En kort introduktion til Gödels konstruérbare univers

Dan Saattrup Nielsen

14. marts, 2014

Hvad kommer der til at ske?

- Lidt basal mængdelære
- Et overblik
- Konstruktion af det konstruérbare univers L
- $Con(ZF) \Rightarrow Con(ZF + (V = L))$
  - "Verden bliver ikke et dårligere sted ved at lade L være vores univers"

Hvad kommer der til at ske?

- Lidt basal mængdelære
- Et overblik
- Konstruktion af det konstruérbare univers L
- $Con(ZF) \Rightarrow Con(ZF + (V = L))$
  - "Verden bliver ikke et dårligere sted ved at lade L være vores univers"

Hvad kommer der til at ske?

- Lidt basal mængdelære
- Et overblik
- Konstruktion af det konstruérbare univers L
- $Con(ZF) \Rightarrow Con(ZF + (V = L))$
  - "Verden bliver ikke et dårligere sted ved at lade L være vores univers"

Hvad kommer der til at ske?

- Lidt basal mængdelære
- Et overblik
- Konstruktion af det konstruérbare univers L
- $Con(ZF) \Rightarrow Con(ZF + (V = L))$
  - "Verden bliver ikke et dårligere sted ved at lade L være vores univers"

Hvad kommer der til at ske?

- Lidt basal mængdelære
- Et overblik
- Konstruktion af det konstruérbare univers L
- $Con(ZF) \Rightarrow Con(ZF + (V = L))$
  - "Verden bliver ikke et dårligere sted ved at lade L være vores univers"

Hvad kommer der til at ske?

- Lidt basal mængdelære
- Et overblik
- Konstruktion af det konstruérbare univers L
- $Con(ZF) \Rightarrow Con(ZF + (V = L))$
  - "Verden bliver ikke et dårligere sted ved at lade L være vores univers"

Lidt basal mængdelære

Ordinalerne On.

Sætning

Alle ordinaler α optræder på netop én af følgende former:

- $\alpha = 0$
- $\alpha = \beta + 1$, hvor $\beta \in \mathrm{On}$
- $\alpha = \sup_{\beta < \alpha} \beta$

Det normale univers V.

Lidt basal mængdelære

Ordinalerne On.

Sætning

Alle ordinaler α optræder på netop én af følgende former:

- $\alpha = 0$
- $\alpha = \beta + 1$, hvor $\beta \in \mathrm{On}$
- $\alpha = \sup_{\beta<\alpha} \beta$

Det normale univers V.

Ordinalerne On.

Sætning

Alle ordinaler α optræder på netop én af følgende former:

- $\alpha = 0$
- $\alpha = \beta + 1$, hvor $\beta \in \mathrm{On}$
- $\alpha = \sup_{\beta<\alpha} \beta$

Det normale univers V.

ZFC

ZFC består (uformelt) af aksiomerne:

1. De naturlige tal er en mængde
2. Hvis x er en mængde, så er $\{y \in x \mid \varphi(y)\}$ en mængde
3. Hvis x er en mængde, så er $\bigcup x$ en mængde
4. Hvis x er en mængde, så er $\mathcal{P}(x)$ en mængde
5. Hvis f er en funktion med en mængde x som domæne, så er billedet af f en mængde;
6. Fra en familie af mængder kan vi konstruere en mængde med netop ét element fra hver mængde i familien
7. To mængder er ens hvis og kun hvis de har samme elementer
8. Alle mængder ligger i V

ZFC består (uformelt) af aksiomerne:

1. De naturlige tal er en mængde
2. Hvis x er en mængde, så er $\{y \in x \mid \varphi(y)\}$ en mængde
3. Hvis x er en mængde, så er $\bigcup x$ en mængde
4. Hvis x er en mængde, så er $\mathcal{P}(x)$ en mængde
5. Hvis f er en funktion med en mængde x som domæne, så er billedet af f en mængde;
6. Fra en familie af mængder kan vi konstruere en mængde med netop ét element fra hver mængde i familien
7. To mængder er ens hvis og kun hvis de har samme elementer
8. Alle mængder ligger i V

