گردآورندگان: پرهام صارمی، صابر دین پژوه

تمرین سری صفر

موضوعات تمرین: مقدمات احتمال

مقدمات احتمال

مسئله‌ی ۱. *تاس بازی

دو تاس داریم که تاس A با احتمال $\frac{1}{6}$ یک عدد را نشان می‌دهد و تاس B که با احتمال $\frac{i}{21}$ام عدد i را نمایش می‌دهد.

الف

تاس A را انتخاب می‌کنیم و ۷ بار تاس می‌ریزیم احتمال اینکه دقیقا ۴ بار تاس ۵ یا ۶ را نشان دهد چقدر می‌باشد؟

ب

تاس B را انتخاب می‌کنیم و ۷ بار تاس می‌ریزیم احتمال اینکه حداکثر ۴ بار تاس زوج بیاید چقدر می‌باشد؟

ج

چند تاس عادلانه داریم(مانند تاس A) اگر بخواهیم شانسمان برای اینکه مجموع تاس ها ۹ شود بیشتر باشد بهتر است که از ۳ تاس استفاده کنیم یا از ۲ تاس؟

حل.

الف

احتمال اینکه تاس A برابر ۵ یا ۶ بیاید برابر با $\frac{1}{3}$ می‌باشد. بنابراین برای اینکه ۴ بار از ۷ بار این اتفاق بیفتد داریم (پیشامد را X می‌نامیم):

$$P(X) = \binom{7}{4} * (\frac{1}{3})^4 * (\frac{2}{3})^3 = 0/128$$

ب

احتمال اینکه تاس B زوج بیاید برابر است با: $\frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21}$ بنابراین برای اینکه حداکثر ۴ بار زوج بیاید داریم:

$$\sum_{i=0}^{4} \binom{7}{i} (\frac{12}{21})^i (\frac{9}{21})^{7-i} = 0/6406$$

ج

برای اینکه ۳ عدد تاس به مجموع ۹ برسند حالت های زیر ممکن است:

$$(۶, ۲, ۱), (۴, ۳, ۲), (۳, ۳, ۳), (۲, ۲, ۵), (۱, ۳, ۵), (۱, ۴, ۴)$$

که با جمع کردن تعداد حالات به ۲۵ حالت میرسد که احتمال آن برابر با ۰/۱۱۵۷ میباشد.
برای دو تاس داریم:

$$(۶, ۳), (۵, ۴)$$

که ۴ حالت متفاوت میباشد و احتمال آن برابر با ۰/۱۱۱۱ می‌باشد.
بنابراین بهتر است که از ۳ عدد تاس استفاده کنیم. ▷

مسئله‌ی ۲. *رولت روسی

پرهام و صابر می‌خواهند تمرین سری صفر آمار را طرح کنند و یکی از آن‌ها باید لاتک تمرین را بزند. آن دو برای اینکه تصمیم بگیرند کدامشان لاتک تمرین را بزند، تصمیم به انجام بازی رولت روسی می‌کنند تا فرد بازنده لاتک تمرین را بزند :) آن‌ها دو تفنگ اسباب بازی دارند که خشاب آن‌ها می‌تواند تا ۶ تیر را در خود جای دهد و خشاب آن‌ها به صورت دایره‌ای می‌باشد که با چرخاندن آن به صورت تصادفی (با احتمال برابر) بر روی یکی از ۶ جایگاه قرار می‌گیرد. در تفنگ A هر دو تیر در کنار هم قرار دارند و در تفنگ B دو تیر رو به روی همدیگر می‌باشند(خشاب را به صورت ۶ نقطه با فاصله یکسان بر روی محیط یک دایره در نظر بگیرید) قوانین این بازی به این صورت است که نفر اول که می‌خواهد به سمت خود شلیک کند باید حتما خشاب را بچرخاند و از نوبت بعدی هر فرد می‌تواند یا خشاب را بچرخاند یا بدون چرخاندن تیر بزند(در صورت تیر زدن به طور خودکار خشاب ۶۰ درجه می‌چرخد و بر روی جایگاه بعدی قرار می‌گیرد) با توجه به داستان بالا به سوالات زیر جواب دهید:

الف

آن‌ها تصمیم می‌گیرند با تفنگ A بازی کنند حال تصور کنید صابر به سمت خود شلیک می‌کند و آن جایگاه خالی می‌باشد حال نوبت پرهام است با احتساب احتمال‌ها بگویید منطقی‌تر است که پرهام قبل از تیر زدن خشاب را بچرخاند یا نه؟

ب

قسمت قبل را با فرض اینکه با تفنگ B بازی کنند جواب دهید.

ج

فرض کنید پرهام و صابر یکی از دو تفنگ را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنند ابتدا صابر به سمت خود شلیک می‌کند سپس پرهام بدون چرخاندن خشاب به سمت خود شلیک می‌کند و در نهایت صابر با چرخاندن خشاب به سمت خود شلیک می‌کند و بازی را می‌بازد احتمال اینکه تفنگ انتخاب شده تفنگ A باشد چقدر می‌باشد؟

حل.

