



دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

درس نظریه‌ی زبان‌ها و ماشین‌ها

تمرین شماره‌ی ۲

موعد تحویل: چهارشنبه ۱۴۰۱/۰۱/۱۷

استاد: دکتر علی موقر

تیم دستیاران درس - نیم‌سال دوم ۰۱ - ۰۰

۳ فروردین ۱۴۰۱

۱. توصیف ماشین‌ها و مفاهیم اولیه‌ی زبان‌های منظم

۱.۱

برای هر کدام از زبان‌های منظم زیر که به زبان طبیعی توصیف شده‌اند، یک ماشین متناهی قطعی^۱ طراحی نمایید که رشته‌های^۲ آن زبان را بپذیرد. (۳۰ نمره)

الف) مجموعه‌ی همه‌ی رشته‌های قابل تعریف روی الفبای $\{a, b\}$ که aa را دارند اما فاقد bb هستند.

ب) مجموعه‌ی همه‌ی رشته‌های قابل تعریف روی الفبای $\{a, b\}$ که تعداد a ها مضرب سه بوده و نیز فاقد زیررشته‌ی aba باشند.

پ) مجموعه‌ی همه‌ی رشته‌های قابل تعریف روی الفبای $\{0, 1\}$ که تعداد 0 ها و 1 ها در آن‌ها برابر باشد و هر پیشوندی^۳ از رشته‌ی مربوطه را که در نظر بگیریم، حداکثر یک 0 بیشتر از تعداد 1 ها و حداکثر یک 1 بیشتر از تعداد 0 ها داشته باشد.

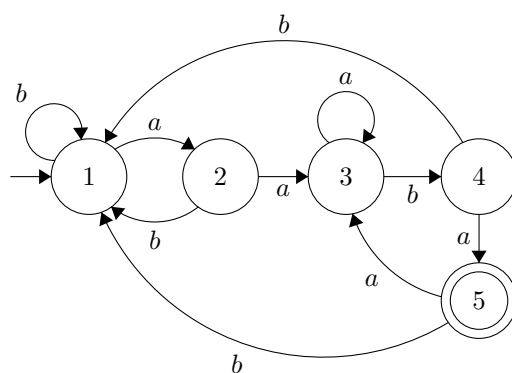
ت) مجموعه‌ی همه‌ی رشته‌های قابل تعریف روی الفبای $\{0, 1\}$ که اگر آن‌ها را معادل دودویی اعداد طبیعی در نظر بگیریم، عدد مربوطه هم‌نهمشت 1 به پیمانه‌ی 3 باشد.

ث) مجموعه‌ی همه‌ی رشته‌های قابل تعریف روی الفبای $\{0, 1\}$ که صرفاً یا دو 0 متوالی و یا دو 1 متوالی داشته باشند.

ج) مجموعه‌ی همه‌ی رشته‌های قابل تعریف روی الفبای $\{a, b\}$ که هر پنج کاراکتر متوالی را که در نظر بگیریم، بین آن‌ها دست‌کم دو a وجود داشته باشد.

۲.۱

برای هر کدام از موارد زیر، ابتدا یک توصیف صوری^۴ نوشته، سپس زبانی که هریک می‌پذیرند را به مانند بخش ۱.۱ بیان کنید. (۸ نمره)



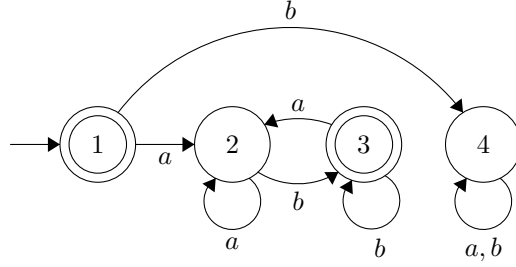
¹Deterministic Finite Automata (DFA)

²Strings

³Prefix

⁴Formal

(ب)



۳.۱

ماشین متناهی قطعی $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ را در نظر بگیرید. تابع δ^* از مجموعه‌ی $Q \times \Sigma^*$ به Q با فرض اینکه $a \in \Sigma$ و $q \in Q$

$\omega \in \Sigma^*$ ، به شیوه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:

$$1) \delta^*(q, \epsilon) = q$$

$$2) \delta^*(q, \omega a) = \delta(\delta^*(q, \omega), a)$$

اثبات کنید که به ازای هر دو رشته‌ی ω_1 و ω_2 روی الفبای Σ تساوی زیر صدق می‌کند (۶ نمره):

$$\delta^*(q, \omega_1 \omega_2) = \delta^*(\delta^*(q, \omega_1), \omega_2)$$

۴.۱

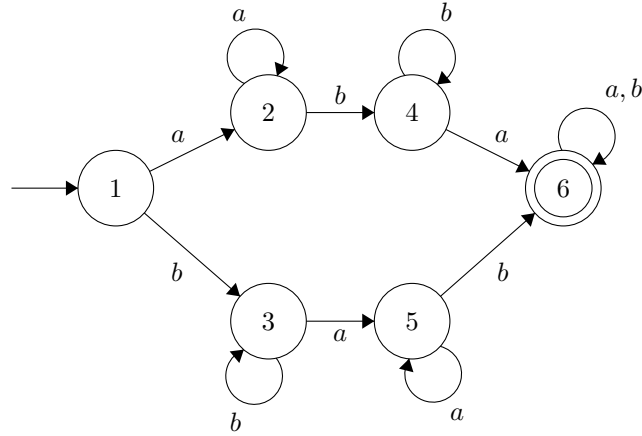
ماشین متناهی قطعی $\mathcal{A} = (Q, \Sigma = \{a, b\}, \delta, q_0, F)$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم ماشین جدید $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma', \delta', q_0, F')$ را به شیوه‌ی

