



# ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۱۳۹۹ - ۱۴۰۰

مدرس: مسعود صدیقین

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

## درهم‌سازی و هرم

### مسئله‌ی ۱\*. تعداد هرم (هرم)

رابطه‌ای بازگشتی برای تعداد هرم‌های کمینه با اعداد ۱ تا  $2^n - 1$  بیابید.

### مسئله‌ی ۲. تبدیل د.د.ج. به هرم (درخت دودویی جستجو، هرم)

الگوریتمی ارائه دهید که درخت دودویی جستجوی  $n$  رأسی را در مرتبه زمان  $O(n)$  و با استفاده از حافظه‌ی اضافی  $O(1)$  به هرم کمینه تبدیل کند.

### مسئله‌ی ۳\*. اعداد نزدیک (هرم)

آرایه‌ای متشکل از  $n$  عدد و دو عدد  $x$  و  $k$  داده شده است. الگوریتمی با مرتبه زمانی  $O(n \log(k))$  ارائه دهید که  $k$  عدد نزدیک به  $x$  را در آرایه پیدا کند.

### مسئله‌ی ۴\*. $k$ امین عنصر هرم (هرم)

یک هرم کمینه با  $n$  عنصر متمایز از اعداد و یک عدد  $x$  داده شده است. الگوریتمی با زمان  $O(k)$  ارائه دهید که مشخص کند آیا  $k$ امین کوچکترین عنصر موجود در هرم از  $x$  کوچکتر است؟

### مسئله‌ی ۵\*. عنصر تقریباً بزرگ (هرم)

آرایه‌ای از عناصر متمایز به سائز  $n$ ، و عدد  $k$  داده شده است. می‌خواهیم تعداد عنصرهای «تقریباً بزرگ» این آرایه را پیدا کنیم. عنصر «تقریباً بزرگ» به عنصری گفته می‌شود که از تمامی عناصر در سمت چپش بزرگ‌تر باشد و از حداقل  $k$  عنصر در سمت راستش نیز بزرگ‌تر باشد. الگوریتمی بهینه از مرتبه زمانی  $O(n \log(k))$  ارائه دهید.

### مسئله‌ی ۶. مسئله‌ی جذاب (هرم، جدول درهم‌سازی)

دو آرایه  $A$  و  $B$  با سائز برابر  $n$  داده شده است. یک «جمع استثنایی»، جمع یک عنصر از  $A$  را با یک عنصر از  $B$  است (که  $n^2$  حالت متفاوت دارد). حال عدد  $k$  به ما داده شده است و ما می‌خواهیم  $k$  تا بزرگ‌ترین «جمع استثنایی» را چاپ کنیم. برای فهم بهتر به مثال زیر نگاه کنید.  
مثال:

$A : [4, 5]$

$B : [1, 6]$

$k : 2$

$$Answer : 11 [ 5_{(A)} + 6_{(B)} ] , 10 [ (4_{(A)} + 6_{(B)}) ]$$

حال با فرض اینکه  $k \leq n$ ، الگوریتمی از مرتبه زمانی  $O(n \log(n))$  ارائه دهید.

### مسئله ۷\*۷. واریسی خطی (جدول درهم سازی)

در جدول درهم سازی با استفاده از روش واریسی خطی، تابع درهم سازی برای جدولی با اندازه هشت به صورت زیر است:

H	G	F	E	D	C	B	A	key
۱	۴	۵	۴	۴	۲	۶	۲	hash

اگر جدول درهم سازی در ابتدا تهی باشد، به چند حالت می توان این عناصر را در جدول درج کرد تا در نهایت جدول زیر تولید شود؟

۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰	i
F	B	E	D	C	A	H	G	T(i)

### مسئله ۸\*۸. صد کلید (جدول درهم سازی)

می خواهیم تابع درهم سازی مناسبی برای صد کلید تعریف کنیم. صد کلید داده شده، همگی از الگوی  $K_i = i^2 + i$  برای  $1 \leq i \leq 100$  پیروی می کنند. برای درهم سازی از جدولی با اندازه  $m = 8$  استفاده می کنیم.

الف) اگر از روش زنجیره ای استفاده کنیم، میانگین زمان جستجو چقدر خواهد بود؟ زمان حذف در بدترین حالت چقدر می شود؟

ب) اگر تابع درهم سازی را به صورت  $h(k) = k \% m$  تعریف کنیم، برخوردها چگونه توزیع خواهد شد؟ با قسمت قبل مقایسه کنید.

پ) برای رفع مشکل پراکندگی نامتوازن برخوردها چه تابع درهم سازی دیگری را پیشنهاد می کنید؟ پیشنهاد خود را برای  $k_8 = 72$  نشان دهید.