

Ufuldstændighed

Dan Saattrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

Ufuldstændighed i matematik

Dan Saattrup Nielsen



Hvor det hele startede

Ufuldstændighed

Dan Saattrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- “Jeg lyver”

Hvor det hele startede

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- “Jeg lyver”
 - Paradoks, altså hverken sandt eller falsk

Hvor det hele startede

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- “Jeg lyver”
 - Paradoks, altså hverken sandt eller falsk
- “Du kan ikke bevise at jeg taler sandt”

Hvor det hele startede

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- “Jeg lyver”
 - Paradoks, altså hverken sandt eller falsk
- “Du kan ikke bevise at jeg taler sandt”
 - Paradoks?

Hvor det hele startede

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- “Jeg lyver”
 - Paradoks, altså hverken sandt eller falsk
- “Du kan ikke bevise at jeg taler sandt”
 - Paradoks? Niks!

Hvor det hele startede

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- “Jeg lyver”
 - Paradoks, altså hverken sandt eller falsk
- “Du kan ikke bevise at jeg taler sandt”
 - Paradoks? Niks!
 - *Sandt, men ubeviseligt*

Hvor det hele startede

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- “Jeg lyver”
 - Paradoks, altså hverken sandt eller falsk
- “Du kan ikke bevise at jeg taler sandt”
 - Paradoks? Niks!
 - *Sandt*, men *ubeviseligt*
- Hvad er “jeg” overhovedet?

Lad os forstå jeg

Ufuldstændighed

Dan Saattrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Hvordan kan et udsagn referere til sig selv?

Lad os forstå jeg

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Hvordan kan et udsagn referere til sig selv?
- “Sætningen “Denne sætning har fem ord” har fem ord”

Lad os forstå jeg

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Hvordan kan et udsagn referere til sig selv?
- “Sætningen “Denne sætning har fem ord” har fem ord” .. er *sand*, men refererer ikke til sig selv

Lad os forstå jeg

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Hvordan kan et udsagn referere til sig selv?
- “Sætningen “Denne sætning har fem ord” har fem ord” .. er *sand*, men refererer ikke til sig selv
- “Sætningen “Denne sætning har ti ord” har ti ord”

Lad os forstå jeg

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Hvordan kan et udsagn referere til sig selv?
- “Sætningen “Denne sætning har fem ord” har fem ord” .. er *sand*, men refererer ikke til sig selv
- “Sætningen “Denne sætning har ti ord” har ti ord” .. er *falsk*, og refererer stadig ikke til sig selv!

Lad os forstå jeg

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Hvordan kan et udsagn referere til sig selv?
- “Sætningen “Denne sætning har fem ord” har fem ord” .. er *sand*, men refererer ikke til sig selv
- “Sætningen “Denne sætning har ti ord” har ti ord” .. er *falsk*, og refererer stadig ikke til sig selv!
- Er selvreference umuligt?

Lad os forstå jeg

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Hvordan kan et udsagn referere til sig selv?
- “Sætningen “Denne sætning har fem ord” har fem ord” .. er *sand*, men refererer ikke til sig selv
- “Sætningen “Denne sætning har ti ord” har ti ord” .. er *falsk*, og refererer stadig ikke til sig selv!
- Er selvreference umuligt? Både nej og ja!

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Den gode idé: referér til en *opskrift* fremfor selve udsagnet

Nøglen

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Den gode idé: referér til en *opskrift* fremfor selve udsagnet
- “Hvis du erstatter ‘matematik’ med ‘et eller andet mærkeligt’ i “Lige nu laver vi matematik”, får du et sandt udsagn”

Nøglen

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Den gode idé: referér til en *opskrift* fremfor selve udsagnet
- “Hvis du erstatter ‘matematik’ med ‘et eller andet mærkeligt’ i “Lige nu laver vi matematik”, får du et sandt udsagn”
- Men denne opskrift refererer jo ikke til sig selv!

Den snedige formulering

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Lad Q være udsagnet:

Hvis du erstatter 'x' i "Du kan ikke bevise x" med P , så kan du ikke bevise det

hvor P her er en variabel i Q

Den snedige formulering

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Lad Q være udsagnet:
Hvis du erstatter ' x ' i "Du kan ikke bevise x " med P , så kan du ikke bevise det
hvor P her er en variabel i Q
- Hvad hvis vi sætter P til at være Q ?

