



# ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۱۳۹۹ - ۱۴۰۰

مدرس: مسعود صدیقین

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

## سوالات سری یازدهم

### مسئله‌ی ۱\*. مسأله انتخاب

برای حل مسأله انتخاب  $k$  امین کوچک‌ترین عنصر در آرایه نامرتب، الگوریتمی غیرتصادفی مطرح شد که این مسأله را در زمان  $O(n)$  حل می‌کرد. حال فرض کنید الگوریتم را به این صورت تغییر داده‌ایم که عناصر را به جای تقسیم به دسته‌های ۵ تایی، هر بار آن‌ها را به دسته‌های ۷ تایی تقسیم کرده و سپس مانند همان الگوریتم اصلی عمل کنیم. حال به سوالات زیر پاسخ دهید:

- در الگوریتم جدید فاصله میانه میانه‌ها از دو سر آرایه چقدر خواهد بود؟ (یک حد بالای  $tight$  ارائه دهید)
- حال فرض کنید هنگام پیدا کردن میانه هر کدام از دسته‌های ۷ تایی از  $Bubble Sort$  استفاده کنیم. حال رابطه بازگشتی الگوریتم جدید را به دست آورده و دلیل به دست آمدن هر بخش از آن را به صورت کلی شرح دهید.
- رابطه به دست آمده در بخش قبل را مانند مسأله مطرح شده در کلاس حل کرده و حد بالای تعداد مقایسه‌های استفاده شده در این الگوریتم را به دست آورید.
- آیا الگوریتم جدید نسبت به الگوریتم اصلی بهتر عمل می‌کند و چرا؟

### مسئله‌ی ۲\*. حد جدید

در تحلیل ارائه شده برای الگوریتم  $F - select$  در کلاس، میانه میانه‌ها را با تمام عناصر دیگر آرایه مقایسه کردیم تا بتوانیم  $partitioning$  را انجام دهیم. بدیهی است که می‌توان تعداد این مقایسه‌ها را کاهش داد زیرا می‌دانیم که حداقل  $\frac{3n}{4}$  از عناصر، کوچک‌تر یا مساوی میانه میانه‌ها هستند و همین رابطه برای عناصر بزرگتر از میانه میانه‌ها نیز برقرار است. حال شما باید یک حد بالای جدید و بدیهه‌تر از حد قبلی برای تعداد مقایسه‌های این مرحله از الگوریتم ارائه دهید. در تحلیل جدید مقدار  $constant$  به دست آمده چقدر خواهد بود؟

### مسئله‌ی ۳\*. سرعت

آرایه نامرتب  $A$  از  $n$  عنصر داده شده است. الگوریتمی ارائه دهید که با دریافت  $x$ ، همه عنصرهایی مانند  $a$  و  $b$  را پیدا کند که  $a + b = x$ . الگوریتم شما باید در زمان متوسط  $O(n)$  اجرا شود و حداکثر نیز از حافظه  $O(n)$  استفاده کند.

#### مسئله‌ی ۴\*. مگه الکیه؟

یک آرایه  $n$  عضوی از اعداد صحیح داده شده است. در زمان خطی، عضوی را در صورت وجود پیدا کنید که بیش از  $\frac{n}{3}$  بار تکرار شده است.

#### مسئله‌ی ۵\*. ماشین‌آلات سنگین

فرض کنید ماشینی وجود دارد که میانه یک آرایه  $n$  عضوی را در زمان  $O(\sqrt{n})$  محاسبه می‌کند. آیا می‌توان با استفاده از این ماشین، آرایه را در زمان خطی مرتب کرد؟

#### مسئله‌ی ۶\*. اعداد روان

یک عدد را روان می‌گوییم، اگر اختلاف هر دو رقم مجاور آن ۱ باشد. مثلاً ۳۲۱ و ۴۵۴ روان هستند، ولی ۵۴۱ نیست. الگوریتمی از پیچیدگی زمانی کمتر از  $O(n)$  ارائه دهید، به طوری که تمام اعداد روان کمتر از  $n$  را پیدا کند.

#### مسئله‌ی ۷\*. ترتیب ملاقات‌ها

گرافی ۵ راسی داریم که اگر راس ۱ الگوریتم DFS را اجرا کنیم، می‌توانیم به ترتیب‌های  $\langle ۱, ۲, ۴, ۳, ۵ \rangle$ ،  $\langle ۱, ۳, ۴, ۲, ۵ \rangle$ ،  $\langle ۱, ۳, ۵, ۴, ۲ \rangle$  می‌رسیم. اگر از راس ۵ الگوریتم را اجرا کنیم به چه ترتیب‌هایی می‌توانیم برسیم؟

#### مسئله‌ی ۸\*. عدد گلوگاهی

برای گرافی وزن‌دار، بدون جهت، ساده و همبند  $G$  با  $n$  راس و  $m$  یال، عدد  $b$  را گلوگاهی می‌گوییم، اگر  $b$  بزرگ‌ترین عددی باشد که بین هر دو راس، مسیری وجود داشته باشد که همه یال‌های آن مسیر حداقل  $b$  باشد. الگوریتمی با زمان اجرای  $O(m \log n)$  برای محاسبه عدد گلوگاهی ارائه دهید.