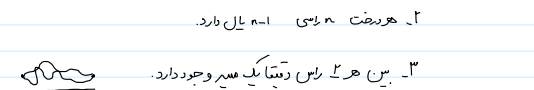


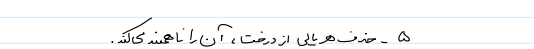
موضوع: درخت پوشای کمینه (MST) Minimum Spanning Tree



۱- هر درخت دارای حداقل ۲ برگ است.
 ۲- هر درخت n راسی $n-1$ یال دارد.
 ۳- بین هر ۲ راس دقیقاً یک مسیر وجود دارد.
 ۴- اضافه کردن هر یالی به درخت ایجاد دور می‌کند.
 ۵- حذف هر یالی از درخت، آن را ناممکن می‌کند.

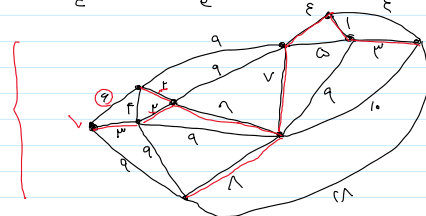
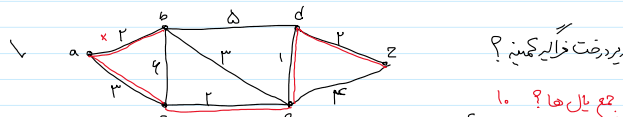


زیردرخت فرایه یک گراف: زیرگرافی شامل همه راس‌ها این گراف است که درخت است.

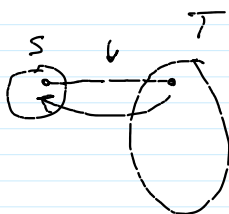


قضیه کلی: تعداد زیردرخت‌های فرایه یک گراف کامل n راسی با راس‌ها $\{1, 2, \dots, n\}$ و $n-2$ یال

مسئله (MST): گراف وزن دار G داده شده است. هدف پیدا کردن یک زیردرخت فرایه T از G است که مجموع وزن یال‌های آن کمینه شود.



جمع وزن یال‌های MST؟



الگوریتم (Prim):

$V, S = \{c\}$
 $dist[v]$: یال با کمترین وزن بین v و مجموعه S است.

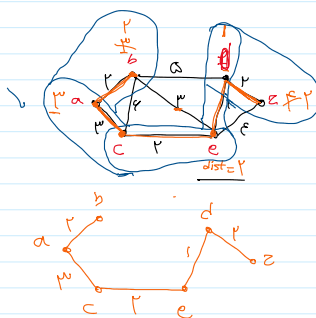
$S = \{c, e\}$

$S = \{c, e, d\}$

$S = \{c, e, d, z\}$

$S = \{c, e, d, z, a\}$

$S = \{c, e, d, z, a, b\}$



هم‌فونی

$insert: O(1)$
 $findmin: O(1)$
 $deletemin: O(\log n)$

$O(n)$
 $\left\{ \begin{array}{l} \checkmark O(1) \\ \checkmark O(n) \\ \checkmark O(n) \end{array} \right\}$

و وقتی به راس‌ها وارد می‌شوند

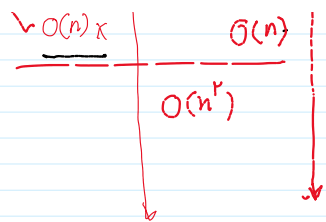
$O(n)$
 $O(n)$
 $O(n)$

۱- $V, S = \{v_i\}$
 $v_i - dist[v_j]$
 $v_i - father[v_j]$

$v_i - while (S \neq V) \{$

$select v_j \in V \setminus S$
 $add v_j to S$
 $add (v_j, father[v_j]) to E$
 $for every v_k \in N(v_j)$
 $if (v_k \in S \wedge (v_k, v_j) \in E \wedge dist[v_k] > dist[v_j]) \{$

deletemin: $O(\log n)$
decrease: $O(1)$



for every $v_k \in N(v_j)$
if $(v_k \notin S \wedge \omega(v_j, v_k) < \text{dist}[v_k])$
 $\text{dist}[v_k] = \omega(v_j, v_k)$
 $\text{father}[v_k] = v_j$
 decrease() $O(\log n)$

این زمان اجرای الگوریتم Prim چقدر است؟

فرض: گراف با ماتریس مجاورت: $O(n^2)$
 $\checkmark O(n^2 + E)$ لیست

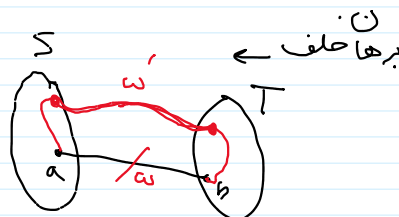
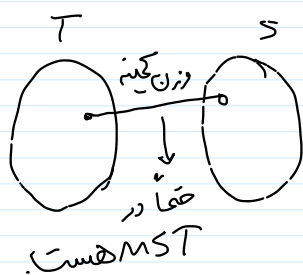
آیا بهینه می شود؟ ← مقدارهای dist را در یک هرم کمینه قرار بدهیم؟

$$O(n \log n) + O(|E| \log n) = O(n \log n + |E| \log n)$$

آیا بهینه می شود؟

* $O(n \log n + |E|)$ با هرم فیبوناچی: راس های

اثبات درستی: * قضیه: فرض کنید گراف G را به دو مجموعه S و T تقسیم کرده ایم در این صورت
پای با وزن کمینه که یک سر آن در S و یک سر آن در T است، همان MST وجود دارد.



$$\omega' > \omega$$

پس ما اضافه و ω را حذف می کنیم ← وزن کاهش پیدا کند