



ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۱۳۹۹ - ۱۴۰۰

مدرس: مسعود صدیقین

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

سوالات سری نهم

مسئله‌ی ۱.*. مرتب‌سازی تصادفی

- مرتب‌سازی هیبریدی به این صورت تعریف می‌شود که به ازای $k \geq 1$ اگر $k \geq n$ از روش مرتب‌سازی تصادفی معمولی و در غیر این صورت از مرتب‌سازی درجی استفاده می‌کند. میانگین زمان اجرای الگوریتم مرتب‌سازی هیبریدی را براساس k و n به دست آورید. به ازای چه k هایی میانگین زمان اجرا $O(n \lg n)$ خواهد بود؟
- نوع دیگری از مرتب‌سازی سریع تصادفی به نام مرتب‌سازی محتاط وجود دارد که در ابتدا به صورت تصادفی یک $pivot$ انتخاب می‌کند و اینکار را تا زمانی انجام می‌دهد که عنصر مورد نظر آرایه را به دو قسمت با طول حداقل $n/3$ تقسیم کند و سپس مانند الگوریتم اصلی عمل می‌کند.
 - احتمال این که محور اول گزینه مناسبی باشد و نیازی به تکرار نباشد چقدر است؟
 - عمق درخت بازگشتی مرتب‌سازی محتاط به صورت میانگین چقدر خواهد بود؟
 - میانگین زمان اجرای الگوریتم محتاط را به دست آورید.

مسئله‌ی ۲.*. محور عجیب

در یک نوع نادر از مرتب‌سازی سریع، ابتدا از میان n عنصر، $1 + 2\sqrt{n}$ عنصر اول آن را انتخاب کرده و با الگوریتم مرتب‌سازی درجی آنها را مرتب می‌کنیم. محور را برابر میانه قسمت مرتب‌شده در نظر گرفته و در ادامه مشابه مرتب‌سازی سریع عمل می‌کنیم. بدترین زمان اجرای الگوریتم فوق با محور عجیب انتخاب شده را به دست آورید.

مسئله‌ی ۳. ۲-محوره

الگوریتم مرتب‌سازی سریع را به این صورت تغییر می‌دهیم که به جای یک محور هر بار دو محور انتخاب کرده و $partitioning$ را بر اساس آنها انجام داده و در هر بار پارتیشنینگ آرایه را به سه قسمت بالایی، میانی و پایینی تقسیم می‌کنیم و مانند الگوریتم اصلی ادامه می‌دهیم.

- الگوریتمی آرایه دهید که تعداد مقایسه‌های لازم برای $partition$ بر مبنای دو محور را تا حد امکان کاهش دهد.
- این الگوریتم را در بهترین، بدترین و حالت متوسط تحلیل کنید.

مسئله‌ی ۴. نقطه‌ی تاریک

یک خیابان k چراغ دارد که با شماره‌های 0 تا $k-1$ مشخص شده‌اند. آرایه‌ی A شامل n عنصر متمایز است و هر عنصر آن برابر با شماره‌ی یکی از چراغ‌ها است. اگر شماره‌ی چراغی در آرایه‌ی A موجود باشد، آنگاه آن چراغ روشن خواهد بود و در غیر این صورت نقطه‌ی تاریک نامیده می‌شود. هم‌چنین می‌دانیم که حداقل یک نقطه‌ی تاریک وجود دارد.

الگوریتمی از مرتبه‌ی زمانی $O(n)$ و حافظه‌ی اضافی $O(1)$ ارائه دهید تا یک نقطه‌ی تاریک را پیدا کند. هم‌چنین فرض کنید امکان اضافه کردن اطلاعات اضافی به آرایه را نداریم و تنها می‌توانیم اعضای آن را با هم جا به جا کنیم.

مسئله‌ی ۵*. مرتب‌سازی آرایه‌ی تکراری

فرض کنید آرایه‌ای از اعداد در اختیار داریم که هر عنصر در آن تعداد قابل توجهی بار تکرار شده است. اگر بدانیم که تعداد عناصر مختلف آرایه برابر k است، الگوریتمی ارائه دهید که آرایه‌ی مورد نظر را در بدترین حالت با $O(n \lg k)$ مقایسه مرتب کند.

مسئله‌ی ۶*. بازه مرتب

آرایه‌ای شامل n عدد در بازه‌ی 1 تا n^4 داریم. الگوریتمی ارائه دهید که این آرایه را در بدترین حالت در زمان $O(n)$ مرتب کند.

مسئله‌ی ۷*. پن‌کیک

آرایه‌ای به طول n از اعداد نامرتب و غیر تکراری داریم. برای مرتب کردن این آرایه تنها عملیات مجاز، معکوس کردن آرایه از ابتدا تا یک عنصر دلخواه است. فرض کنید این عملیات در زمان $O(1)$ انجام می‌شود. الگوریتمی برای مرتب‌سازی این آرایه با فرض گفته شده در بدترین حالت در زمان $O(n \lg n)$ ارائه دهید.

مسئله‌ی ۸*. رشته‌ها (مرتب‌سازی خطی)

یک آرایه از رشته‌ها با طول‌های مختلف داریم. جمع طول همه رشته‌ها برابر n است. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n)$ ارائه دهید که رشته‌ها را مرتب کند.

مسئله‌ی ۹. مرتب‌سازی‌های مختلف (مرتب‌سازی)

می‌خواهیم آرایه‌های زیر را مرتب کنیم. برای هر کدام از آنها از کدام یک از الگوریتم‌های مرتب‌سازی استفاده کنیم تا در سریع‌ترین زمان آرایه را مرتب شده داشته باشیم (n را عددی صحیح و بسیار بزرگ فرض کنید و $k < \log n$)

- یک آرایه از n عنصر که به طور کاملاً تصادفی در آن قرار دارند.
- یک آرایه از n عنصر که همه آنها به جز k عنصر که به طور تصادفی در آرایه پخش شده‌اند و در جای خود قرار ندارند، مرتب شده‌اند (در صورت حذف این k عنصر آرایه مرتب است).

- یک آرایه از n عنصر که همه آنها به جز k جفت عنصر همسایه که به صورت تصادفی در آرایه انتخاب شده و با هم جابه جا (swap) شده اند، مرتبند (هر عنصر حداکثر جزئی از یک جفت است).
- آرایه ای از n عنصر که همه اعدادی صحیح و تصادفی از 0 تا k هستند.