Subject :

Year. Month. Date. ( )

ساختمان داده ها و الگوریتم ها

جلسه 16ام

قضیه اصلی - Master theorem

* فرض کنید ε یک مقدار ثابت است. نشان دهید $\log n = O(n^{\varepsilon})$ $\varepsilon > 0$

مثلا $\log n = O(n^{0.32})$ $\varepsilon = 0.32$

$n^{\varepsilon} = e^{\varepsilon \ln n}$ بسط تیلور $\rightarrow e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$

$\hookrightarrow = 1 + \underbrace{\varepsilon \ln n}$

$\hookrightarrow n^{\varepsilon} = \Omega(\log n)$

$\Rightarrow \log n = O(n^{\varepsilon})$

قضیه اصلی یا Master thm :

$T(n) = a\,T(\frac{n}{b}) + f(n)$ $\quad T(1) = O(1)$

case 1:

* $f(n) = O(n^{\log_b^a - \varepsilon}) \rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b^a})$

case 2: $f(n) = \Theta(n^{\log_b^a}) \rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b^a} \times \log n)$

case 3: $f(n) = \Omega(n^{\log_b^a + \varepsilon}) \rightarrow T(n) = \Theta(f(n))$

Subject :

Year. Month. Date. ( )

مثال 1)

$$T(n) = \underbrace{3}_{a} T\left(\frac{n}{\underbrace{2}_{b}}\right) + \underbrace{n^2}_{f(n)}$$

$$n^{\log_2^3} \longleftrightarrow n^2 \Rightarrow T(n) = \Theta(n^2)$$

اگر $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + O(n^2) \Rightarrow T(n) = O(n^2)$

اگر $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + \Theta(n^2) \rightarrow T(n) = \Theta(n^2)$

اگر $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + \Omega(n^2) \rightarrow T(n) = \Omega(n^2)$

مثال 2)

$$T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + \sqrt{n}$$

$$\log_b^a = 1 \rightarrow n^1 > n^{\frac{1}{2}} \rightarrow T(n) = \Theta(n)$$

* اگر $\sim$ جای $\sqrt{n}$ ، $O(\sqrt{n})$ $\leftarrow T(n) = \Theta(n)$

* اگر $\sim$ جای $\sqrt{n}$ ، $\Theta(\sqrt{n})$ $\leftarrow T(n) = \Theta(n)$

* اگر $\sim$ جای $\sqrt{n}$ ، $\Omega(\sqrt{n})$ $\leftarrow T(n) = \Omega(n)$

مثال 3)

$$T(n) = 16T(\frac{n}{4}) + n!$$

$$n^{\log_4^{16}} = n^2 < n! \quad \text{case 3: } T(n) = \Theta(n!)$$

Subject :

Year . Month . Date . ( )

* مثال)

$$T(n) = 3T(\tfrac{n}{3}) + \frac{n}{2}$$

$\log_3^3 = 1$ $\quad n^1$ $\quad n^1$

case 2 : $T(n) = \Theta(n \log n)$

مثال)

$$T(n) = 3T(\tfrac{n}{3}) + \frac{n}{\log n}$$

$\log_b^a = n^1$

$\frac{n}{\log n} = O(n^{1-\varepsilon})$? α

$\frac{n}{\log n} = \Theta(n)$? α

$\frac{n}{\log n} = \Omega(n^{1+\varepsilon})$? α

← از قضیهٔ اصلی نمی‌توان استفاده کرد.

روش تقسیم و غلبه : Divide & Conquer

← 1. مسأله را به تعدادی زیر مسأله تقسیم و آن‌ها را به صورت بازگشتی حل می‌کنیم.

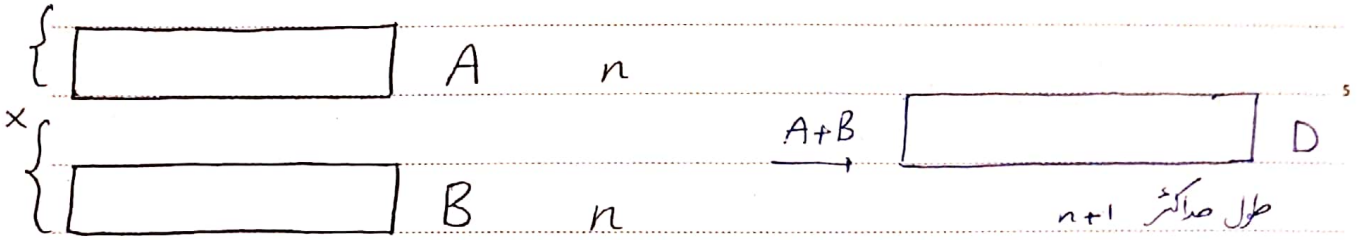
← 2. از جواب بدست آمده در زیر مسأله‌ها، جواب اصلی را بدست می‌آوریم.