الف

اگر شماره های ۱ ، ۲ ،...، ۶ را برای جایگاه ها در نظر بگیریم (فرض کنید جایگاه های ۱ و ۶ مجاورند) اگر فرض کنیم دو تیر در جایگاه ۳ و ۴ کنار هم میباشند بنابراین زمانی که صابر شلیک کرده یکی از جایگاه های ۱ ، ۲ ، ۵ ، ۶

را شلیک کرده و فقط در یکی از این حالات (جایگاه ۲) حالت بعدی پر میباشد. بنابراین حالت بعدی با احتمال $\frac{۱}{۴}$ پر میباشد. حال آنکه اگر خشاب را بچرخاند با احتمال $\frac{۱}{۳}$ بر روی یکی از جایگاه های پر می‌افتد بنابراین بهتر است که پرهام خشاب را نچرخاند.

ب

در این حالت اگر تیر ها را در جایگاه های ۳ و ۶ در نظر بگیریم (۱، ۲، ۴، ۵ خالی هستند) وقتی صابر تیر میزند در دو حالت ممکن است جایگاه بعدی پر باشدبنابراین احتمال پر بودن جایگاه بعدی $\frac{۱}{۲}$ میباشد و بهتر است که پرهام خشاب را بچرخاند.

ج

پدیده X را پدیده ذکر شده در صورت سوال مینامیم. میخواهیم احتمال $P(A|X)$ را حساب کنیم. با توجه به قانون بیز داریم:

$$P(A|X) = \frac{P(X|A)}{P(X)} \times P(A)$$

حال میدانیم:

$$P(X) = P(X|A)P(A) + P(X|B)P(B)$$

از آنجا که میدانیم $P(A) = P(B) = \frac{۱}{۲}$ ، کافی است $P(X|A)$ و $P(X|B)$ را محاسبه کنیم:

$$P(X|A) = \frac{۲}{۳} \times \frac{۳}{۴} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۶} \tag{۱}$$

$$P(X|B) = \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۹} \tag{۲}$$

با توجه به ۱، ۲ داریم:

$$P(X) = \frac{۵}{۳۶} \Rightarrow P(A|X) = \frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۵}{۳۶}} \times \frac{۱}{۲} = ۰/۶$$

▷

مسئله‌ی ۳. *مسابقه

یک مسابقه شنا را با تعدادی شرکت کننده در نظر بگیرید:

الف

اگر تعداد شرکت‌کننده‌های این مسابقه برابر با ۵ باشد(در این مسابقه مساوی شدن رتبه دو فرد ممکن نمی‌باشد)، تعداد حالت‌های مختلف رتبه‌بندی نهایی این افراد را بدست آورید.

ب

در قسمت قبل فرض شد که دو فرد نمی‌توانند رتبه یکسانی داشته باشند، حال فرض کنید که برای سیستم رتبه‌دهی مسابقه مشکلی پیش آمده و افرادی که زمانشان نزدیک هم می‌باشد، در یک رتبه قرار می‌گیرند حال با توجه به اینکه تعداد شرکت‌کننده‌های این مسابقه برابر با ۵ می‌باشد چند حالت برای نتیجه نهایی مسابقه وجود دارد؟(برای جواب خود را با استدلال کامل بیاورید و جواب نهایی را نیز به صورت ساده شده بنویسید)

ج

حال قسمت ب را با فرض اینکه تعداد شرکت کننده‌های مسابقه برابر با n می‌باشد حل کنید.(نیازی به ساده کردن رابطه بدست آمده نمی‌باشد)

حل.

الف

تعداد حالت‌ها برای رتبه‌های نهایی برابر با جایگشت‌های این افراد می‌باشند بنابراین جواب برابر با !۵ می‌باشد.

ب

۵ نفر را می‌توان به شکل‌های زیر افراز کرد:

$$(۱,۱,۱,۱,۱),(۲,۱,۱,۱),(۳,۱,۱),(۲,۲,۱),(۳,۲),(۴,۱),(۵)$$

به عنوان مثال (۴,۱) به این معناست که ۴ نفر در یک رتبه و یک نفر در یک رتبه دیگر قرار گرفته‌اند. مقدار نهایی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$۵! + ۴! \times \binom{۵}{۲} + ۳! \times \binom{۵}{۳} + ۳! \times ۱۵ + ۲! \times \binom{۵}{۳} + ۲! \times \binom{۵}{۴} + ۱ = ۵۴۱$$

ج

تابع f را تعریف می‌کنیم به صورتی که $f(n)$ برابر با تعداد حالت‌های پایان مسابقه باشد. حال فرض می‌کنیم k نفر رتبه اول شده‌اند، حال تعداد حالت‌ها برای $n-k$ فرد باقی‌مانده برابر با $f(n-k)$ می‌باشد، بنابراین در حالتی که تعداد افرادی که اول شده‌اند برابر با k باشد جواب نهایی برابر با $\binom{n}{k} \times f(n-k)$ می‌باشد بنابراین داریم:

$$f(n) = \sum_{i=۱}^{i=n} \binom{n}{i} \times f(n-i)$$

▷

مسئله‌ی ۴. نمایش

پرهام و صابر می‌خواهند به یک نمایش بروند و دو بلیط دارند که بر روی آنها به ترتیب اعداد k و h نوشته شده(شماره صندلی‌ها) به سوالات زیر جواب دهید:

