



# ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۱۳۹۹ - ۱۴۰۰

مدرس: مسعود صدیقین

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

## سوالات سری چهارم

### مسئله‌ی ۱\*. ساخت صف (تحلیل سرشکن و پشته)

روش پیاده‌سازی یک صف با استفاده از دو استک را که در کلاس راجع به آن صحبت شد به یاد آورید.

الف) هزینه سرشکن  $n$  عمل اضافه و حذف از صف را با استفاده از روش تابع پتانسیل تحلیل کنید. فرض کنید هزینه‌ها معادل تعداد  $push$  ها و  $pop$  ها است.

ب) می‌خواهیم پشته‌ای را پیاده‌سازی کنیم. اگر بخواهیم فقط با استفاده از تعدادی صف پشته مورد نظر را بسازیم، به حداقل چند صف نیاز خواهیم داشت؟

### مسئله‌ی ۲. طراحی داده‌ساختار

داده‌ساختاری طراحی کنید که بتواند اعمال  $FindMin$ ،  $Pop$ ،  $Push$  (یافتن و برگرداندن کوچک‌ترین عنصر بین عناصر موجود) را در  $O(1)$  انجام دهد. ثابت کنید اگر عمل  $DeleteMin$  هم اضافه شود، دست کم یکی از این اعمال باید در  $\Omega(\log n)$  انجام شود.

### مسئله‌ی ۳\*. ادغام داده‌ساختارها

با ادغام داده‌ساختارهای صف و پشته، داده‌ساختاری ساختیم که از عملیات زیر پشتیبانی کند.

•  $Pop$ : حذف کردن یک عنصر از ابتدای سمت راست لیست

•  $Push$ : اضافه کردن یک عنصر به ابتدای سمت راست لیست

•  $Pull$ : حذف یک عنصر از ابتدای سمت چپ لیست

با استفاده از تنها ۳ پشته و  $O(1)$  حافظه اضافی، داده‌ساختار را طوری طراحی کنید که اعمال گفته شده در زمان سرشکن  $O(1)$  قابل انجام باشند.

### مسئله‌ی ۴\*. سنگین‌ترین مسیر

وزن یک مسیر بین دو راس را مجموع عناصر روی آن مسیر تعریف می‌کنیم. الگوریتمی ارائه دهید که در زمان خطی سنگین‌ترین مسیر در درخت دودویی (درختی که هر رأس آن حداکثر دو فرزند داشته باشد) را پیدا کند.

### مسئله‌ی ۵\*. درخت اجداد (پیمایش)

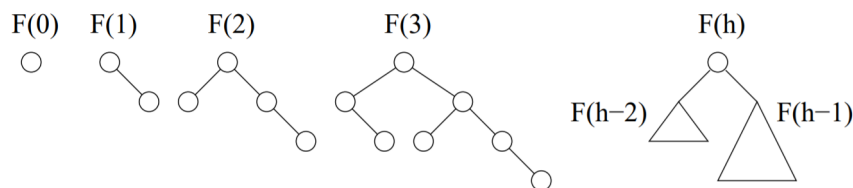
یک درخت ریشه‌دار را در نظر بگیرید. پیش‌پردازشی از مرتبه  $O(n \log n)$  روی آن انجام دهید تا پرسمان زیر را در  $O(1)$  پاسخ دهید: آیا گره  $u$  از اجداد گره  $v$  است یا خیر؟

### مسئله‌ی ۶\*. رشته متقارن

رشته‌های متقارن، رشته‌هایی هستند که از دو طرف به یک شکل خوانده می‌شوند. به طور مثال:  $ABBA$  یک رشته متقارن است. بدون استفاده از توابع جانبی و تنها به کمک داده‌ساختارهای صف و پشته و عملیات‌های مربوط به آن، شبه کدی بنویسید که اگر ورودی، رشته  $S$  به طول  $n$  باشد، بتواند متقارن بودن یا نبودن رشته  $S$  را تشخیص دهد.

### مسئله‌ی ۷\*. درخت فیبوناچی

درخت دودویی فیبوناچی یک درخت بازگشتی است. در حالت کلی برای  $h \geq 2$ ، درخت فیبوناچی به ارتفاع  $h$  را با  $F(h)$  نشان می‌دهیم که به این صورت ساخته می‌شود که ریشه‌ای در نظر گرفته و فرزند راست آن را  $F(h-1)$  و فرزند سمت چپ آن را  $F(h-2)$  قرار می‌دهیم.



الف) اگر  $N(h)$  را تعداد گره‌های  $F(h)$  در نظر بگیریم رابطه‌ای بازگشتی برای محاسبه‌اش ارائه کنید.  
 ب\*) با استفاده از رابطه بازگشتی به دست آمده در بخش قبل، به کمک استقرا ثابت کنید به ازای هر  $h \geq 4$  رابطه  $N \leq (1/9)^h$  برقرار است.

راهنمایی: می‌دانیم به ازای هر  $k \geq 4$  داریم  $\frac{1}{(1/9)^k} \leq 0.77$