Mohsen Dehghankar

Thursday, May 12, 2022 8:26 PM

1

1.1

a $L=\{a^i b^j a^k \mid k>i+j\}$

- فرض می کنیم طبق لم تزریق برای هر رشته با طول حداقل n، شرایط این لم برقرار باشد.

$w=a^n b^n a^{2n+1}$ ⇐ رشته ی w را این گونه در نظر می گیریم

- فرض می کنیم $w=xyz$ باشد ⇐

$\xrightarrow{\text{باید}} |xy|\leq n \xrightarrow{\text{پس}} y=a^k$

$\longrightarrow xy^iz=a^{n-k}(a^{ki})\,z$

شامل b^n است

- پس با در نظر گرفتن اعداد بزرگ برای i در xy^iz، شرط $k>i+j$ نقض می شود. پس لم تزریق برقرار نیست و زبان نامنظم است.

b $L=\{a^i b^j \mid i=j \vee j=2i\}$

- فرض می کنیم لم تزریق با طول n برقرار است.

- رشته‌ی ω را این گونه تعریف می‌کنیم $\Leftarrow$ $\omega = a^n b^n$

$$\omega = xyz \xrightarrow{\text{باید}} |xy| \leq n \xrightarrow{\text{پس}} y = a^k$$

- پس با در نظر گرفتن i بزرگ در xy^iz ، تعداد a ها از b بیشتر می‌شود و هر دو شرط $i=j$ و $j=2i$ نقض می‌شوند.

$$\underbrace{xy^iz = a^m}_{x} a^{ki} a^{l} b^{j} \longrightarrow \exists i,\quad m+ki+l \neq j$$

$$\&$$

$$2(m+ki+l) \neq j$$

Ⓒ $L = \{ w \in \{a,b\}^* \mid n_a(w) < 2n_b(w) \}$

- فرض می‌کنیم لم تزریق با طول n برقرار است.
- رشته‌ی ω را این گونه در نظر می‌گیریم $\Leftarrow$ $\omega = a^n b^n$

$$\omega = xyz,\ |xy| \leq n \xrightarrow{\text{پس}} y = a^k,\ k > 0$$

- حال کافی است i را به اندازه‌ای بزرگ بگیریم که $\Leftarrow$

$ik > 2n$

$$\xrightarrow{\text{پس}} xy^iz = a^{n-k} a^{ik} b^{n} \longrightarrow n-k+ik > 2n$$

پس xy^iz عضو زبان نیست، پس زبان منظم نیست.

Ⓓ $L = \{ \omega\omega\omega \mid \omega \in \{a,b\}^* \}$

- فرض می کنیم لم تزریق با طول n برقرار است.
- ω را اینگونه در نظر می گیریم

$$\omega = a^n b a^n b a^n b$$

$$w = xyz \,,\ |xy| \leq n \longrightarrow y = a^k$$

$$\longrightarrow xy^2z = \underline{a^{n+k} b a^n b a^n b}$$

این رشته شرایط $\omega\omega\omega$ را ندارد، لم تزریق برقرار نیست و زبان منظم نیست.

ⓔ $L = \{ a^{2^n} \mid n \geq 0 \}$

- فرض می کنیم لم تزریق با طول n برقرار است.
- ω را اینگونه در نظر می گیریم: $\quad w = a^{2^n}$

$$w = xyz \,,\ |xy| \leq n \longrightarrow y = a^k \,,\ k \leq n$$

فرض می کنیم xy^2z نیز عضو زبان باشد، یعنی:

$$\exists n_1 \quad a^{2^n + k} = a^{2^{n_1}} \longleftrightarrow 2^{n_1} - 2^n = k$$

از طرفی چون $n_1 > n$، داریم $\Leftarrow$

$$K = 2^{n_1} - 2^n > 2^n \Longleftrightarrow \underline{K > 2^n \,,\ K \leq n} \quad \times$$

- پس این فرض غلط است و xy^2z عضو زبان نیست، و لم تزریق برقرار

نیست.

---

(۴)

- فرض می‌کنیم لم تزریق با طول n برقرار است.

- w را این گونه در نظر می‌گیریم:

$$w = \alpha^{n} \gamma \alpha^{n+1} \gamma \cdots \gamma \alpha^{2n}$$

- لم تزریق:

$$w = xyz,\ |xy| \leq n \longrightarrow y = \alpha^{k},\ k \leq n$$

$$\xrightarrow{\text{پس}} xy^2z = \underbrace{\alpha^{n-k}\alpha^{2k}}_{w_1'} \gamma \alpha^{n+1} \cdots \gamma \alpha^{2n}$$

$$0 < k \leq n \longrightarrow n+1 \leq n+k \leq 2n$$

- پس یعنی:

$$\exists j \longrightarrow w_1' = \underbrace{\alpha^{n+j}}_{w_j},\ 1 < j \leq n$$

$$\xrightarrow{\text{پس}} xy^2z \notin L$$

پس لم تزریق برقرار نیست.

(۲.۱)

اثبات برقراری لم تزریق $\Leftarrow$

- فرض می‌کنیم $n=1$ است. یعنی ادعا می‌کنیم که برای هر رشته‌ای با طول بزرگ‌تر از (۱)، می‌توان آن را به گونه‌ای به xyz تجزیه کرد که $xy^iz \in L$ و $|xy| \leq n$.

-

حالت I :

$$i=1 \longrightarrow w = ab^N c^N$$

$$N \geq 0$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x=\varepsilon \\ y=a \\ z=b^N c^N \end{cases} \longrightarrow \underline{xy^iz = a^i b^N c^N \in L}$$

حالت II :

$$i=N>1 \longrightarrow w = a^N b^j c^k$$

$$\begin{cases} x=\varepsilon \\ y=a^N \\ z=b^j c^k \end{cases} \longrightarrow xy^iz = \underline{a^{iN} b^j c^k \in L}$$

حالت III :

$$i=0 \longrightarrow w = b^j c^k$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x=\varepsilon \\ y=b \\ z=b^{j-1} c^k \end{cases} \longrightarrow \underline{xy^iz \in L}$$

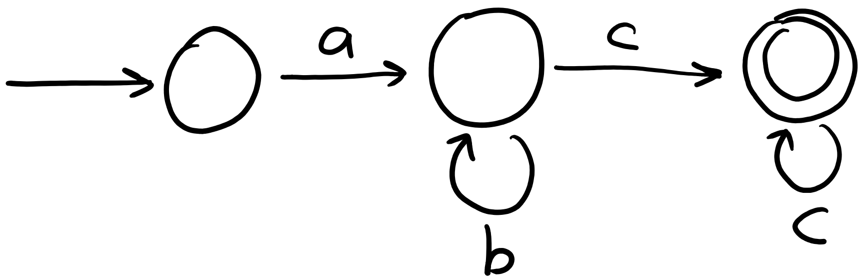
اگر $j=0$ بود، $y=c$ را می‌توان در نظر گرفت.

- پس لم تزریق برقرار است.

حال سعی می‌کنیم ثابت کنیم که L منظم نیست. با برهان خلف فرض می‌کنیم که L منظم است. زبان L_1 را اینگونه تعریف می‌کنیم $\Leftarrow$

$$L_1 = \{ab^j c^k \mid \forall j,k \geq 0\}$$

این زبان منظم است، زیرا DFA زیر آن را تولید می‌کند ⇐



- طبق فرض باید $L \cap L_1$ نیز منظم باشد ⇐

$$L \cap L_1 = \{ab^N c^N \mid N \geq 0\} = L_2$$

- اما L_2 منظم نیست. زیرا با فرض لم تزریق برای طول p، رشته‌ی روبه‌رو شرط لم تزریق را ارضا نمی‌کند.

$$w = ab^p c^p$$

$$w = xyz \,,\ |xy| \leq p \longrightarrow p = \begin{cases} ab^k \\ b^k \end{cases}$$

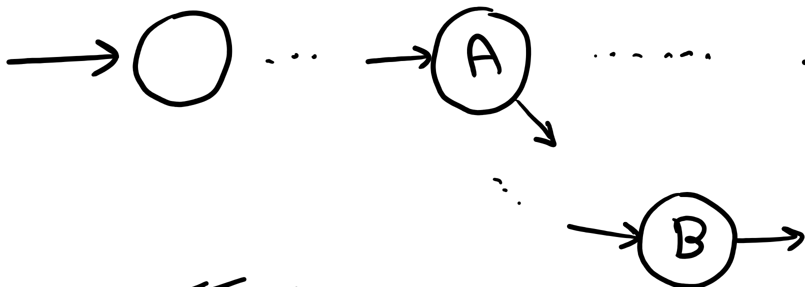
$$\longrightarrow xy^2z = \begin{cases} a^2b^{2k}b^m c^p \notin L_2 \\ ab^{2k}b^m c^p \notin L_2 \end{cases}$$

- پس یعنی L_2 منظم نیست ⟵ L منظم نیست.

۳.۱) الف) فرض می‌کنیم L یک زبان منظم باشد. $w \in L$ را این گونه

در نظر می گیریم $w = z_1 z_2 z_3 , |z_2| = n , n = |Q|$

که در آن $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ، DFA منسوب به L است:



← A را آخرین state ، پس از خواندن z_1 در نظر می گیریم

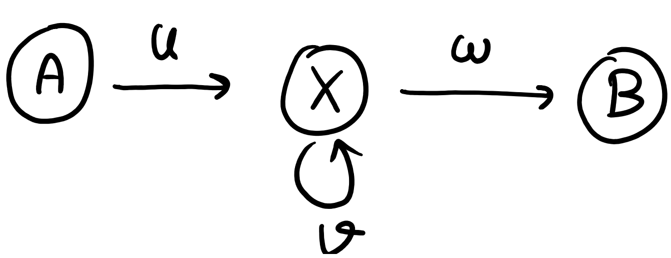
B را آخرین state ، پس از خواندن z_2 در نظر می گیریم

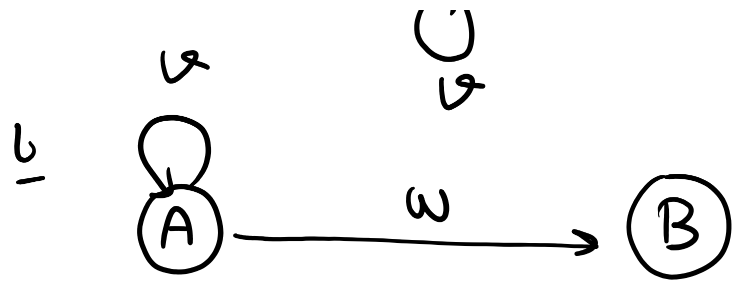
← در مسیر A به B هنگام خواندن z_2 ، به اندازه ی $|z_2| = n$ گام برمی داریم.

پس بدون در نظر گرفتن A به عنوان state شروع، از n تا state گذر خواهیم کرد.

چون $|Q| = n$ ، طبق اصل لانه کبوتری، یا اینکه از یک state مثل X دو بار عبور کردیم یا اینکه بر روی A باز می گردیم.

- پس در مسیر A تا B یک دور خواهیم داشت ⇐





- پس همانند شکل و با استدلال مشابه اثبات لم تزریق، z_2 را می‌توان به این صورت بازنویسی کرد $\Leftarrow$

$$z_2 = uvw \quad , \quad |v| \geq 1$$

به طوریکه مسیر طی شده از (A) تا (B)، برای رشته های uv^iw یکسان است. [فقط بخش حلقه چند بار طی می‌شود، i بار]

$\xrightarrow{\text{پس}}$ $z_1 u v^i w z_3 \in L$. □

(ب) فرض می‌کنیم زبان L منظم باشد. طبق لم بالا، هر w را باید بتوان با شرایط گفته شده به شکل $z_1 z_2 z_3$ نوشت. *

$\boxed{|w| \geq n} \to ab^nc^n$

- رشته‌ی w را در نظر می‌گیریم.