الف

به دلیل نقص در سیستم صادر کننده بلیط برای تعدادی از افراد بلیط‌های با اعداد مشابه صادر شده حال برای اینکه افراد کمتری وارد نمایش شوند به هنگام ورود هر دو نفر سیستم یک عدد تصادفی کوچکتر از حاصلضرب شماره صندلی‌های دو فرد (برای صابر و پرهام یک عدد تصادفی مثبت کوچکتر از $h \times k$ تولید می‌شود) و اگر عدد تولید شده بر شماره صندلی یکی از آن دو فرد بخش پذیر بود آن‌ها را به نمایش راه می‌دهند. صابر و پرهام با هم به سمت در ورودی می‌روند، احتمال اینکه این دو بتوانند وارد نمایش بشوند چقدر می‌باشد؟

ب

پرهام و صابر به همراه ۸ نفر دیگر(جمعا ده نفر) به داخل سالن نمایش راه داده می‌شوند پرهام اولین نفر وارد سالن نمایش می‌شود ولی از آنجایی که حواس پرت می‌باشد و بلیط خود را گم کرده‌است به صورت تصادفی(با احتمال برابر) یکی از صندلی‌ها را انتخاب می‌کند و بر روی آن می‌نشیند سپس نفرات بعدی تک تک وارد سالن می‌شوند و اگر جایشان از قبل پر شده باشد یک صندلی را تصادفی انتخاب می‌کنند و به صورت تصادفی بر روی آن می‌نشینند. صابر که موقع ورود به سالن نمایش یادش افتاد که خوراکی به همراه ندارد رفت تا کمی تنقلات بخرد و وقتی بازگشت، متوجه شد که فقط یک صندلی خالی می‌باشد احتمال اینکه صندلی باقی‌مانده در واقع همان صندلی خودش باشد چقدر می‌باشد؟

ج

فرض کنید در قسمت قبلی بجای ۸ نفر $n-۲$ نفر همراه پرهام و صابر بودند،حال احتمال اینکه صندلی صابر برایش بماند چقدر می‌باشد؟

حل.

الف

از آنجایی که دو عدد ممکن است نسبت به هم اول نباشند، ب.م.م آن دو را در نظر میگیریم $d=(h,k)$.
حال فرض میکنیم که $k=bd, h=ad$
تعداد اعدادی که مضرب h هستند برابر است با $\frac{hk}{h}-۱=k-۱$
تعداد اعدادی که مضرب k هستند برابر است با $\frac{hk}{k}-۱=h-۱$
اعدادی که مضرب هر دو هستند باید از مضارب abd باشند پس تعداد آنها برابر است با $\frac{abd^۲}{abd}-۱=d-۱$. که همان $(h,k)-۱$ میباشد.
H را پیشامد بخشپذیر بودن بر h و K را پیشامد بخشپذیر بودن بر k در نظر میگیریم. آنگاه داریم:

$$P(H\cup K)=P(H)+P(K)-P(H\cap K)$$

$$=\frac{k-۱}{hk-۱}+\frac{h-۱}{hk-۱}-\frac{(h,k)-۱}{hk-۱}$$

ب

در هر مرحله اگر صندلی پرهام توسط فردی پر شود صابر قطعا در جای خود مینشیند(زیرا افراد بعد از او در سر جای خود مینشینند) و اگر جای صابر پر شود صابر نمیتواند بر روی آن صندلی بنشیند؛ بنابراین این صندلی ها سرنوشت ساز هستند و هر کس بر روی یکی از آن دو بنشیند جای صابر دیگری خواهد بود حال از آنجایی که زمانی که فرد k ام وارد سالن نمایش میشود اگر صندلی اش پر باشد دقیقا به احتمال برابر یکی از این دو صندلی را انتخاب میکند. در نهایت احتمال اینکه صابر در صندلی خود بنشیند برابر با ۰/۵ خواهد بود.

ج

استدلال قسمت قبل، مستقل از تعداد افراد بود و n هر عددی که باشد احتمال اینکه صابر در صندلی خود بنشیند برابر ۵۰ درصد خواهد بود. ▷

مسئله‌ی ۵. *چند بخشی

صحیح یا غلط بودن عبارات زیر را با ذکر اثبات و یا مثال نقض مشخص کنید.

الف

پیشامد A همواره وابسته به خود است. $(0 \leqslant P(A) \leqslant 1)$

ب

اگر پیشامدهای A و B مستقل از هم باشند، مکمل آن‌ها نیز A^c و B^c هم مستقل از هم‌اند.

ج

اگر پیشامدهای A و B مستقل از هم باشند،$A|C$ و $B|C$ نیز مستقل از هم‌اند.$(P(C) > 0)$

د

اگر $A|C$ و $B|C$ از هم مستقل باشند، A و B نیز از هم مستقل‌اند.$(P(C) > 0)$

ه

اگر A و B و C دو به دو مستقل از هم باشند، این ۳ پیشامد مستقل از هم‌اند.

و

اگر $P(A|B) > P(A)$ و $P(A|C) > P(A)$ باشد آنگاه $P(A|B,C) > P(A)$ (به عبارت دیگر، درصورتی که دانستن پیشامدهای B و C به تنهایی باعث تقویت احتمال پیشامد A شوند، دانستن هردوی آن‌ها نیز باعث تقویت احتمال پیشامد A می‌شود.)

ز

استقلال پیشامدها خاصیت تعدی دارد به عبارت دیگر اگر A و B مستقل از یکدیگر باشند و B و C نیز مستقل از یکدیگر باشند انگاه A و C نیز مستقل از یکدیگرند.