ZFC består (uformelt) af aksiomerne:

1. De naturlige tal er en mængde
2. Hvis x er en mængde, så er $\{y \in x \mid \varphi(y)\}$ en mængde
3. Hvis x er en mængde, så er $\bigcup x$ en mængde
4. Hvis x er en mængde, så er $\mathcal{P}(x)$ en mængde
5. Hvis f er en funktion med en mængde x som domæne, så er billedet af f en mængde;
6. Fra en familie af mængder kan vi konstruere en mængde med netop ét element fra hver mængde i familien
7. To mængder er ens hvis og kun hvis de har samme elementer
8. Alle mængder ligger i V

ZFC

ZFC består (uformelt) af aksiomerne:

1. De naturlige tal er en mængde
2. Hvis x er en mængde, så er $\{y \in x \mid \varphi(y)\}$ en mængde
3. Hvis x er en mængde, så er $\bigcup x$ en mængde
4. Hvis x er en mængde, så er $\mathcal{P}(x)$ en mængde
5. Hvis f er en funktion med en mængde x som domæne, så er billedet af f en mængde;
6. Fra en familie af mængder kan vi konstruere en mængde med netop ét element fra hver mængde i familien
7. To mængder er ens hvis og kun hvis de har samme elementer
8. Alle mængder ligger i V

ZFC

ZFC består (uformelt) af aksiomerne:

1. De naturlige tal er en mængde
2. Hvis x er en mængde, så er $\{y \in x \mid \varphi(y)\}$ en mængde
3. Hvis x er en mængde, så er $\bigcup x$ en mængde
4. Hvis x er en mængde, så er $\mathcal{P}(x)$ en mængde
5. Hvis f er en funktion med en mængde x som domæne, så er billedet af f en mængde;
6. Fra en familie af mængder kan vi konstruere en mængde med netop ét element fra hver mængde i familien
7. To mængder er ens hvis og kun hvis de har samme elementer
8. Alle mængder ligger i V

ZFC

ZFC består (uformelt) af aksiomerne:

1. De naturlige tal er en mængde
2. Hvis x er en mængde, så er $\{y \in x \mid \varphi(y)\}$ en mængde
3. Hvis x er en mængde, så er $\bigcup x$ en mængde
4. Hvis x er en mængde, så er $\mathcal{P}(x)$ en mængde
5. Hvis f er en funktion med en mængde x som domæne, så er billedet af f en mængde;
6. Fra en familie af mængder kan vi konstruere en mængde med netop ét element fra hver mængde i familien
7. To mængder er ens hvis og kun hvis de har samme elementer
8. Alle mængder ligger i V

ZFC består (uformelt) af aksiomerne:

1. De naturlige tal er en mængde
2. Hvis x er en mængde, så er $\{y \in x \mid \varphi(y)\}$ en mængde
3. Hvis x er en mængde, så er $\bigcup x$ en mængde
4. Hvis x er en mængde, så er $\mathcal{P}(x)$ en mængde
5. Hvis f er en funktion med en mængde x som domæne, så er billedet af f en mængde;
6. Fra en familie af mængder kan vi konstruere en mængde med netop ét element fra hver mængde i familien
7. To mængder er ens hvis og kun hvis de har samme elementer
8. Alle mængder ligger i V

ZFC

ZFC består (uformelt) af aksiomerne:

1. De naturlige tal er en mængde
2. Hvis x er en mængde, så er $\{y \in x \mid \varphi(y)\}$ en mængde
3. Hvis x er en mængde, så er $\bigcup x$ en mængde
4. Hvis x er en mængde, så er $\mathcal{P}(x)$ en mængde
5. Hvis f er en funktion med en mængde x som domæne, så er billedet af f en mængde;
6. Fra en familie af mængder kan vi konstruere en mængde med netop ét element fra hver mængde i familien
7. To mængder er ens hvis og kun hvis de har samme elementer
8. Alle mængder ligger i V

