جلسه هفتم: تحلیل سرشکن Amortized : فرض کنید هزینه [تعداد عملیات] انجام

m بار عمل X ، در بدترین حالت، برابر با $T(m)$ باشد. در این صورت

هزینه سرشکن هر بار عمل X ، $\frac{T(m)}{m}$.

* تفاوت این تعریف با حالت متوسط چیست؟

مثال: binary counter (شمارنده دودویی): فرض کنید یک شمارنده دودویی
با استفاده از آرایه A پیاده شده است.

0	0	0	0	0	0	0

A ←

0 0 0 0 0 0 1   +1

0 0 0 0 0 1 0   +1

0 0 0 0 0 1 1   +1

A 0 0 1 1 0 1 1 1 1 ←

0 0 1 1 1 0 0 0 0

تابع inc :

```
inc(A) {
  i = 0
  while( A[i] == 1) {
     A[i] = 0
     i ++
  }
  A[i] = 1
}
```

اندازه آرایه $A = K$.

بدترین حالت تابع inc : چون در بدترین حالت، هزینه inc ، K است

پس، هزینه m بار عمل inc ، در بدترین حالت $\underset{mK}{\underline{O(mK)}}$ است.

تحلیل دقیق نیست؟ چرا؟

هزینه m بار عمل inc پشت سرهم:

* روش تجمیع (Aggregation): محاسبه کل عملیات انجام شده

* بیت اول چند بار عوض می‌شود؟ m بار
* بیت دوم چند بار عوض می‌شود؟ $m/2$ بار
* بیت سوم چند بار " ؟ $m/4$ "

$$m + \frac{m}{2} + \frac{m}{4} + \dots + 1 \leq 2m \longrightarrow 2m \text{ هزینه تمام عملیات}$$

هزینه سرشکن هر عملیات $= \frac{2m}{m} = 2$

$= O(1)$

روش (Accounting) :

فرض کنید به ازای هر بار تغییر بیت ۱ ریال باید پرداخت کنیم.

کل هزینه = کل زمان

* این پرداخت را با نقدی انجام می‌دهیم یا از حساب *

به ازای هر بار که بیت از ۰ به ۱ تبدیل می‌شود، ۱ ریال می‌دهیم

۱ ریال هم در حساب ذخیره می‌کنیم. به ازای هر بار که بیتی از ۱ به صفر

تبدیل می‌شود، ۱ ریال از حساب می‌دهیم.

⇐ در هر مرحله چقدر؟ ← در مرحله انجام عمل inc : ۱ عدد ۰ به ۱ تبدیل می‌شود

↓

۲ واحد ← حساب

$$\begin{array}{r} 11011\overset{-}{0}11111 \\ \hline 100000 \end{array}$$

⇐ آیا همیشه در حساب به مقدار کافی پول هست؟

هر مرحله ۲ ریال : m مرحله $\underline{2m}$ ریال

← هزینه سرشکن $= \frac{2m}{m} = 2$

* روش تابع پتانسیل :

A_i : آرایه A بعد از عمل i ام

ϕ_i : تعداد ۱ های آرایه A_i

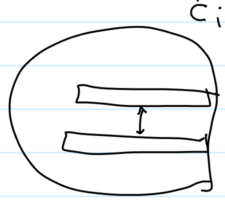
c_i : هزینه انجام عمل i ام $\longrightarrow$ کل هزینه $\sum_{1 \leq i \leq m} c_i$

$$\hat{c}_i = \underline{c_i} + \underline{\phi_i} - \underline{\phi_{i-1}}$$

$$A_0 \xrightarrow[c_1]{} A_1 \xrightarrow[c_2]{} A_2 \longrightarrow \dots$$

$$\underline{\sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i} = \underline{\sum_{i=1}^{m} c_i} + \underbrace{\phi_m}_{+} - \underbrace{\phi_0}_{0} \geq \sum_{i=1}^{m} c_i$$

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi_i - \Phi_{i-1}$$



$$\text{inc}: \; 0\,\overbrace{111111}^{r} \to 1\,000000 \qquad c_i = r+1$$

$$\Phi_i - \Phi_{i-1} = 1-r$$

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi_i - \Phi_{i-1} = 1-r+r+1 = 2$$

$$\hat{c}_i = 2 \longrightarrow \sum_i \hat{c}_i = 2m \geq \sum_i c_i$$

$O(1) = 2 = \frac{2m}{m} =$ هزینه سرشکن

فرم کلی استفاده از تابع پتانسیل :

فرض کنید داده ساختار D را داریم که طی m عملیات به صورت زیر تغییر کند:

$$D_0 \xrightarrow{c_1} D_1 \xrightarrow{c_2} D_2 \cdots$$

c_i : هزینه عمل i ام

فرض کنید $\Phi : \{D_i\} \to R^+$ را تعریف کنیم به طوری که

به ازای هر i $\quad \Phi(D_i) \geq \Phi(D_0)$

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$$

$$\sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i = \sum_{i=1}^{m} c_i + \Phi(D_m) - \Phi(D_0)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i \geq \sum_{i=1}^{m} c_i$$

اگر بتوانیم $\sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i$ را برایش حد بالا تعیین کنیم ← $\sum_{i=1}^{m} c_i$ را برایش حد تعیین کردیم

هرکدام c_i ها را ...