1. الف

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \sum_{x=0}^{\infty} x * P(X=x) \\
&= 0 * P(0) + 1 * P(1) + 2 * P(2) + \dots \\
&= (P(1) + P(2) + P(3) + \dots) + (P(2) + P(3) + \dots) + (P(3) + \dots) \\
&= (1 - P(X \leqslant 0)) + (1 - P(X \leqslant 1)) + (1 - P(X \leqslant 2)) + \dots \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} (1 - P(X \leqslant x))
\end{aligned}
$$

اگر با در نظر گرفتن متغیرهای تصادفی گسسته و مثبت دیگری حل شده، با فرض شمارا بودن آن و نظیر کردنش به مجموعه اعداد حسابی، اثبات پذیرفته می‌شود.

ب

$$
\begin{aligned}
P\{Z=n\} = P\{X+Y=n\} &= \sum_{k=0}^{n} P\{X=k, Y=n-k\} \\
&= \sum_{k=0}^{n} P\{X=k\} P\{Y=n-k\} \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots, \infty
\end{aligned}
$$

2. **حل.** منظور از «صندلی iام»، صندلیِ مسافر iام در صف است. ادعا می‌کنیم فرد آخر فقط با دو حالت می‌تواند مواجه شود. اول آنکه صندلی خودش خالی باشد و دیگر آنکه فقط صندلی اول خالی باشد. برای اثبات این ادعا کافی‌است با برهان خلف نشان دهیم اگر صندلی jام ($1 < j < n$) خالی باشد آنگاه زمانی که فرد jام سوار قطار می‌شده نیز خالی بوده و قطعا این فرد آن صندلی را انتخاب کرده بود. از آنجاکه احتمال انتخاب بین صندلی n و صندلی ۱ در همه زمان‌ها و همه انتخاب‌ها یکسان بوده است، احتمال اینکه روی صندلی ۱ بنشیند باید با احتمال اینکه روی صندلی nام بنشیند برابر باشد، زیرا بقیهٔ $n-1$ مسافر، به احتمال برابر روی آن دو می‌توانستند بنشینند. پس احتمال اینکه مسافر آخر روی صندلی خودش بنشیند، ۱/۲ است.

3. برای این سوال پاسخ یکتایی وجود ندارد و بر اساس راه و منطقی که پیش گرفته اید نمره تان محاسبه میشود.