۱ منطق، برهان و قواعد استنتاج

۱.۱

این قسمت را با استفاده از قواعد گفته شده در کلاس حل تمرین پیش می‌بریم.

$a)$

$$\begin{aligned}
\neg(p \vee \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) &\equiv (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) && Demorgan\\
&\equiv \neg p \wedge (\neg q \vee q) && Distributive\\
&\equiv \neg p \wedge T && Negation\\
&\equiv \neg p && Identity
\end{aligned}$$

$b)$

$$\begin{aligned}
\neg((\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee (p \wedge q) &\equiv \neg(\neg p \wedge (q \vee \neg q)) \vee (p \wedge q) && Distributive\\
&\equiv \neg(\neg p \wedge T) \vee (p \wedge q) && Negation\\
&\equiv \neg(\neg p) \vee (p \wedge q) && Identity\\
&\equiv p \vee (p \wedge q) && \\
&\equiv p && Absorption
\end{aligned}$$

$c)$

$$\begin{aligned}
p \vee q \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) &\equiv (p \vee q) \vee (\neg(p \vee q) \wedge r) && Demorgan\\
&\equiv ((p \vee q) \vee \neg(p \vee q)) \wedge ((p \vee q) \vee r) && Distributive\\
&\equiv T \wedge ((p \vee q) \vee r) && Negation\\
&\equiv (p \vee q) \vee r && Identity\\
&\equiv p \vee q \vee r && Associative
\end{aligned}$$

$d)$

$$\begin{aligned}
(\neg p \vee \neg q) \to (p \wedge q \wedge r) &\equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \vee ((p \wedge q) \wedge r) && Conditional\ Disjunction\\
&\equiv (p \wedge q) \vee ((p \wedge q) \wedge r) && Demorgan\\
&\equiv p \wedge q && Absorption
\end{aligned}$$

۲.۱

در حل این مسئله از دو قضیه زیر استفاده می‌کنیم که در کلاس حل تمرین به آنها اشاره شده است، به همین دلیل فقط آنها را ذکر می‌کنیم.

$$(\Sigma \cup \{\phi\} \vdash \psi) \Rightarrow (\Sigma \vdash (\phi \to \psi))$$

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma \cup \{\neg\phi\} \vdash \psi \\ \Sigma \cup \{\neg\phi\} \vdash \neg\psi \end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma \vdash \phi$$

در معادلات اولی را $Deduction\,Theorem$ و دومی را $Theorem$ ۲ می‌نامیم.

$a)$

$$\left.\begin{array}{l} \{\neg(\neg p), \neg p\} \vdash (\neg p) \\ \{\neg(\neg p), \neg p\} \vdash \neg(\neg p) \end{array}\right\} \Rightarrow \neg(\neg p) \vdash p \qquad Theorem\ ۲$$

$$\vdash \neg(\neg p) \to p \qquad Deduction\,Theorem$$

$b)$

$$\begin{array}{l} Counterexample: \quad p = T, q = F, r = F \\ (p \to q \to r) = (T \to (F \to F)) = (T \to T) = T \\ (p \to r) = (T \to F) = F \\ \Rightarrow ((p \to q \to r) \to (p \to r)) = F \end{array}$$

$c)$

$$\begin{array}{l} Counterexample: \quad p = T, q = T, r = F \\ (\neg r \to \neg q \to \neg p) = (T \to (F \to F)) = (T \to T) = T \\ (p \to q \to r) = (T \to (T \to F)) = (T \to F) = F \\ \Rightarrow ((\neg r \to \neg q \to \neg p) \to (p \to q \to r)) = F \end{array}$$