ZFC

ZFC består (uformelt) af aksiomerne:

1. De naturlige tal er en mængde
2. Hvis x er en mængde, så er $\{y \in x \mid \varphi(y)\}$ en mængde
3. Hvis x er en mængde, så er $\bigcup x$ en mængde
4. Hvis x er en mængde, så er $\mathcal{P}(x)$ en mængde
5. Hvis f er en funktion med en mængde x som domæne, så er billedet af f en mængde;
6. Fra en familie af mængder kan vi konstruere en mængde med netop ét element fra hver mængde i familien
7. To mængder er ens hvis og kun hvis de har samme elementer
8. Alle mængder ligger i V

Fugleperspektiv på projektet

- Konstruktion af det konstruérbare univers L
- Bevis seje ting i L, som man ikke kan bevise i V
  - Udvalgsaksiomet
  - Kontinumshypotesen
  - Uendelig-kombinatoriske principper $\diamondsuit$, $\diamondsuit^+$
  - Bruge ovenstående til at etablere $Con(ZF) \Rightarrow Con(ZFC + GCH + \diamondsuit + \diamondsuit^+)$
- Hvorfor vil man ikke bruge L i stedet for V?
- Videre perspektivering og *det store åbne problem*

- Konstruktion af det konstruérbare univers L
- Bevis seje ting i L, som man ikke kan bevise i V
  - Udvalgsaksiomet
  - Kontinumshypotesen
  - Uendelig-kombinatoriske principper $\diamondsuit$, $\diamondsuit^+$
  - Bruge ovenstående til at etablere $Con(ZF) \Rightarrow Con(ZFC + GCH + \diamondsuit + \diamondsuit^+)$
- Hvorfor vil man ikke bruge L i stedet for V?
- Videre perspektivering og *det store åbne problem*

Fugleperspektiv på projektet

- Konstruktion af det konstruérbare univers L
- Bevis seje ting i L, som man ikke kan bevise i V
  - Udvalgsaksiomet
  - Kontinumshypotesen
  - Uendelig-kombinatoriske principper $\diamondsuit$, $\diamondsuit^+$
  - Bruge ovenstående til at etablere $Con(ZF) \Rightarrow Con(ZFC + GCH + \diamondsuit + \diamondsuit^+)$
- Hvorfor vil man ikke bruge L i stedet for V?
- Videre perspektivering og *det store åbne problem*

Fugleperspektiv på projektet

- Konstruktion af det konstruérbare univers L
- Bevis seje ting i L, som man ikke kan bevise i V
  - Udvalgsaksiomet
  - Kontinumshypotesen
  - Uendelig-kombinatoriske principper $\diamondsuit$, $\diamondsuit^+$
  - Bruge ovenstående til at etablere $Con(ZF) \Rightarrow Con(ZFC + GCH + \diamondsuit + \diamondsuit^+)$
- Hvorfor vil man ikke bruge L i stedet for V?
- Videre perspektivering og *det store åbne problem*

Fugleperspektiv på projektet

- Konstruktion af det konstruérbare univers L
- Bevis seje ting i L, som man ikke kan bevise i V
  - Udvalgsaksiomet
  - Kontinumshypotesen
  - Uendelig-kombinatoriske principper $\diamondsuit$, $\diamondsuit^+$
  - Bruge ovenstående til at etablere $Con(ZF) \Rightarrow Con(ZFC + GCH + \diamondsuit + \diamondsuit^+)$
- Hvorfor vil man ikke bruge L i stedet for V?
- Videre perspektivering og *det store åbne problem*