که در آن $z_1 = a$ ، $z_2 = b^n$ ، $z_3 = c^n$ است.

$$z_2 = uvw \longrightarrow v = b^k \ , \ k \leq n$$

$$\longrightarrow z_1 u v^2 w z_3 = a b^{n+\alpha} c^n \ , \ \alpha \geq 1 \quad \notin L$$

$\longrightarrow z_1 u v^2 w z_3 = \underline{a b \quad c^{..} , \alpha \geqslant 1}$

پس این لم برقرار نیست، یعنی L منظم نیست.

۴.۱

(a) $L' := \{ b^i c^j \mid i,j \geqslant 0 \} \longrightarrow$ منظم است

$L'' = L \cap L' = \{ b^m c^m \mid m \geqslant 0 \} \longrightarrow$ طبق مثال های حل شده، منظم نیست

- اگر L منظم باشد، طبق بسته بودن $\cap$ ، باید L'' هم منظم باشد، اما این طور نیست، پس L منظم نیست.

(b) $L' := \{ ww \mid w \in \{a,b\}^* \} \longrightarrow$ طبق مثال های کتاب و تمرین ۱.۱، منظم نیست.

$L'' := \{ w \in \{a,b\}^* \mid |w| \overset{2}{\equiv} 1 \} \longrightarrow$ طبق مثال های اولیه حل شده، منظم است.

$L \cup L'' = \{a,b\}^* - L' \longrightarrow$ حاصل این اجتماع برابر است با همه ی رشته هایی که طول فرد دارند، یا

L'' ← طول زوج دارند اما به شکل www
نیستند.
↑ L

- اگر L منتظم باشد، طبق بسته بودن عمل $\cup$ ، با L'' ، $L \cup L''$ نیز منتظم باشد، و اگر $L \cup L''$ منتظم باشد، طبق بسته بودن عمل مکمل با L' هم منتظم باشد، اما اینگونه نیست ، پس یعنی L منتظم نیست.

Ⓒ $$L' := \{ab^j \mid j \geq 1\} \longrightarrow \text{منتظم است}$$

$$L \cap L' = \{ab^{2^k} \mid k \geq 1\}$$

معکوس →
$$(L \cap L')^R = \{b^{2^k} a \mid k \geq 1\} = L''$$

$$L''/\{a\} = \underbrace{\{b^{2^k} \mid k \geq 1\}}_{=A} \longleftarrow \text{طبق تمرین‌ها، منتظم نیست.}$$

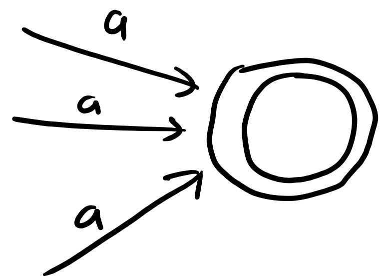
↖ right-quotion

توضیح ⇐
- اگر L منتظم باشد، طبق بسته بودن عمل اشتراک و معکوس ، L'' نیز منتظم خواهد بود.

- اگر L'' منظم باشد، طبق بسته بودن عمل right quotion و منظم بودن $\{a\}$ ، A هم منظم خواهد بود. *

- A منظم نیست، پس L منظم نیست.

* ← برای اثبات بسته بودن عمل right quotion ، کافی است این گونه در نظر بگیریم که DFA حاصل از زبان L'' (در صورت منظم بودن) ، دارای state نهایی به شکل زیر خواهد بود ⇐



- به ازای هر کدام از این state های نهایی ، آن را حذف کرده و state ای که با a به آن وصل می شد را نهایی در نظر می گیریم. با این کار $L'' \backslash \{a\}$ نیز منظم خواهد بود.

Mohsen Dehghankar 97105928

Thursday, May 12, 2022 8:46 PM

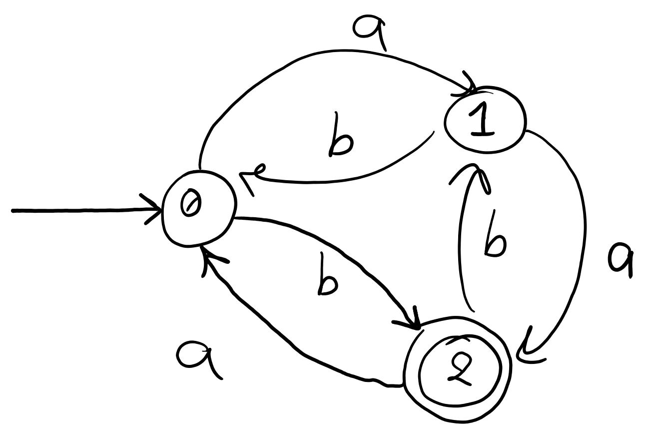
۲

۱.۲ - برای هرکدام ابتدا GNFA می سازیم و پس state ها را حذف می کنیم =>

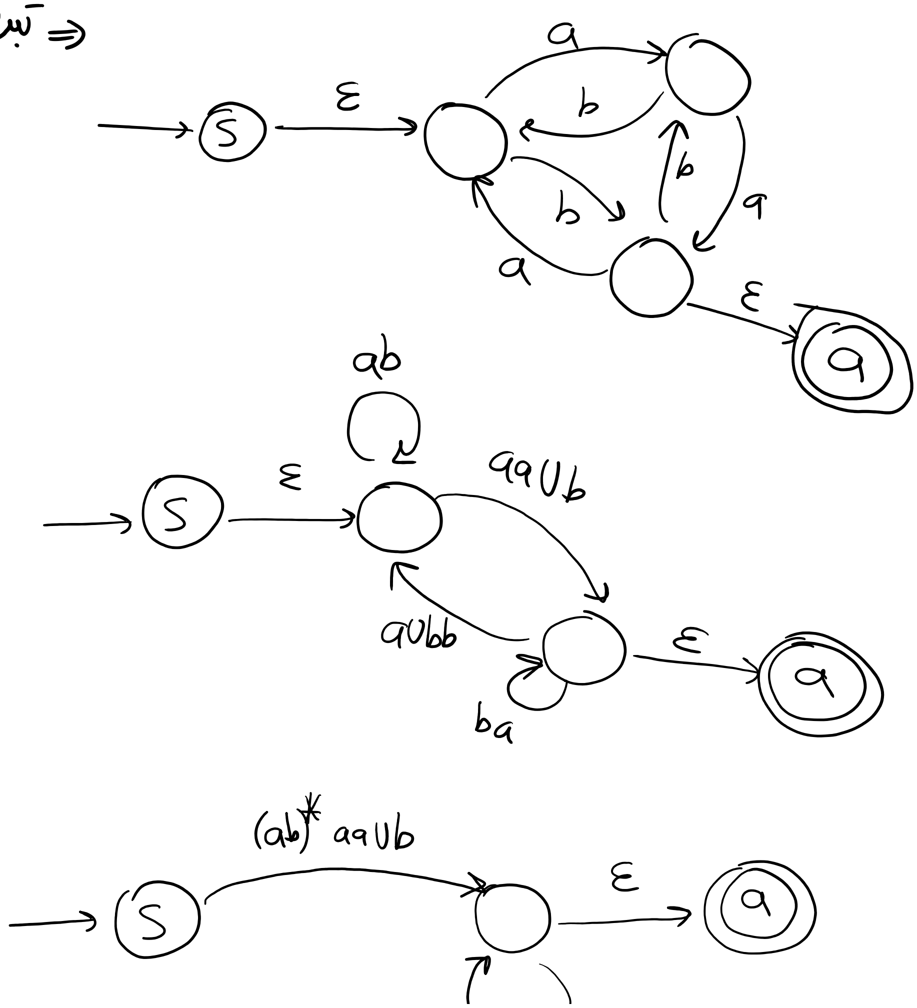
(a)

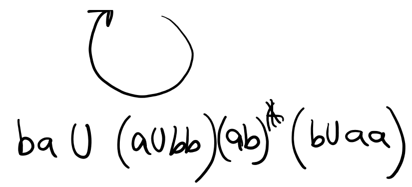
- هر state بیانگر $n_a(w) - n_b(w)$ به پیمانه‌ی ۳ است.

DFA =>

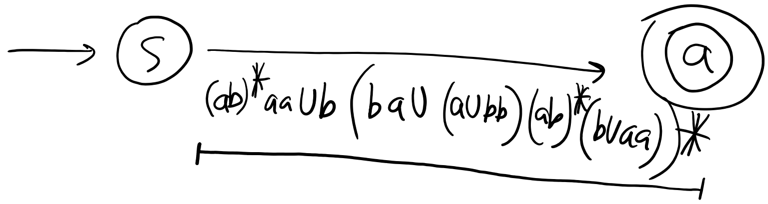


تبدیل =>



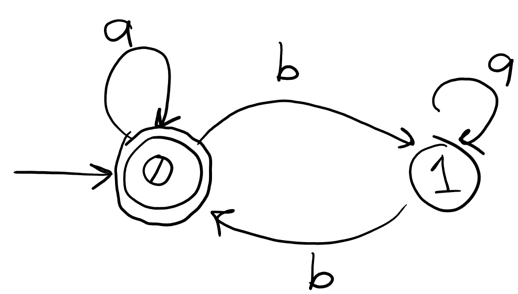


ba ∪ (a∪bb)(ab)*(b∪aa)



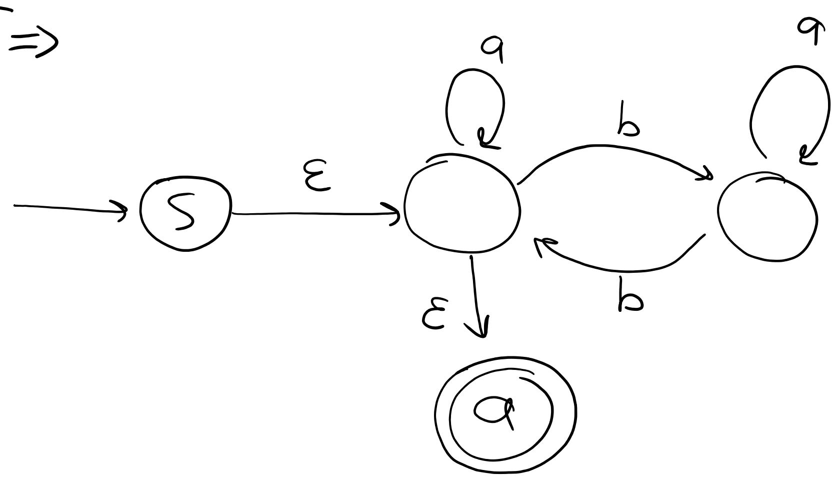
S
a
(ab)*aa∪b (ba∪ (a∪bb)(ab)*(b∪aa))*

(b)

