پاسخ تمرین امتیازی

پاسخ سوال اول

فرض کنید در یک تاس خاص، احتمال مشاهده‌ی اعداد ۱ تا ۶ متناسب با معکوس هریک از این اعداد باشد (مثلاً احتمال رخداد ۴ نصف احتمال ۲ است).

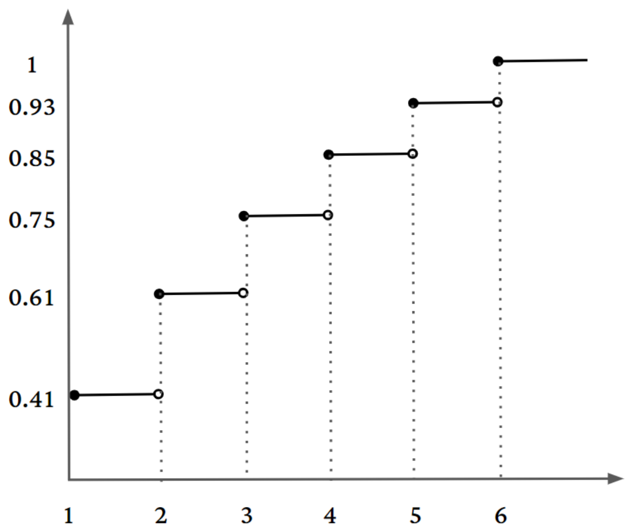
- تابع توزیع احتمال تاس را به‌دست آورید.

پاسخ.

x	1	2	3	4	5	6
p(x)	0.41	0.2	0.14	0.10	0.08	0.07

- با در نظر داشتن تکنیک Inverse-transform واریته‌ی متناظر با اعداد تصادفی ۰/۲۵، ۰/۵۵، ۰/۷۵ و ۰/۸ را با مشخص کردن ضابطه‌ها/رسم نمودار برای مقادیر بیابید .

پاسخ. به‌ترتیب ۱، ۲، ۴ و ۴



پاسخ سوال دوم

اگر H تابعی غیرنزولی و U متغیر تصادفی یکنواخت در بازه‌ی [۰, ۱] باشد؛ به‌طوری که حد $H(X)$ در ∞ برابر ۱ و در $-\infty$ برابر صفر باشد:

- اگر $X = H^{-1}(U)$ باشد، آنگاه تابع CDF برای متغیر X چیست؟

پاسخ. تابع CDF متغیر X، تابع H می‌باشد؛ زیرا:

$$F_X(x) = P(X \le x) = P\left(H^{-1}(U) \le x\right) = P(U \le H(x)) = F_U(H(x)) = H(x)$$

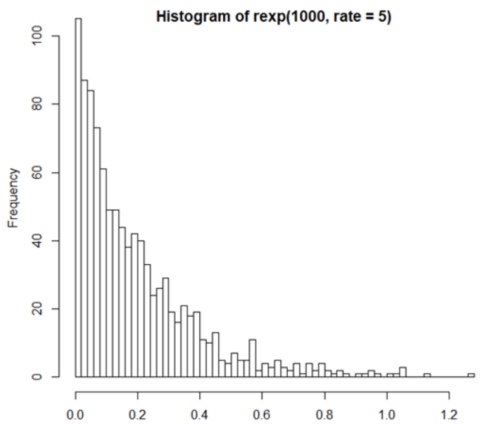
دلیل تساوی آخر این است که U توزیع Uniform در بازه‌ی 0 تا 1 دارد و توزیع تجمعی آن تابع همانی است.

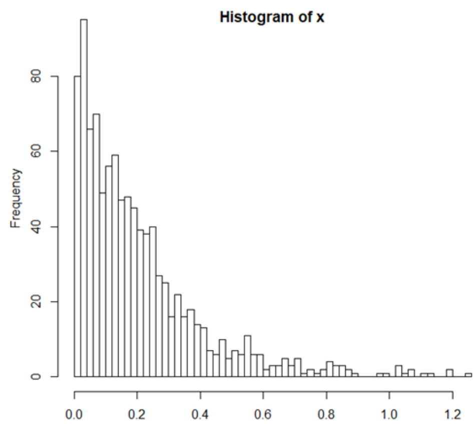
- با استفاده از U چگونه می‌توان متغیر تصادفی exponential تولید کرد؟ با تولید چند نمونه و رسم هیستوگرام درستی راه خود را به‌صورت شهودی نشان دهید (مثلاً با کمک numpy.random و matplotlib.pyplot در پایتون یا توابع runif و hist در R).

پاسخ. با همین رویکرد قسمت قبل اگر تابع H را برابر با CDF توزیع نمایی بگیریم، متغیر X با استفاده از متغیر یونیفرم، متغیر با توزیع نمایی به‌دست می‌دهد، به این شکل:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \ \ x = F^{-1}(u)$$
$$\Rightarrow F^{-1}(u) = \frac{-1}{\lambda} ln(1 - u)$$

```
u = runif(1000)
x_list = as.numeric(unlist(lapply(u, function(k) -0.2*log(1-k))))
hist(x, breaks = 50)
hist(rexp(1000, rate = 5), breaks = 50)
```





پاسخ سوال 3

فرض H_0 : اعداد داده شده از توزیع یکنواخت پیروی می کنند.

فرض H_1 : اعداد داده شده از توزیع یکنواخت پیروی می کنند.

Ri	0.05	0.12	0.2	0.43	0.5	0.6	0.74	0.75	0.8	0.92
i/N	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
i/N - Ri	0.05	0.08	0.1	-0.03	0	0	-0.04	0.05	0.1	0.08
Ri-(i-1)/N	0.05	0.02	0	0.13	0.1	0.1	0.14	0.05	0	0.02

$$D = Max\{D^{+}, D^{-}\} = 0.14$$

$$\alpha = 0.05 \rightarrow D\alpha = 0.410 \rightarrow D < D\alpha$$

بنابراین نتیجه می گیریم که فرض H_0 برقرار است و اعداد داده شده از توزیع یکنواخت هستند.

پاسخ سوال 4

فرض H_0: داده های داده شده از توزیع پواسون پیروی می کنند.

فرض H_1: داده های داده شده از توزیع پواسون پیروی نمی کنند.

$$\alpha_{\text{Poisson}} = \overline{X} = 4.4$$

<table>
<tr><th>X_i</th><th>O_i</th><th>E_i = n.p(x)</th><th>E_i (combined)</th><th>$(O_i - E_i)^2$</th><th>$(O_i - E_i)^2/E_i$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0.12</td><td rowspan="4">3.59</td><td rowspan="4">1.99</td><td rowspan="4">0.55</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0.54</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>1.19</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td>1.74</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0</td><td>1.92</td><td rowspan="2">3.61</td><td rowspan="2">6.81</td><td rowspan="2">1.89</td></tr>
<tr><td>5</td><td>1</td><td>1.69</td></tr>
<tr><td>6</td><td>2</td><td>1.24</td><td rowspan="3">2.8</td><td rowspan="3">1.44</td><td rowspan="3">0.51</td></tr>
<tr><td>7</td><td>2</td><td>0.78</td></tr>
<tr><td>7<</td><td>0</td><td>0.78</td></tr>
</table>

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{(Oi - Ei)^{**}2}{Ei} = 0.55 + 1.89 + 0.51 = 2.95$$

Degree of freedom = k - s - 1 = 3 - 1 - 1 = 1

$\chi_{0.05,\,1} = 3.84 > 2.95$

در نتیجه فرض صفر را نمی توان رد کرد و اعداد شده می توانند از یک توزیع پواسون باشند.