Fugleperspektiv på projektet

- Konstruktion af det konstruérbare univers L
- Bevis seje ting i L, som man ikke kan bevise i V
  - Udvalgsaksiomet
  - Kontinumshypotesen
  - Uendelig-kombinatoriske principper $\diamondsuit$, $\diamondsuit^+$
  - Bruge ovenstående til at etablere $Con(ZF) \Rightarrow Con(ZFC + GCH + \diamondsuit + \diamondsuit^+)$
- Hvorfor vil man ikke bruge L i stedet for V?
- Videre perspektivering og *det store åbne problem*

Fugleperspektiv på projektet

- Konstruktion af det konstruérbare univers L
- Bevis seje ting i L, som man ikke kan bevise i V
  - Udvalgsaksiomet
  - Kontinumshypotesen
  - Uendelig-kombinatoriske principper $\diamondsuit$, $\diamondsuit^+$
  - Bruge ovenstående til at etablere $Con(ZF) \Rightarrow Con(ZFC + GCH + \diamondsuit + \diamondsuit^+)$
- Hvorfor vil man ikke bruge L i stedet for V?
- Videre perspektivering og *det store åbne problem*

Fugleperspektiv på projektet

- Konstruktion af det konstruérbare univers L
- Bevis seje ting i L, som man ikke kan bevise i V
  - Udvalgsaksiomet
  - Kontinumshypotesen
  - Uendelig-kombinatoriske principper $\diamondsuit$, $\diamondsuit^+$
  - Bruge ovenstående til at etablere $Con(ZF) \Rightarrow Con(ZFC + GCH + \diamondsuit + \diamondsuit^+)$
- Hvorfor vil man ikke bruge L i stedet for V?
- Videre perspektivering og *det store åbne problem*

Fugleperspektiv på projektet

- Konstruktion af det konstruérbare univers L
- Bevis seje ting i L, som man ikke kan bevise i V
  - Udvalgsaksiomet
  - Kontinumshypotesen
  - Uendelig-kombinatoriske principper $\diamondsuit$, $\diamondsuit^+$
  - Bruge ovenstående til at etablere $Con(ZF) \Rightarrow Con(ZFC + GCH + \diamondsuit + \diamondsuit^+)$
- Hvorfor vil man ikke bruge L i stedet for V?
- Videre perspektivering og *det store åbne problem*

Vi bygger et univers

- Naiv definition af L
- **Første problem**: Kvantorer over formler - det giver ingen mening!
- Fix: Lav formler om til mængder
- **Andet problem**: Mængder kan ikke være sande eller falske - det giver stadig ingen mening!
- Fix: Lav en formel $\mathrm{Sat}(M, \ulcorner\varphi\urcorner, \overline{x}, y)$, som fortæller om $\varphi(y, \overline{x})$ er sand i M
- Formel definition af L

Vi bygger et univers

- Naiv definition af L
- **Første problem**: Kvantorer over formler - det giver ingen mening!
- Fix: Lav formler om til mængder
- **Andet problem**: Mængder kan ikke være sande eller falske - det giver stadig ingen mening!
- Fix: Lav en formel $\mathrm{Sat}(M, \ulcorner\varphi\urcorner, \bar{x}, y)$, som fortæller om $\varphi(y, \bar{x})$ er sand i M
- Formel definition af L

Vi bygger et univers

- Naiv definition af L
- **Første problem**: Kvantorer over formler - det giver ingen mening!
- Fix: Lav formler om til mængder
- **Andet problem**: Mængder kan ikke være sande eller falske - det giver stadig ingen mening!
- Fix: Lav en formel Sat$(M, \ulcorner\varphi\urcorner, \overline{x}, y)$, som fortæller om $\varphi(y, \overline{x})$ er sand i M
- Formel definition af L

Vi bygger et univers

- Naiv definition af L
- **Første problem**: Kvantorer over formler - det giver ingen mening!
- Fix: Lav formler om til mængder
- **Andet problem**: Mængder kan ikke være sande eller falske - det giver stadig ingen mening!
- Fix: Lav en formel $\mathrm{Sat}(M, \ulcorner\varphi\urcorner, \overline{x}, y)$, som fortæller om $\varphi(y, \overline{x})$ er sand i M
- Formel definition af L