ح

اگر $P(X = x|Z = z) = P(Y = x|Z = z)$، آنگاه $P(X = x) = P(Y = x)$

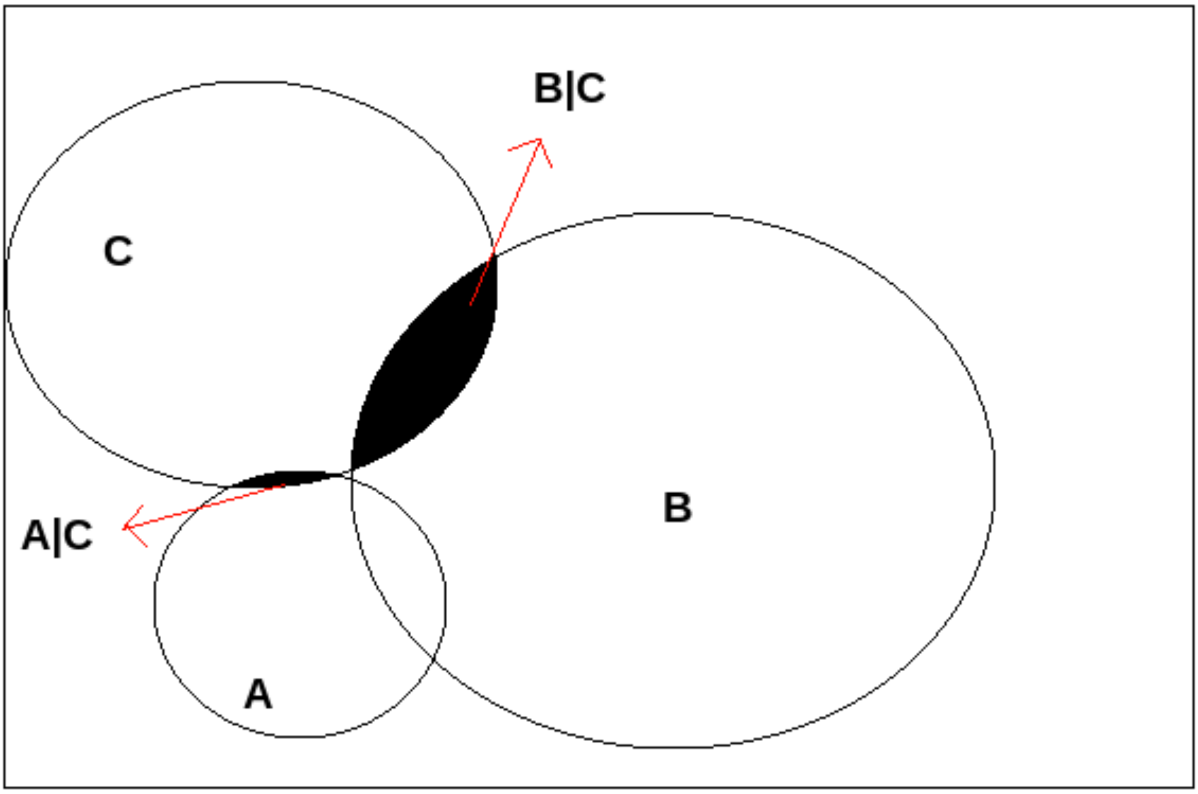
حل. توضیح کلی راه حل

الف

نادرست.
در صورتی که $A = \phi$ یا $A = S(Sample\,Space)$ باشد آنگاه A مستقل از خود است. زیرا داریم:

$$P(S \cap S) = P(S)P(S) = 1, P(\phi \cap \phi) = P(\phi)P(\phi) = 0$$

لازم به ذکر است که این عبارت برای $\{A : 0 < P(A) < 1\}$ درست است؛ زیرا داریم: $P(A|A) = 1 \neq P(A)$



شکل ۱: مثال نقض برای حفظ شدن استقلال تحت شرطی شدن احتمال

ب

درست.

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = ۱ - P(A \cup B) = ۱ - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$$

$$= ۱ - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = (۱ - P(A))(۱ - P(B)) = P(A^c)P(B^c)$$

پس A^c و B^c مستقل ازهم‌اند.

ج

نادرست.
به مثال نقض ارائه شده در شکل ۱ توجه کنید. $A|C$ و $B|C$ پیشامد های ناسازگار disjoint هستند. از طرفی میدانیم پیشامد های ناسازگار که غیرتهی هستند وابسته به هم اند (زیرا که دانستن اتفاق افتادن یکی از آنها دقیقا مشخص کننده ی اتفاق نیفتادن پیشامد دیگر است). با توجه به این قضیه $A|C$ و $B|C$ در این مثال وابسته به هم اند.

د

نادرست.
مثال های نقض زیادی برای این مورد میتوان ذکر کرد. به عنوان مثال فرض کنید آزمایش زیر را طراحی کرده ایم. دو سکه‌ی ناسالم الف و ب در درون یک کیسه قرار دارند. احتمال رو آمدن سکه الف ۰/۹ و سکه ب ۰/۱ است. یک فرد چشم بسته سکه ای را به تصادف از کیسه خارج میکند و ۱۰ بار آن را پرتاب میکند. سپس یک بار دیگر سکه را پرتاب میکند. ادعا میکنیم پیشامد های زیر مستقل از هم نیستند:

- پیشامد اول: همه ۱۰ پرتاب اول رو بیاید.
- پیشامد دوم: پرتاب ۱۱ ام رو بیاید.