$d)$

$$\begin{array}{rl} \{(p \to q), \neg q, \neg(\neg p)\} \vdash p & Part\ a \\ \{(p \to q), \neg q, \neg(\neg p)\} \vdash (p \to q) & \\ \{(p \to q), \neg q, \neg(\neg p)\} \vdash q & Modus\ Ponens \\ \{(p \to q), \neg q, \neg(\neg p)\} \vdash \neg q & \\ \{(p \to q), \neg q\} \vdash \neg p & Theorem\ ۲ \\ \{(p \to q)\} \vdash (\neg q \to \neg p) & Deduction\,Theorem \\ \vdash (p \to q) \to (\neg q \to \neg p) & Deduction\,Theorem \end{array}$$

$e)$

$$
\begin{aligned}
\{p, \neg q, (p \to q)\} &\vdash p \\
\{p, \neg q, (p \to q)\} &\vdash (p \to q) \\
\{p, \neg q, (p \to q)\} &\vdash q && Modus\ Ponens \\
\{p, \neg q, (p \to q)\} &\vdash \neg q \\
\{p, \neg q\} &\vdash \neg(p \to q) && Theorem\ ٢ \\
\{p\} &\vdash (\neg q \to \neg(p \to q)) && Deduction\ Theorem \\
&\vdash (p \to \neg q \to (p \to q)) && Deduction\ Theorem
\end{aligned}
$$

٣.١

$a)$

$$
\begin{aligned}
&p \to q \\
&\neg q \\
&\neg p && IndirectProof \\
&\neg p \wedge \neg q \\
&(\neg p \wedge \neg q) \leftrightarrow \neg(p \vee q) && Demorgan \\
&\neg(p \vee q) && Direct\ Proof
\end{aligned}
$$

$b)$

$$
\begin{aligned}
&Counterexample: \quad p = T, q = T, r = T, s = F \\
&(p \leftrightarrow q) = (T \leftrightarrow T) = T \\
&(q \to r) = (T \to T) = T \\
&(r \vee \neg s) = (T \vee T) = T \\
&(\neg s \to q) = (T \to T) = T \\
&s = F
\end{aligned}
$$

$c)$

$$
\begin{aligned}
&Counterexmaple: \quad p = T, q = T, r = T, s = F \\
&p = T \\
&(p \to r) = (T \to T) = T \\
&(p \to (q \vee \neg r)) = (T \to (T \vee F)) = (T \to T) = T \\
&(\neg q \vee \neg s) = (F \vee T) = T \\
&s = F
\end{aligned}
$$

$d)$

$$\neg s \land \neg u$$
$$\neg s$$
$$\neg u$$
$$\neg u \to \neg t$$
$$\neg t \qquad \textit{Direct Proof}$$
$$\neg(s \lor t)$$
$$r \to (s \lor t)$$
$$\neg r \qquad \textit{Indirect Proof}$$
$$(\neg p \lor q) \to r$$
$$\neg(\neg p \lor q) \qquad \textit{Indirect proof}$$
$$\neg(\neg p \lor q) \leftrightarrow (p \land \neg q) \qquad \textit{Demorgan}$$
$$p \land \neg q \qquad \textit{Direct Proof}$$
$$p$$

$e)$

$$p \to t$$
$$\neg t$$
$$\neg p \qquad \textit{Indirect Proof}$$
$$q \to (\neg p \lor q)$$
$$(\neg p \lor q) \to r$$
$$q \to r$$
$$q \to (\neg p \land r)$$
$$(\neg p \land r) \to \neg s$$
$$q \to \neg s$$
$$q \to \neg(s \lor \neg q)$$
$$s \lor \neg q$$
$$\neg q \qquad \textit{Proof By Contradiction}$$

$f)$

$$\begin{array}{ll}
q \to r & \\
\neg r & \\
\neg q & Indirect\ Proof \\
p \vee q & \\
p & \\
\neg q \to u \wedge s & \\
u \wedge s & Direct\ Proof \\
s & \\
p \wedge s & \\
p \wedge s \to t & \\
t & Direct\ Proof
\end{array}$$

