



در جلسه قبل، به طور مختصر در رابطه با روش‌های محاسبه عدد n ام فیبوناچی صحبت کردیم. در این مساله، عدد n به عنوان ورودی داده شده است، و ما باید عدد n ام فیبوناچی را به خروجی بدهیم. برای این مساله سه راه حل را بررسی نمودیم:

- راه حل بازگشتی: در این راه حل، با استفاده از یک تابع بازگشتی مقدار $f(n)$ را محاسبه کردیم.

```
int f(int n)
{
    if (n <= 2)
        return 1;
    return f(n-1) + f(n-2);
}
```

در ادامه، نشان دادیم که تعداد دفعاتی که دو خط مشخص شده با علامت + به ازای ورودی n اجرا می‌شوند، از $f(n)$ (عدد n ام فیبوناچی) بیشتر است. در نتیجه، انتظار نداریم که این راه مثلا برای n های بیشتر از ۵۰ در زمان معقولی خروجی بدهد:

$$f(50) = 12586269025.$$

- راه حل پویا: در این روش، به جای محاسبه بازگشتی، ابتدا مقدار فیبوناچی را به ازای مقدار کمتر حساب کرده و در حافظه ذخیره می‌کنیم تا از محاسبه چندباره یک مقدار فیبوناچی پرهیز گردد:

```
int f(int n)
{
    F[2] = F[1] = 1;
    for (i: 3 -> n)
        F[i] = F[i-1] + F[i-2];
    return F[n];
}
```

برای این روش نشان دادیم که تعداد دفعاتی که دو خط علامت دار اجرا می‌شوند در مجموع n بار است. در نتیجه می‌توان انتظار داشت که این روش برای n های بزرگ نیز جواب دهد.

- روش سوم: روش ماتریسی. این روش برای n های خیلی بزرگ (مثلا $n = 2^{100}$) مناسب است. در این روش، ابتدا با استفاده از استقرار نشان دادیم که اگر

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

باشد، آنگاه داریم:

$$A^n = \begin{pmatrix} f(n+1) & f(n) \\ f(n) & f(n-1) \end{pmatrix}$$

در نتیجه، با فرض این که $n = 2^k$ است، برای محاسبه $f(n)$ کافی است ماتریس بالا را k بار در خود ضرب کنیم:

$$A^n = (((A^2)^2) \dots)^2 \quad (k \text{ times}).$$

حال، به عنوان مثال برای محاسبه $f(2^{1000})$ کافی است ماتریس A را هزار بار در خود ضرب و سپس درایه $A_{1,2}$ را برگردانیم. بنابراین، میتوان انتظار داشت که تا زمانی که مقدار $\log n$ عدد خیلی بزرگی نشود، این روش در زمان معقولی پاسخ را مشخص کند.

سوال: آیا می‌توانید در روش دوم، حافظه را بهینه کنید، به طوری که به جای استفاده از آرایه F که دارای اندازه n است، تنها از دو متغیر استفاده کند؟

این جلسه، نیازی به ارسال پاسخ به این سوال نیست. تنها در خلوت خود به این سوال فکر کنید!

در این لینک می‌توانید روش‌های مختلف یافتن عدد n ام فیبوناچی را ببینید.