زیرا با کمی دقت درمیابیم که در صورت اتفاق افتادن پیشامد اول به احتمال بسیار زیادی از سکه الف استفاده شده است. پس:

$$P(\text{پیشامد دوم} \mid \text{پیشامد اول}) \approx ۰/۹ \quad (۳)$$

ولی احتمال خود پیشامد دوم برابر با $\frac{1}{2}$ است. زیرا:

$$P(\text{پیشامد دوم}) = P(\text{پیشامد دوم} \mid \text{سکه الف})P(\text{سکه الف}) + P(\text{پیشامد دوم} \mid \text{سکه ب})P(\text{سکه ب})$$

$$= ۰/۹ \times \frac{۱}{۲} + ۰/۱ \times \frac{۱}{۲} = ۰/۵ \quad (۴)$$

(نحوه تعبیر مقدار ۰/۵ به دست آمده به این شکل است که ناسالم بودن سکه ها در دو جهت متفاوت باعث خنثی شدن همدیگر شده است و دو سکه در ترکیب با هم یک سکه سالم را ایجاد کرده اند.)
در هر حال با توجه به مقادیر ۳، ۴ داریم:

$$P(\text{پیشامد دوم} \mid \text{پیشامد اول}) \neq P(\text{پیشامد دوم})$$

پس این دو پیشامد مستقل از هم نیستند.
در حالیکه پیشامد های زیر مستقل از هم اند:

- پیشامد سوم: همه ی ۱۰ پرتاب اول رو بیاید به شرط اینکه از سکه الف استفاده کنیم.
- پیشامد چهارم: پرتاب ۱۱ ام رو بیاید به شرط اینکه از سکه الف استفاده کنیم.

علت استقلال: احتمال رو آمدن پرتاب ۱۱ ام درصورتی که نوع سکه را بدانیم مستقل از تمامی پرتاب های قبلی خواهد بود و در اینجا برابر است با:

$$P(\text{پیشامد چهارم}) = \frac{P(\text{سکه الف و رو آمدن پرتاب ۱۱ ام})}{P(\text{سکه الف})} = \frac{\frac{۱}{۲} \times ۰/۹}{\frac{۱}{۲}} = ۰/۹$$

۵

نادرست.
به شکل ۲ توجه کنید. پیشامد های A, B, C دوبه‌دو مستقل از هم‌اند ولی چون شرط $P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B)P(C)$ برقرار نیست در کل مستقل از هم نیستند.

توجه داشته باشید که

$$P(I) = P(II) = P(III) = P(IV) = ۰/۲۵$$

$$A = I \cup II$$

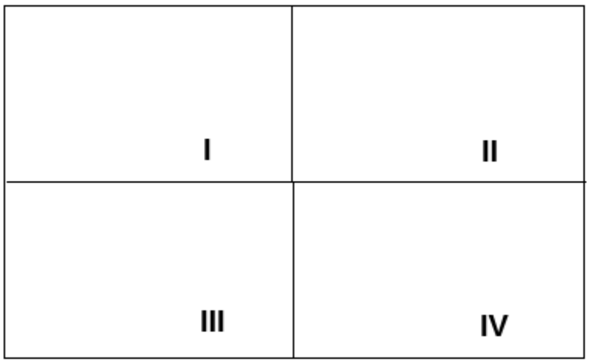
$$B = I \cup III$$

$$C = I \cup IV$$

بنابراین تعاریف داریم:

$$P(A) = P(B) = P(C) = ۰/۵$$

$$P(A\cap B) = P(A\cap C) = P(B\cap C) = ۰/۲۵$$



شکل ۲: مثال نقض برای استقلال سه پیشامد در صورت استقلال دوبه‌دوی آنها

بنابراین A, B, C دوبه‌دو مستقل از هم‌اند. اما

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{۱}{۴} \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{۱}{۸}$$

پس این سه پیشامد مستقل از هم نیستند.
لازم به ذکر است که این مثال را میتوان از منظر دیگری نیز نگاه کرد و به جای تحقیق با روابط ریاضی و چک کردن برابری احتمالات، به صورت ذهنی به همان نتیجه عدم استقلال این سه پیشامد رسید:
دانستن اتفاق افتادن A یا B به تنهایی تاثیری روی احتمال اتفاق افتادن C ندارد ولی اگر بدانیم که A و B هر دو اتفاق افتاده اند(یعنی بخش I در نمودار ون) مطمئن هستیم که C اتفاق افتاده است پس یعنی C و $A \cap B$ مستقل از هم نیستند پس این سه پیشامد مستقل از هم نیستند.

و

نادرست.
مثال نقض: فرض کنید A پیشامد مجرم بودن حسن در دزدی محله تجریش بین ساعت ۱ تا ۳ بعد از ظهر است.
B پیشامد حضور او در کافه شماره ۱ در تجریش بین ساعت ۱ تا ۲ است.
C پیشامد حضور او در کافه شماره ۲ در تجریش بین ساعت ۲ تا ۳ است.
با توجه به این تعاریف داریم:

$$P(A|B) > P(A), P(A|C) > P(A)$$

زیرا حضور در نزدیکی محل وقوع جرم، ضن را روی مضنون تقویت میکند. اما $P(A|B, C)$ برابر صفر است زیرا حسن در فاصله ۱ تا ۳ فقط در کافه ها حضور داشته است پس دزدی کار او نیست.
بنابراین نتیجه گیری جالب زیر حاصل میشود:
«اطلاعات ناقص میتواند احتمال وقوع یک پیشامد را درجهتی متفاوت با احتمال آن پیشامد با داشتن تمامی آن اطلاعات سوق دهند.»