۲ خواص مجموعه‌ها، کاردینالیتی و مجموعه‌های شمارا و ناشمارا

۱.۲

$a)$ در ابتدا این رابطه خاصیت بازتابی دارد زیرا برای هر عدد حقیقی x داریم $x \geqslant x$ که نشان می‌دهد xRx. این رابطه خاصیت تقارنی ندارد زیرا طبق تعریف داریم $۲R۱$ ولی رابطه $۱R۲$ درست نیست. می‌توان گفت که این رابطه خاصیت ضدتقارنی دارد زیرا برای هر دو عدد حقیقی x, y اگر داشته باشیم $x \geqslant y$ و $y \geqslant x$ نتیجه می‌دهد که x و y مساوی هستند. در انتها خاصیت تعدی نیز دارد چون اگر $y \geqslant x$ و $z \geqslant y$، می‌توان نتیجه گرفت که $z \geqslant x$ که خاصیت تعدی را نتیجه می‌دهد.

با توجه به خاصیت‌های گفته شده این رابطه ترتیب جزئی است چون بازتابی، ضدتقارنی و تعدی است ولی هم ارزی نیست چون تقارنی نیست.

$b)$ خاصیت بازتابی ندارد چون $۰R۰$ درست نیست که مخالف خاصیت بازتابی است. این رابطه تقارنی است زیرا اگر $x^۲ + y^۲ = ۱$ می‌توان گفت $y^۲ + x^۲ = ۱$ که نشان می‌دهد از درستی xRy می‌توان yRx را نتیجه گرفت. همچنین خاصیت ضدتقارنی ندارد چون هردو $۰/۸R۰/۶$ و $۰/۶R۰/۸$ درست هستند. برای خاصیت تعدی نیز مانند قبلی می‌توان مثال نقض زیر را زد که $۰R۱$ و $۱R۰$ درست هستند ولی $۰R۰$ درست نیست که مخالف تعدی است.

چون این رابطه خاصیت بازتابی ندارد بوضوح هیچ‌کدام از ترتیب جزئی و هم‌ارزی نیست.

$c)$ این رابطه خاصیت بازتابی دارد زیرا برای هر عدد طبیعی x می‌دانیم که $x|x$ که نتیجه می‌دهد xRx. این رابطه خاصیت تقارنی ندارد زیرا داریم $۱R۲$ ولی نداریم $۲R۱$. اما خاصیت ضد تقارنی دارد زیرا برای هر دو عدد طبیعی x, y اگر $x|y$ و $y|x$ می‌توان نتیجه گرفت که دو عدد یکسان هستند که خاصیت ضدتقارنی را نتیجه می‌دهد. خاصیت تعدی نیز برقرار است زیرا برای هر ۳ عدد طبیعی x, y, z از دو رابطه $x|y$ و $y|z$ می‌توان $x|z$ را نتیجه گرفت.

باتوجه به خواص گفته‌شده این رابطه ترتیب جزئی است چون خاصیت بازتابی، ضد تقارنی و تعدی دارد ولی هم‌ارزی نیسی چون خاصیت تقارنی ندارد.

$d)$ این رابطه خاصیت بازتابی دارد زیرا $|x| = |x|$ که نتیجه می‌دهد xRx. این رابطه خاصیت تقارنی دارد زیرا از $|x| = |y|$ می‌توان نتیجه گرفت که $|y| = |x|$ که خاصیت تقارنی را نتیجه می‌دهد. دقت کنید که این رابطه خاصیت ضدتقارنی ندارد زیرا $۱R - ۱$ و $-۱R۱$. این رابطه خاصیت تعدی نیز دارد زیرا برای هر ۳

عدد حقیقی x, y, z اگر داشته باشیم $|x| = |y|$ و $|y| = |z|$ بوضوح می‌توان نتیجه گفت که $|x| = |z|$ که خاصیت تعدی را نتیجه می‌دهد.

با توجه به خواص گفته شده این رابطه هم‌ارزی است زیرا خواص بازتابی، تقارنی و تعدی را دارد ولی ترتیب جزئی نیست زیرا خاصیت ضدتقارنی ندارد.