Vi bygger et univers

- Naiv definition af L
- **Første problem**: Kvantorer over formler - det giver ingen mening!
- Fix: Lav formler om til mængder
- **Andet problem**: Mængder kan ikke være sande eller falske - det giver stadig ingen mening!
- Fix: Lav en formel $\mathrm{Sat}(M, \ulcorner\varphi\urcorner, \overline{x}, y)$, som fortæller om $\varphi(y, \overline{x})$ er sand i M
- Formel definition af L

Vi bygger et univers

- Naiv definition af L
- **Første problem**: Kvantorer over formler - det giver ingen mening!
- Fix: Lav formler om til mængder
- **Andet problem**: Mængder kan ikke være sande eller falske - det giver stadig ingen mening!
- Fix: Lav en formel $\mathrm{Sat}(M, \ulcorner\varphi\urcorner, \overline{x}, y)$, som fortæller om $\varphi(y, \overline{x})$ er sand i M
- Formel definition af L

Vi bygger et univers

- Naiv definition af L
- **Første problem**: Kvantorer over formler - det giver ingen mening!
- Fix: Lav formler om til mængder
- **Andet problem**: Mængder kan ikke være sande eller falske - det giver stadig ingen mening!
- Fix: Lav en formel $\mathrm{Sat}(M, \ulcorner\varphi\urcorner, \bar{x}, y)$, som fortæller om $\varphi(y, \bar{x})$ er sand i M
- Formel definition af L

- **Tredje problem**: Er den naive og formelle definition den samme?

Tarski's udefinérbarhedssætning

Sandhed kan ikke defineres internt i et system. Mere specifikt, så findes der ikke en formel $True(x)$, som opfylder $True(\ulcorner\varphi\urcorner) \leftrightarrow \varphi$ for alle formler φ i en model M.

- Fix: Absoluthed af Sat
  - Sat er absolut, så $Sat(M, \ulcorner\varphi\urcorner, \overline{x}, y) \Leftrightarrow M \vDash \varphi(y, \overline{x})$
  - $L_\alpha \vDash \varphi \Leftrightarrow L \vDash \varphi$ for α grænse
  - Hvis φ kun har bundne kvantorer, gælder $L_\alpha \vDash \varphi \Leftrightarrow \varphi$ for alle $\alpha \in \mathrm{On}$

Vi bygger et univers

- **Tredje problem**: Er den naive og formelle definition den samme?

Tarski's udefinérbarhedssætning

Sandhed kan ikke defineres internt i et system. Mere specifikt, så findes der ikke en formel $True(x)$, som opfylder $True(\ulcorner\varphi\urcorner) \leftrightarrow \varphi$ for alle formler φ i en model M.

- Fix: Absoluthed af Sat
  - Sat er absolut, så $Sat(M, \ulcorner\varphi\urcorner, \bar{x}, y) \Leftrightarrow M \vDash \varphi(y, \bar{x})$
  - $L_\alpha \vDash \varphi \Leftrightarrow L \vDash \varphi$ for α grænse
  - Hvis φ kun har bundne kvantorer, gælder $L_\alpha \vDash \varphi \Leftrightarrow \varphi$ for alle $\alpha \in \mathrm{On}$

Vi bygger et univers

- **Tredje problem**: Er den naive og formelle definition den samme?

Tarski's udefinérbarhedssætning

Sandhed kan ikke defineres internt i et system. Mere specifikt, så findes der ikke en formel $True(x)$, som opfylder $True(\ulcorner\varphi\urcorner) \leftrightarrow \varphi$ for alle formler φ i en model M.

