



ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۱۳۹۹ - ۱۴۰۰

مدرس: مسعود صدیقین

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

سری سی‌دهم

مسئله‌ی ۱*. درخت پوشای کمینه دلخواه

می‌دانیم الگوریتم کراسکال به ازای یک گراف ورودی واحد، می‌تواند جواب‌های متفاوتی برگرداند که این موضوع بستگی به ترتیب یال‌های مشاهده‌شده طی اجرای الگوریتم دارد.

حال نشان دهید به ازای هر درخت پوشای کمینه ممکن مانند T از گراف ورودی G ، ترتیبی از انتخاب یال‌ها هنگام اجرای الگوریتم کراسکال وجود دارد که به ازای آن، الگوریتم T را به عنوان خروجی برمی‌گرداند.

مسئله‌ی ۲*. درخت پوشای بیشینه

«درخت پوشای بیشینه» در یک گراف همبند وزن‌دار و بدون جهت، درختی با بیشترین مجموع وزن یال‌ها است که شامل تمام رئوس گراف بوده و همه یال‌های آن نیز از یال‌های گراف اصلی انتخاب شده باشند.

با این توصیف اگر الگوریتم کراسکال را تنها با این تفاوت اجرا کنیم که در هر مرحله به جای سبک‌ترین یال، سنگین‌ترین یال انتخاب شود (باقی ملاحظات الگوریتم تغییری نمی‌کند)، آیا یک درخت پوشای بیشینه گراف ورودی حاصل می‌شود؟ اگر بله، ادعای خود را اثبات کنید وگرنه مثال نقض ارائه دهید.

مسئله‌ی ۳*. تخریب و اصلاح درخت پوشای کمینه

فرض کنید G یک گراف همبند وزن‌دار و بدون جهت باشد که T یکی از درخت‌های پوشای کمینه آن است. اکنون وزن یکی از یال‌های G به نام e را که واصل دو رأس u و v است، تغییر می‌دهیم.

• توضیح دهید که در چه صورتی تغییر وزن e منجر می‌شود T دیگر یک درخت پوشای کمینه G نباشد (دقت کنید که e لزوماً یالی از T نبوده است).

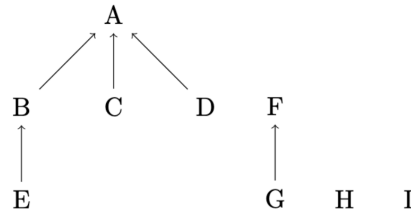
• در شرایطی که T در اثر تغییر مذکور دیگر درخت پوشای کمینه نباشد، الگوریتمی بهینه ارائه دهید که با ایجاد کم‌ترین تغییرات در T آن را دوباره به یک درخت پوشای کمینه تبدیل کند. البته توجه کنید که طبیعتاً حق تغییر وزن هیچ یک از یال‌های G را ندارید.

مسئله‌ی ۴*. فرق مثبت و منفی

اگر وزن هر یک از یال‌های یک گراف همبند وزن‌دار مثبت باشد، نشان دهید هر زیرمجموعه از یال‌ها که با کمترین مجموع وزن ممکن، همه رئوس گراف را به هم وصل کند، حتماً تشکیل یک درخت پوشای کمینه را می‌دهد. ضمناً مثالی ارائه دهید که در صورت وجود یال(های) با وزن منفی در گراف اولیه، لزوماً نتیجه مذکور حاصل نشود.

مسئله ۵*. جنگل رو پیدا کن

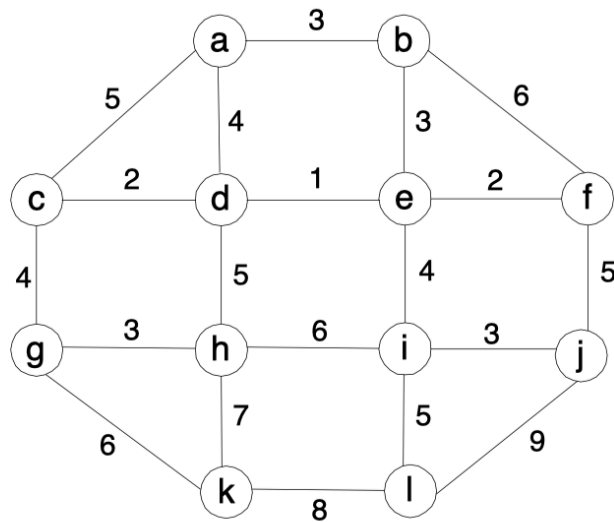
مجموعه‌های مجزای A, B, C, D, E, F, G, H, I را در نظر بگیرید. دو عملیات Union و Find را روی این مجموعه‌ها در نظر بگیرید. ترتیبی از دستورات Union ارائه دهید که به جنگل زیر برسیم.



فرض کنید در این سوال از Path Compression و Union by Rank استفاده می‌کنیم و در تابع Union در هنگام تساوی براساس ترتیب الفبایی ریشه انتخاب می‌شود.

مسئله ۶*. پوشا رو پیدا کردن

در گراف داده شده زیر، درخت پوشای کمینه را با تعریف کمترین حاصلضرب وزن یال‌ها پیدا کند. (فرایند یافتن این درخت توسط الگوریتم را به‌طور کامل شرح دهید)



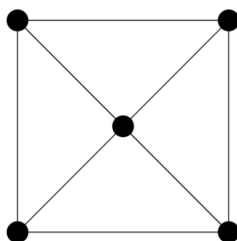
مسئله ۷*. قانون اول نیوتن

فرض کنید T درخت پوشای کمینه گراف G باشد. سپس L را لیست مرتب شده وزن یال های T تعریف می کنیم. اثبات کنید به ازای هر درخت پوشای کمینه دیگر مانند T' ، لیست مرتب شده وزن یال های T' با L برابر است.

مسئله ۸*. وزن گذاری

وزن های ۱، ۱، ۲، ۲، ۳، ۳، ۴، ۴ را در نظر بگیرید. وزن یال های گراف زیر را طوری با این اعداد مقدار دهی کنید به صورتی که:

- درخت پوشای کمینه یکتا باشد.
- درخت پوشای کمینه یکتا نباشد.



مسئله ۹*. قانون دوم نیوتن

دور C را در یک گراف همبند G در نظر بگیرید. حال فرض کنید e یالی در این دور باشد که دارای بیشترین وزن است.

- ثابت کنید اگر e را از گراف G حذف کنیم، گراف همچنان همبند می ماند.
- حال درخت پوشای کمینه T را در گراف جدید در نظر بگیرید. آیا این درخت در گراف اولیه نیز پوشای کمینه بود یا نه؟

مسئله ۱۰*. جدیاب

درخت T را در نظر بگیرید. با استفاده از مجموعه های مجزا الگوریتمی ارائه دهید که بتوان پایین ترین جد مشترک دو راس u, v که متعلق به T هستند را پیدا کرد.