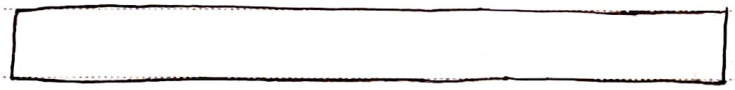
مثال : Merge Sort

Subject :

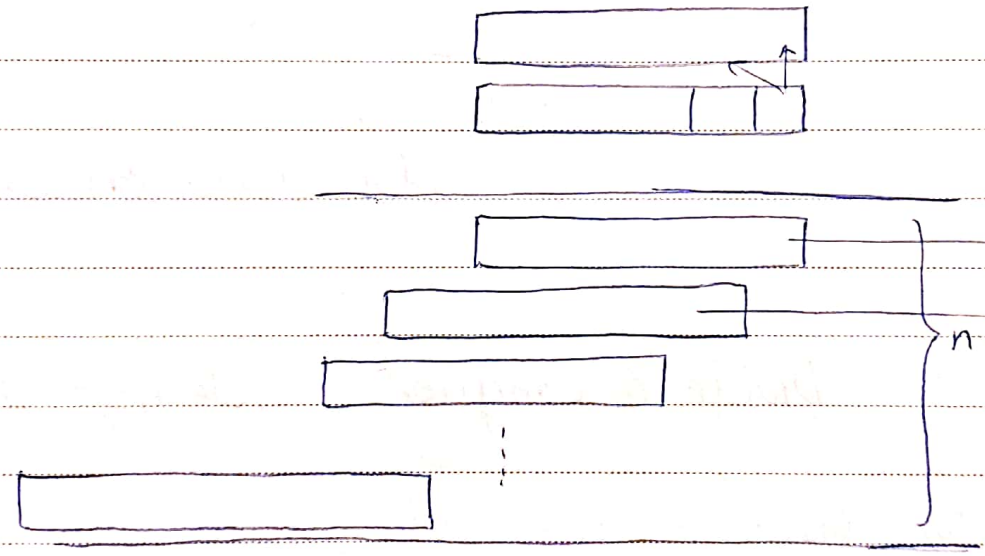
Year . Month . Date . ( )

مثال) ضرب اعداد: آرایه A و B هرکدام شامل یک عدد n رقمی داده شده است. ← خروجی: آرایه C به طوری که $C = A \times B$





راه اول:

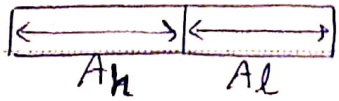


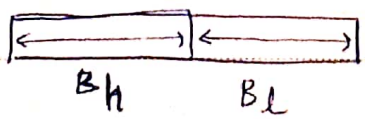
جمع n تا عدد با طول حداکثر 2n ⟵ $O(n^2)$

راه دیگر ← تقسیم و غلبه

A : n

B : n





$$A = [A_h \times 10^{\frac{n}{2}} + A_l]$$

$$B = [B_h \times 10^{\frac{n}{2}} + B_l]$$

Subject :

Year . Month . Date . ( )

$\rightarrow A \times B = [A_h \times B_h \times 10^n + A_\ell B_\ell + A_h B_\ell \times 10^{n/2} + A_\ell B_h \times 10^{n/2}]$ (*)

1. A_h ، B_ℓ ، B_h ، A_ℓ را پیدا کن.

2. $A_\ell B_h$ ، $A_h B_\ell$ ، $A_\ell B_\ell$ ، $A_h B_h$ را به طور بازگشتی حساب کن.

3. با استفاده از (*)، $A \times B$ را حساب کن.

$\Longrightarrow$ رابطه بازگشتی : $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + O(n)$

$\rightarrow$ با استفاده از قضیه اصلی : $T(n) = O(n^2)$

روش 2) به جای 4 عبارت بالا، عبارت های زیر را حساب می کنیم.

$A_h B_h$ ، $A_\ell B_\ell$ ، $(A_h + A_\ell)(B_h + B_\ell)$

$(A_h + A_\ell)(B_h + B_\ell) = A_h B_h + A_h B_\ell + A_\ell B_h + A_\ell B_\ell$

اگر $A_\ell B_\ell + A_h B_h$ را کم کنیم $\leftarrow A_h B_\ell + A_\ell B_h$

$\rightarrow$ رابطه بازگشتی : $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + O(n)$

$\Longrightarrow T(n) = O(n^{\log_2^3}) = O(n^{1.5849})$

1960 Karatsuba روش کاراتسوبا