



دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

درس نظریه‌ی زبان‌ها و ماشین‌ها

تمرین شماره‌ی ۳

موعد تحویل: یک‌شنبه ۱۴۰۱/۰۲/۱۱

استاد: دکتر علی موقر

تیم دستیاران درس - نیم‌سال دوم ۰۱ - ۰۰

۲۸ فروردین ۱۴۰۱

۱. زبان‌های نامنظم

۱.۱

برای هر کدام از موارد زیر، با استفاده از لم تزریق^۱ اثبات کنید که زبان مربوطه، عضو کلاس زبان‌های منظم نیست. (۱۸ نمره)

- a) $L = \{a^i b^j a^k \mid k > i + j\}$
- b) $L = \{a^i b^j \mid j = i \vee j = 2i\}$
- c) $L = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid n_a(\omega) < 2n_b(\omega)\}$
- d) $L = \{\omega\omega\omega \mid \omega \in \{a, b\}^*\}$
- e) $L = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$
- f) $L = \{\omega \in \{\alpha, \gamma\}^* \mid \omega = \omega_1 \gamma \omega_2 \gamma \dots \gamma \omega_k, \text{ for } k \geq 0, \text{ each } \omega_i \in \alpha^*, \text{ and } \omega_i \neq \omega_j \text{ for } i \neq j\}$

۲.۱

زبان زیر را در نظر بگیرید. نشان دهید که این زبان لم تزریق را ارضاء می‌کند و در ادامه، درخصوص منظم یا نامنظم بودن آن استدلال کنید. (۵ نمره)

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ and if } i = 1 \text{ then } j = k\}$$

۳.۱

نسخه‌ی تغییر یافته‌ای از لم تزریق را با تعریف زیر در نظر بگیرید:

اگر L یک زبان منظم باشد، ثابت n را می‌توان یافت، به نحوی که به ازای هر z_1 و z_2 و z_3 که $z_1 z_2 z_3 \in L$ صدق کند و $|z_2| = n$ ، بتوانیم z_2 را به صورت uvw بازنویسی کنیم، طوری که $|v| \geq 1$ و به ازای هر $i \geq 0$ رشته‌ی $z_1 u v^i w z_3$ عضو زبان L باشد.

الف) لم جدید را اثبات کنید. (۵ نمره‌ی امتیازی)

ب) با به‌کارگیری لم مربوطه، نشان دهید که $L = \{a^i b^j c^j \mid i, j \geq 1\}$ زبانی نامنظم است. (۵ نمره‌ی امتیازی)

¹Pumping Lemma

۴.۱

با تکیه بر خواص بستاری^۲ زبان‌های منظم، نامنظم بودن زبان‌های زیر را اثبات کنید. (۹ نمره)

a) $L = \{a^n b^m c^{n+m} \mid n \geq m \geq 0\}$

b) $L = \{\omega_1 \omega_2 \in \{a, b\}^* \mid |\omega_1| = |\omega_2| \text{ and } \omega_1 \neq \omega_2\}$

c) $L = \{a^n b^{2^k} \mid n, k \geq 1\}$

۲. عبارت‌های منظم

۱.۲

برای هر کدام از زبان‌های منظم زیر، یک عبارت منظم بنویسید. (۹ نمره)

a) $L = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid (n_a(\omega) - n_b(\omega)) \bmod 3 = 2\}$