زیر تعریف کنیم:

$$Q' = Q \cup \{r, s\} \quad \Sigma' = \Sigma \cup \{\$ \} \quad F' = \{s\} \quad \delta'(q, t) = \begin{cases} \delta(q, t) & q \in Q, t \in \Sigma \\ s & q \in F, t = \$ \\ q_0 & q \in Q \setminus F, t = \$ \\ r & q \in \{r, s\}, t \in \{a, b\} \\ s & q \in \{r, s\}, t = \$ \end{cases}$$

الف) بر حسب زبان ماشین دلخواه \mathcal{A} توضیح دهید که ماشین \mathcal{A}' چه رشته‌هایی را می‌پذیرد. (۴ نمره)

ب) اگر \mathcal{A} ماشین زیر باشد، دیاگرام مربوط به \mathcal{A}' را رسم نمایید. (۴ نمره)

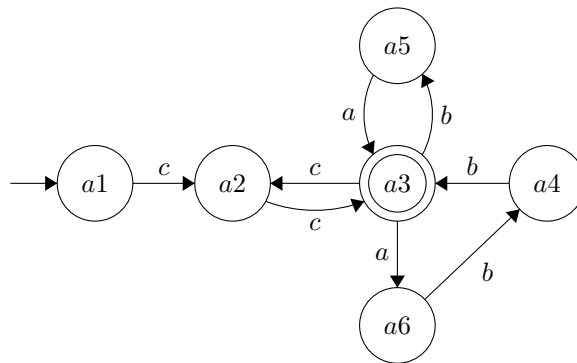


۵.۱

ماشین متناهی غیرقطعی $\mathcal{A} = (Q_1, \Sigma = \{a, b, c\}, \delta_1, q_{01}, F_1)$ ^۵ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم ماشین جدید $\mathcal{A}' = (Q_1, \Sigma, \delta'_1, q_{01}, F'_1)$ را به شیوه‌ی زیر تعریف کنیم:

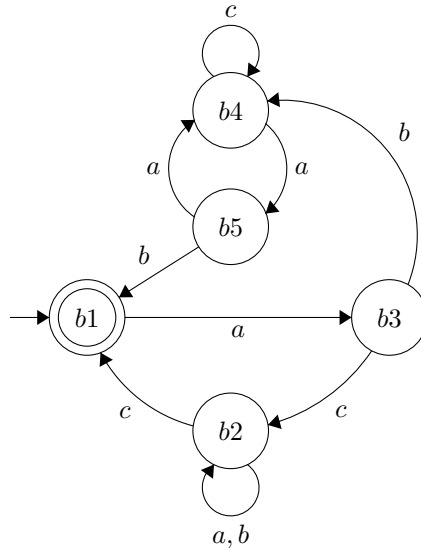
$$F'_1 = \{q_{01}\} \quad \delta'_1(q, t) = \begin{cases} \delta_1(q, t) & \text{if } \delta_1(q, t) \cap F_1 = \emptyset \\ \delta_1(q, t) \cup \{q_0\} & \text{Otherwise} \end{cases}$$

الف) اگر \mathcal{A} ماشین زیر باشد، دیاگرام مربوط به \mathcal{A}' را رسم نمایید. (۶ نمره)



⁵Nondeterministic Finite Automata (NFA)

ب) فرض کنید که \mathcal{A}' ماشین حاصل از قسمت الف و $\mathcal{B} = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_{02}, F_2)$ بیانگر ماشین متناهی غیرقطعی زیر باشد:



عملگر فرضی \diamond را در نظر می‌گیریم. اگر $\mathcal{L}(\mathcal{A}')$ زبان ماشین \mathcal{A}' و $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ زبان ماشین \mathcal{B} باشد، ماشین $C = (Q_3, \Sigma, \delta_3, q_{03}, F_3)$ را که پذیرنده‌ی زبان $\mathcal{L}(\mathcal{B}) \diamond \mathcal{L}(\mathcal{A}')$ است و به شیوه‌ی زیر تعریف می‌گردد، رسم نمایید. (۶ نمره)