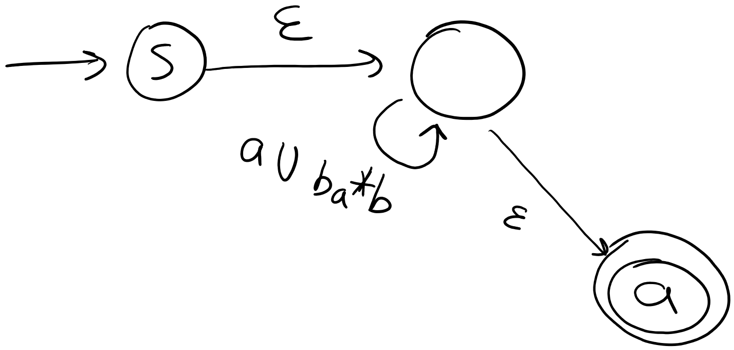


a
b
a
0
1
b

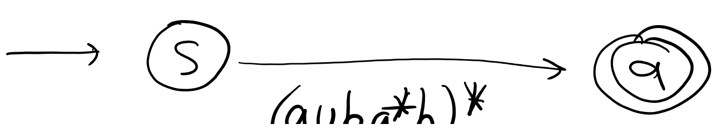
تبديل ⟹



a
a
b
ε
S
b
ε
a



ε
S
a ∪ ba*b
ε
a

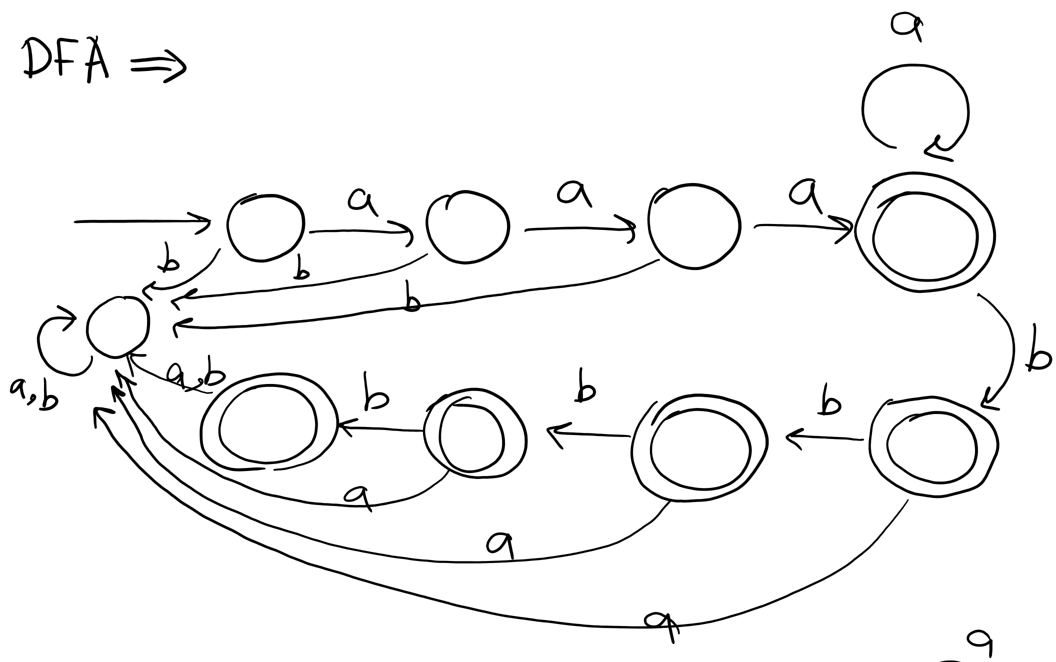


S
a
(a∪ba*b)*

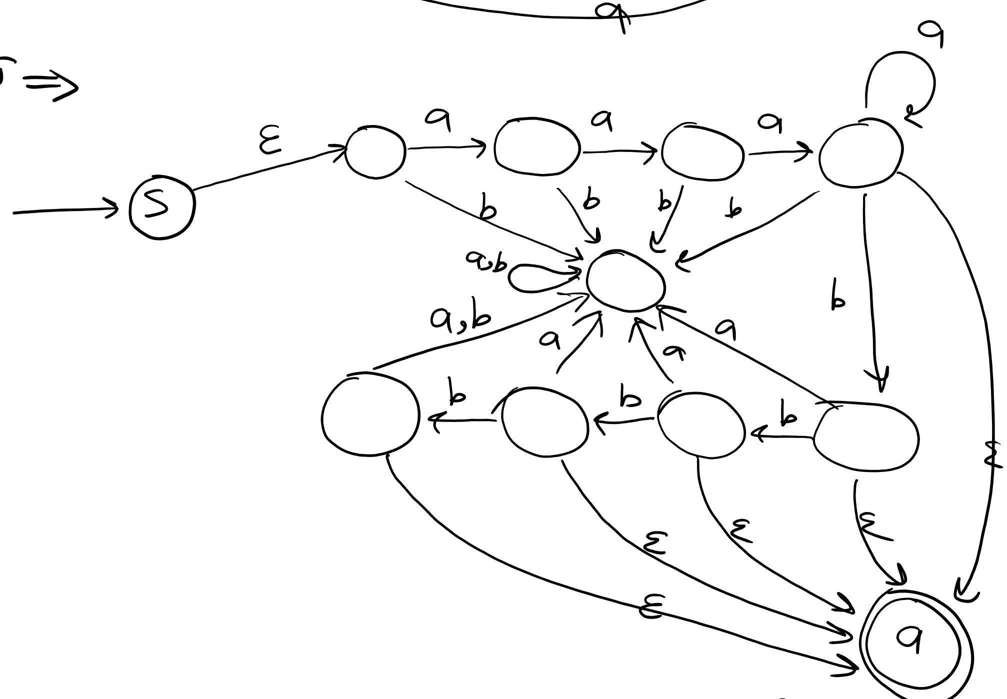
$(a \cup ba^*b)^*$

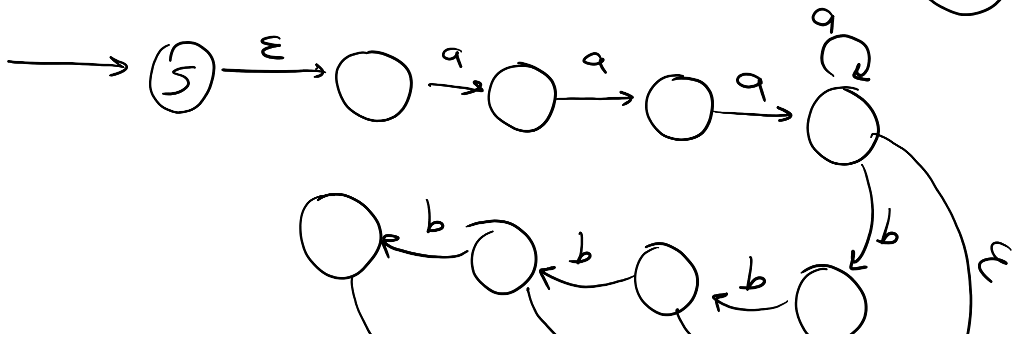
(C)

