



داده ساختار

نیم‌سال اول ۹۹-۰۰

مدرس: مسعود صدیقین

زمان: ۱۸۰ دقیقه

میان ترم

مسئله‌ی ۱. تحلیل زمانی (۳۰ نمره)

نشان دهید به ازای هر ϵ ثابت، $\log n = O(n^\epsilon)$ (برای اثبات، تعاریف را کامل بنویسید).

مسئله‌ی ۲. ادغام داده ساختارها (۳۰ نمره)

فرض کنید به داده ساختاری نیاز داریم که از عملیات زیرپشتیبانی کند.

- *Pop*: حذف کردن یک عنصر از ابتدای سمت راست لیست
- *Push*: اضافه کردن یک عنصر به ابتدای سمت راست لیست
- *Pull*: حذف یک عنصر از ابتدای سمت چپ لیست

با استفاده از تنها ۳ پشته و $O(1)$ حافظه اضافی داده ساختار را طوری طراحی کنید که اعمال گفته شده در زمان سرشکن $O(1)$ قابل انجام باشند.

مسئله‌ی ۳*. بزرگترین زیر مستطیل (۳۵ نمره)

الف) فرض کنید یک آرایه با اندازه n شامل اعداد ۰ و ۱ داده شده است. می‌خواهیم به ازای هر عنصر ۱ از آرایه، اولین صفر سمت چپ آن را (یعنی با اندیس کمتر) پیدا کنیم. روشی ارائه دهید که این کار را در زمان $O(n)$ انجام دهد.

ب) حال فرض کنید یک ماتریس $n \times n$ شامل اعداد صفر و یک داده شده است و هدف پیدا کردن بزرگترین زیرمستطیل این ماتریس است که تنها شامل عدد ۱ است. الگوریتمی با زمان اجرای $O(n^2)$ برای این کار ارائه دهید (برای حل این بخش می‌توانید از بخش الف کمک بگیرید).

مسئله‌ی ۴. درخت BST (۲۵ نمره)

فرض کنید اعداد ۱ تا n را با یک ترتیب تصادفی وارد یک درخت ددج کرده ایم. نشان دهید متوسط عمق هر راس در این درخت برابر با $O(\log n)$ خواهد بود. آیا این به این معنی است که بیشینه ارتفاع این درخت نیز برابر $O(\log n)$ است؟

مسئله‌ی ۵. واریسی خطی (۳۰ نمره)

در جدول درهم سازی با استفاده از روش واریسی خطی، تابع درهم سازی برای جدولی با اندازه هشت به صورت زیر است:

H	G	F	E	D	C	B	A	key
۱	۴	۵	۴	۴	۲	۶	۲	hash

اگر جدول درهم سازی در ابتدا تهی باشد، به چند حالت می توان این عناصر را در جدول درج کرد تا در نهایت جدول زیر تولید شود؟

۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰	i
F	B	E	D	C	A	H	G	T(i)

مسئله‌ی ۶. درهم سازی جهانی (۳۵ نمره)

فرض کنید در یک درهم سازی، کلیدها مجموعه اعداد b بیتی است و توابع درهم سازی هر کلید را به یک عدد k بیتی تبدیل می کنند ($m = 2^k$). در این صورت نشان دهید این خانواده از توابع در هم سازی، یک خانواده جهانی است: مجموعه تمام ماتریس های $b \times k$ شامل درایه های صفر و یک. برای محاسبه مقدار $hash$ یک کلید s با استفاده از ماتریس A مقدار $s \times A$ را محاسبه می کنیم.

مسئله‌ی ۷. ظرفیت (سوال با زمان بیشتر)

فرض کنید n عدد ظرف داریم که به طور معلق در فضا قرار گرفته اند (ظرف ۲ زیر ظرف ۱، ظرف ۳ زیر ظرف دوم و همینطور تا آخر). هر ظرف i یک مقدار c_i ظرفیت دارد و در حال حاضر میزان a_i در آن آب است (طبیعتاً، در ابتدا $c_i > a_i$ است). هر ظرفی اگر بشکند، تمام آب آن به ظرف پایینی میریزد. همچنین اگر میزان آب موجود در یک ظرف بیش از ظرفیت آن شود، آن ظرف می شکند. همچنین ظرف i ام را با صرف هزینه p_i میتوانیم به صورت دستی بشکنیم. الگوریتمی ارائه دهید که در زمان $O(n \log n)$ کمترین هزینه لازم برای شکاندن ظرف n ام را محاسبه کند.

راه حل خود را به صورت فیلمی (شبه تمرین های هفتگی آماده و در نسخه کم حجم شده حداکثر تا روز یکشنبه ارسال کنید). زمان مورد نیاز، برای توضیح راه حل حداکثر ۸ دقیقه است.

مسئله‌ی ۸. مسائل اضافی

الف) در این قسمت، به شما این پیشنهاد داده می شود: (گزینه ۱) $0/1$ نمره به میانترم شما اضافه خواهد شد. (گزینه ۲) یا $0/3$ نمره به نمره نهایی میانترم شما اضافه خواهد شد، و به ازای آن $0/06$ از نمره تمام دانشجویان دیگر کسر خواهد شد. کدام گزینه را قبول می کنید؟ جواب شما باید یکی از دو گزینه باشد. پاسخ شما در این بخش محفوظ خواهد ماند و سایرین از پاسخ شما آگاه نخواهند شد!