Den snedige formulering

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Lad Q være udsagnet:
Hvis du erstatter ' x ' i "Du kan ikke bevise x " med P , så kan du ikke bevise det
hvor P her er en variabel i Q
- Hvad hvis vi sætter P til at være Q ?
- Lad G være udsagnet:
Hvis du erstatter ' P ' i Q med Q , så kan du ikke bevise det

Den snedige formulering

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Lad Q være udsagnet:
Hvis du erstatter ' x ' i "Du kan ikke bevise x " med P , så kan du ikke bevise det
hvor P her er en variabel i Q
- Hvad hvis vi sætter P til at være Q ?
- Lad G være udsagnet:
Hvis du erstatter ' P ' i Q med Q , så kan du ikke bevise det
- Hvorfor virker G ?

Hvad er det vi laver?

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Er det her matematik?

Hvad er det vi laver?

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Er det her matematik? Niks!

Hvad er det vi laver?

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Er det her matematik? Niks!
- Vi vil gerne *gøre* det til matematik

Hvad er det vi laver?

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Er det her matematik? Niks!
- Vi vil gerne *gøre* det til matematik
- Idé: Lav udsagn om til *tal*

Sprog og tal hænger sammen

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

Sprog	Tal
".. og .."	1
".. eller .."	2
"hvis .. så .."	3
"det gælder ikke at .."	4
"der eksisterer .."	5
".. er lig med .."	6
"x"	7
"y"	8
"z"	9
⋮	⋮

Sprog og tal hænger sammen

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Vi vil også gerne knytte tal til *udsagn*, som fx “ x er lig med x ”

Sprog og tal hænger sammen

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Vi vil også gerne knytte tal til *udsagn*, som fx “ x er lig med x ”
- Numerér primtallene som p_1, p_2, \dots

Sprog og tal hænger sammen

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Vi vil også gerne knytte tal til *udsagn*, som fx “ x er lig med x ”
- Numerér primtallene som p_1, p_2, \dots
- Tag “ x er lig med x ”, som svarer til tallene 7, 6 og 7

Sprog og tal hænger sammen

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Vi vil også gerne knytte tal til *udsagn*, som fx “ x er lig med x ”
- Numerér primtallene som p_1, p_2, \dots
- Tag “ x er lig med x ”, som svarer til tallene 7, 6 og 7
- Dette svarer til tallet $p_1^7 p_2^6 p_3^7$, som er $2^7 3^6 5^7 = 7.290.000.000$

Sprog og tal hænger sammen

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Vi vil også gerne knytte tal til *udsagn*, som fx “ x er lig med x ”
- Numerér primtallene som p_1, p_2, \dots
- Tag “ x er lig med x ”, som svarer til tallene 7, 6 og 7
- Dette svarer til tallet $p_1^7 p_2^6 p_3^7$, som er $2^7 3^6 5^7 = 7.290.000.000$
- Skriv nu “ x er lig med x ” for tallet 7.290.000.000

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Husk på vores tidligere udsagn Q :

Hvis du erstatter 'x' i "Du kan ikke bevise x" med P , så kan du ikke bevise det

Oversættelsen

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Husk på vores tidligere udsagn Q :

Hvis du erstatter 'x' i "Du kan ikke bevise x" med P , så kan du ikke bevise det

- Skriv p for tallet $\lceil P \rceil$

- Husk på vores tidligere udsagn Q :

Hvis du erstatter 'x' i "Du kan ikke bevise x" med P , så kan du ikke bevise det

- Skriv p for tallet $\lceil P \rceil$

- Vi kan nu 'talificere' den til følgende formel \hat{Q} :

Hvis du erstatter 'x' i udsagnet der svarer til tallet

$\lceil \text{Du kan ikke bevise } x \rceil$, med udsagnet der svarer til tallet p , så kan du ikke bevise det

- Husk på vores tidligere udsagn Q :

Hvis du erstatter 'x' i "Du kan ikke bevise x" med P , så kan du ikke bevise det

- Skriv p for tallet $\lceil P \rceil$

- Vi kan nu 'talificere' den til følgende formel \hat{Q} :

Hvis du erstatter 'x' i udsagnet der svarer til tallet

$\lceil \text{Du kan ikke bevise } x \rceil$, med udsagnet der svarer til tallet p , så kan du ikke bevise det

- Bemærk at \hat{Q} i princippet kun handler om *tal*!

