



دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

درس نظریه‌ی زبان‌ها و ماشین‌ها

تمرین شماره‌ی ۴

موعد تحویل: شنبه ۱۴۰۱/۰۳/۱۴

استاد: دکتر علی موقر

تیم دستیاران درس - نیم‌سال دوم ۰۱ - ۰۰

۳۱ اردیبهشت ۱۴۰۱

۱. گرامرهای مستقل از متن و فرم‌های نرمال

۱.۱

برای هر کدام از زبان‌های زیر، گرامر مستقل از متن بنویسید. (۹ نمره)

$$a) L = \{a^n b^m \mid n \neq 2m\}$$

$$b) L = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid \forall v \in \text{Pref}(\omega) . n_a(v) \geq n_b(v)\}$$

$$c) L = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid n_a(\omega) = 2n_b(\omega) + 1\}$$

۲.۱

زیرمجموعه‌ای از گرامرهای مستقل از متن موسوم به گرامرهای ساده^۱ را به شیوه‌ی مقابل تعریف می‌کنیم: گرامر $G = (V, T, R, S)$ ساده است، چنانچه قواعد تولید^۲ این گرامر، همه از فرم $A \rightarrow ax$ باشند که $A \in V$ و $a \in T$ و $x \in V^*$ باشد و زوج (A, a) حداکثر یک‌بار در R ظاهر شده باشد.

الف) برای هر کدام از زبان‌های زیر، یک گرامر ساده بنویسید. (۴ نمره)

$$a) L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$$

$$b) L = \{a^n b^{n+1} \mid n \geq 2\}$$

ب) کدام یک از گرامرهای بخش الف مبهم^۳ هستند؟ به یک نتیجه‌گیری کلی درخصوص گرامرهای ساده برسید. (۴ نمره)

¹Simple Grammars

²Production Rules

³Ambiguous

۳.۱

گرامر زیر را در نظر بگیرید:

$$E \rightarrow E + E \mid E * E \mid (E) \mid id$$

مشخص است که این گرامر، مبهم است. برای نمونه، می‌توانیم برای $id + id * id$ دو درخت اشتقاق چپ^۴ متمایز تعریف کنیم. با توجه به این توضیحات، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:

الف) با اولویت دادن به عملگر ضرب نسبت به جمع، یک گرامر غیرمبهم برای این زبان طراحی کنید و به کمک استقراء، عدم ابهام آن را اثبات کنید. (۶ نمره)

ب) زبان گرامر بخش الف را به نحوی تغییر می‌دهیم که هیچ کدام از رشته‌های زبان، پرانتهای زاید نداشته باشند. پرانتهای زاید را پرانتهایی تعریف می‌کنیم که حذف آن‌ها، تاثیری بر حاصل عبارت نمی‌گذارد. برای این زبان جدید یک گرامر غیرمبهم طراحی کنید. (۴ نمره)

۴.۱

گرامر صفحه‌ی بعدی را که نسخه‌ی ساده‌شده‌ای از گرامر زبان مدل‌سازی ریکا^۵ است، در نظر گرفته، به پرسش‌هایی که در ادامه می‌آیند پاسخ دهید. الفبا را برابر با مجموعه‌ی $\{reactiveclass, knownrebecs, \{, \}, ;, a, b, \dots, x, y, z\}$ در نظر بگیرید.

الف) این گرامر را به فرم نرمال چامسکی^۶ بنویسید. (۴ نمره)

ب) گرامرهای به فرم نرمال گریباخ^۷ را گرامرهای مستقل از متنی تعریف می‌کنیم که قاعده‌های تولید آن‌ها همه به فرمت $A \rightarrow a\alpha$ باشند، که A عضو مجموعه‌ی متغیرها^۸، a عضو مجموعه‌ی پایانه‌ها^۹ و α یک رشته‌ی [شاید تهی] از متغیرها است. گرامر مربوطه را به فرم نرمال گریباخ بنویسید. (۴ نمره)