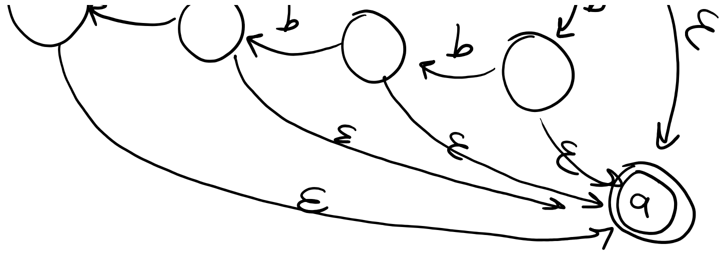
DFA $\Rightarrow$

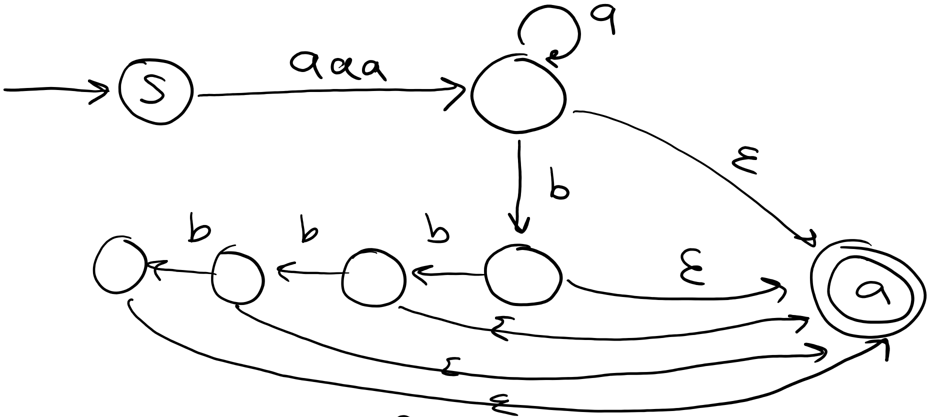


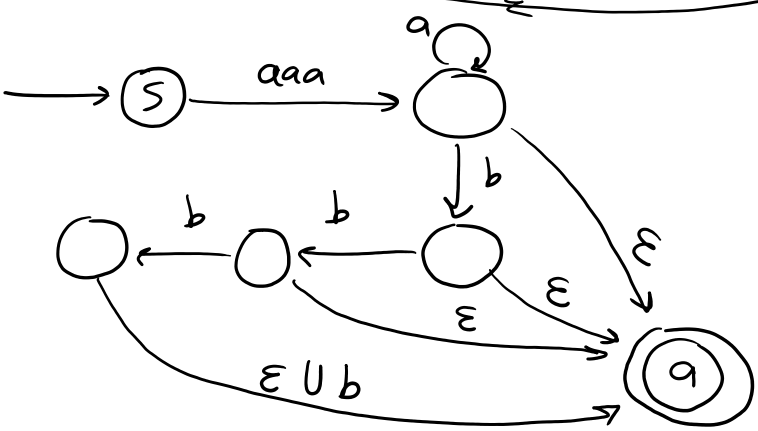
تبدیل $\Rightarrow$

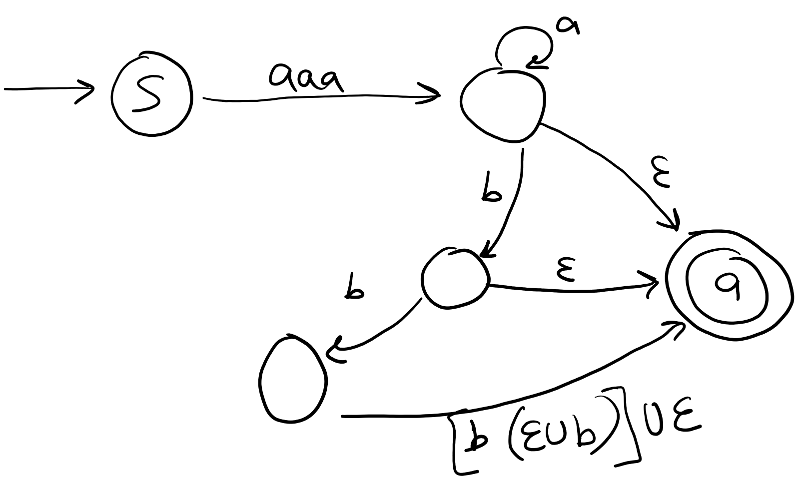


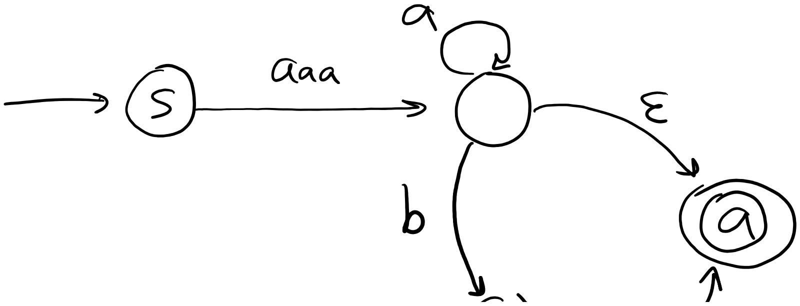


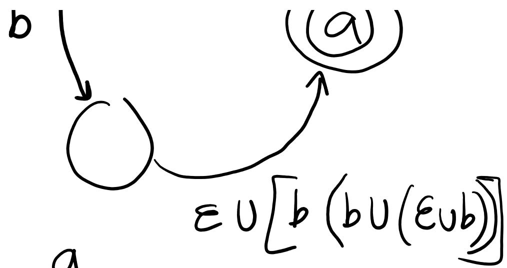

b
b
ε
ε
ε
ε
ε
a

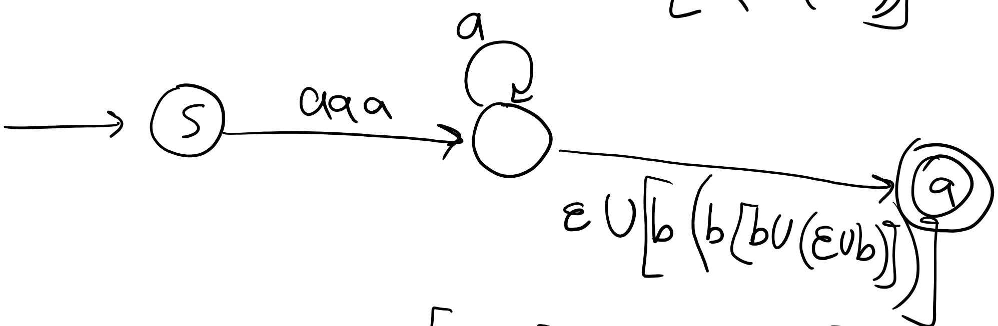

S
aaa
a
b
ε
b
b
b
ε
ε
ε
ε
a

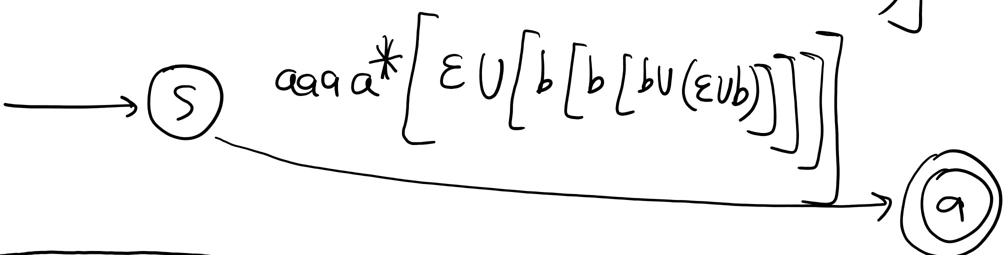

a
S
aaa
b
ε
b
b
ε
ε
ε ∪ b
a


a
S
aaa
b
ε
b
ε
a
[b (ε∪b)] ∪ ε


a
S
aaa
ε
b
a

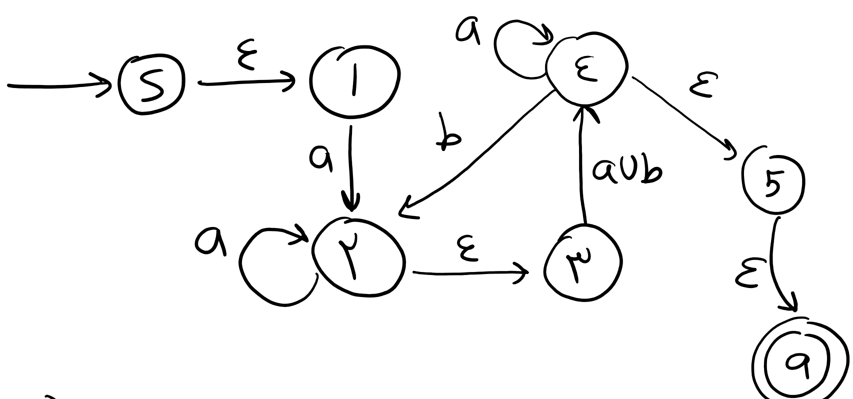




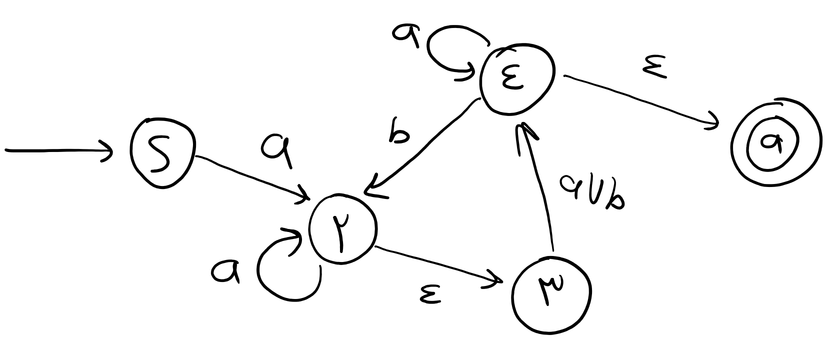


۲.۲

a



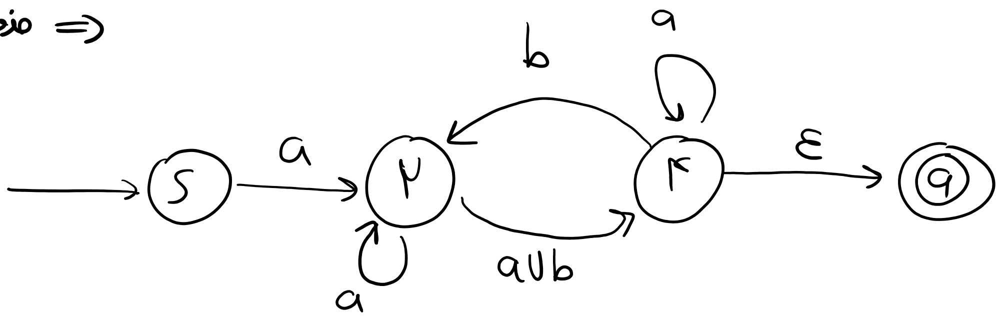
۱ و ۵ حذف ⟹



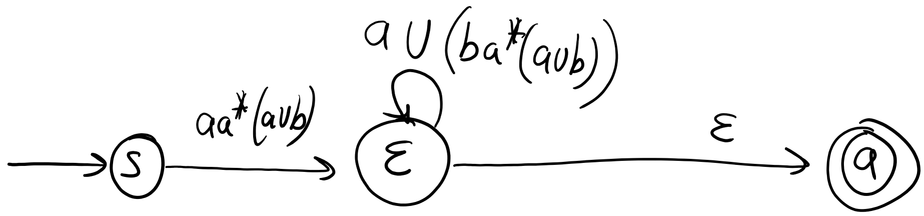
۳ حذف ⟹

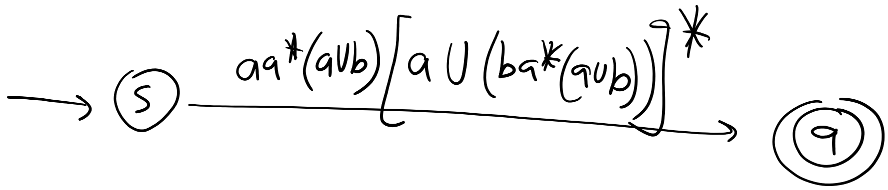
۱ a

③ حذف ⇒

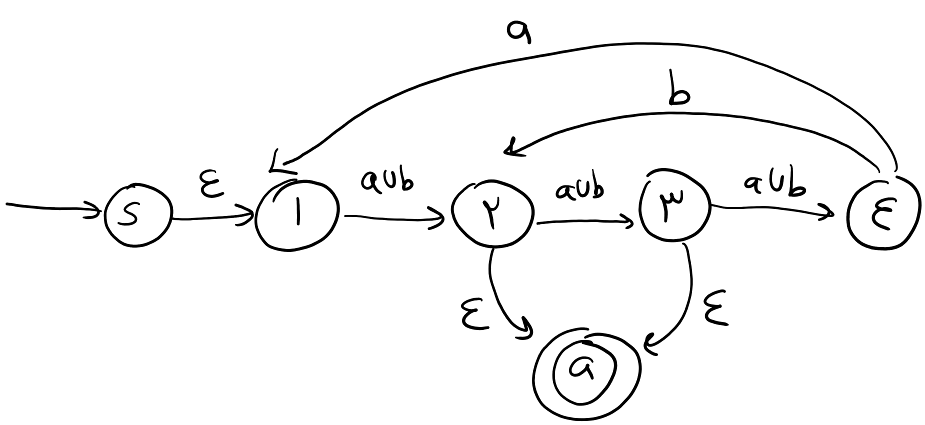


② حذف ⇒

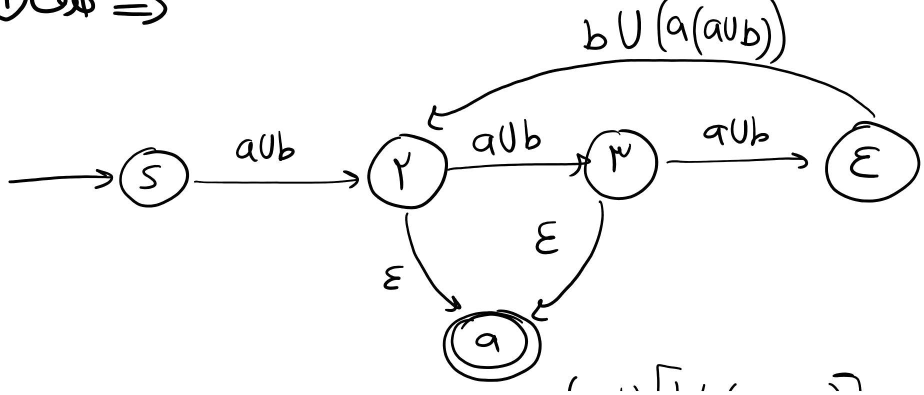




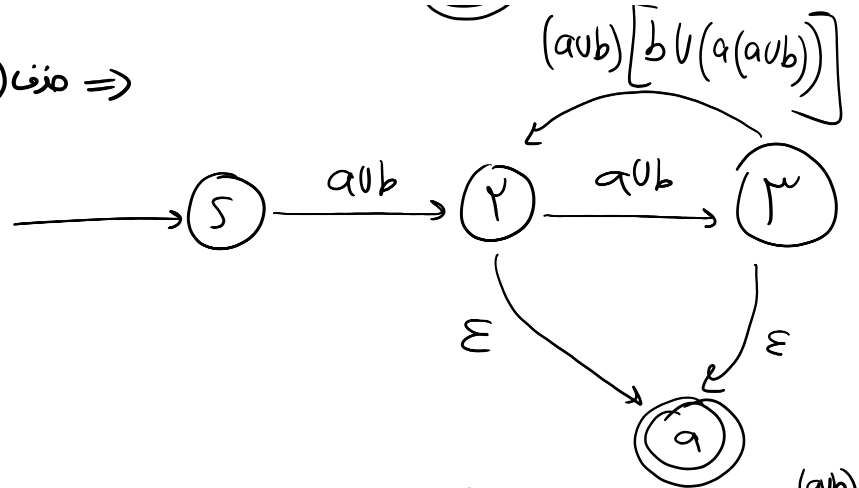
(b)