- Fix: Absoluthed af Sat
  - Sat er absolut, så $Sat(M, \ulcorner\varphi\urcorner, \overline{x}, y) \Leftrightarrow M \vDash \varphi(y, \overline{x})$
  - $L_\alpha \vDash \varphi \Leftrightarrow L \vDash \varphi$ for α grænse
  - Hvis φ kun har bundne kvantorer, gælder $L_\alpha \vDash \varphi \Leftrightarrow \varphi$ for alle $\alpha \in \mathrm{On}$

Vi bygger et univers

- **Tredje problem**: Er den naive og formelle definition den samme?

Tarski's udefinérbarhedssætning

Sandhed kan ikke defineres internt i et system. Mere specifikt, så findes der ikke en formel $True(x)$, som opfylder $True(\ulcorner\varphi\urcorner) \leftrightarrow \varphi$ for alle formler φ i en model M.

- Fix: Absoluthed af Sat
  - Sat er absolut, så $Sat(M, \ulcorner\varphi\urcorner, \overline{x}, y) \Leftrightarrow M \vDash \varphi(y, \overline{x})$
  - $L_\alpha \vDash \varphi \Leftrightarrow L \vDash \varphi$ for α grænse
  - Hvis φ kun har bundne kvantorer, gælder $L_\alpha \vDash \varphi \Leftrightarrow \varphi$ for alle $\alpha \in \mathrm{On}$

Vi bygger et univers

- **Tredje problem**: Er den naive og formelle definition den samme?

Tarski's udefinérbarhedssætning

Sandhed kan ikke defineres internt i et system. Mere specifikt, så findes der ikke en formel $True(x)$, som opfylder $True(\ulcorner\varphi\urcorner) \leftrightarrow \varphi$ for alle formler φ i en model M.

- Fix: Absoluthed af Sat
  - Sat er absolut, så $Sat(M, \ulcorner\varphi\urcorner, \overline{x}, y) \Leftrightarrow M \vDash \varphi(y, \overline{x})$
  - $L_\alpha \vDash \varphi \Leftrightarrow L \vDash \varphi$ for α grænse
  - Hvis φ kun har bundne kvantorer, gælder $L_\alpha \vDash \varphi \Leftrightarrow \varphi$ for alle $\alpha \in \mathrm{On}$

Vi bygger et univers

- **Tredje problem**: Er den naive og formelle definition den samme?

Tarski's udefinérbarhedssætning

Sandhed kan ikke defineres internt i et system. Mere specifikt, så findes der ikke en formel $True(x)$, som opfylder $True(\ulcorner\varphi\urcorner) \leftrightarrow \varphi$ for alle formler φ i en model M.

- Fix: Absoluthed af Sat
  - Sat er absolut, så $Sat(M, \ulcorner\varphi\urcorner, \overline{x}, y) \Leftrightarrow M \vDash \varphi(y, \overline{x})$
  - $L_\alpha \vDash \varphi \Leftrightarrow L \vDash \varphi$ for α grænse
  - Hvis φ kun har bundne kvantorer, gælder $L_\alpha \vDash \varphi \Leftrightarrow \varphi$ for alle $\alpha \in \mathrm{On}$

- **Tredje problem**: Er den naive og formelle definition den samme?

Tarski's udefinérbarhedssætning

Sandhed kan ikke defineres internt i et system. Mere specifikt, så findes der ikke en formel $True(x)$, som opfylder $True(\ulcorner\varphi\urcorner) \leftrightarrow \varphi$ for alle formler φ i en model M.

- Fix: Absoluthed af Sat
  - Sat er absolut, så $Sat(M, \ulcorner\varphi\urcorner, \overline{x}, y) \Leftrightarrow M \vDash \varphi(y, \overline{x})$
  - $L_\alpha \vDash \varphi \Leftrightarrow L \vDash \varphi$ for α grænse
  - Hvis φ kun har bundne kvantorer, gælder $L_\alpha \vDash \varphi \Leftrightarrow \varphi$ for alle $\alpha \in \mathrm{On}$

Vi bygger et univers

- **Tredje problem**: Er den naive og formelle definition den samme?

