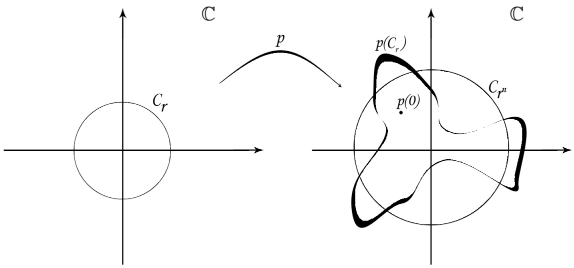
Algebraens fundamentalsætning
– Nu med et geometrisk bevis

Dan Saattrup Nielsen

Algebraens fundamentalsætning er en af de sætninger, som vi alle nok er bekendt med og som dukker op igen og igen. I KomAn beviser vi sætningen analytisk. I Alg3 beviser vi sætningen algebraisk[1]. Man kunne så, bare sådan lidt for sjov, tænke over om man også kunne bevise den geometrisk. Svaret er ja. Here we go.

Sætning 1 (Algebraens fundamentalsætning) *Lad* $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ *være et komplekst polynomium af grad* ≥ 1. *Da har* p *en rod i* $\mathbb{C}$.

Bevis. Idéen i beviset er det følgende. Vi vælger en cirkel C_r i $\mathbb{C}$ med tilstrækkelig stor radius $r > 0$, så $p(C_r)$ ligger tæt på cirklen C_{r^n} med radius r^n. Bemærk at $p(C_r)$ er tilnærmelsesvis "cirkelformet", da p er kontinuert. Uden tab af generalitet er $p(0) = a_0 \neq 0$, så hvis vi kontinuert formindsker C_r til 0, så vil $p(C_r)$ blive kontinuert formindsket til a_0. Men i denne proces vil $p(C_r)$ ramme 0 på et tidspunkt, da $p(C_r)$ ligger rundt om 0 fra valget af r. Se tegningen.



[1] Okay okay, ikke 100% algebraisk. Men det er tæt på.

Denne intuitive idé er god at huske, for det formelle bevis giver ikke ligeså meget indsigt. Antag altså at p *ikke* har nogen rødder i $\mathbb{C}$; vi skal vise at p har grad 0. Antag uden tab af generalitet at p er monisk. Vælg nu $r > 0$ så $r^n > |a_{n-1}|r^{n-1} + \cdots + |a_1|r + |a_0|$ (samme r som ovenfor). Definér stien $\alpha : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ givet ved

$$\alpha(s) := \frac{p(re^{2\pi is})/p(r)}{\left|p(re^{2\pi is})/p(r)\right|},$$

som giver mening, da vi har antaget at $p(r) \neq 0$. Det ses at α er en lukket sti med $\alpha(0) = \alpha(1) = 1$ (Her har vi "normaliseret" $p(C_r)$ til en delmængde af $\mathbb{S}^1$, så a_0 vil svare til punktet 1). Lad $e_1 : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ betegne den konstante sti på 1 ($e_1(s) := 1$), og lad $\mu_n(s) : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ være standard løkken $\mu_n(s) := e^{2\pi ins}$. Vi viser at (i) $e_1 \sim \alpha$ og (ii) $\mu_n \sim \alpha$,[2] som så resulterer i $e_1 \sim \mu_n$. Dette tvinger n til at være 0, da vi har isomorfien $\pi(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ – bemærk dog at dette resultat ikke er trivielt.[3]

(i) Definér funktionen $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{S}^1$ givet ved

$$H(s,t) := \frac{p(tre^{2\pi is})/p(tr)}{\left|p(tre^{2\pi is})/p(tr)\right|}.$$

Det kan tjekkes at H faktisk er en homotopi mellem e_1 til α. Dette er den tidligere nævnte formindskning af cirklerne.

(ii) Definér funktionen $G : \mathbb{C} \times [0,1] \to \mathbb{C}$ givet ved $G(z,t) := (1-t)z^n + tp(z)$ og definér derudover $F : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{S}^1$ givet

[2] Her betyder $\sim$ *homotopiækvivalens*, som betyder, at der findes en kontinuert deformation af de to stier.

[3] Her er $\pi(\mathbb{S}^1, 1)$ gruppen af alle løkker i $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ startende på $1 \in \mathbb{C}$, kaldet *fundamentalgruppen* af $\mathbb{S}^1$.

ved

$$F(s,t) := \frac{G(re^{2\pi is},t)/G(r,t)}{\left|G(re^{2\pi is},t)/G(r,t)\right|}.$$

Denne homotopi svarer altså til deformationen mellem $p(C_r)$ og C_{r^n}. Vi starter med at tjekke at vi ikke dividerer med nul her. Per definition af G har vi at $z^n = G(z,t) - t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0)$, hvor vi brugte antagelsen om at p er monisk, og trekantsuligheden giver da at

$$|z^n| \leq |G(z,t)| + t(|a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_1||z| + |a_0|).$$

Da får vi at

$$\begin{aligned} |G(re^{2\pi is},t)| &\geq r^n - t(|a_{n-1}|r^{n-1} + \cdots + |a_1|r + |a_0|) \\ &\geq r^n - (|a_{n-1}|r^{n-1} + \cdots + |a_1|r + |a_0|) \\ &> 0, \end{aligned}$$

hvor sidste ulighed kom fra valget af r. Altså er F veldefineret. Ved indsætning ses det også at $F(s,0) = \mu_n(s)$ og $F(s,1) = \alpha(s)$, så F er dermed en homotopi fra μ_n til α, som ønsket. Da er $n = 0$ fra det tidligere argument. $\square$