



به موارد زیر توجه کنید:

- 1- حتما نام و شماره دانشجویی خود را روی پاسخ نامه بنویسید.
- 2- در حل سوالات به نوشتن جواب آخر اکتفا نکنید. همه مراحل میانی را هم بنویسید.
- 3- کل پاسخ تمرین تئوری را در قالب یک فایل pdf به همراه پاسخ سوال عملی با شماره دانشجویی و نام و نام خانوادگی خود، نام گذاری کرده و در سامانه CW بارگذاری کنید.
- 4- در صورت مشاهده هرگونه مشابهت نامتعارف هر دو (یا چند) نفر کل نمره این تمرین را از دست خواهند داد.

## سوالات:

### بخش نظری

-1

الف) ثابت کنید برای متغیر تصادفی گسسته و مثبت  $X$  داریم:

$$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} (1 - P(X \leq x))$$

ب) دو متغیر تصادفی مستقل  $X$  و  $Y$  را در نظر بگیرید که از توزیع پواسون و به ترتیب از پارامترهای  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  پیروی می کنند. ثابت کنید که توزیع  $Z = X + Y$  نیز یک توزیع پواسون با پارامتر  $\lambda_1 + \lambda_2$  است.

2- فرض کنید  $n$  نفر می خواهند در  $n$  صندلی جای بگیرند و هر یک صندلی مخصوص به خود را دارد. نفر اول تصمیم می گیرد به جای اینکه سر جای خود بنشیند، یک صندلی را تصادفی (با احتمال یکسان بین صندلی ها) انتخاب کند و روی آن بنشیند. نفرات بعد نیز به ترتیب پس از مراجعه به صندلی خود اگر خالی بود همان جا نشسته و در غیر این صورت بین صندلی های خالی با احتمال یکسان یکی را تصادفی انتخاب می کنند. احتمال اینکه نفر آخر روی صندلی خود بنشیند را بیابید.

**3-** داده های زیر را برای زمان بین رسیدن مشتریان (بر حسب احتمال زمان بین ورود) در یک فروشگاه زنجیره ای بزرگ در نظر بگیرید. فرض کنید که دو تا سرور داریم که تا وقتی که سرور یک مشغول نیست، سرور دوم به مشتریان رسیدگی نمی کند.

زمان بین ورود مشتریان	احتمال
0	0.39
1	0.33
2	0.19
3	0.09

زمان پردازش هر مشتری از توزیع نرمال با میانگین 4 دقیقه و انحراف معیار 9 دقیقه به دست می آید. برای 12 مشتری داده های زمان رسیدن آنها و زمان پردازش آنها را تولید کنید و جدول شبیه سازی را پر کنید، که این جدول شامل ستون های زیر است.

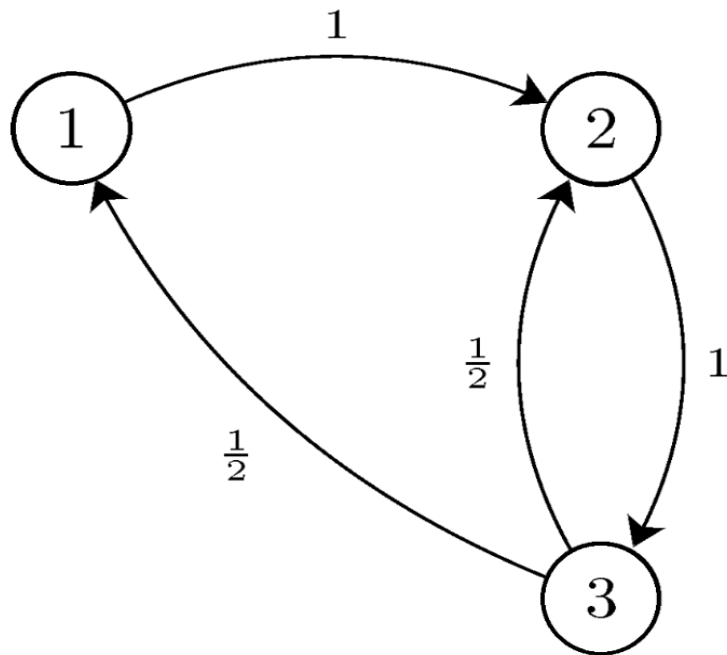
لیست رخداد بعدی	وضعیت	زمان
-----------------	-------	------