ز

نادرست.
فرض کنید $A = C, A \neq \phi, A \neq S$ باشد آنگاه شرایط گفته شده برقرار است ولی A و C مستقل از هم نیستند.(استفاده از قسمت اول سوال)

ح

درست.
اثبات:

$$P(X=x)=\sum_{z} P(X=x|Z=z)P(Z=z)$$

$$=\sum_{z} P(Y=x|Z=z)P(Z=z)=P(Y=x)$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۶. *وحید ژاپنی

وحید برای کار به ژاپن رفته بود. یک روز هنگام رسیدن به محل کار خود متوجه می‌شود گوشی‌اش همراهش نیست. او که قبلا هم این اتفاق برایش افتاده است تکلیف خود را می‌داند و به سرعت به اکسل کارهای روزانه‌اش مراجعه می‌کند و متوجه می‌شود که در $\frac{۱}{۲}$ کل روزهای کاری‌اش گوشی‌اش را به دفتر کار خود نیاورده‌است. او ادامه‌ی تحقیقاتش را از $GoogleMaps$ پی می‌گیرد. مسافت بین خانه تا محل کار وحید $۲km$ است. او $۱.۵km$ از این مسافت را با قطار شهری و $۰.۵km$ باقی‌مانده را با تاکسی طی کرده‌است. وحید فرض ساده کننده‌ای را به شکل زیر درباره احتمال گم کردن گوشی درنظر می‌گیرد. «احتمال گم شدن گوشی در یک وسیله‌ی نقلیه متناسب با مسافت طی شده در آن وسیله است.» او با سرچ‌های بیشتر به این نتیجه می‌رسد که ۷۰ درصد گوشی‌های گم شده در مترو و ۹۰ درصد گوشی‌های گم شده در تاکسی به دست صاحبش می‌رسد. همچنین ژاپن کشور امنی بوده و احتمال سرقت خانه صفر است.

الف

احتمال پیدا شدن گوشی وحید چقدر است؟

ب

در صورتی که وحید به راننده تاکسی زنگ زده باشد و بداند که گوشی‌اش نزد او نیست چقدر احتمال دارد که گوشی‌اش در خانه باشد؟

حل.

الف

$$P(\text{پیدا شدن})=P(\text{پیدا شدن}\,|\,\text{ماندن در خانه})P(\text{ماندن در خانه})$$

$$+P(\text{پیدا شدن}\,|\,\text{جاگذاشتن در مترو})P(\text{جاگذاشتن در مترو})+P(\text{پیدا شدن}\,|\,\text{جاگذاشتن در تاکسی})P(\text{جاگذاشتن در تاکسی})$$

$$=(۱-۰)\times\frac{۱}{۱۰}+\frac{۷}{۱۰}\times\frac{۹}{۱۰}\times\frac{۳}{۴}+\frac{۹}{۱۰}\times\frac{۹}{۱۰}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۳۱}{۴۰}$$

ب

$$P(\text{جانگذاشتن در تاکسی} \mid \text{پیدا شدن در خانه}) = \frac{P(\text{جانگذاشتن در تاکسی و پیدا شدن در خانه})}{P(\text{جانگذاشتن در تاکسی})}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۱۰}}{۱ - \frac{۹}{۱۰} \times \frac{۱}{۴}} = \frac{۴}{۳۱}$$

▷

مسئله‌ی ۷. *بیسکوییت دزد

حسن و محمود و مریم،خواهر و برادر هستند. یکی از حسن یا محمود بیسکوییت‌های مریم را خورده است. مریم با توجه به تحقیقاتش تا این لحظه به دو برادر به یک اندازه شک دارد. امروز مریم قطره خون خشک شده روی میزش (جایی که بیسکوییت‌ها قبلا قرار داشتند) پیدا کرده‌است. مریم که به بیسکوییت‌های خود خیلی حساس است، ماجرا را پیگیری می‌کند و مشخص می‌شود قطره‌ی خون $A+$ است. او می‌داند حسن نیز دارای گروه خونی $A+$ است ولی گروه خونی محمود را نمی‌داند. در صورتی که ۰.۲ افراد شهر آن‌ها گروه خونی $A+$ داشته‌باشند، به سوالات زیر برای کمک به مریم در پیدا کردن مظنون پاسخ دهید.

