دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

طراحی الگوریتم‌ها

بهار ۱۴۰۰

مدرس: مسعود صدیقین

یادآوری جلسه بیست و یکم

برنامه‌نویسی خطی

درسا مجدی ــ زهرا فاضل

در جلسه قبل در ادامه برنامه‌نویسی خطی با فرم‌های جبری و غیراستاندارد آن آشنا شدیم و سپس دو کاربرد آن را بررسی کردیم.

فرم‌های مسئله برنامه‌نویسی خطی

فرم ماکسیمم:		فرم مینیمم:
$Y = \{y_۱, ..., y_m\}$	← متغیرها →	$X = \{x_۱, ..., x_n\}$
$\max \sum_{i=۱}^{m} b_i y_i$	← objective →	$\min \sum_{i=۱}^{n} c_i x_i$
$\text{s.t.} \sum_{i=۱}^{m} a_{i,۱} y_i \leq c_۱, \sum_{i=۱}^{m} a_{i,۲} y_i \leq c_۲, \ldots, \sum_{i=۱}^{m} a_{i,n} y_i \leq c_n,$	← constraints →	$\text{s.t.} \sum_{i=۱}^{n} a_{۱,i} x_i \geq b_۱, \sum_{i=۱}^{n} a_{۲,i} x_i \geq b_۲, \ldots, \sum_{i=۱}^{n} a_{m,i} x_i \geq b_m,$
$\forall ۱ \leq i \leq m : y_i \geq ۰$	← شرایط مرزی →	$\forall ۱ \leq i \leq n : x_i \geq ۰$

فرض کنیم:

$$X : \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y : \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad A : \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \ldots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \ldots & a_{۲n} \\ & & \vdots & \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_۱ \\ b_۲ \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \quad c = \begin{bmatrix} c_۱ & c_۲ & \ldots & c_n \end{bmatrix}$$

دو فرم بالا را می‌توان به شکل زیر به صورت جبری نوشت:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T Y \\ \text{s.t.} \quad & A^T Y \leq c, \\ & Y \geq ۰ \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \min \quad & cX \\ \text{s.t.} \quad & AX \geq b, \\ & X \geq ۰ \end{aligned}$$

ممکن است فرم برنامه‌نویسی خطی به شکل استاندارد آن نباشد:

۱. جهت نامساوی‌ها یکی نباشد.

در این صورت با ضرب در ۱− می‌توان جهت نامساوی‌ها را یکی کرد.

$$\begin{cases} ۸x_۱ + ۱۰x_۲ \leq ۱۰ \\ ۳x_۱ + ۵x_۲ \geq ۳ \end{cases} \implies \begin{cases} ۸x_۱ + ۱۰x_۲ \leq ۱۰ \\ -۳x_۱ - ۵x_۲ \leq ۳ \end{cases}$$

۲. ممکن است در بعضی از قیدها هایمان = داشته باشیم.

$$۳x_۱ + ۵x_۲ = ۴ \implies \begin{cases} ۳x_۱ + ۵x_۲ \geq ۴ \\ ۳x_۱ + ۵x_۲ \leq ۴ \end{cases}$$

۳. شرایط مرزی ممکن است ظاهر نشوند یا متفاوت باشند.

$$x_1 \in (-\infty, \infty) \implies \begin{cases} x_1 = x_1' - x_1'' \\ x_1' \geq 0 \\ x_1'' \geq 0 \end{cases}$$

در این صورت با اضافه کردن چند قید، می‌توان شرایط را استاندارد کرد. چند مثال از این حالت در روبه‌رو آمده‌است.

$$x_1 \geq 5 \implies \begin{cases} x_1 - x_1' \geq 5 \\ x_1 \geq 0 \\ x_1' \geq 0 \end{cases} \qquad x_1 \leq 10 \implies \begin{cases} x_1 + x_1' \leq 10 \\ x_1 \geq 0 \\ x_1' \geq 0 \end{cases}$$

در LP شرط ها باید به صورت $\geq \quad = \quad \leq$ باشند تا به جواب برسیم و تنها در شرایط خاص می‌توانیم $> \quad <$ داشته باشیم.

کاربردهای برنامه نویسی خطی

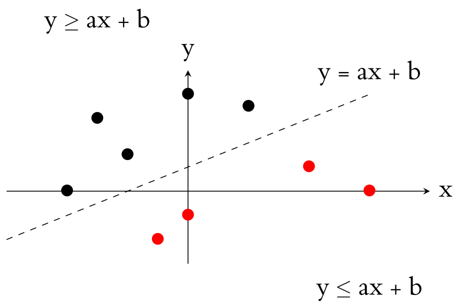
- یافتن شار بیشینه

در این مسئله متغیرها، شار گذرنده از هر یال‌اند. همچنین قیود مسئله، برابر بودن شار ورودی و خروجی برای هر رأس به جز رئوس مبدأ و مقصد، نامنفی‌بودن شار گذرنده از هر یال و محدودیت ظرفیت هر یال است.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{e \in O_S} f_e \\ \text{s.t.} \quad & \forall e \in E : f_e \leq c_e, \\ & \forall e \in E : f_e \geq 0, \\ & \forall v \in V - \{S, T\} : \sum_{e \in I_v} f_e = \sum_{e \in O_v} f_e \end{aligned}$$

فرض کنیم در شبکه شار دلخواه، شار عبوری از یال e برابر f_e و ظرفیت آن c_e باشد. همچنین I_v یال‌های ورودی به رأس v و O_v یال‌های خروجی از رأس v باشد و رئوس مبدأ و مقصد به ترتیب S و T باشند. در این صورت مسئله برنامه‌نویسی شار بیشینه به شکل روبه‌رو است.

دوگان فرم روبه‌رو، فرم برنامه‌نویسی مسئله برش کمینه است. همچنین با اضافه کردن قیود جدید می‌توان حالت‌هایی را که حداقل شار داشته‌باشیم یا یال‌ها هزینه داشته‌باشند، به دست آورد.



- m نقطه‌ی قرمز $p_1, p_2, \ldots, p_m$ و n نقطه‌ی سیاه $q_1, q_2, \ldots, q_n$ در صفحه داریم، می‌خواهیم خط جداکننده این نقاط را در صورت وجود پیدا کنیم.

فرض کنیم $x(s)$ و $y(s)$ نشانگر مختصات x و y نقطه ی s باشند و نقاط سیاه بالای خط و نقاط قرمز پایین آن باشند. در این صورت فرم برنامه‌نویسی خطی مسئله به شکل روبه‌رو است.

$$\forall 1 \leq i \leq m : y(p_i) \leq ax(p_i) + b$$

$$\forall 1 \leq i \leq n : y(q_i) \geq ax(q_i) + b$$

در این حالت ممکن است نقاط روی خط بیفتند. برای جلوگیری از این اتفاق به دنبال خطی می‌گردیم که فاصله نقاط هر دسته از آن حداقل ϵ باشد ، ϵ را بیشینه کنیم.

$$\begin{aligned} \max \quad & \epsilon \\ \text{s.t.} \quad & \forall 1 \leq i \leq m : y(p_i) \leq ax(p_i) + b, \\ & \forall 1 \leq i \leq n : y(q_i) \geq ax(q_i) + b \end{aligned}$$