^۴Leftmost Derivation Trees

^۵Rebeca Modelling Language

^۶Chomsky Normal Form

^۷Greibach Normal Form

^۸Variables

^۹Terminals

$$Class \rightarrow reactiveclass\ ClassName\ \{ KnownRebecs\ } \mid Class\ Class$$

$$ClassName \rightarrow Name$$

$$VarName \rightarrow Name$$

$$Name \rightarrow Letter\ Name \mid Letter$$

$$Letter \rightarrow a \mid b \mid \dots \mid x \mid y \mid z$$

$$KnownRebecs \rightarrow knownrebecs\ \{ RebecDecl\ }$$

$$RebecDecl \rightarrow ClassName\ VarName\ ; \mid RebecDecl\ RebecDecl$$

پ) رشته‌ی زیر به طول ۱۴ را در نظر گرفته، با ذکر مراحل الگوریتم CYK تعلق این رشته به زبان گرامر بالا را بررسی کنید. (۶ نمره)

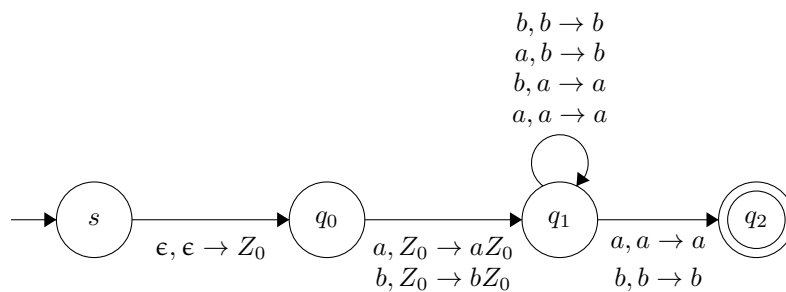
reactiveclass my { knownrebecs { c v; d b; } }

۲. ماشین‌های پشته‌ای

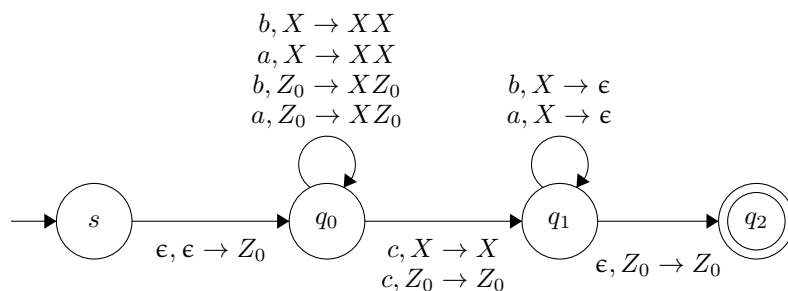
۱.۲

برای هر کدام از موارد زیر، زبانی که ماشین می‌پذیرد را تشخیص دهید. (۶ نمره)

الف)



(ب)



۲.۲

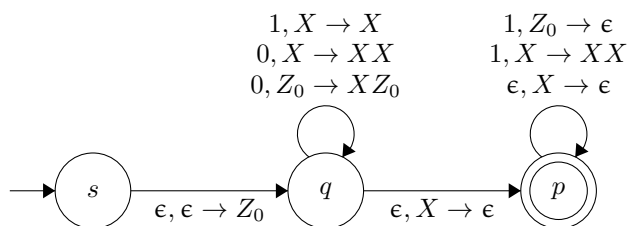
برای هر کدام از زبان‌های زیر، یک ماشین پشته‌ای^{۱۰} طراحی کنید. (۱۲ نمره)

- a) $L_1 = \{a^n b^m : n > 0, n \neq m\}$
- b) $L_2 = \{w_1 c w_2 : w_1, w_2 \in \{a, b\}^*, w_1 \neq w_2^R\}$
- c) $L_3 = \text{concatenation of } L(a^*) \text{ and } L_2$

۳.۲

ماشین پشته‌ای $P = (\{s, q, p\}, \{0, 1\}, \{Z_0, X\}, \delta, s, \{p\})$ را که در ادامه به صورت شماتیک رسم شده است، در نظر گرفته، به سوال‌ها

پاسخ دهید:



¹⁰Pushdown Automaton

الف) ماشین پشته‌ای P_1 را رسم کنید که به ازای خالی شدن پشته ^{۱۱}، پذیرنده‌ی رشته‌هایی است که P به ازای توقف در حالت نهایی ^{۱۲}، آن‌ها را پذیرش می‌کند. (۴ نمره)