الف

احتمال اینکه حسن بیسکوییت‌ها را خورده باشد، با توجه به نتایج آزمایش خون چقدر است؟

ب

احتمال اینکه محمود دارای گروه خونی $A+$ باشد،با توجه به نتایج آزمایش خون چقدر است؟

حل. پیشامد های زیر را تعریف میکنیم:
H : حسن بیسکوییت ها رو خورده است.
M محمود بیسکوییت ها را خورده است.
A تطابق خون حسن و فرد مجرم
B تطابق خون محمود و فرد مجرم

الف

میخواهیم $P(H|A)$ را حساب کنیم:

$$P(H|A) = \frac{P(A|H)P(H)}{P(A|M)P(M) + P(A|H)P(H)} = \frac{۱ \times \frac{۱}{۲}}{۰/۲ \times \frac{۱}{۲} + ۱ \times \frac{۱}{۲}} = \frac{۵}{۶}$$

ب

میخواهیم $P(B|A)$ را محاسبه کنیم:

$$P(B|A) = P(B, M|A) + P(B, H|A)$$

$$= P(B|A, M)P(M|A) + P(B|H, A)P(H|A)$$

$$= P(B|M)P(M|A) + P(B|H)P(H|A)$$

$$= ۱ \times \frac{۱}{۶} + ۰/۲ \times \frac{۵}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

توجه دارید که در محاسبات بالا ساده سازی های $P(B|A, M) = P(B|M), P(B|H, A) = P(B|H)$ صورت گرفته است. زیرا در صورتی که محمود مجرم باشد مستقل از هر چیز دیگری خونش با فرد مجرم تطابق میخورد. همچنین دانستن تطابق خون حسن با مجرم در صورتی که بدانیم حسن مجرم است نکته اضافی ای ندارد.
ذکر این نکته نیز لازم است که $P(H|A) + P(M|A) = ۱$ زیرا یکی از دو نفر محمود و یا حسن خطاکار هستند پس مجموع این دو احتمال برابر ۱ است. $\triangleright$

مسئله‌ی ۸. لاست

پریا به حیوانات خانگی علاقه‌مند است و یک گربه دارد. یک شب پس از گردشی طولانی گربه او گم می‌شود. احتمال گم شدن گربه در جنگل A، ۰.۳ و در جنگل B برابر ۰.۷ است. در یک روز در صورتی که گربه در جنگل A باشد پریا با احتمال ۰.۲ آن را پیدا می‌کند و در صورتی که در جنگل B باشد با احتمال ۰.۱۵ پیدا می‌کند. همچنین گربه از جنگلی که در آن گم شده‌است خارج نمی‌شود و پریا هر روز تنها یک جنگل را می‌تواند بگردد.

الف

پریا در روز اول کدام جنگل را بگردد تا احتمال پیدا کردن گربه بیشتر باشد؟

ب

در صورتی که پریا در روز اول جنگل A را بگردد و گربه را پیدا نکند، احتمال اینکه گربه در جنگل A باشد چقدر می‌باشد؟

ج

در صورتی که پریا در روز اول با استفاده از یک سکه سالم جنگلی را که می‌خواهد بگردد را مشخص کند و در نهایت گربه خود را پیدا کند،چقدر احتمال دارد که جنگل A را گشته باشد؟

ج

گربه‌ها در صورتی که در جنگل گم شوند احتمال زنده ماندنشان در انتهای شب iام برابر با $\frac{i}{i+۲}$ می‌باشد. پریا تصمیم گرفته‌است که دو روز اول را در جنگل A به دنبال گربه‌اش بگردد. احتمال پیدا شدن گربه در روز دوم چقدر است؟

حل.

الف

$$P(\text{پیدا کردن در جنگل الف}) = \frac{۳}{۱۰} \times \frac{۲}{۱۰} = \frac{۶۰}{۱۰۰۰}$$

$$P(\text{پیدا کردن در جنگل ب}) = \frac{۷}{۱۰} \times \frac{۱۵}{۱۰۰} = \frac{۱۰۵}{۱۰۰۰}$$

بنابراین جواب: جنگل ب

ب

$$P(\text{گربه در الف} \mid \text{پیدا نشدن گربه در الف}) =$$

$$\frac{P(\text{پیدا نشدن گربه در الف} \mid \text{گربه در الف})P(\text{گربه در الف})}{P(\text{پیدا نشدن گربه در الف} \mid \text{گربه در الف})P(\text{گربه در الف}) + P(\text{پیدا نشدن گربه در الف} \mid \text{گربه در ب})P(\text{گربه در ب})}$$

$$\frac{(۱ - ۰/۲) \times ۰/۳}{(۱ - ۰/۲) \times ۰/۳ + ۱ \times ۰/۷} = \frac{۲۴}{۹۴}$$

ج

$$P(\text{گشتن جنگل الف} \mid \text{پیدا شدن گربه}) =$$

$$\frac{P(\text{پیدا شدن گربه} \mid \text{گشتن جنگل الف})P(\text{گشتن جنگل الف})}{P(\text{پیدا شدن گربه} \mid \text{گشتن جنگل الف})P(\text{گشتن جنگل الف}) + P(\text{پیدا شدن گربه} \mid \text{گشتن جنگل ب})P(\text{گشتن جنگل ب})}$$

$$= \frac{۰/۲ \times ۰/۳ \times \frac{۱}{۲}}{۰/۲ \times ۰/۳ \times \frac{۱}{۲} + ۰/۱۵ \times ۰/۷ \times \frac{۱}{۲}} = \frac{۴}{۱۱}$$

د

$$P(\text{پیدا شدن گربه در جنگل الف در روز ۲}) =$$

$$P(\text{گربه در الف}) \times P(\text{پیدا نشدن گربه در روز ۱} \mid \text{گربه در الف}) \times P(\text{زنده ماندن گربه در شب ۱})$$

$$\times P(\text{پیدا شدن گربه در روز ۲} \mid \text{گربه در الف})$$

$$= ۰/۳ \times (۱ - ۰/۲) \times \frac{۱}{۳} \times ۰/۲ = \frac{۱۶}{۱۰۰۰}$$

▷

مسئله‌ی ۹. جزایر قناری

پرهام و صابر یک بازی جدید یاد گرفته‌اند. پرهام سه کاسه را به صورت برعکس روی میز قرار می‌دهد. زیر دوتا از کاسه‌ها خالی است و زیر دیگری یک بلیط سفر به جزایر قناری است! نحوه‌ی بازی به این شکل است:

۱ــ ابتدا صابر یک کاسه را انتخاب می‌کند.

