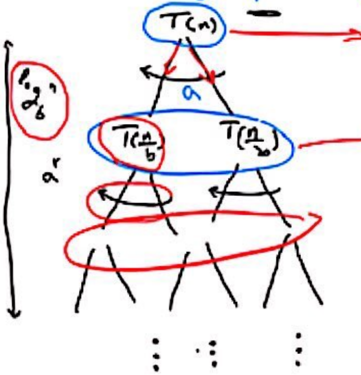
جلسه هفتم: روابط بازگشتی تقسیم و غلبه

$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + c_1 n^k \qquad T(1) = c_1$



$+c_1 n^k$

$+\frac{a}{b^k} \times c_1 \times n^k$

$(\frac{a}{b^k})^2 = \frac{a^2}{b^{2k}} \times c_1 \times n^k$

$(\frac{a}{b^k})^r c_1 n^k$

$T(1) \quad a^{\log_b n} = n^{\log_b a} \times c_1$

$\rightarrow T(n) = n^{\log_b a} \times c_1 + c_1 n^k \underbrace{\left(1 + \frac{a}{b^k} + (\frac{a}{b^k})^2 + \cdots\right)}_{\log_b n \text{ جمله}}$

$\log_b a < k \rightsquigarrow$ سطح جمله دوم $\longrightarrow T(n) = \Theta(n^k)$

$\rightarrow \log_b a = k \rightsquigarrow$ جمله دوم $\longrightarrow \boxed{T(n) = \Theta(n^k \log n)}$

$\log_b a > k \rightsquigarrow$ جمله اول $\longrightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

: Masterthm

* فرض کنید $\underset{>0}{\epsilon}$ یک مقدار ثابت است. نشان دهید

$\boxed{\log n = O(n^\epsilon)}$

$\log n = O(n^{0.32}) \qquad \epsilon = 0.32$

$\epsilon = 1 \leftarrow$ استرا

$n^\epsilon = e^{\epsilon \ln n} \longrightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$

$\hookrightarrow = 1 + \epsilon \ln n + \cdots$

$\downarrow n^\epsilon = \Omega(\log n)$

قضیه اصلی : Master thm :

$$T(n) = \underline{a}\,T(\frac{n}{\underline{b}}) + \underline{f(n)} \qquad T(1)=O(1)$$

$n^{۷۸}$ $\quad$ $n^{۷۸۱}$

case1 : $f(n) = O(n^{\log_b^a \boxed{-\varepsilon}}) \rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b^a})$

case2 : $f(n) = \Theta(n^{\log_b^a}) \rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b^a} \times \log n)$

case3 : $f(n) = \Omega(n^{\log_b^a \boxed{+\varepsilon}}) \rightarrow T(n) = \Theta(f(n))$

Regularity

* مثال) :

$$T(n) = \underset{a}{۴}\,T(\frac{n}{\underset{b}{۲}}) + \underset{f(n)}{n^{۴}}$$

$$n^{\log_۲^۴} \xleftrightarrow{<} n^{۴} \rightarrow T(n) = \Theta(n^{۴})$$

$$T(n) = ۴T(\frac{n}{۲}) + O(n^{۴}) \rightarrow T(n) = O(n^{۴})$$

$$T(n) = ۳T(\frac{n}{۲}) + \Omega(n^{۴}) \rightarrow T(n) = \Omega(n^{۴})$$

$$T(n) = ۴T(\frac{n}{۲}) + \Theta(n^{۴}) \rightarrow T(n) = \Theta(n^{۴})$$

مثال ۱)

$$T(n) = ۲T(\frac{n}{۲}) + \sqrt{n}$$

$$\log_b^a = \log_۲^۲ = n^{۱} > n^{\frac{۱}{۲}}$$

$$T(n) = \Theta(n)$$

اگر به جای $\sqrt{n}$ ، $O(\sqrt{n})$ $\leftarrow$ $T(n) = \Theta(n)$

" $\sqrt{n}$ ، $\Theta(\sqrt{n})$ $\leftarrow$ "

" $\sqrt{n}$ ، $\underset{n^{۱۰۰}}{\Omega(\sqrt{n})}$ $\leftarrow$ $\boxed{T(n) = \Omega(n)}$ ؟

مثال)

$$T(n) = ۱۶T(\frac{n}{۴}) + n!$$

$$n^{\log_۴^{۱۶}} = n^{۲} < n!$$

case: $T(n) = \Theta(n!)$

مثال) $T(n) = 4T(\frac{n}{3}) + \frac{n^1}{2}$

$\log_3^4 = 1 \quad 1$

case 2: $T(n) = \Theta(n \log n)$

مثال) $T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + \underbrace{\frac{n}{\log n}}$

