یادآوری جلسه هفتم

تحلیل سرشکن

در جلسه قبل، راجع به تحلیل سرشکن صحبت کردیم. به طور کلی، اگر مجموعه n بار اجرای تعدادی عملیات در بدترین حالت زمان $T(n)$ ببرد، هزینه سرشکن هر بار اجرای آنها برابر با $T(n)/n$ خواهد بود.

آرایه پویا: فرض کنید ورودی، تعدادی دستور به صورت $Add(x)$ می باشد و برنامه باید عناصر را به ترتیب اضافه شدن نگه دارد. یک روش ساده برای این کار، این است که یک آرایه نگه داریم و هر بار دستور $Add(x)$ آمد، آن را به انتهای آرایه اضافه کنیم. مشکل اصلی استفاده از آرایه این است که تعداد ورودی را نمی دانیم و بنابراین نمی دانیم آرایه با چه اندازه ای انتخاب کنیم.
یک راه حل برای این مساله، استفاده از روش زیر است: در ابتدا یک آرایه با اندازه یک در نظر گرفته، و به ازای هر دستور $Add(x)$ به صورت زیر عمل کنید:

- اگر آرایه خانه خالی داشت، عنصر x را به آن اضافه کنید.
- اگر آرایه خانه خالی نداشت، یک آرایه با اندازه دو برابر ایجاد کنید، همه عناصر آرایه قبلی را به آن اضافه کنید و سپس عنصر جدید را به آرایه بزرگتر اضافه کنید.

شماره عمل	هزینه عمل
۱	۱
۲	۲
۳	۳
۴	۱
۵	۵
۶	۱
۷	۱
۸	۱
۹	۹

فرض کنید در تحلیل خود، می خواهیم هزینه را معادل تعداد اضافه شدن عناصر به آرایه های مختلف به ازای n بار اجرای دستور $Add(x)$ محاسبه کنیم. (البته بهتر این است که هزینه ساخت آرایه را هم در نظر بگیریم. اما به راحتی می توان نشان داد که این دو یک ضریب ثابت با هم فاصله دارند.)

تحلیل با استفاده از روش *Aggregation*: در این روش، کافی است مجموع تعداد اضافه شدن ها را بشماریم. هزینه هر عمل، در جدول روبرو نشان داده شده است. داریم (فرض کنید n برابر با $۲^k + ۱$ است):

$$T(n) = ۱ + ۲ + ۳ + ۱ + ۵ + ۱ + ۱ + ۱ + ۹ + ... + n \le n + ۱ + ۲ + ۴ + ۸ + ... + n \le ۳n$$

پس هزینه سرشکن هر عمل برابر با $O(۳n/n) = O(۱)$ است.

پرسش: جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید!

تحلیل آرایه پویا با استفاده از روش حسابداری: فرض کنید به ازای هر بار اضافه شدن یک عنصر به یک آرایه باید ۱ ریال هزینه کنیم. پس کل زمان الگوریتم معادل هزینه ریالی ما خواهد بود. حال فرض کنید به این گونه عمل کنیم که به ازای هر بار ورودی دستور $Add()$، یک ریال هزینه اضافه کردن آن به آرایه را می دهیم و ..... ریال نیز در حساب ذخیره می کنیم. در ادامه، اگر این عنصر بین دو آرایه جابه جا شد، هزینه جابه جایی را از حساب می دهیم. حساب هیچ گاه خالی نمی شود، زیرا که هنگامی که یک آرایه با اندازه L پر می شود و باید عناصر را در یک آرایه با اندازه $۲L$ قرار دهیم ....(خیییلی کوتاه و مختصر توضیح دهید!). پس کل هزینه ریالی ما برابر با ...... ریال خواهد بود و این یعنی هزینه سرشکن هر عملیات برابر با $O(۱)$ خواهد بود.
همچنین، این روش را با استفاده از تابع پتانسیل مناسب نیز تحلیل کنید: فرض کنید A_i آرایه A بعد از درج i ام باشد و c_i هزینه درج عنصر i ام باشد. . در این صورت، اگر تابع پتانسیل .... $= \Phi_i$ را تعریف کنیم (که در آن L اندازه آرایه بعد از درج است)، بر این اساس اگر تعریف کنیم:

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi_i - \Phi_{i-۱}$$

آنگاه داریم:

$$\sum_i \hat{c}_i = \sum_i c_i + \Phi_n - \Phi_۰$$

با توجه به این که $\Phi_n > \Phi_۰$ است، بنابراین $\sum_i \hat{c}_i \ge \sum_i c_i$ است. از طرفی، به ازای هر عمل درج، میزان $\hat{c}_i$ به این صورت تغییر می‌کند: اگر درج منجر به تغییر آرایه نشود، داریم ...... $= \hat{c}_i$ و همچنین به ازای هر درجی که منجر به تغییر آرایه شود، داریم .... $= \hat{c}_i$. بنابراین در کل هزینه سرشکن هر عملیات درج برابر با $O(۱)$ خواهد بود.

پاسخ های خود را به این لینک ارسال کنید.