Tarski's udefinérbarhedssætning

Sandhed kan ikke defineres internt i et system. Mere specifikt, så findes der ikke en formel $True(x)$, som opfylder $True(\ulcorner\varphi\urcorner) \leftrightarrow \varphi$ for alle formler φ i en model M.

- Fix: Absoluthed af Sat
  - Sat er absolut, så $Sat(M, \ulcorner\varphi\urcorner, \overline{x}, y) \Leftrightarrow M \vDash \varphi(y, \overline{x})$
  - $L_\alpha \vDash \varphi \Leftrightarrow L \vDash \varphi$ for α grænse
  - Hvis φ kun har bundne kvantorer, gælder $L_\alpha \vDash \varphi \Leftrightarrow \varphi$ for alle $\alpha \in \mathrm{On}$

Interlude

Hvordan definerer vi Sat(u, φ) som en formel?

$$(u \neq \emptyset) \wedge Fml(\varphi, u) \wedge \exists f \exists g [Finseq(f) \wedge Finseq(g)$$
$$\wedge (dom(f) = dom(g)) \wedge (\varphi \in g(||g||)) \wedge \forall \psi(\psi \in f(0) \leftrightarrow PFml(\psi, u))$$
$$\wedge \forall \psi(\psi \in g(0) \leftrightarrow E(\psi, u)) \wedge (\forall j \in dom(f))(\forall i \in j)(\forall \psi)(\psi \in f(i+1)$$
$$\leftrightarrow (\psi \in f(i)) \vee (\exists \theta, \theta' \in f(i)) F_{\wedge}(\psi, \theta, \theta') \vee (\exists \theta \in f(i)) F_{\neg}(\psi, \theta)$$
$$\vee (\exists \theta \in f(i))(\exists v \in ran(\psi))(Vbl(v) \wedge F_{\in}(\psi, v, \theta))] \wedge (\forall j \in dom(g))$$
$$(\forall i \in j)(\forall \psi)[\psi \in g(i+1) \leftrightarrow (\psi \in g(i)) \vee (\exists \theta, \theta' \in g(i)) F_{\wedge}(\psi, \theta, \theta')$$
$$\vee (\exists \theta \in f(i))(\theta \notin g(i) \wedge F_{\neg}(\psi, \theta)) \vee (\exists \theta \in f(i))(\exists v \in ran(\psi))(\exists x \in u)$$
$$(\exists \theta' \in g(i))[Vbl(v) \wedge F_{\exists}(\psi, v, \theta) \wedge Sub(\theta', \theta, v, \dot{x})]]]$$

"It is easily seen that the above formula does define the satisfaction relation."

Interlude

Hvordan definerer vi Sat(u, φ) som en formel?

$$(u \neq \emptyset) \wedge Fml(\varphi, u) \wedge \exists f \exists g[Finseq(f) \wedge Finseq(g)$$
$$\wedge (dom(f) = dom(g)) \wedge (\varphi \in g(||g||)) \wedge \forall \psi(\psi \in f(0) \leftrightarrow PFml(\psi, u))$$
$$\wedge \forall \psi(\psi \in g(0) \leftrightarrow E(\psi, u)) \wedge (\forall j \in dom(f))(\forall i \in j)(\forall \psi)(\psi \in f(i+1)$$
$$\leftrightarrow (\psi \in f(i)) \vee (\exists \theta, \theta' \in f(i))F_{\wedge}(\psi, \theta, \theta') \vee (\exists \theta \in f(i))F_{\neg}(\psi, \theta)$$
$$\vee (\exists \theta \in f(i))(\exists v \in ran(\psi))(Vbl(v) \wedge F_{\in}(\psi, v, \theta))] \wedge (\forall j \in dom(g))$$
$$(\forall i \in j)(\forall \psi)[\psi \in g(i+1) \leftrightarrow (\psi \in g(i)) \vee (\exists \theta, \theta' \in g(i))F_{\wedge}(\psi, \theta, \theta')$$
$$\vee (\exists \theta \in f(i))(\theta \notin g(i) \wedge F_{\neg}(\psi, \theta)) \vee (\exists \theta \in f(i))(\exists v \in ran(\psi))(\exists x \in u)$$
$$(\exists \theta' \in g(i))[Vbl(v) \wedge F_{\exists}(\psi, v, \theta) \wedge Sub(\theta', \theta, v, \dot{x})]]]$$

"It is easily seen that the above formula does define the satisfaction relation."