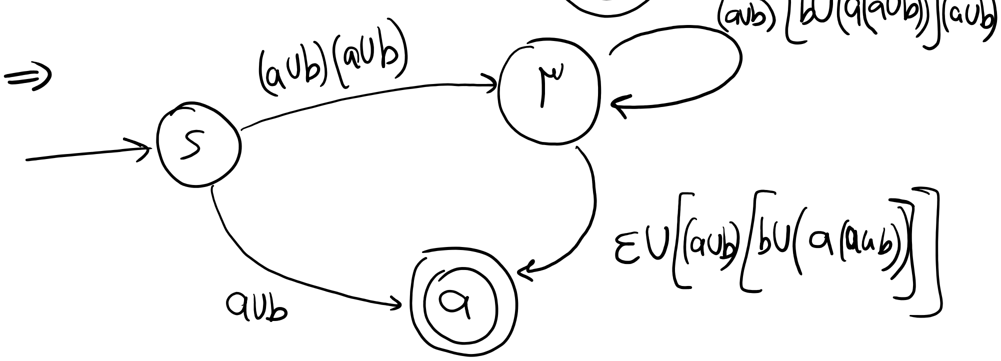
① حذف ⇒



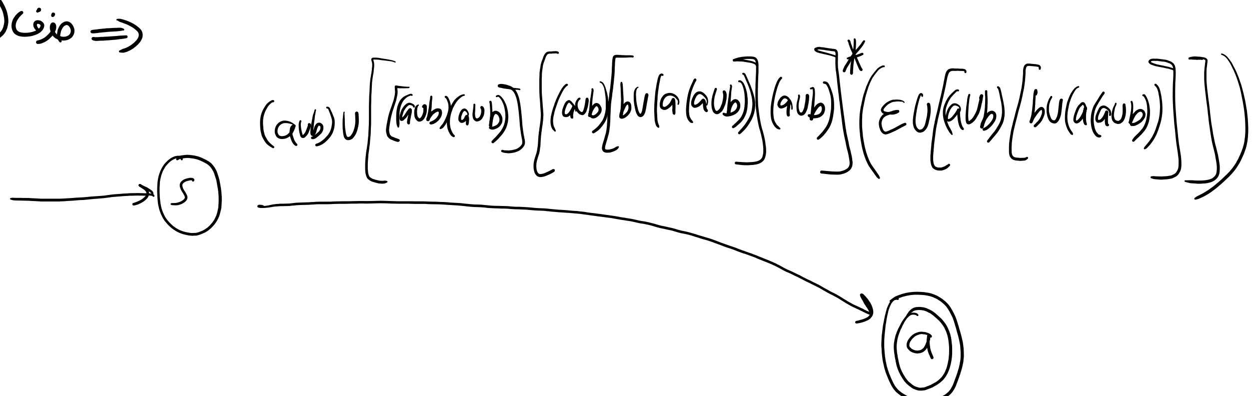
۴ حذف ⇒



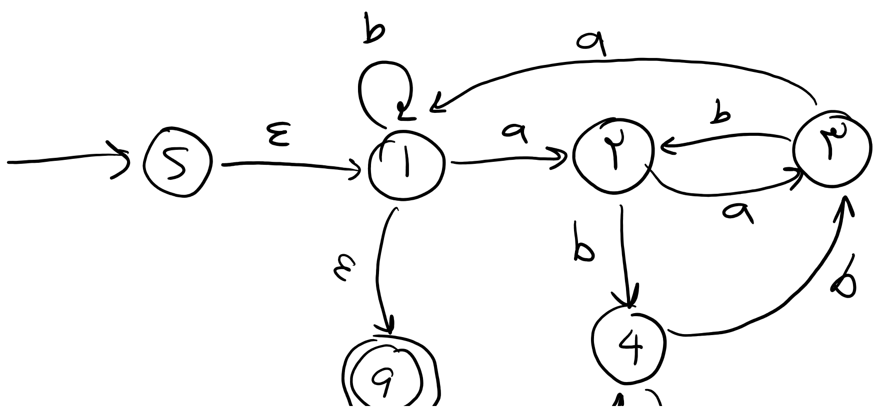
۲ حذف ⇒

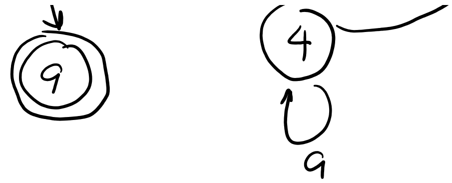


۳ حذف ⇒

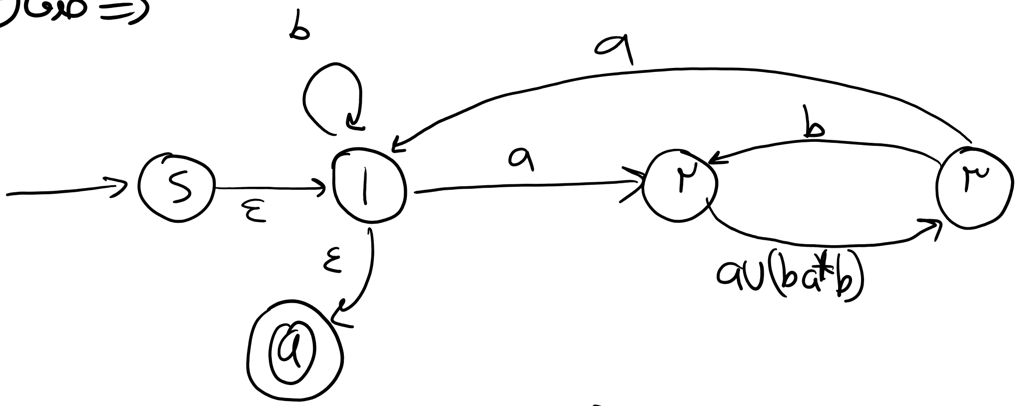


C

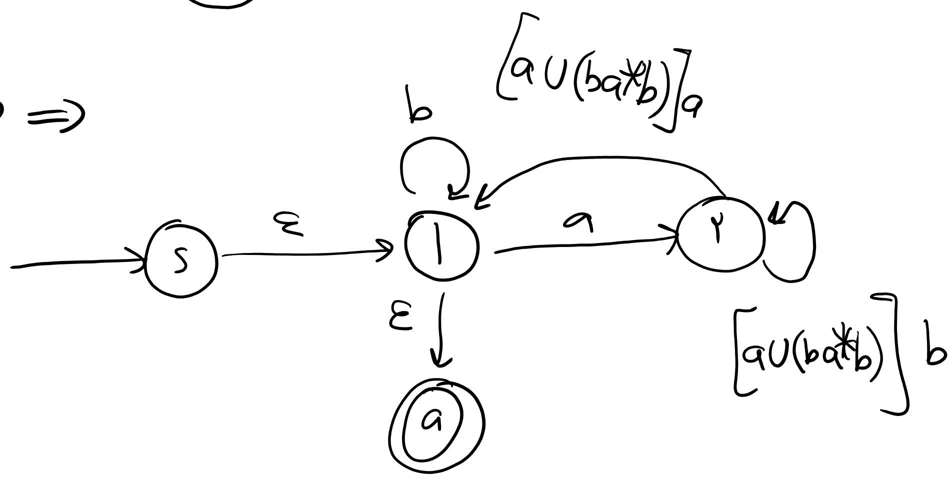




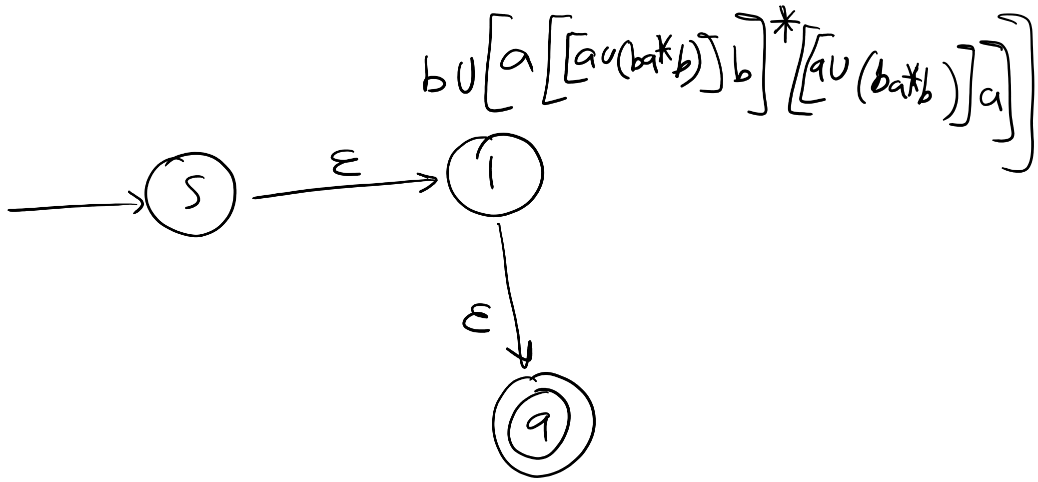
حذف ۴ ⟹

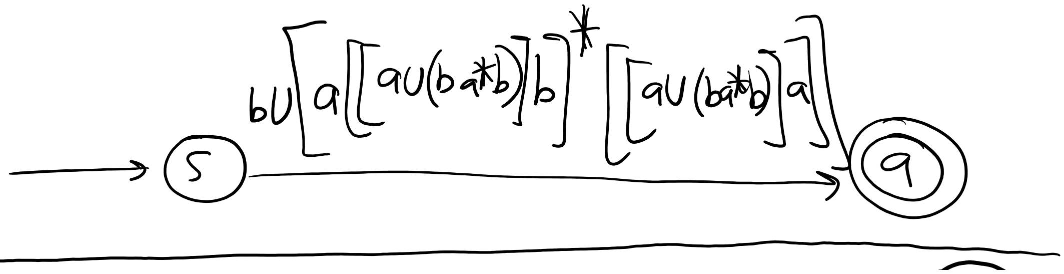


حذف ۳ ⟹



حذف ۲ ⟹



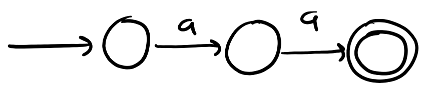


۳.۲

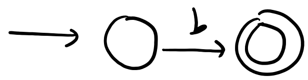
_ در هر مرحله ، از پایین به بالا DFA را می سازیم .

