

Ufuldstændighed i matematik

Dan Saattrup Nielsen

19. april, 2016

Hvor det hele startede

- “Jeg lyver”

Hvor det hele startede

- “Jeg lyver”
 - Paradoks, altså hverken sandt eller falsk

Hvor det hele startede

- “Jeg lyver”
 - Paradoks, altså hverken sandt eller falsk
- “Du kan ikke bevise at jeg taler sandt”

Hvor det hele startede

- “Jeg lyver”
 - Paradoks, altså hverken sandt eller falsk
- “Du kan ikke bevise at jeg taler sandt”
 - Paradoks?

Hvor det hele startede

- “Jeg lyver”
 - Paradoks, altså hverken sandt eller falsk
- “Du kan ikke bevise at jeg taler sandt”
 - Paradoks? Niks!

Hvor det hele startede

- “Jeg lyver”
 - Paradoks, altså hverken sandt eller falsk
- “Du kan ikke bevise at jeg taler sandt”
 - Paradoks? Niks!
 - *Sandt*, men *ubeviseligt*

Hvor det hele startede

- “Jeg lyver”
 - Paradoks, altså hverken sandt eller falsk
- “Du kan ikke bevise at jeg taler sandt”
 - Paradoks? Niks!
 - *Sandt*, men *ubeviseligt*
- Hvad er “jeg” overhovedet?

- Hvordan kan et udsagn referere til sig selv?

Lad os forstå jeg

- Hvordan kan et udsagn referere til sig selv?
- “Sætningen “Denne sætning har fem ord” har fem ord”

Lad os forstå jeg

- Hvordan kan et udsagn referere til sig selv?
- “Sætningen “Denne sætning har fem ord” har fem ord” .. er *sand*, men refererer ikke til sig selv

Lad os forstå jeg

- Hvordan kan et udsagn referere til sig selv?
- “Sætningen “Denne sætning har fem ord” har fem ord” .. er *sand*, men refererer ikke til sig selv
- “Sætningen “Denne sætning har ti ord” har ti ord”

- Hvordan kan et udsagn referere til sig selv?
- “Sætningen “Denne sætning har fem ord” har fem ord” .. er *sand*, men refererer ikke til sig selv
- “Sætningen “Denne sætning har ti ord” har ti ord” .. er *falsk*, og refererer stadig ikke til sig selv!

Lad os forstå jeg

- Hvordan kan et udsagn referere til sig selv?
- “Sætningen “Denne sætning har fem ord” har fem ord” .. er *sand*, men refererer ikke til sig selv
- “Sætningen “Denne sætning har ti ord” har ti ord” .. er *falsk*, og refererer stadig ikke til sig selv!
- Er det selvreference umuligt?

Lad os forstå jeg

- Hvordan kan et udsagn referere til sig selv?
- “Sætningen “Denne sætning har fem ord” har fem ord” .. er *sand*, men refererer ikke til sig selv
- “Sætningen “Denne sætning har ti ord” har ti ord” .. er *falsk*, og refererer stadig ikke til sig selv!
- Er det selvreference umuligt? Både ja og nej!

- Den gode idé: referér til en *opskrift* fremfor selve udsagnet

- Den gode idé: referér til en *opskrift* fremfor selve udsagnet
- “Hvis du erstatter ‘matematik’ med ‘et eller andet mærkeligt’ i “Lige nu laver vi matematik”, får du et sandt udsagn”

- Den gode idé: referér til en *opskrift* fremfor selve udsagnet
- “Hvis du erstatter ‘matematik’ med ‘et eller andet mærkeligt’ i “Lige nu laver vi matematik”, får du et sandt udsagn”
- Men denne opskrift refererer jo ikke til sig selv!

Den snedige formulering

- Lad Q være udsagnet:

Hvis du erstatter ' x ' i "Du kan ikke bevise x " med P , så kan du ikke bevise det,

hvor P her er en variabel i Q

Den snedige formulering

- Lad Q være udsagnet:
Hvis du erstatter ' x ' i "Du kan ikke bevise x " med P , så kan du ikke bevise det,
hvor P her er en variabel i Q
- Hvad hvis vi sætter P til at være Q ?

Den snedige formulering

- Lad Q være udsagnet:
Hvis du erstatter ' x ' i "Du kan ikke bevise x " med P , så kan du ikke bevise det,
hvor P her er en variabel i Q
- Hvad hvis vi sætter P til at være Q ?
- Lad G være udsagnet:
Hvis du erstatter ' P ' i Q med Q , så kan du ikke bevise det

Den snedige formulering

- Lad Q være udsagnet:
Hvis du erstatter ' x ' i "Du kan ikke bevise x " med P , så kan du ikke bevise det,
hvor P her er en variabel i Q
- Hvad hvis vi sætter P til at være Q ?
- Lad G være udsagnet:
Hvis du erstatter ' P ' i Q med Q , så kan du ikke bevise det
- Hvorfor virker G ?

Hvad er det vi laver?

- Er det her matematik?

Hvad er det vi laver?

- Er det her matematik? Niks!

Hvad er det vi laver?

- Er det her matematik? Niks!
- Vi vil gerne *gøre* det til matematik

Hvad er det vi laver?