- Husk på vores tidligere udsagn Q :

Hvis du erstatter 'x' i "Du kan ikke bevise x" med P , så kan du ikke bevise det

- Skriv p for tallet $\lceil P \rceil$

- Vi kan nu 'talificere' den til følgende formel \hat{Q} :

Hvis du erstatter 'x' i udsagnet der svarer til tallet

$\lceil \text{Du kan ikke bevise } x \rceil$, med udsagnet der svarer til tallet p , så kan du ikke bevise det

- Bemærk at \hat{Q} i princippet kun handler om *tal*!

- Skriv q for tallet $\lceil \hat{Q} \rceil$

Oversættelsen

Ufuldstændighed

Dan Saattrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Lad nu \hat{G} være udsagnet

Hvis du erstatter ' p ' i udsagnet der svarer til tallet q med q ,
så kan du ikke bevise det

Oversættelsen

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Lad nu \hat{G} være udsagnet

Hvis du erstatter ' p ' i udsagnet der svarer til tallet q med q , så kan du ikke bevise det

- Igen handler \hat{G} kun om ta

Oversættelsen

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Lad nu \hat{G} være udsagnet

Hvis du erstatter ' p ' i udsagnet der svarer til tallet q med q , så kan du ikke bevise det

- Igen handler \hat{G} kun om ta
- Skriv g for tallet $\lceil \hat{G} \rceil$

Oversættelsen

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Lad nu \hat{G} være udsagnet

Hvis du erstatter ' p ' i udsagnet der svarer til tallet q med q , så kan du ikke bevise det

- Igen handler \hat{G} kun om ta
- Skriv g for tallet $\lceil \hat{G} \rceil$

- Bemærk at vi før viste at

$g = \lceil \text{Udsagnet der svarer til tallet } g \text{ kan ikke bevises} \rceil$

Oversættelsen

Ufuldstændighed

Dan Saattrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

- Lad nu \hat{G} være udsagnet

Hvis du erstatter ' p ' i udsagnet der svarer til tallet q med q , så kan du ikke bevise det

- Igen handler \hat{G} kun om ta
- Skriv g for tallet $\lceil \hat{G} \rceil$

- Bemærk at vi før viste at

$g = \lceil \text{Udsagnet der svarer til tallet } g \text{ kan ikke bevises} \rceil$

- Vi har altså et *matematisk* udsagn, som siger at det ikke kan bevises!

- Lad nu \hat{G} være udsagnet

Hvis du erstatter ' p ' i udsagnet der svarer til tallet q med q , så kan du ikke bevise det

- Igen handler \hat{G} kun om ta
- Skriv g for tallet $\lceil \hat{G} \rceil$

- Bemærk at vi før viste at

$g = \lceil \text{Udsagnet der svarer til tallet } g \text{ kan ikke bevises} \rceil$

- Vi har altså et *matematisk* udsagn, som siger at det ikke kan bevises!
- Men nu vil \hat{G} præcis være et formelt matematisk udsagn der er *sandt*, men *ubeviseligt*

Gödels sætning

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

Ufuldstændighedssætningen

Sålænge vores formelle matematiske system kan arbejde med tal, så vil der altid findes sande, men ubeviselige matematiske udsagn.

Gödels sætning

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

Ufuldstændighedssætningen

Sålænge vores formelle matematiske system kan arbejde med tal, så vil der altid findes sande, men ubeviselige matematiske udsagn.

- En sjov konsekvens: Der vil aldrig kunne findes en computer, der kan lave matematik for os

Gödels sætning

Ufuldstændighed

Dan Saatrup
Nielsen

Starten

Hvad er jeg?

Den gode idé

Matematik?

Den gode idé
igen

Slutresultatet

Ufuldstændighedssætningen

Så længe vores formelle matematiske system kan arbejde med tal, så vil der altid findes sande, men ubeviselige matematiske udsagn.

- En sjov konsekvens: Der vil aldrig kunne findes en computer, der kan lave matematik for os

Tak for opmærksomheden!