ⓐ

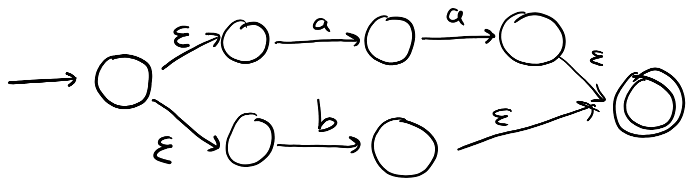
aa



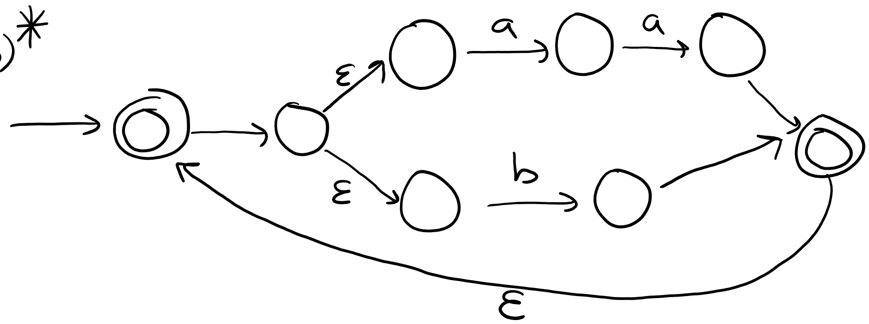
b



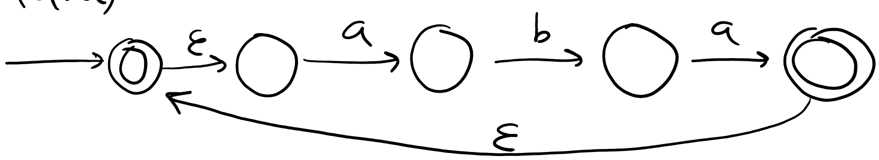
$aa \cup b$



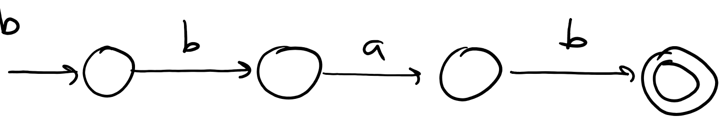
$(aa \cup b)^*$



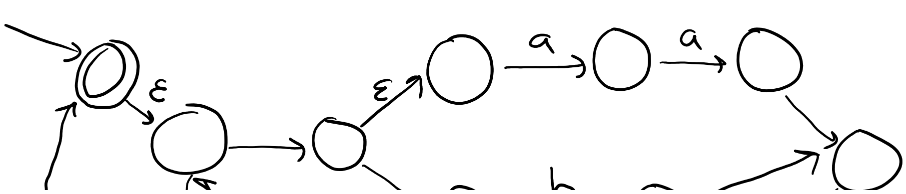
$(aba)^*$

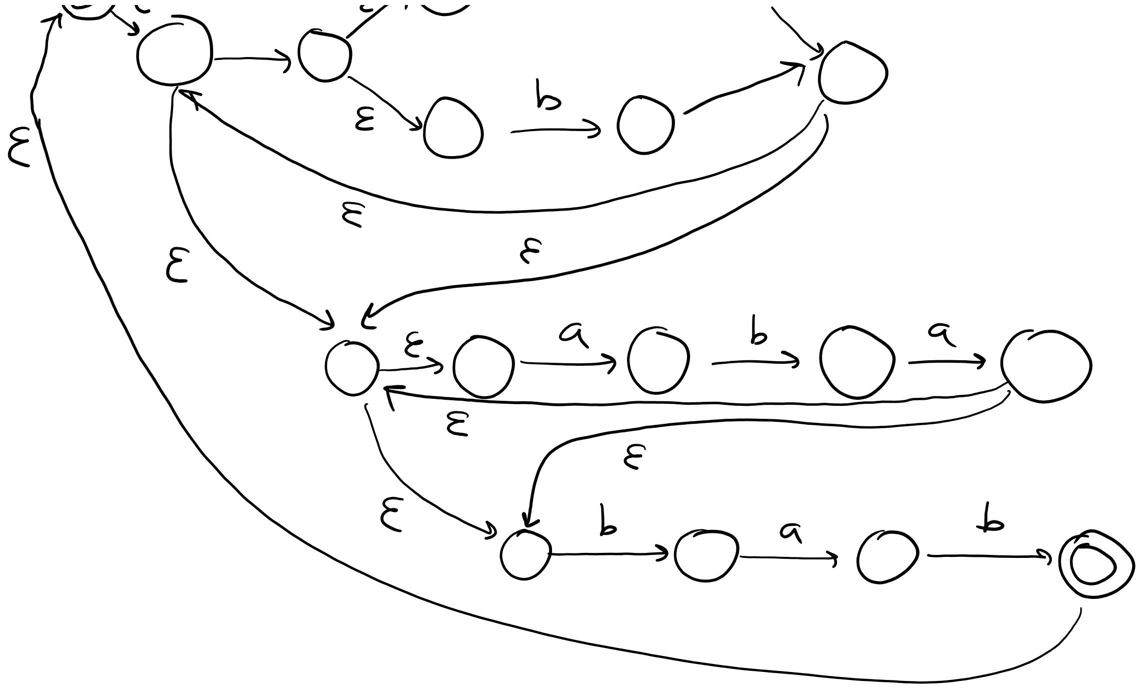


bab



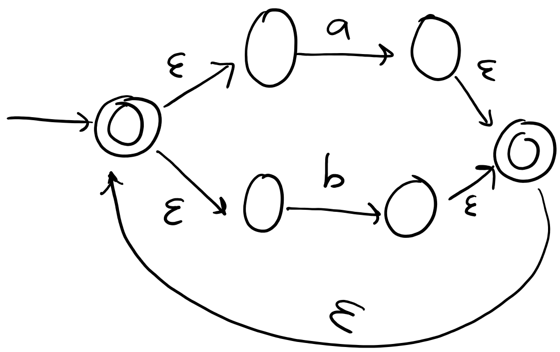
$\left[(aa \cup b)^*(aba)^*bab\right]^* \Rightarrow$



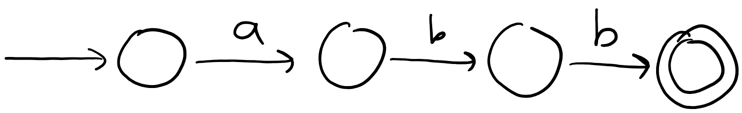


(b)

$(a \cup b)^*$



abb



ababa

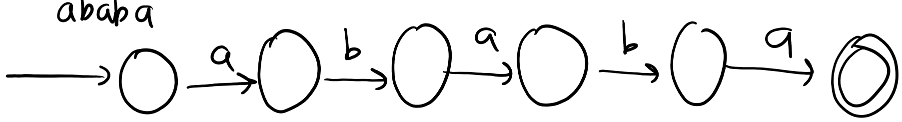
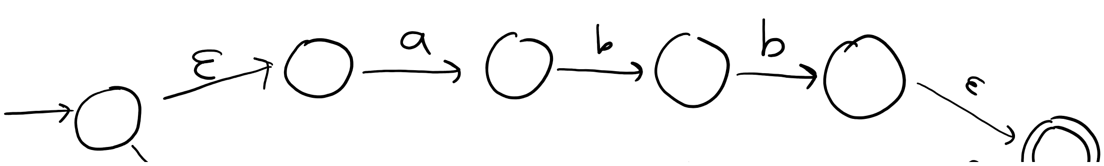
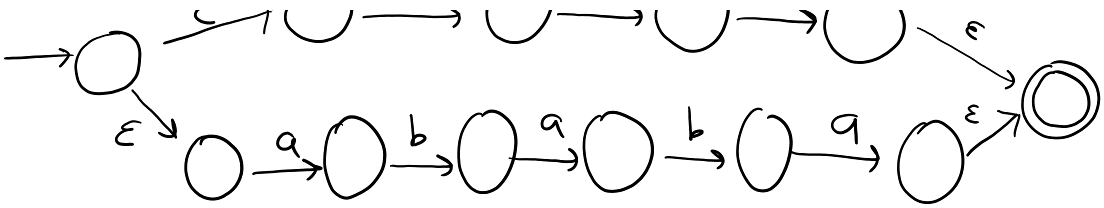
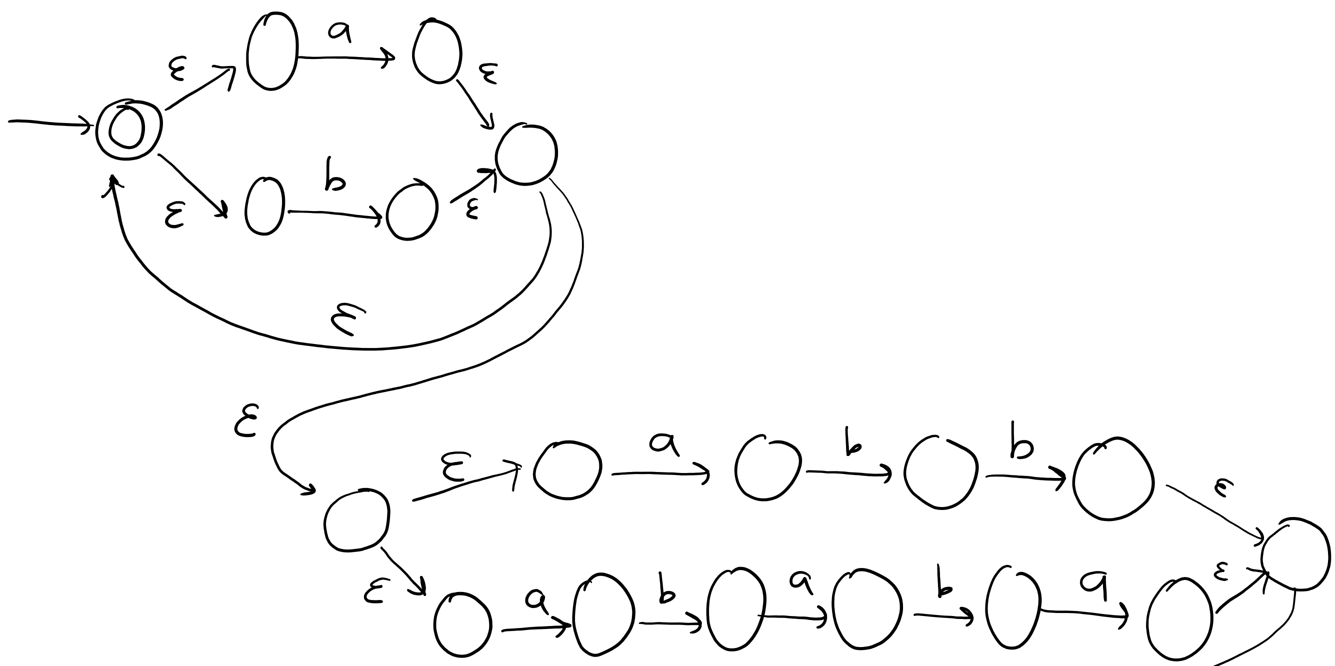


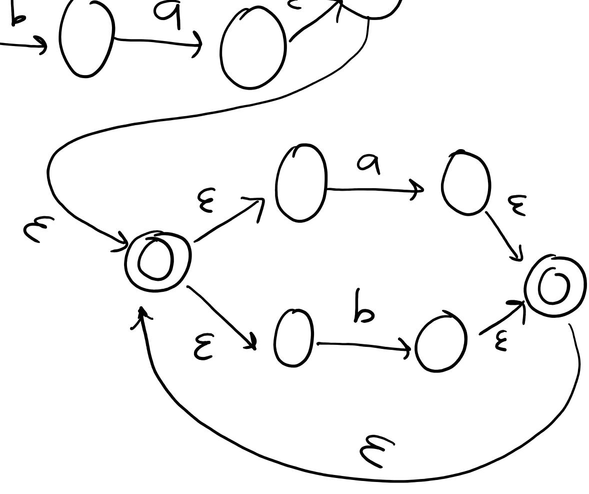
abb ∪ ababa





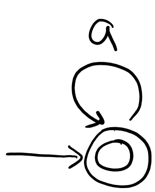
$(a \cup b)^*(abb \cup ababa)(a \cup b)^*$



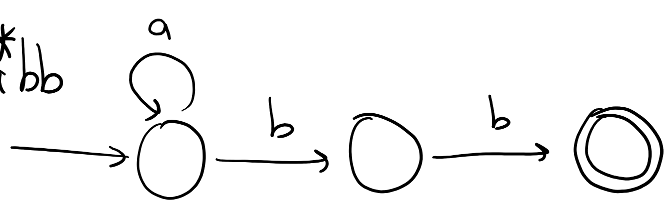


(c)