منظور از وضعیت یک دوتایی  $(p, q)$  است که  $p$  برابر طول صف و  $q$  اگر سرور مشغول باشد، یک و اگر مشغول نباشد، صفر است.

ب) مشخص کنید هر کدام از سرورها در چند درصد از مدت زمان شبیه سازی مشغول بوده اند.

- برای حل قسمت اول سوال، پیرامون شبیه سازی 12 مشتری، با زبان دلخواه کد بنویسید و کد خود را درج نمایید.

4- یک زنجیره مارکوف با زمان پیوسته  $X(t)$  را در نظر بگیرید که دارای زنجیره پرش نشان داده شده در شکل زیر است.



الف) ماتریس مولد این زنجیره را پیدا کنید. (منظور از ماتریس مولد، generator matrix است)  
 ب) توزیع محدود کننده  $X(t)$  را با حل  $\pi G = 0$  بیابید. (منظور از توزیع محدود کننده، limiting distribution است)

## بخش عملی

5- در این تمرین می‌خواهیم به شبیه‌سازی یک زنجیره مارکوف در اکسل پردازیم. برای انجام محاسبات باید از فرمول‌نویسی در اکسل کمک بگیرید و گزارشی مختصر از توضیح هر قسمت به همراه فایل نهایی اکسل ارائه دهید.

زندگی در شهری را فرض کنید که شهروندان تنها آخر هفته به یکی از سه فروشگاه زنجیره‌ای موجود در شهر، یعنی Target، Walmart و Costco می‌روند. شهروندان در هر هفته تنها یک بار و فقط به یکی از آنها مراجعه می‌کنند. یک تحقیق روی تعداد مشتریان هر یک از فروشگاه‌ها انجام شده است که نشان می‌دهد تمایل مشتریان برای رفتن به هر فروشگاه در هر هفته بر حسب فروشگاهی که هفته گذشته به آن مراجعه کرده‌اند چگونه است. نتیجه این تحقیق در جدول زیر قابل مشاهده است:

فروشگاه هفته جاری			فروشگاه هفته گذشته
Costco	Walmart	Target	
0.1	0.2	0.7	Target
0.2	0.6	0.2	Walmart
0.6	0.1	0.3	Costco

الف) مسئله فوق را به کمک زنجیره مارکوف، ماتریس انتقال و بردار حالات اولیه  $(p(0))$  توصیف کنید. ماتریس انتقال و  $p(0)$  را در اکسل تشکیل دهید.

ب) می‌خواهیم ببینیم در ده هفته متوالی احتمال مراجعه به هر فروشگاه چقدر است. به کمک بخش‌های قبل احتمالات را برای هفته دوم بیابید. بدین ترتیب می‌توانید احتمال مراجعه به هر فروشگاه در هر هفته را بدست آورید. لازم به ذکر است که با توجه به تعداد فروشگاه‌ها، احتمالات مراجعه به فروشگاه‌ها را در سه جدول مجزا که هر یک ده سطر برای ده هفته دارند را در اکسل نمایش دهید.

پ) نتایج حاصل را به کمک نمودار در اکسل نمایش دهید.

ت) یک نمونه شبیه‌سازی از این مسئله ارائه دهید. برای این کار 100 مشتری را در نظر بگیرید که هفته گذشته به احتمال 0.4 از Target، به احتمال 0.5 از Walmart و به احتمال 0.1 از Costco خرید کرده‌اند. پس از ده هفته بررسی کنید که هر یک از این مشتریان از چه فروشگاهی خرید می‌کنند.