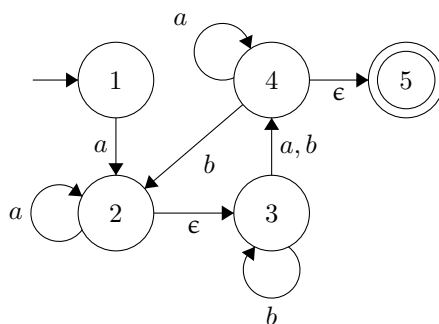
b) $L = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid (2n_a(\omega) + 3n_b(\omega)) \bmod 2 = 0\}$

c) $L = \{a^n b^m, n \geq 3, m \leq 4\}$

۲.۲

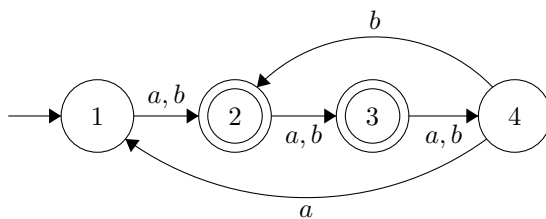
در هر مورد، یک عبارت منظم بنویسید که توصیف‌کننده‌ی زبان منظمی باشد که ماشین مربوطه آن را می‌پذیرد. (۱۲ نمره)

a)

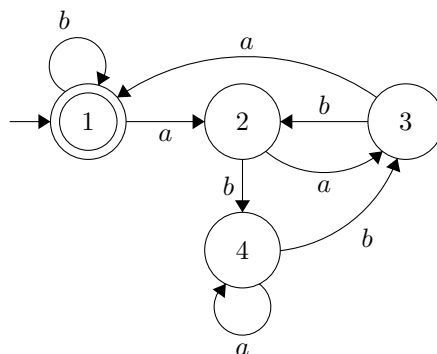


²Closure Properties

b)



c)



۳.۲

برای هر کدام از عبارت‌های منظم زیر، یک ماشین متناهی طراحی کنید که پذیرنده‌ی زبان منظمی باشد که عبارت مربوطه آن را توصیف می‌کند. ماشین شما باید مشابهتی قابل تشخیص با عبارت منظم مربوطه داشته باشد؛ در نتیجه در رسم آن صرفاً از روش‌های الگوریتمی استفاده نمایید. (۹ نمره)

a) $((aa \cup b)^*(aba)^*bab)^*$

b) $(a \cup b)^*(abb \cup ababa)(a \cup b)^*$

c) $(a^*bb)^* \cup bb^*a^*$

۴.۲

در هر مورد، نشان دهید که همانی مربوطه برقرار است. (۹ نمره)

a) $(a \cup b)^* = (a^* \cup ba^*)^*$

b) $b^+(a^*b^* \cup \epsilon)b = b(b^*a^* \cup \epsilon)b^+$

c) $(ba)^+(a^*b^* \cup a^*) = (ba)^*ba^+(b^* \cup \epsilon)$

۳. گرامرهای منظم

۱.۳

گرامرهای زیر، تولیدکننده‌ی زبان‌های منظم هستند. برای هریک، گرامری منظم (چپ‌گرد خطی یا راست‌گرد خطی)^۳ بنویسید. (۹ نمره)

a)	b)	c)
$S \rightarrow AAS \mid ab \mid aab$	$S \rightarrow AB$	$S \rightarrow AA \mid B$
$A \rightarrow ab \mid ba \mid \epsilon$	$A \rightarrow aAa \mid bAb \mid a \mid b$	$A \rightarrow AAA \mid Ab \mid bA \mid a$
	$B \rightarrow aB \mid bB \mid \epsilon$	$B \rightarrow bB \mid \epsilon$

۲.۳

هر یک از گرامرهای راست‌گرد خطی زیر را به یک گرامر چپ‌گرد خطی تبدیل کنید که تولیدکننده‌ی همان رشته‌های زبان گرامر اصلی باشد. (۱۰ نمره)

a)	b)
$S \rightarrow aS \mid bA$	$S \rightarrow baaA \mid abbB \mid A \mid \epsilon$
$A \rightarrow bA \mid aB$	$A \rightarrow bS \mid ba$
$B \rightarrow bA \mid aS \mid \epsilon$	$B \rightarrow aaS$