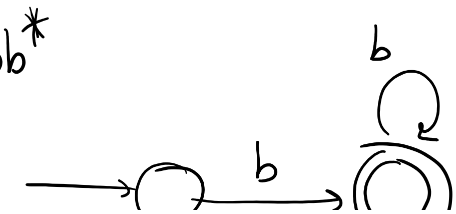
a^*

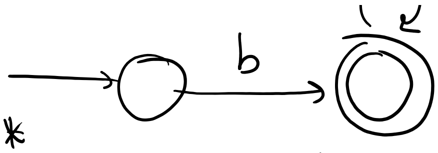


a^*bb

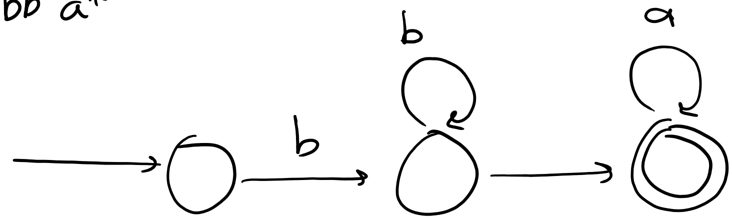


bb^*

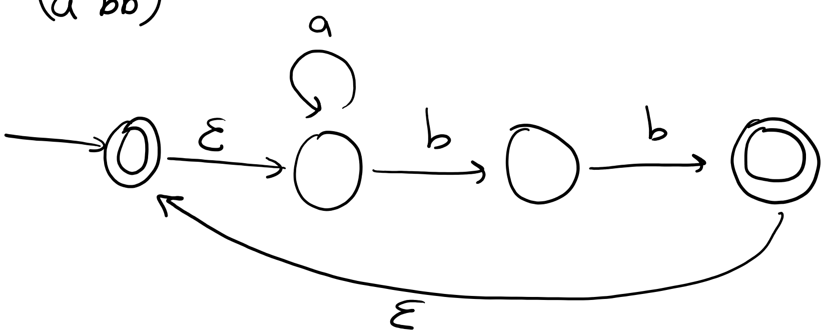




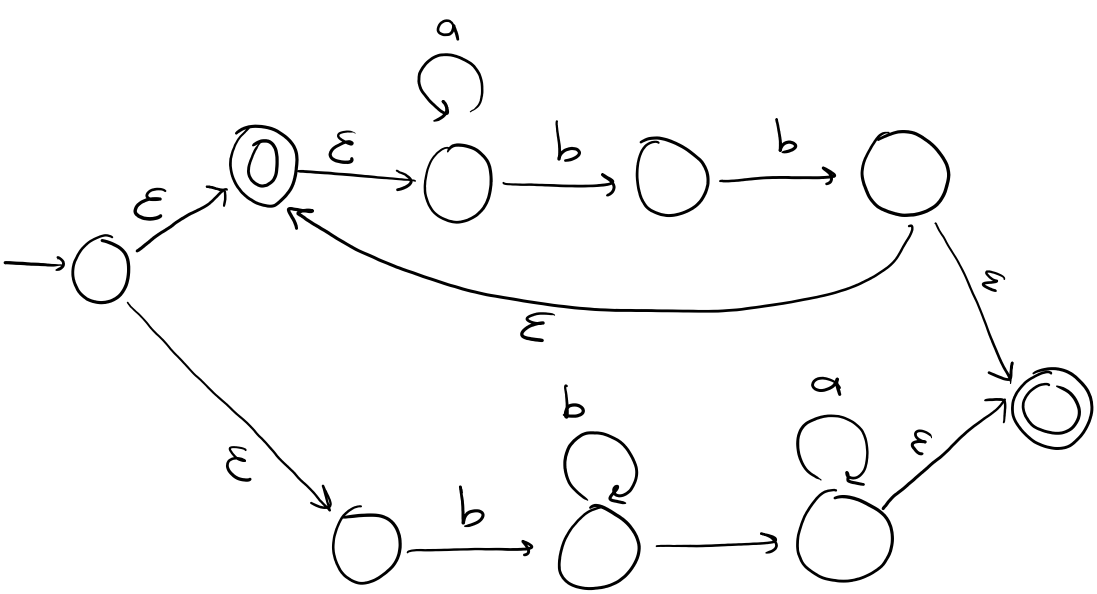
bb^*a^*



$(a^*bb)^*$



$(a^*bb)^* \cup bb^*a^*$



۴.۲ _ قوانین استفاده شده ، با شماره ی آن ها در فایل فرستاده شده ، ارجاع شده اند

ⓐ

$$\xrightarrow{LHS} (a+b)^* \overset{14.f}{=\!=} a^*(ba^*)^*$$

$$\overset{a^* = a^*a^*}{=\!=} a^*\left(b(a^*a^*)\right)^*$$

$$\overset{13}{=\!=} a^*\left((ba^*)a^*\right)^*$$

$$\overset{14.f}{=\!=} \left(a^* + ba^*\right)^* = RHS \quad . \square$$

ⓑ

$$\xrightarrow{LHS} bb^*(a^*b^* + \varepsilon)b$$

$$\overset{3}{=\!=} bb^*\left[(a^*b^* + \varepsilon)b\right]$$

$$\overset{8}{=\!=} bb^*\left[a^*b^*b + b\right]$$

$$\overset{7}{=\!=} bb^*a^*b^*b + bb^*b$$

$$\overset{b^+ = bb^* = b^*b}{=\!=} bb^*a^*bb^* + bbb^*$$

$$\overset{8}{=\!=} (bb^*a^* + b)\, bb^*$$

5 $\searrow$

$$\overset{b\varepsilon = b\ ,7}{=\!=} b(b^*a^* + \varepsilon)\, bb^* = RHS \quad . \square$$

ⓒ

$$\mathrm{RHS} = (ba)^* ba a^* (b^* + \varepsilon)$$

$$= (ba)^* ba \left[a^* (b^* + \varepsilon) \right]$$

$$\overset{8}{=} (ba)^* ba \left[a^* b^* + a^* \right]$$

$$x^* x = x x^*$$

$$= (ba)(ba)^* (a^* b^* + a^*) = \mathrm{LHS}$$

$\square$

Mohsen Dehghankar 97105928

Friday, May 13, 2022 1:28 AM

۳

۱.۳

a

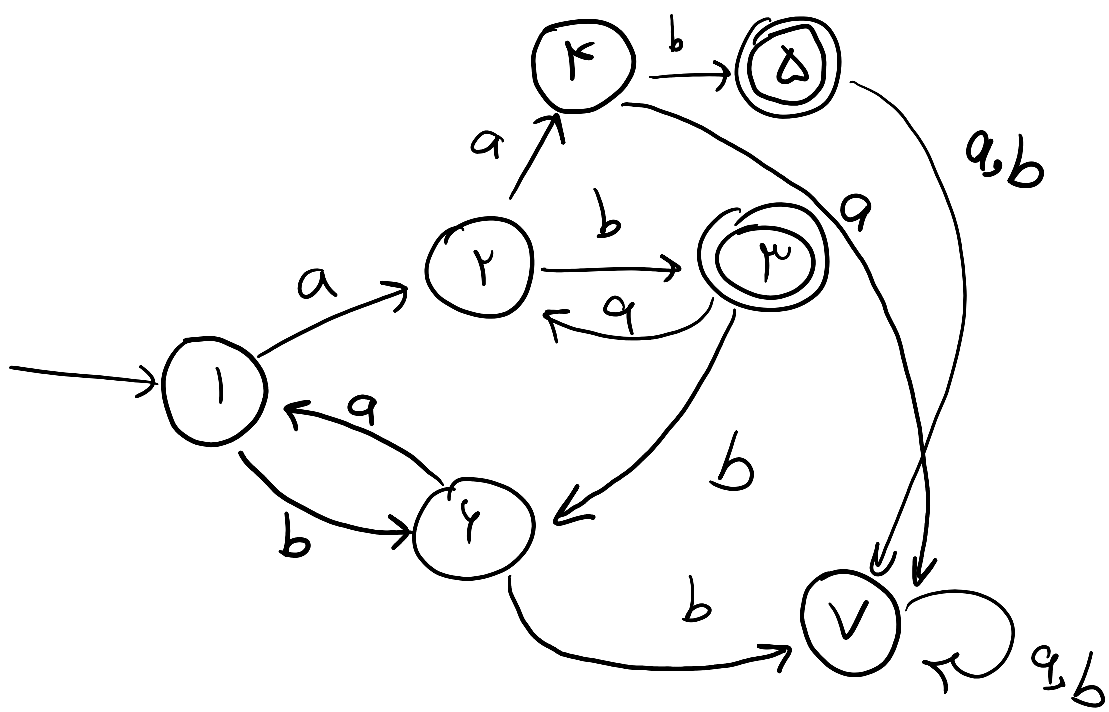
- گرامر را می‌توان به این شکل بازنویسی کرد ⇐

$$S \rightarrow abS \mid baS \mid ab \mid aab$$

- عبارت منظم معادل ⇐

$$(ab+ba)^*(ab+aab)$$

DFA ⇒



گرامر منظم ⇐

$$R_1 \rightarrow aR_2 \mid bR_6$$

$$R_2 \rightarrow bR_3 \mid aR_4$$

$$R_3 \rightarrow \varepsilon \mid aR_2 \mid bR_6$$

$$R_4 \rightarrow bR_5 \mid aR_7$$

$$R_5 \rightarrow aR_7 \mid bR_7 \mid \varepsilon$$

$$R_7 \rightarrow aR_7 \mid bR_7$$

$$R_6 \rightarrow bR_7 \mid aR_1$$

(b)

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow aAa \mid bAb \mid a \mid b$$

$$B \rightarrow aB \mid bB \mid \varepsilon$$

- در گرامر بالا، B همه ی Σ^* را می پذیرد. پس کل گرامر همه ی $\Sigma^* - \varepsilon$ را می پذیرد.

- یا به عبارتی این گرامر با گرامر اصلی معادل است ⇐

$$S \to aB \mid bB$$
$$B \to aB \mid bB \mid \varepsilon$$

(C) - ثابت می کنیم که در زیر، A فقط رشته های با تعداد فرد a را می نویسد.

$$A \to \overset{1}{AAA} \mid \overset{2}{bA} \mid \overset{3}{Ab} \mid \overset{4}{a}$$

- برای اثبات فرض می کنیم که می خواهیم درخت پارس یک رشته از A را رسم کنیم.

- در هر مرحله از یکی قاعده های تولید ۱ تا ۴ استفاده می کنیم.

- تعداد برگ های مرحله i ام از درخت پارس را که قطعاً b نیستند را K_i در نظر می گیریم.

پس ←

$$K_{i+1} = \begin{cases} K_i + 2 & \text{(1) قاعده تولید} \\ K_i & \text{(2) قاعده تولید} \\ K_i & \text{(3) "} \\ K_i & \text{(4) "} \end{cases}$$

- زیرا وقتی از قاعده تولید (1) استفاده می کنیم، دو برگ به این عمق اضافه می شود.

- در استفاده از قاعده های (2) و (3) یک برگ b اضافه می شود

- در استفاده از قاعده‌های (1) و (2) ...

- قاعده تولیدِ آخر نیز به برگ ها اضافه نمی‌کند

- با شروع از root $(K_0 = 1)$ و هر مرحله پارس کردن، زوجیت K_i حفظ می‌شود. پس رشته های پذیرفته شده فرد تا a دارند.

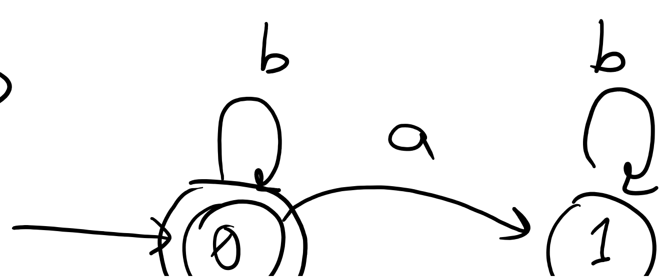
- هم چنین با استقرا بر روی تعداد a ها می توان ثابت کرد که هر رشته با فرد a در این گرامر پذیرفته شده است.

