دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

درس نظریه‌ی زبان‌ها و ماشین‌ها

تمرین شماره‌ی ۵

موعد تحویل: شنبه ۱۴۰۱/۰۴/۲۵

استاد: دکتر علی موقر

تیم دستیاران درس – نیم‌سال دوم ۰۱ – ۰۰

۲۸ خرداد ۱۴۰۱

۱. ماشین‌های تورینگ و زبان‌های تورینگ-تشخیص‌پذیر (شمارش‌پذیر بازگشتی)

۱.۱

برای هر کدام از موارد زیر، یک ماشین تورینگ طراحی کنید که پذیرنده‌ی رشته‌های زبان مربوطه باشد.

a) $L = \{a^i b a^j \mid 0 \leq i < j\}$

b) $L = \{a^n b^n a^n b^n \mid n \neq 0\}$

۲.۱

مدل ماشین تورینگ، علاوه بر پذیرش زبان‌های تورینگ-تشخیص‌پذیر [۱] (زبان‌های شمارش‌پذیر بازگشتی [۲])، می‌تواند محاسبه‌کننده‌ی توابع جزئی [۳] هم باشد.

ماشین تورینگ $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$ را محاسبه‌کننده‌ی تابع f با دامنه‌ی $D \subseteq (\Sigma^*)^k$ می‌نامیم، چنانچه هر کدام از مقادیر دامنه را به مجموعه‌ی Γ^* تصویر کند. به عبارت دیگر، به‌ازای هر $(x_1, x_2, ..., x_k)$ عضو دامنه‌ی f داشته باشیم:

$$q_0\ x_1\ \sqcup\ x_2 \ldots \sqcup\ x_k\ \ \vdash_T^*\ \ q_{accept}\ f(x_1,\ x_2\ ,\ \ldots,\ x_k)$$

زمانی که دامنه‌ی تابع، زیرمجموعه‌ی اعداد طبیعی باشد، از سیستم یگانی [۴] برای نمایش اعداد کمک می‌گیریم؛ به این شیوه که هر عدد n را با 1^n نمایش می‌دهیم:

$$q_0\ 1^{n_1}\ \sqcup\ 1^{n_2} \ldots \sqcup\ 1^{n_k}\ \ \vdash_T^*\ \ q_{accept}\ f(n_1,\ n_2\ ,\ \ldots,\ n_k)$$

با توجه به توضیحات بالا، برای هر کدام از موارد زیر یک ماشین تورینگ طراحی نمایید که تابع ریاضی مربوطه را محاسبه نماید. در تمامی موارد، دامنه و هم‌دامنه‌ی تابع مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ است.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = \lceil log_2(x + 1) \rceil$

---

[1] Turing-Recognizable
[2] Recursively enumerable
[3] Partial Function
[4] Unary Numeral System

۳.۱

یک نسخه‌ی تغییریافته از ماشین‌های تورینگ را در نظر بگیرید که در آن به‌جای قابلیت حرکت به سمت چپ، ماشین می‌تواند روی همان خانه از نوار توقف کند. به عبارت دیگر، تعریف تابع گذار به شیوه‌ی زیر تغییر می‌یابد که S نشانه‌ی توقف است:

$$\delta :\ Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{R, S\}$$

نشان دهید که ماشین‌های تعریف بالا، پذیرنده‌ی زبان‌های تورینگ-تشخیص‌پذیر نیستند. توضیح دهید که این ماشین‌ها کدام کلاس از زبان‌ها را تشخیص می‌دهند.

۴.۱

ماشین‌های صف‌دار [۵] مشابه با ماشین‌های پشته‌ای [۶] هستند، با این تفاوت که به جای پشته، یک صف قرار گرفته است. صف، در حکم یک نوار است که نمادها صرفاً از انتهای چپ نوشته و از انتهای راست خوانده می‌شوند. درست مشابه با ماشین‌های پشته‌ای، ورودی‌ها روی یک نوار جداگانه قرار می‌گیرند که ماشین تنها می‌تواند از آن بخواند و امکان نوشتن روی این نوار را ندارد. نوار ورودی، شامل یک نماد خالی است که برای تشخیص انتهای رشته‌ی ورودی به کار می‌رود. ماشین صف‌دار، ورودی را تنها در شرایطی پذیرش می‌کند که به یک حالت پذیرش برسد.
نشان دهید که ماشین‌های صف‌دار دارای قطعیت [۷]، همان کلاس زبان‌های تورینگ-تشخیص‌پذیر را نمایندگی می‌کنند. برای تعریف قطعیت، همان تعریف مربوط به ماشین‌های پشته‌ای را در نظر بگیرید.

۲. ماشین‌های خطی کران‌دار و یک کلاس جدید از زبان‌ها

هر ماشین خطی کران‌دار [۸] را درست مانند یک ماشین تورینگ به شکل یک هفت‌تایی $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$ تعریف می‌کنیم، با این تفاوت که دو نماد اضافه‌ی] و [هم تعریف می‌شوند که عضو Γ نیستند. پیکربندی [۹] اولیه‌ی ماشین به صورت $q_0[x]$ است و در جریان محاسبه، هد روی نوار اجازه ندارد که براکت‌ها را با نماد دیگری جایگزین کرده یا از محدوده‌ی تعریف شده توسط آن‌ها عبور کند.