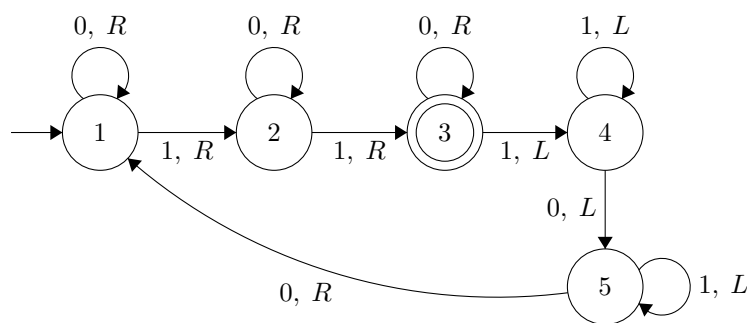
۴. ماشین‌های متناهی توسعه‌یافته

۱.۴ ماشین متناهی دوجهته

یک ماشین جدید مشابه با ماشین متناهی قطعی تعریف می‌کنیم که در آن، هد خوانش ماشین می‌تواند علاوه بر حرکت به سمت راست روی نوار، به سمت چپ نیز حرکت کند. به طور صوری، ماشین جدید یک پنج‌تایی $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ است که به‌جز تابع گذار δ ، سایر علائم به مانند قبل تعریف می‌شوند. تابع گذار، تابعی از مجموعه‌ی $Q \times \Sigma$ به مجموعه‌ی $Q \times \{L, R\}$ است. $\delta(q, a) = (p, L)$ به این معناست که ماشین از حالت q با خوانش نماد a به حالت p تغییر حالت داده و هد روی نوار، یک حرف به سمت چپ حرکت می‌کند (متعاقباً R به معنای حرکت به سمت راست است).

³Left-linear or Right-linear

ماشین زمانی رشته‌ی مربوطه را می‌پذیرد که پس از خواندن آخرین (راست‌ترین) نماد آن رشته، در یک حالت پایانی قرار گرفته باشد. این ماشین جدید را ماشین متناهی قطعی دوجهته^۴ نام‌گذاری می‌کنیم و آن را با سرواژه‌ی 2DFA نشان می‌دهیم. می‌توان نشان داد که توان محاسباتی این ماشین جدید، نسبت به ماشین‌های متناهی معمولی افزایشی نداشته و هر دو گروه این ماشین‌ها، تنها پذیرنده‌ی زبان‌های منظم هستند. با توجه به توضیحات بالا، 2DFA زیر را در نظر گرفته، برای آن یک NFA معادل طراحی کنید. (۱۰ نمره)



۲.۴ ماشین متناهی دوجهته‌ی علامت‌گذار

یک نسخه‌ی توسعه‌یافته از ماشین سوال قبلی را در نظر بگیرید که ماشین می‌تواند علاوه بر انتخاب در حرکت به سمت راست یا چپ روی نوار، صرفاً یکی از خانه‌های نوار را علامت‌گذاری، و یا علامتی که قبلاً گذاشته را حذف کند. بر این اساس، انتخاب حالت بعدی، نه تنها وابسته به حالت فعلی و نماد خوانده شده از روی نوار، که به وجود یا عدم وجود علامت نیز بستگی دارد. به عبارت دیگر، تابع گذار δ تابعی با دامنه‌ی $Q \times \Sigma \times \{Y, N\}$ است که Y به منزله‌ی وجود و N به منزله‌ی عدم وجود علامت است. متعاقباً، هم‌دامنه‌ی تابع نیز مجموعه‌ی $Q \times \{L, R\} \times \{M, U\}$ است که M به منزله‌ی نشانه‌گذاری و U به منزله‌ی حذف نشانه است. نشان دهید که با وجود این قابلیت‌ها، ماشین جدید نیز تنها پذیرنده‌ی زبان‌های منظم است و از نظر توان محاسباتی، نسبت به ماشین‌های قبلی برتری ندارد. (۱۰ نمره‌ی امتیازی)

⁴Two-way Deterministic Finite Automata