristley. *Introduction to Lattices and Order, Second Edition*. Cambridge University Press, 2002.

[2] Stanley Burris, H.P. Sankappanavar. *A Course in Universal Algebra, Millenium Edition*. Springer-Verlag, 2009.

[3] Garrett Birkhoff. *Lattice Theory, Third Edition*. American Mathematical Society, Colloquium Publications, 1967.