ب) ماشین پشته‌ای P_2 را رسم کنید که به ازای توقف در حالت نهایی، پذیرنده‌ی رشته‌هایی است که P به ازای خالی شدن پشته، آن‌ها را پذیرش می‌کند. (۴ نمره)

۴.۲

درخصوص ماشین‌های پشته‌ای دارای قطعیت ^{۱۳}، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:

الف) نشان دهید که برای هر زبان منظم، یک ماشین پشته‌ای قطعی قابل رسم است که رشته‌های آن زبان را می‌پذیرد، تنها دو حالت دارد، هیچ گذار ϵ ندارد و در آن نمادها هیچ‌گاه از پشته حذف نمی‌شوند. (۴ نمره)

ب) نشان دهید که چنانچه برای زبان L یک ماشین پشته‌ای قطعی وجود داشته باشد که رشته‌های این زبان را بپذیرد، یک ماشین پشته‌ای قطعی دیگر قابل تعریف است که رشته‌های زبان $\{x\#y \mid x \in L, xy \in L\}$ را بپذیرد. فرض می‌کنیم نماد $\#$ در هیچ‌یک از رشته‌های L ظاهر نمی‌شود (۵ نمره).

۳. لم تزریق زبان‌های مستقل از متن و خواص بستاری

۱.۳

با استفاده از لم تزریق، نشان دهید که زبان‌های زیر مستقل از متن نیستند. (موردهای a تا c مجموعاً ۱۲ نمره، مورد d پنج نمره‌ی امتیازی)

$$a) L = \{a^k \mid k \text{ is a prime}\}$$

$$b) L = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$$

¹¹Acceptance by Empty Stack

¹²Acceptance by Final State

¹³Deterministic

$$c) L = \{a^n b^{2n} a^n \mid n \geq 0\}$$

$$d) L = \{\omega \in \{a, b, c\}^* \mid n_a(\omega) = \max \{n_b(\omega), n_c(\omega)\}\}$$

۲.۳

زبان‌های مستقل از متن قطعی نسبت به کدام یک از عملگرهای اجتماع، مکمل^{۱۴} و اتصال^{۱۵} بسته هستند؟ اثبات کنید. (۸ نمره)

۳.۳

الف) اثبات کنید که اگر L یک زبان مستقل از متن قطعی و R یک زبان منظم باشد، اشتراک این دو یک زبان مستقل از متن قطعی است. (۴ نمره)

ب) با استفاده از بخش الف همین سوال و بخش ب از سوال ۴.۲ اثبات کنید که زبان تشکیل‌یافته از رشته‌های قرینه‌ای^{۱۶} روی الفبای a و b ، مستقل از متن قطعی نیست (رشته‌های قرینه‌ای، رشته‌هایی هستند که به دو بخش قرینه قابل تقسیم‌اند). (۵ نمره امتیازی)

۴.۳

قضیه‌ی زیر معروف به لم اوگدن^{۱۷} را در نظر گرفته، با استفاده از آن اثبات کنید که موارد a و b زبان‌های مستقل از متن نیستند. (مجموعاً ۱۰ نمره‌ی امتیازی)

تعریف: فرض کنید که L یک زبان مستقل از متن باشد. ثابت n وجود دارد، به نحوی که اگر ω یک رشته‌ی دلخواه عضو زبان L باشد، و ما n تا، یا بیشتر، از نمادهای ω را انتخاب کنیم، بتوانیم ω را به صورت $uvxyz$ بنویسیم، به نحوی که سه شرط مقابل ارضاء شوند: (۱) v و y روی هم دست‌کم یک نماد منتخب داشته باشند و (۲) xy حداکثر n نماد منتخب داشته باشد و (۳) به ازای هر $i \geq 0$ رشته‌ی $uv^i xy^i z$ عضو زبان L باشد.

$$a) L = \{a^p b^q c^r d^s \mid p = 0 \text{ or } q = r = s\}$$

$$b) L = \{a^n b^n c^i \mid i \neq n\}$$

¹⁴ Complement

¹⁵ Concatenation

¹⁶ Palindrome

¹⁷ Ogden's Lemma