۲ــ سپس پرهام یکی از دو کاسه دیگر را که پوچ است را برمی‌دارد.

۳ــ حال صابر می‌تواند کاسه خود را عوض کند یا همان کاسه اول را خود را نگه دارد.

صابر می‌داند که سه کاسه در ابتای بازی یکسان هستند و انتخاب هیچ کاسه‌ای نسبت به دیگری مزیتی ندارد (چون فعلا هیچ دانش اضافه‌ای راجع به آن‌ها ندارد) بنابراین همواره کاسه ۱ را انتخاب می‌کند. پرهام در مرحله دوم بازی

یکی از کاسه‌ها را پوچ می‌کند. حال اگر کاسه ۱ (که صابر همواره آن را انتخاب می‌کند) کاسه درست باشد پرهام می‌تواند یکی از دو کاسه ۲ و ۳ را پوچ کند و با توجه به علاقه‌ای که به شماره ۳ دارد با احتمال ۰.۶ کاسه شماره ۳ را پوچ می‌کند و با احتمال ۰.۴ کاسه شماره ۲ را پوچ می‌کند. به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف

احتمال برنده شدن صابر برای سفر به جزایر قناری را با این استراتژی که همواره تصمیم اولیه خود را تغییر می‌دهد بدست آورید.

ب

احتمال برنده شدن صابر به شرط آنکه بدانیم پرهام کاسه شماره ۲ را پوچ کرده است با همان استراتژی قسمت الف بدست آورید.

ج

احتمال برنده شدن صابر به شرط آنکه بدانیم پرهام کاسه شماره ۳ را پوچ کرده با همان استراتژی قسمت الف بدست آورید.

حل.

الف

$$P(\text{برنده شدن}) = P(\text{برنده شدن و جایزه در ۱}) + P(\text{برنده شدن و جایزه در ۲}) + P(\text{برنده شدن و جایزه در ۳})$$
$$= \frac{۱}{۳} \times ۰ + \frac{۱}{۳} \times ۱ + \frac{۱}{۳} \times ۱ = \frac{۲}{۳}$$

ب

$$P(\text{برنده شدن | پوچ شدن ۲}) = P(\text{برنده شدن | پوچ شدن ۲ و جایزه در ۱})P(\text{جایزه در ۱ | پوچ شدن ۲})$$
$$+P(\text{برنده شدن | پوچ شدن ۲ و جایزه در ۲})P(\text{جایزه در ۲ | پوچ شدن ۲})$$
$$+P(\text{برنده شدن | پوچ شدن ۲ و جایزه در ۳})P(\text{جایزه در ۳ | پوچ شدن ۲})$$

از آنجا که

$$P(\text{جایزه در ۲ | پوچ شدن ۲}) = P(\text{برنده شدن | پوچ شدن ۲ و جایزه در ۱}) = ۰$$

بنابراین تنها احتمال آخر در عبارت بالا غیر صفر خواهد بود و چون داریم:

$$P(\text{برنده شدن | پوچ شدن ۲ و جایزه در ۳}) = ۱$$

پس حاصل کل عبارت بالا برابر است با $P(\text{جایزه در ۳ | پوچ شدن ۲})$ که آن را باید محاسبه کنیم:

$$P(\text{جایزه در ۳ | پوچ شدن ۲}) = \frac{P(\text{پوچ شدن ۲ | جایزه در ۳})P(\text{جایزه در ۳})}{P(\text{پوچ شدن ۲ | جایزه در ۳})P(\text{جایزه در ۳}) + P(\text{پوچ شدن ۲ | جایزه در ۱})P(\text{جایزه در ۱})}$$

$$= \frac{۱ \times \frac{۱}{۳}}{۰/۴ \times \frac{۱}{۳} + ۱ \times \frac{۱}{۳}} = \frac{۵}{۷}$$

ج

مانند قسمت قبل:

$$P(\text{برنده شدن} \mid \text{پوچ شدن ۳}) = P(\text{برنده شدن} \mid \text{جایزه در ۲ و پوچ شدن ۳})P(\text{جایزه در ۲} \mid \text{پوچ شدن ۳})$$

$$= \frac{P(\text{پوچ شدن ۳} \mid \text{جایزه در ۲})P(\text{جایزه در ۲})}{P(\text{پوچ شدن ۳} \mid \text{جایزه در ۲})P(\text{جایزه در ۲}) + P(\text{پوچ شدن ۳} \mid \text{جایزه در ۱})P(\text{جایزه در ۱})}$$

$$\frac{۱ \times \frac{۱}{۳}}{۱ \times \frac{۱}{۳} + ۰/۶ \times \frac{۱}{۳}} = \frac{۵}{۸}$$

▷