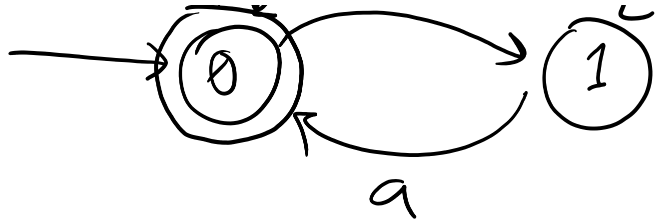
- پس طبق قانون $S \to AA | B$ ، اولاً هر رشته‌ای دارای فقط b پذیرفته است. ثانیاً فقط رشته‌های با زوج a پذیرفته هستند.

- زیرا اگر یک رشته فرد تا a داشته باشد. در حین پارس کردن $S \to AA$ ، یکی از A ها حتماً رشته‌ای با زوج a را باید پارس کند که طبق صحبت انجام شده ممکن نیست.

پس $\longrightarrow$ $L = \{ w \in \{a,b\}^* \mid n_a(w) \overset{2}{\equiv} 0 \}$

DFA $\Rightarrow$





CFG ⇒

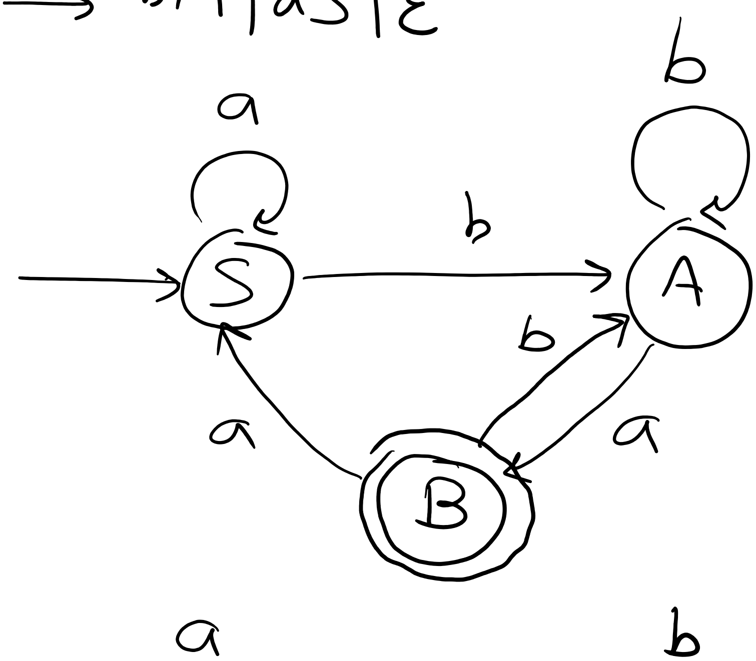
$$R_\emptyset \to aR_1 \mid bR_\emptyset \mid \varepsilon$$
$$R_1 \to bR_1 \mid aR_\emptyset$$

---

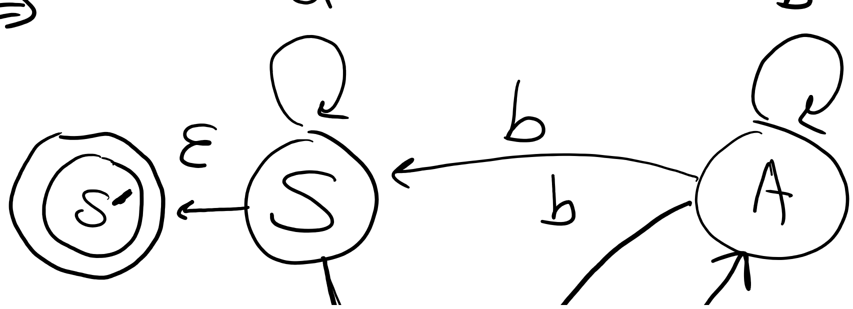
a ۲.۳

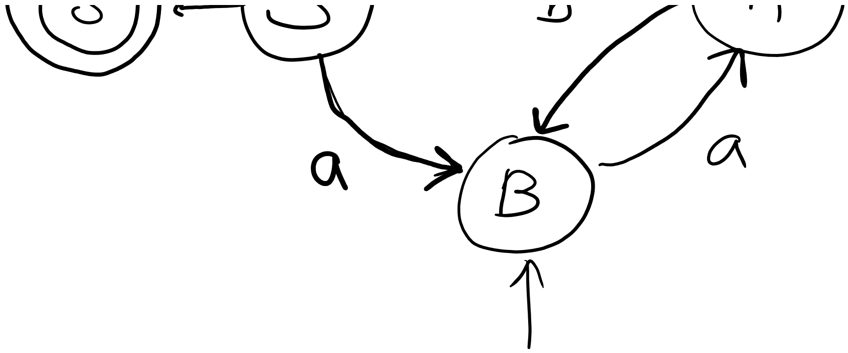
$$S \to aS \mid bA$$
$$A \to bA \mid aB$$
$$B \to bA \mid aS \mid \varepsilon$$

DFA ⇒



Reverse ⇒





CFG ⇒

$B \rightarrow Aa$

$A \rightarrow Ab \mid Sb \mid Bb$

$S \rightarrow Ba \mid Sa$

$S \rightarrow S'$

$S' \rightarrow \varepsilon$

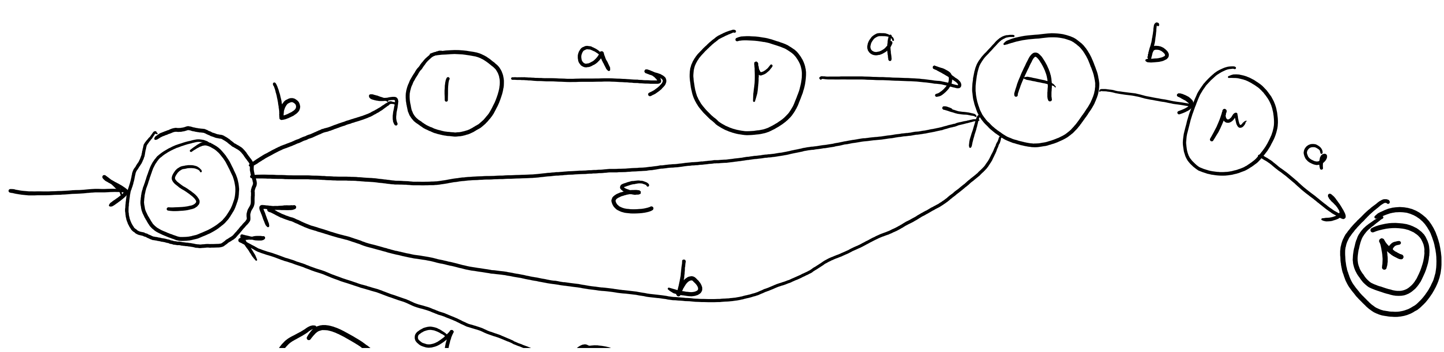
(b)

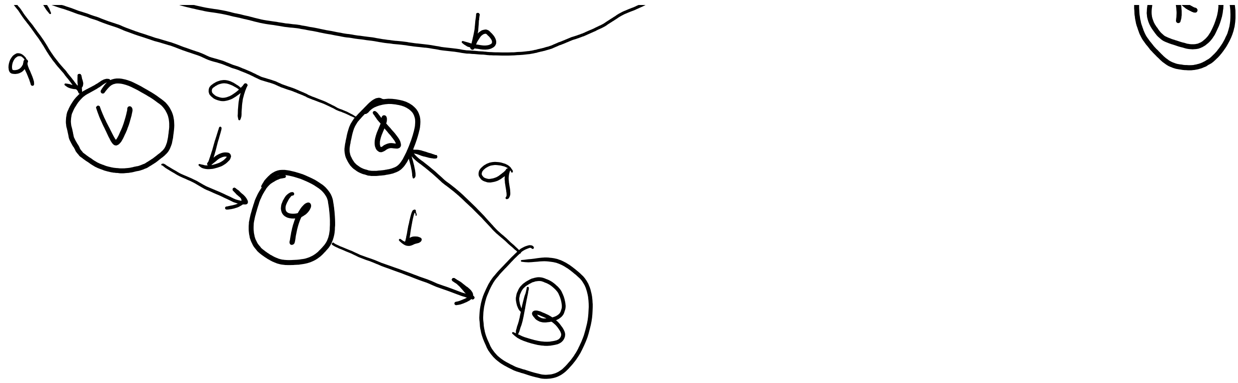
$S \rightarrow baaA \mid abbB \mid A \mid \varepsilon$

$A \rightarrow bS \mid ba$

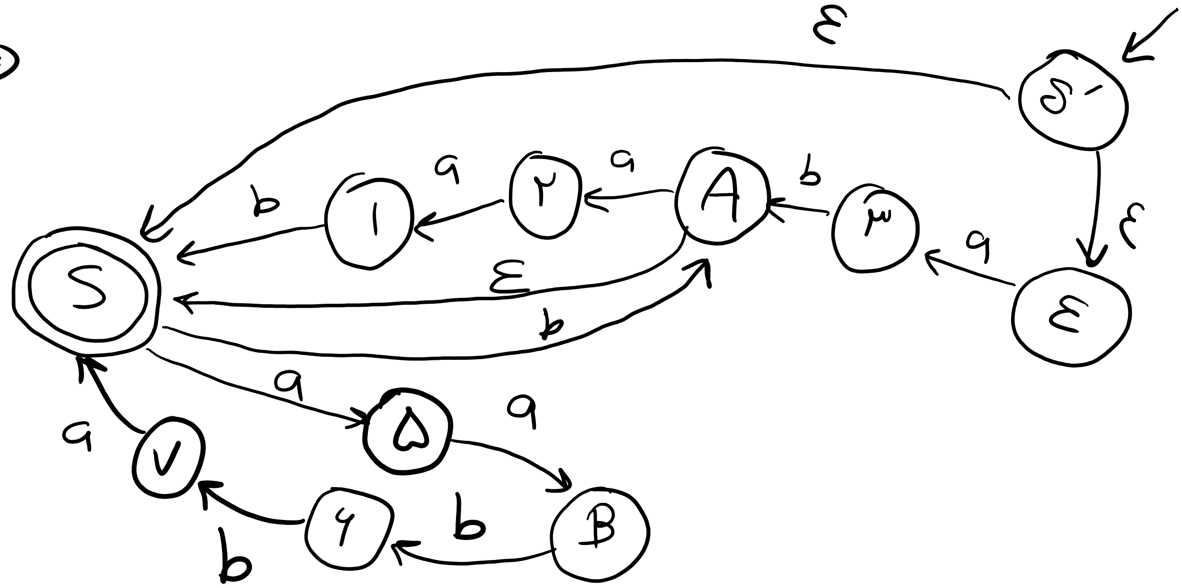
$B \rightarrow aaS$

DFA ⇒





Reverse $\Rightarrow$



CFG $\Rightarrow$

$$S' \longrightarrow R_4 \mid S$$

$$R_4 \longrightarrow R_3 a$$

$$R_3 \longrightarrow A b$$

$$A \longrightarrow R_2 a \mid S$$

$$R_2 \longrightarrow R_1 a$$

$$R_1 \longrightarrow Sb$$

$$S \longrightarrow Ab \mid R_7 a \mid \varepsilon$$

$$R_5 \longrightarrow Ba$$

$$R_7 \longrightarrow Sa$$

$$R_6 \longrightarrow R_7 b$$

$$B \longrightarrow R_6 b$$