



دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

درس نظریه‌ی زبان‌ها و ماشین‌ها

تمرین شماره‌ی ۱

موعد تحویل: چهارشنبه ۱۴۰۰/۱۲/۲۵

استاد: دکتر علی موقر

تیم دستیاران درس - نیم‌سال دوم ۰۱ - ۰۰

۱. منطق، برهان، قواعد استنتاج

۱.۱

بدون به کارگیری جدول درستی، هم‌ارزی‌های منطقی زیر را با ذکر هر مرحله اثبات کنید. (۲۰ نمره)

a) $\neg(p \vee \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \equiv \neg p$

b) $\neg((\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee (p \wedge q) \equiv p$

c) $p \vee q \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \equiv p \vee q \vee r$

d) $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q \wedge r) \equiv p \wedge q$

۲.۱

برای هر عبارت زیر، یا با استفاده از اصول فرگی^۱ نشان دهید که عبارت مربوطه، یک همان‌گویی^۲ است؛ و یا با اختصاص مقادیر درستی^۳، نشان دهید که اینگونه نیست. (۲۰ نمره)

a) $\neg(\neg p) \rightarrow p$

b) $(p \rightarrow q \rightarrow r) \rightarrow p \rightarrow r$

c) $(\neg r \rightarrow \neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow p \rightarrow q \rightarrow r$

d) $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q \rightarrow \neg p$

e) $p \rightarrow \neg q \rightarrow \neg(p \rightarrow q)$

¹ Frege's Axioms

² Tautology

³ Truth Values

۳.۱

برای هر کدام از استدلال‌های زیر، یا با به کارگیری قواعد استنتاج، شیوه‌ی اثبات حکم را مرحله به مرحله نشان دهید؛ و یا با ذکر یک مثال نقض، نشان دهید که استدلال مربوطه نامعتبر است. برای مثال نقض، مقادیر درستی را به نحوی اختصاص دهید که پیش‌فرض‌ها درست، اما حکم نادرست باشد. (۳۰ نمره)

a)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \neg r \\ \hline \therefore \neg(p \vee r) \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ q \rightarrow r \\ r \vee \neg s \\ \neg s \rightarrow q \\ \hline \therefore s \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow r \\ p \rightarrow (q \vee \neg r) \\ \neg q \vee \neg s \\ \hline \therefore s \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{l} (\neg p \vee q) \rightarrow r \\ r \rightarrow (s \vee t) \\ \neg s \wedge \neg u \\ \neg u \rightarrow \neg t \\ \hline \therefore p \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{l} \neg p \vee q \rightarrow r \\ s \vee \neg q \\ \neg t \\ p \rightarrow t \\ \neg p \wedge r \rightarrow \neg s \\ \hline \therefore \neg q \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ q \rightarrow r \\ p \wedge s \rightarrow t \\ \neg r \\ \neg q \rightarrow u \wedge s \\ \hline \therefore t \end{array}$$

۲. خواص مجموعه‌ها، کاردینالیتی، مجموعه‌های شمارا و ناشمارا

۱.۲

برای هر کدام از رابطه‌های زیر، تعیین کنید که رابطه‌ی مربوطه، دارای کدام یک از خواص بازتابی^۴، تقارنی^۵ و تعدی^۶ است. کدام رابطه‌ها هم‌ارزی^۷ و کدام یک ترتیب جزئی^۸ هستند؟ مجموعه‌ی S در مورد آخر را مجموعه‌ی همه‌ی رشته‌های^۹ قابل تعریف روی یک الفبای دلخواه در نظر بگیرید. (۱۰ نمره)

- a) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x R y \equiv x \geq y$
- b) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x R y \equiv x^2 + y^2 = 1$
- c) $\forall x, y \in \mathbb{Z}^+, x R y \equiv x \mid y$
- d) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x R y \equiv |x| = |y|$
- e) $\forall x, y \in S, x R y \equiv x \text{ and } y \text{ begin with the same ten characters}$

۲.۲

موارد زیر را اثبات کنید:

الف) مجموعه‌های $(0,1)$ و $[0,1]$ کاردینالیتی یکسانی دارند. (۱۰ نمره)

ب) اگر A و B هر دو مجموعه‌ی دلخواه نامتناهی شمارا باشند، $A \times B$ نیز یک مجموعه‌ی نامتناهی شمارا خواهد بود. (۱۰ نمره)

⁴ Reflexive
⁵ Symmetric
⁶ Transitive
⁷ Equivalence
⁸ Partial Order
⁹ Strings