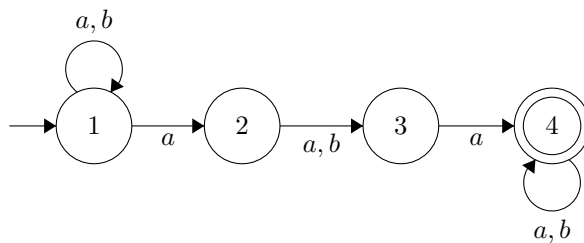
$$Q_3 = Q_1 \cup Q_2 \quad q_{03} = q_{02} \quad F_3 = F'_1 \quad \delta_3(q, t) = \begin{cases} \delta_2(q, t) & \text{if } q \in Q_2 \text{ and } \delta_2(q, t) \cap F_2 = \emptyset \\ \delta_2(q, t) \cup \{q_{01}\} & \text{if } q \in Q_2 \text{ and } \delta_2(q, t) \cap F_2 \neq \emptyset \\ \delta'_1(q, t) & \text{if } q \in Q'_1 \end{cases}$$

۲. هم‌ارزی ماشین‌های متناهی قطعی و غیرقطعی

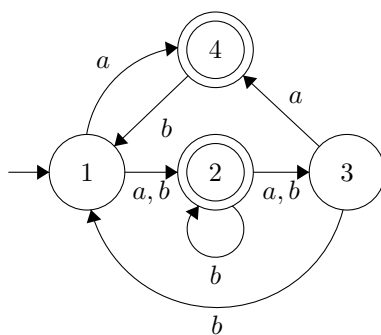
برای هر کدام از NFAهای زیر، یک DFA معادل^۶ رسم کنید. (۱۰ نمره)

^۶Equivalent

(الف)



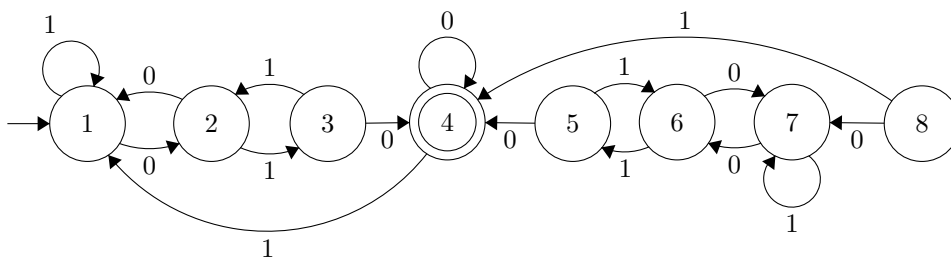
(ب)



۳. کمینه‌سازی ماشین‌های متناهی قطعی

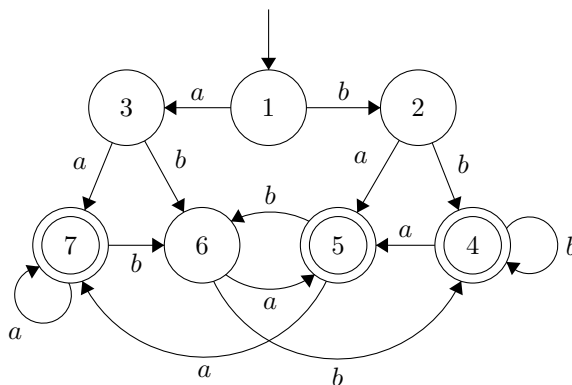
برای هر کدام از ماشین‌های زیر، DFA معادل با تعداد حالت‌های کمینه^۷ را طراحی کنید. (۲۰ نمره)

(الف)



⁷Minimum-State DFA

(ب)



۴. خواص بستاری^۸ زبان‌های منظم

۱.۴

زبان حاصل از عمل درهم‌سازی کامل^۹ دو زبان A و B را مجموعه‌ی همه‌ی رشته‌های $\omega = a_1b_1 \dots a_kb_k$ تعریف می‌کنیم که $a_i, b_i \in \Sigma$ و $a_1 \dots a_k \in A$ و $b_1 \dots b_k \in B$ باشد. با اثبات ساختاری^{۱۰} نشان دهید که مجموعه‌ی زبان‌های منظم تحت عمل درهم‌سازی کامل بسته است. پس از ارائه‌ی یک تعریف صوری از ماشین پذیرنده‌ی زبان مربوطه، صحت^{۱۱} عملکرد آن را نشان دهید. (۶ نمره)

۲.۴

Σ و Δ را دو الفبای دلخواه در نظر می‌گیریم و تابع f را تابعی از Σ به مجموعه‌ی توانی Δ^* فرض می‌کنیم؛ به نحوی که به ازای هر $b \in \Sigma$ ، $f(b)$ یک زبان منظم باشد. زبان حاصل از عمل جایگزینی^{۱۲} روی زبان A با الفبای Σ تحت تابع f را مجموعه‌ی همه‌ی رشته‌های $\omega = \omega_1 \dots \omega_k$ تعریف می‌کنیم که $\omega_i \in f(a_i)$ و $a_1 \dots a_k \in A$ باشد. با اثبات ساختاری و ارائه‌ی ماشین پذیرنده‌ی زبان حاصل، نشان دهید که مجموعه‌ی زبان‌های منظم تحت عمل جایگزینی بسته است. لازم است که صحت عملکرد ماشین مربوطه را نشان دهید. (۱۰ نمره‌ی امتیازی)

⁸Closure Properties

⁹Perfect Shuffle

¹⁰Proof by Construction

¹¹Correctness

¹²Substitution