- Er det her matematik? Niks!
- Vi vil gerne *gøre* det til matematik
- Idé: Lav udsagn om til *tal*

Sprog og tal hænger sammen

Sprog	Tal
".. og .."	1
".. eller .."	2
"hvis .. så .."	3
"det gælder ikke at .."	4
"der eksisterer .."	5
".. er lig med .."	6
"x"	7
"y"	8
"z"	9
⋮	⋮

- Vi vil også gerne knytte tal til *udsagn*, som fx “ x er lig med x ”

- Vi vil også gerne knytte tal til *udsagn*, som fx “ x er lig med x ”
- Numerér primtallene som p_1, p_2, \dots

- Vi vil også gerne knytte tal til *udsagn*, som fx “ x er lig med x ”
- Numerér primtallene som p_1, p_2, \dots
- Tag “ x er lig med x ”, som svarer til tallene 7, 6 og 7

- Vi vil også gerne knytte tal til *udsagn*, som fx “ x er lig med x ”
- Numerér primtallene som p_1, p_2, \dots
- Tag “ x er lig med x ”, som svarer til tallene 7, 6 og 7
- Dette svarer til tallet $p_1^7 p_2^6 p_3^7$, som er $2^7 3^6 5^7 = 7.290.000.000$

- Vi vil også gerne knytte tal til *udsagn*, som fx “ x er lig med x ”
- Numerér primtallene som p_1, p_2, \dots
- Tag “ x er lig med x ”, som svarer til tallene 7, 6 og 7
- Dette svarer til tallet $p_1^7 p_2^6 p_3^7$, som er $2^7 3^6 5^7 = 7.290.000.000$
- Skriv nu $\ulcorner x \text{ er lig med } x \urcorner$ for tallet 7.290.000.000

- Husk på vores tidligere udsagn Q :
Hvis du erstatter ' x ' i "Du kan ikke bevise x " med P , så kan du ikke bevise det

- Husk på vores tidligere udsagn Q :
Hvis du erstatter 'x' i "Du kan ikke bevise x" med P , så kan du ikke bevise det
- Skriv p for tallet $\lceil P \rceil$

- Husk på vores tidligere udsagn Q :
Hvis du erstatter 'x' i "Du kan ikke bevise x" med P , så kan du ikke bevise det
 - Skriv p for tallet $\lceil P \rceil$
- Vi kan nu 'talificere' den til følgende formel \hat{Q} :
Hvis du erstatter 'x' i udsagnet der svarer til tallet $\lceil \text{"Du kan ikke bevise x"} \rceil$, med udsagnet der svarer til tallet p , så kan du ikke bevise det

- Husk på vores tidligere udsagn Q :
Hvis du erstatter 'x' i "Du kan ikke bevise x" med P , så kan du ikke bevise det
 - Skriv p for tallet $\lceil P \rceil$
- Vi kan nu 'talificere' den til følgende formel \hat{Q} :
Hvis du erstatter 'x' i udsagnet der svarer til tallet $\lceil \text{"Du kan ikke bevise x"} \rceil$, med udsagnet der svarer til tallet p , så kan du ikke bevise det
 - Bemærk at \hat{Q} i princippet kun handler om *tal*!

- Husk på vores tidligere udsagn Q :
Hvis du erstatter 'x' i "Du kan ikke bevise x" med P , så kan du ikke bevise det
 - Skriv p for tallet $\lceil P \rceil$
- Vi kan nu 'talificere' den til følgende formel \hat{Q} :
Hvis du erstatter 'x' i udsagnet der svarer til tallet $\lceil \text{"Du kan ikke bevise x"} \rceil$, med udsagnet der svarer til tallet p , så kan du ikke bevise det
 - Bemærk at \hat{Q} i princippet kun handler om *tal*!
 - Skriv q for tallet $\lceil \hat{Q} \rceil$

- Lad nu \hat{G} være udsagnet

Hvis du erstatter ' p ' i udsagnet der svarer til tallet q med q , så kan du ikke bevise det

- Lad nu \hat{G} være udsagnet

Hvis du erstatter ' p ' i udsagnet der svarer til tallet q med q , så kan du ikke bevise det

- Igen handler \hat{G} kun om *tal*

- Lad nu \hat{G} være udsagnet

Hvis du erstatter ' p ' i udsagnet der svarer til tallet q med q , så kan du ikke bevise det

- Igen handler \hat{G} kun om *tal*
- Skriv g for tallet $\lceil \hat{G} \rceil$

- Lad nu \hat{G} være udsagnet

Hvis du erstatter ' p ' i udsagnet der svarer til tallet q med q , så kan du ikke bevise det

- Igen handler \hat{G} kun om *tal*
 - Skriv g for tallet $\lceil \hat{G} \rceil$
- Bemærk at vi før viste at

$g = \lceil \text{Udsagnet der svarer til tallet } g \text{ kan ikke bevises} \rceil$

- Lad nu \hat{G} være udsagnet
Hvis du erstatter ' p ' i udsagnet der svarer til tallet q med q , så kan du ikke bevise det
 - Igen handler \hat{G} kun om tal
 - Skriv g for tallet $\lceil \hat{G} \rceil$
- Bemærk at vi før viste at
 $g = \lceil \text{Udsagnet der svarer til tallet } g \text{ kan ikke bevises} \rceil$
- Vi har altså et *matematisk* udsagn, som siger at det ikke kan bevises!

- Lad nu \hat{G} være udsagnet
Hvis du erstatter ' p ' i udsagnet der svarer til tallet q med q , så kan du ikke bevise det
 - Igen handler \hat{G} kun om *tal*
 - Skriv g for tallet $\lceil \hat{G} \rceil$
- Bemærk at vi før viste at
 $g = \lceil \text{Udsagnet der svarer til tallet } g \text{ kan ikke bevises} \rceil$
- Vi har altså et *matematisk* udsagn, som siger at det ikke kan bevises!
- Men nu vil \hat{G} præcis være et formelt matematisk udsagn der er *sandt*, men *ubeviseligt*

Sætning

Sålænge vores formelle matematiske system kan arbejde med tal, så vil der altid findes sande, men ubeviselige