(e

این رابطه تقارنی است زیرا اگر۱۰ کاراکتر اولx وy یکسان باشد برعکس این موضوع نیز برقرار است و yRx درست است. اما خاصیت ضدتقارنی ندارد چون اگر دو رشته متفاوت x, y در نظر بگیریم که ۱۰ کاراکتر اول آنها یکی باشد، هردو رابطه xRy و yRx برقرار است که محالف خاصیت ضدتقارنی است. خاصیت تعدی برقرار است چون اگر ۱۰ کاراکتر اول رشته‌های x, y یکسان باشد و ۱۰ کاراکتر اول y, z نیز یکسان باشد بوضوح ۱۰ کاراکتر اول x, z نیز یکسان است که xRz را نتیجه می‌دهد.

لازم به ذکر است که رشته‌های با طول کمتر از ۱۰ اصلا عضو رابطه نیستند. اگر مجموعه‌ای که رابطه روی آن تعریف شده است را مجموعه رشته‌های با طول حداقل ۱۰ در نظر بگیریم خاصیت بازتابی نیز برقرار می‌شود و رابطه یک هم‌ارزی می‌شود ولی ترتیب جزئی نیست.

۲.۲

الف) برای این سوال یک تناظر یک به یک بین $(۰, ۱)$ و $[۰, ۱]$ ارائه می‌دهیم. مجموعه C را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$C = \{۲^i | i \in \mathbb{Z}, i \leqslant -۲\}$$

حال تابع یک به یک و پوشای $f : (۰, ۱) \to [۰, ۱]$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\forall x \in (۰, ۱) : \quad f(x) = \begin{cases} ۰ & x = \frac{۱}{۲} \\ ۴x & x \in C \\ x & otherwise \end{cases}$$

بازههای $[۰, ۱]$ و $(۰, ۱)$ را به‌صورت زیر به ۳ دسته افراز کنید.

$$A_۱ = \{۰\}, A_۲ = \{۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \cdots\}, A_۳ = [۰, ۱]/(A_۱ \cup A_۲)$$

$$B_۱ = \{\frac{۱}{۲}\}, B_۲ = \{\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۱۶}, \cdots\}, B_۳ = (۰, ۱)/(B_۱ \cup B_۲)$$

تابع f به این صورت عمل می‌کند که ۳ تناظر یک به یک بین $A_۱, B_۱$، $A_۲, B_۲$ و $A_۳, B_۳$ در نظر می‌گیرد که به وضوح خود نیز تناظری یک به یک بین $(۰, ۱)$ و $[۰, ۱]$ می‌دهد. این تناظر گواهی بر تساوی کاردینالیتی دو بازه است.

ب) چون دو مجموعه A و B شمارا هستند تناظری یک به یک از A به $\mathbb{N}$ وجود دارد همچنین تناظری یک به یک از B به $\mathbb{N}$ وجود دارد. پس می‌توان گفت تناظری یک به یک از مجموعه $A \times B$ به مجموعه $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ وجود دارد. پس کافیست ثابت کنیم مجموعه $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ شمارا است.

تابع یک به یک و پوشا $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\forall i, j \in \mathbb{N} : \quad f((i, j)) = \frac{(i + j - ۲)(i + j - ۱)}{۲} + i$$

برای روشن شدن یک به یکی و پوشایی این تابع به جدول زیر دقت کنید که ساختار تابع را نمایش می‌دهد.

j \ i	۱	۲	۳	۴	$\cdots$
۱	۱	۳	۶	۱۰	$\cdots$
۲	۲	۵	۹		
۳	۴	۸			
۴	۷			$\ddots$	
$\vdots$	$\vdots$				

همانظور که مشاهده می‌کنید جدول به تعدادی قطر تقسیم شده است و اعداد طبیعی با توجه به قطرها به ترتیب در آنها قرار گرفته اند. ساختار تابع گفته شده یک به یکی و پوشایی‌اش را تضمین می‌کند که حکم را ثابت می‌کند.