



## ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۹۹-۰۰

مدرس: مسعود صدیقین

## سوالات سری اول

## مسئله‌ی ۱\*. اعداد فیبوناچی

در کلاس، برای محاسبه اعداد فیبوناچی با استفاده از آرایه پویا یک آرایه با طول  $n$  استفاده شده بود. نشان دهید چگونه می‌توان حافظه مورد نیاز این الگوریتم را به تعداد ثابتی (۲ یا ۳ متغیر) کاهش داد.

## مسئله‌ی ۲. تعداد نابه‌جایی‌ها

آرایه‌ی  $T$  شامل  $n$  عنصر متمایز را در نظر بگیرید. بین یک جفت اندیس مانند  $(i, j)$  از این آرایه یک «نابه‌جایی» وجود دارد اگر  $i < j$  و  $T[i] > T[j]$ . اگر در آرایه‌ی  $T$  یک نابه‌جایی بین دو اندیس  $i$  و  $j$  وجود داشته باشد، نشان دهید این آرایه دارای حداقل  $j - i$  نابه‌جایی است.

## مسئله‌ی ۳\*. جستجوی خطی نامتوازن

یک لیست شامل  $n$  عدد متمایز  $a_1, a_2, \dots, a_n$  را در نظر بگیرید. می‌خواهیم یک عدد خاص مانند  $x$  را به روش جستجوی خطی بین این اعداد جستجو کنیم. منظور از جستجوی خطی این است که از عنصر نخست لیست شروع کرده و مقدار مورد جستجو (اینجا یعنی  $x$ ) را به ترتیب با تک‌تک عناصر لیست مقایسه کنیم. دقت کنید که فرآیند جستجو را تا زمانی ادامه می‌دهیم که یا عنصری برابر با  $x$  یافت شود (جستجوی موفق) و یا به پایان لیست برسیم (جستجوی ناموفق).

حال فرض کنید می‌دانیم احتمال اینکه  $a_i = x$  باشد برابر با  $\frac{i}{\sum_{i=1}^n i}$  است. در این صورت زمان اجرای این الگوریتم را در حالت بهترین، بدترین و متوسط به دست آورید. چه روشی برای جستجوی بهتر در این روش پیشنهاد می‌کنید؟

## مسئله‌ی ۴\*. تشخیص ماتریس متقارن

شبه‌کد زیر برای تشخیص متقارن بودن یا نبودن یک ماتریس مربعی  $A_{n \times n}$  نوشته شده است (شماره‌گذاری درایه‌ها از ۱ شروع می‌شود):

```
for  $i = 1$  to  $n - 1$ 
  for  $j = i + 1$  to  $n$ 
    if  $A[i, j] \neq A[j, i]$ 
      return false
return true
```

الف) زمان اجرای الگوریتم بالا در بدترین و بهترین حالت تحلیل کنید.

ب) اگر بدانیم مقدار هر درایه ماتریس عضو مجموعه  $\{1, 2, \dots, m\}$  است و هر یک از  $m$  عضو مذکور با احتمال برابر می‌تواند به عنوان مقدار هر درایه انتخاب شود، زمان اجرای الگوریتم را در حالت متوسط بررسی کنید (در واقع فرض کنید هر یک از ماتریس‌های ممکن به احتمال برابری می‌توانند ورودی مسئله باشند). محاسبه یک حد بالا بر روی تعداد مقایسه‌ها کافی است.

### مسئله‌ی ۵\*. جستجوی کارآمد

آرایه  $n$  عنصری  $A$  را در نظر بگیرید که تمام عناصر آن اعدادی طبیعی، متمایز و به ترتیب صعودی هستند. الگوریتمی بهتر از جستجوی خطی ارائه دهید که تشخیص دهد آیا اندیسی مانند  $i$  وجود دارد که  $A[i] = i$  باشد یا خیر.

### مسئله‌ی ۶\*. مشهور

به شخصی در یک جمع  $n$  نفره مشهور می‌گوییم اگر همه او را بشناسند و او کسی را نشناسد (آشنایی رابطه‌ی دو طرفه نیست!). حال می‌خواهیم با تعدادی پرسش به شکل "از میان شخص  $i$  و شخص  $j$  کدام یک دیگری را می‌شناسد؟" ببینیم که در این جمع شخص سلبریتی هست یا نه. الگوریتمی طراحی کنید که  $n$  پرسش این کار را انجام دهد.