Interlude

Hvordan definerer vi $\mathrm{Sat}(u, \varphi)$ som en formel?

$$(u \neq \emptyset) \wedge Fml(\varphi, u) \wedge \exists f \exists g [Finseq(f) \wedge Finseq(g)$$
$$\wedge (dom(f) = dom(g)) \wedge (\varphi \in g(||g||)) \wedge \forall \psi(\psi \in f(0) \leftrightarrow PFml(\psi, u))$$
$$\wedge \forall \psi(\psi \in g(0) \leftrightarrow E(\psi, u)) \wedge (\forall j \in dom(f))(\forall i \in j)(\forall \psi)(\psi \in f(i+1)$$
$$\leftrightarrow (\psi \in f(i)) \vee (\exists \theta, \theta' \in f(i)) F_\wedge(\psi, \theta, \theta') \vee (\exists \theta \in f(i)) F_\neg(\psi, \theta)$$
$$\vee (\exists \theta \in f(i))(\exists v \in ran(\psi))(Vbl(v) \wedge F_\in(\psi, v, \theta))] \wedge (\forall j \in dom(g))$$
$$(\forall i \in j)(\forall \psi)[\psi \in g(i+1) \leftrightarrow (\psi \in g(i)) \vee (\exists \theta, \theta' \in g(i)) F_\wedge(\psi, \theta, \theta')$$
$$\vee (\exists \theta \in f(i))(\theta \notin g(i) \wedge F_\neg(\psi, \theta)) \vee (\exists \theta \in f(i))(\exists v \in ran(\psi))(\exists x \in u)$$
$$(\exists \theta' \in g(i))[Vbl(v) \wedge F_\exists(\psi, v, \theta) \wedge Sub(\theta', \theta, v, \dot{x})]]]$$

"It is easily seen that the above formula does define the satisfaction relation."

L mener selv at den er alt der findes

Lemma

Formlen "$x = L_\alpha$" er absolut.

Lemma

$L^L = L$.

Sætning

$ZF \vdash (V = L)^L$.

Korollar

Hvis ZF er konsistent, er $ZF + (V = L)$ også konsistent.

L mener selv at den er alt der findes

Lemma

Formlen "$x = L_\alpha$" er absolut.

Lemma

$L^L = L$.

Sætning

$ZF \vdash (V = L)^L$.

Korollar

Hvis ZF er konsistent, er $ZF + (V = L)$ også konsistent.

L mener selv at den er alt der findes

Lemma

Formlen "$x = L_\alpha$" er absolut.

Lemma

$L^L = L$.

Sætning

$ZF \vdash (V = L)^L$.

Korollar

Hvis ZF er konsistent, er $ZF + (V = L)$ også konsistent.

L mener selv at den er alt der findes

Lemma

Formlen "$x = L_\alpha$" er absolut.

Lemma

$L^L = L$.

Sætning

$ZF \vdash (V = L)^L$.

Korollar

Hvis ZF er konsistent, er $ZF + (V = L)$ også konsistent.

L mener selv at den er alt der findes

Lemma

Formlen "$x = L_\alpha$" er absolut.

Lemma

$L^L = L$.

Sætning

$ZF \vdash (V = L)^L$.

Korollar

Hvis ZF er konsistent, er $ZF + (V = L)$ også konsistent.

Herfra kan vi gå på opdagelse i vores nye univers