[5] Queue Automaton
[6] Push-down Automaon
[7] Deterministic
[8] Linear Bounded Automaton
[9] Configuration

کلاس زبان‌هایی که برای آن‌ها ماشین خطی کران‌دار قابل تعریف است، تحت عنوان زبان‌های حساس به متن [۱۰] شناخته می‌شوند. این کلاس، زیرمجموعه‌ی محض کلاس زبان‌های تورینگ-تشخیص‌پذیر است و نیز کلاس زبان‌های مستقل از متن [۱۱] (منهای رشته‌ی تهی) زیرمجموعه‌ی محض آن است. با توجه به توضیحات بالا، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

۱.۲

برای هر کدام از زبان‌های زیر، یک ماشین خطی کران‌دار دارای قطعیت طراحی کنید.

a) $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$

b) $L = \{\omega\omega \mid \omega \in \{a, b\}^*\}$

۲.۲

یک گرامر حساس به متن $G = (V, \Sigma, R, S)$ را گرامری تعریف می‌کنیم که تمام قواعد آن به فرمت زیر باشند؛ که $X \in V$ ، و α، β و γ اعضای مجموعه‌ی $(V \cup \Sigma)^*$ هستند. این گرامرها، همانطور که از اسمشان برمی‌آید، تولیدکننده‌ی زبان‌های حساس به متن هستند.

$$\alpha X \gamma \longrightarrow \alpha\beta\gamma \quad where \quad \beta \neq \epsilon$$

ابتدا تعیین کنید که گرامر زیر چه زبانی را توصیف می‌کند، سپس آن را به نحوی تغییر دهید که یک گرامر حساس به متن به دست آید.

$S \to ACaB$	$aD \to Da$
$Ca \to aaC$	$AD \to AC$
$CB \to DB$	$aE \to Ea$
$CB \to E$	$AE \to \epsilon$

[10] Context-sensitive Languages
[11] Context-free Languages

۳. تشخیص‌پذیری و تصمیم‌پذیری

۱.۳

فضیه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

قضیه: اگر S_1 یک مجموعه‌ی شمارا و S_2 یک مجموعه‌ی ناشمارا باشد، و $S_1 \subset S_2$ صدق کند، S_2 الزاماً بی‌شمار عنصر را در برمی‌گیرد که عضو S_1 نیستند.

با به‌کارگیری قضیه‌ی بالا، اثبات کنید که به ازای هر الفبای ناتهی Σ، بی‌نهایت زبان روی این الفبا قابل تعریف‌اند که تورینگ-تشخیص‌پذیر نیستند.

۲.۳

اثبات کنید که چنانچه زبان‌های L و $\bar{L}$ هر دو تورینگ-تشخیص‌پذیر باشند، هر دوی آن‌ها تورینگ-تصمیم‌پذیرند [۱۲].

۳.۳

می‌دانیم که زبان‌های مستقل از متن نسبت به عمل مکمل بسته نیستند. اثبات کنید که مکمل یک زبان مستقل از متن الزاماً تورینگ-تصمیم‌پذیر است (۵ نمره‌ی امتیازی صرفاً به ازای ارائه‌ی یک کلیت از اثبات).

۴.۳

فرض کنید A و B دو زبان تورینگ-تصمیم‌پذیر و C یک زبان تورینگ-تشخیص‌پذیر باشد. ثابت کنید:

الف) زبان‌های $A \cup B$ و $A \cap B$ تورینگ-تصمیم‌پذیر هستند.

ب) زبان A^R تورینگ-تصمیم‌پذیر و C^R تورینگ-تشخیص‌پذیر است.

ج) زبانِ $\bar{A}$ تورینگ-تصمیم‌پذیر است ولی زبان $\bar{C}$ لزوماً تورینگ-تشخیص‌پذیر نیست.

---

[12] Turing-Decidable

۴. کاهش‌پذیری و دیگر روش‌های اثبات تصمیم‌ناپذیری

۱.۴

با استفاده از روش کاهش [۱۳]، نشان دهید مسائلی که در ادامه می‌آیند، تصمیم‌ناپذیر [۱۴] هستند:

الف) مسئله‌ی تعیین این که آیا ماشین تورینگ T هر رشته‌ی ورودی را می‌پذیرد.

ب) مسئله‌ی تعیین این که به ازای ماشین‌های T_1 و T_2 آیا $L(T_1) \subseteq L(T_2)$ می‌باشد.

ج) مسئله‌ی تعیین این که آیا زبان T نامنتاهی است یا نه.

۲.۴

قضیه‌ی رایس [۱۵] یک قضیه‌ی مهم در مبحث تصمیم‌پذیری است. ابتدا به تعاریف زیر دقت نمایید:

تعریف ۱ : هر زیرمجموعه از مجموعه‌ی زبان‌های تورینگ-تشخیص‌پذیر را یک ویژگی[۱۶] نام‌گذاری می‌کنیم.

تعریف ۲ : یک ویژگی ماشین‌های تورینگ غیربدیهی است، اگر تهی نباشد و شامل همه‌ی زبان‌های تورینگ-تشخیص‌پذیر نباشد. به عبارت دیگر، حداقل یک ماشین تورینگ وجود داشته باشد که دارای این ویژگی نباشد و یک ماشین تورینگ باشد که این ویژگی را داشته باشد (زبان ماشین، عضو مجموعه‌ی مربوطه باشد).

قضیه‌ی رایس : اگر R یک ویژگی زبانی غیربدیهی ماشین‌های تورینگ باشد، آن‌گاه مسئله P_R به شرح زیر تصمیم‌ناپذیر است:

آیا ماشین تورینگ T ویژگی R را دارد؟

الف) قضیه‌ی رایس را اثبات کنید. (۵ نمره‌ی امتیازی)

ب) با توجه به قضیه‌ی رایس، نشان دهید مسئله‌ی «به ازای یک ماشین تورینگ T، آیا حداقل یک رشته در $L(T)$ وجود دارد؟» تصمیم‌ناپذیر است. (۵ نمره‌ی امتیازی)

[13] Reduction
[14] Undecidable
[15] Rice's Theorem
[16] Property