$\log_b^a = 1 \rightarrow n^1 \quad \frac{n}{\log n}$

$\boxed{\frac{n}{n^{\varepsilon}}} \quad \boxed{\frac{n}{\log n}} = \underline{O(n^{1-\varepsilon})} \quad ? \quad \times \quad \boxed{\frac{n^{1}}{} \quad \frac{n}{n}}$ $n^{1.\varepsilon}$

$\frac{n}{\log n} = \Theta(n) \quad ? \quad \times$

$\underbrace{\frac{n}{\log n}} \stackrel{?}{=} \Omega(n^{1+\varepsilon}) \quad ? \quad \times$

از قضیه اصلی نمی‌توان استفاده کرد.

روش تقسیم و غلبه : divide & conquare حل می‌کنیم

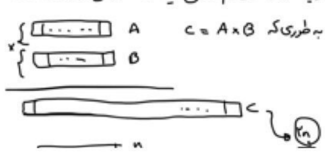
تقسیم ← مساله را به تعدادی زیر مساله تقسیم و آن‌ها را به صورت بازگشتی

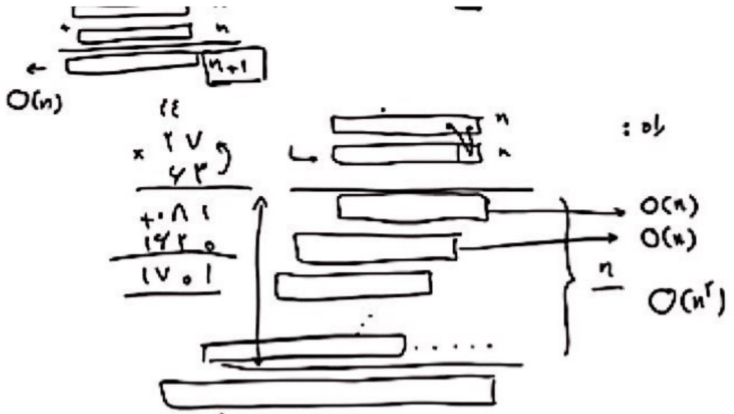
غلبه ← از جواب به دست آمده در زیر مساله‌ها، جواب اصلی را به دست می‌آوریم.

مرتب سازی ادغامی

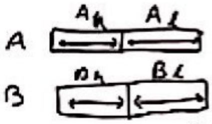
ضرب اعداد، آرایه A و B هرکدام شامل یک عدد n رقمی داده شده است

خروجی: آرایه C به طوری که $C = A \times B$





جمع n تا عدد با طول حداکثر 2n
$\rightarrow O(n^2)$



$\frac{n}{2}$: A

$\frac{n}{2}$: B

$$A = [A_h \times 10^{\frac{n}{2}} + A_l]$$
$$B = [B_h \times 10^{\frac{n}{2}} + B_l]$$

$$A \times B = [A_h \times B_h \times 10^{n} + A_l B_l + A_h B_l \times 10^{\frac{n}{2}} + A_l B_h \times 10^{\frac{n}{2}}]$$

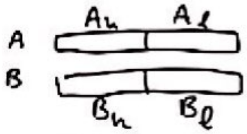
۱- A_l ، B_l و A_h و B_h را بپیدا کن

۲- A_lB_h ، A_hB_l ، A_lB_l و A_hB_h را به‌طور بازگشتی حساب کن

۳- $A \times B$ را با استفاده از * حساب کن

$$T(n) = 4T(\tfrac{n}{2}) + O(n)$$
$$\rightarrow T(n) = O(n^2)$$

روش ۲



$$\overbrace{A_hB_h}^{T(\frac{n}{2})} , \overbrace{A_lB_l}^{T(\frac{n}{2})} , \overbrace{(A_h + A_l)(B_h + B_l)}^{T(\frac{n}{2})}$$

$$(A_h + A_l)(B_h + B_l) = \underline{A_h B_h} + A_h B_l + A_l B_h + \underline{A_l B_l}$$

اگر $\underline{A_h B_h + A_l B_l}$ را کم کنیم ،

$\underline{A_h B_l} + \underline{A_l B_h}$

$$T(n) = \text{۳}\,T\left(\frac{n}{\text{۲}}\right) + O(n)$$

$$\hookrightarrow O\left(n^{\log_{\text{۲}}^{\text{۳}}}\right) = O\left(n^{\text{۱/۵۸۴۹}}\right)$$

روش کاراتسوبا Karatsuba $\underline{1960}$