دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۱۳۹۹ ـ ۱۴۰۰

مدرس: مسعود صدیقین

سوالات سری چهارم

مسئله‌ی ۱*. تعدادی استک

می خواهیم m عدد استک را در آرایه‌ای با سایز n نگه‌داری کنیم . یکی از راه حل‌های ممکن این است که آرایه را به دسته‌های n/m تایی تقسیم کنیم و هر قسمت را به یک استک اختصاص دهیم، اما این راه از لحاظ حافظه بهینه نیست (ممکن است در یکی از استک‌ها push بیشتری انجام گیرد که منجر به overflow شود، در صورتی که در بعضی از استک‌ها همچنان فضای خالی موجود باشد). روشی کارا برای این کار پیشنهاد دهید.

مسئله‌ی ۲. اندازهٔ حلقه

لینک لیستی به اندازهٔ n به ما داده شده است. می‌خواهیم ببینیم که آیا این لیست دارای حلقه است یا خیر، و در صورت داشتن حلقه اندازهٔ آن را خروجی دهیم. الگوریتمی کارا از زمان $O(n)$ برای این کار ارائه دهید.

مسئله‌ی ۳*. لیست L

در لیست L اعمال زیر تعریف شده‌اند:

$Insert(L, x)$: عنصر x را به انتهای L اضافه می‌کند.

$Delete(L)$: عنصر انتهایی L را حذف می‌کند.

$Multi - Delete(L, k)$: k عنصر انتهایی لیست را حذف می‌کند.

اگر n تا از اعمال فوق به ترتیب صحیح و دلخواه روی لیست L که در ابتدا تهی است اعمال شود، هزینه هر عمل به صورت سرشکن چقدر خواهد بود؟

مسئله‌ی ۴. خرس قطبی

در یک زمستان سرد خرس قطبی n قطعه گوشت دقیقا به اندازه های $1, 2, \ldots n$ را در غاری ذخیره کرده است. او هر روز یکی از این قطعه‌ها را به صورت تصادفی انتخاب کرده و اگر اندازهٔ گوشت عددی فرد بود، آن را می خورد و در غیر این صورت آن را نصف می کند، نصف آن را خورده و باقی را مجدداً ذخیره می‌کند. اگر روزی خرس گوشتی برای خوردن نداشته باشد می‌میرد. اگر n به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، خرس چند روز زنده خواهد ماند؟!(پاسخ تابعی از n است.)

مسئله‌ی ۵*. ابرداده ساختار

فرض کنید داده‌ساختار D شامل مجموعه‌های $S_0, S_1, \ldots, S_n$ است به طوری که مجموعهٔ S_i یا صفر و یا 2^i عنصر دارد. درج یک عنصر در این داده ساختار به این صورت است که ابتدا کوچکترین i که S_i دارای صفر عنصر

است را پیدا می‌کنیم، سپس تمام عناصر $S_۰, S_۱, ..., S_{i-۱}$ را به S_i منتقل کرده و عنصر مورد نظر را درج می‌کنیم و مجموعه‌های $S_۰, S_۱, ..., S_{i-۱}$ خالی می‌شوند. مجموع هزینهٔ درج n عنصر در D از چه مرتبه‌ای است؟

مسئله‌ی ۶*. محاسبهٔ idx

فرض کنید آرایهٔ A را داریم که شامل n عدد طبیعی است. تعریف می‌کنیم:

$$idx[i] = \max_j \qquad j < i \text{ and } w[j] <= w[i]$$

حال برای محاسبهٔ مقدار idx الگوریتم زیر را اجرا می‌کنیم:

```
idx[۱] = −۱
for i : ۲ → n do
    j = i − ۱
    while w[j] > w[i] and j ≠ −۱ do
        j = idx[j]
    end
    idx[i] = j
end
```

الف) نشان دهید الگوریتم پاسخ صحیح را تولید خواهد کرد.

ب) نشان دهید هزینهٔ سرشکن محاسبه idx برای هر اندیس $O(۱)$ است.

مسئله‌ی ۷*. شمارنده (تحلیل سرشکن)

یک شمارندهٔ k بیتی را در نظر بگیرید که مقدار آن در هر مرحله یکی زیاد می‌شود. قبلا ثابت کرده‌ایم هزینهٔ n بار اضافه کردن این شمارنده در مجموع $O(n)$ است.

- اگر به مجموعهٔ عملگرهای این مساله دستور dec (کاهش) را نیز اضافه کنیم، باز هم هزینهٔ سرشکن کل عملیات $O(۱)$ باقی می‌ماند؟
- نشان دهید اگر به اعمال ممکن برای این شمارنده عمل $Reset$ (صفر شدن مقدار شمارنده) اضافه شود، باز زمان انجام n عمل روی این شمارنده در مجموع $O(n)$ است. این یعنی در این حالت، در هر مرحله یا مقدار شمارنده یکی زیاد می‌شود، یا شمارنده ریست می‌شود.

INCREMENT (*A*)

```
1. i = 1
2. while i < length [A] and A[i] = 1
3.    do A[i] = 0
4.       i = i +1
5. if i < length [A]
6.    then A[i] = 1
7.    if i > max[A]
8.       then max[A] = i
9.       else max[A] = -1
```

RESET(*A*)

```
For i = 0 to max[A]
    do A[i] = 0
```

مسئله‌ی ۸*. آرایهٔ پرهام (تحلیل سرشکن)

فرض کنید هزینهٔ درج و حذف در یک آرایه از مرتبهٔ $O(۱)$ باشد. برای این که مطمئن باشیم آرایهٔ ما همیشه به اندازهٔ کافی جای خالی دارد و همچنین حافظهٔ زیادی هدر نمی‌دهد، از قواعد زیر استفاده می‌کنیم:

- بعد از هر درج، اگر بیش از ۳/۴ آرایه پر باشد، یک آرایه جدید از حافظه می‌گیریم که اندازهٔ آن دو برابر بزرگتر از آرایه فعلی باشد. حال تمام عناصر آرایه فعلی را در آرایه جدید درج میکنیم و سپس آرایه قبل را آزاد می‌کنیم.
- بعد از هر حذف، اگر کمتر از ۱/۴ آرایه پر باشد، آرایه جدیدی از حافظه می گیریم که اندازهٔ آن نصف اندازهٔ آرایه فعلی باشد و تمام عناصر آرایهٔ فعلی را در آن درج می‌کنیم و سپس آرایهٔ فعلی را آزاد می‌کنیم.

نشان دهید، به ازای هر رشته از درج و حذف ها همچنان هزینهٔ زمانی سرشکن هر عملیات از مرتبهٔ $O(۱)$ خواهد بود. اگر به جای نسبت‌های ۳/۴ و ۱/۴ به ترتیب نسبت‌های ۱ و ۱/۲ را در نظر می‌گرفتیم، آیا باز هم هزینهٔ سرشکن برابر با $O(۱)$ می‌شد؟