در جلسه گذشته در ادامه مسئله شار بیشینه، درستی الگوریم فورد–فولکرسون را اثبات کردیم و تعمیم‌های این مسئله را بررسی کردیم.

درستی الگوریتم فورد–فولکرسون

برای اثبات درستی الگوریتم از قضیه زیر استفاده می‌کنیم:

قضیه ۱. *فرض کنید G یک شبکه شار و f یک شار از G باشد. آنگاه گزاره‌های زیر معادل‌اند:*

آ. *f شار بیشینه است.*

ب. *G_f هیچ مسیری از s به t ندارد.*

ج. *برش S و T در G وجود دارد که $c(S,T) = |f^*|$.*

اثبات. *برای اثبات معادل‌بودن این سه گزاره، نشان می‌دهیم گزاره‌های اول و دوم، گزاره‌ی بعدی خود و گزاره سوم، گزاره اول را نتیجه می‌دهد.* □

۱. *آ $\Longleftarrow$ ب. اگر مسیری از s به t وجود داشته‌باشد، آنگاه می‌توانیم شار f را افزایش دهیم که این در تناقض با بیشینه بودن f است.*

۲. *ب $\Longleftarrow$ ج. فرض کنیم S مجموعه رئوسی باشد که از s به آن‌ها و T مجموعه رئوسی باشد که از آن‌ها به t مسیری وجود دارد. (سایر راس‌ها را میتوانیم به دلخواه همگی را در S یا همگی را در T قرار دهیم) برای یال $\vec{uv}$ از گراف residual با ظرفیت c که $u \in S$ و $v \in T$ دو حالت داریم: یا در گراف اصلی یال از u به v است و یا برعکس.*

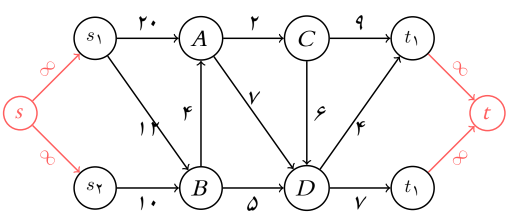
پس $c(S,T) = |f|$.

۳. *ج $\Longleftarrow$ آ. می‌دانیم $\min c(S,T) \geq \max |f|$ و $c(S,T) = |f|$. پس f شار بیشینه است.*

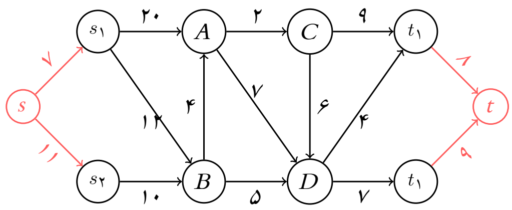
تعمیم‌های مسئله شار بیشینه

۱. *گراف G بیش از یک مبدأ یا مقصد داشته‌باشد.*

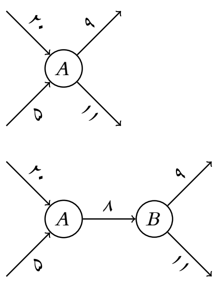
در این صورت رئوس s و t را به گراف اضافه می‌کنیم. سپس از رأس s به همه رئوس مبدأ و از همه رئوس مقصد به t یال با ظرفیت بی‌نهایت اضافه می‌کنیم. در شکل ۱ مثالی از این تعمیم آمده‌است.



۲. گراف G بیش از یک مبدأ یا مقصد داشته‌باشد و میزان شار قابل ارسال از هر مبدأ و به هر مقصد مشخص باشد.
در این صورت رئوس s و t را به گراف اضافه می‌کنیم. سپس از رأس s به همه رئوس مبدأ و از همه رئوس مقصد به t یال با ظرفیت برابر با شار قابل ارسال، اضافه می‌کنیم. در شکل ۱ مثالی از این تعمیم آمده‌است.



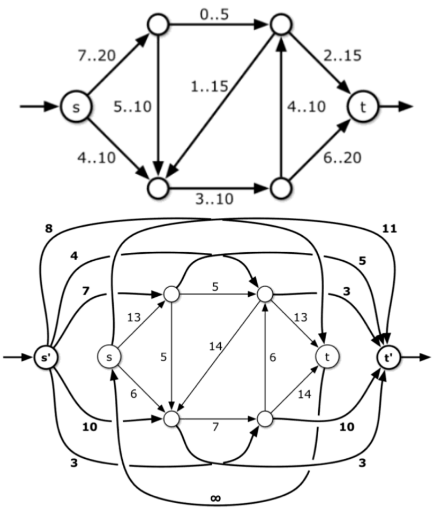
۳. هر رأس یک حد بالا برای شار خروجی و ورودی داشته باشد.
مانند شکل فلان به ازای هر رأس A با حد بالای U یک رأس مانند B اضافه می‌کنیم. سپس یالی با وزن U از A به B اضافه می‌کنیم. یال‌های ورودی به A در گراف اصلی را به A وصل می‌کنیم و یال‌های خروجی از A در گراف اصلی را از B خارج می‌کنیم. در روبه‌رو مثالی از این تعمیم آمده‌است که ۱ رأس A در گراف اصلی با کران بالای ۸ و ۱ اعمال راه گفته‌شده را نشان می‌دهد.



۴. هر یالی علاوه بر ظرفیت، حد پایین هم داشته باشد. هدف پیدا کردن شاری است که همه حدود پایین و بالا را رعایت کند.

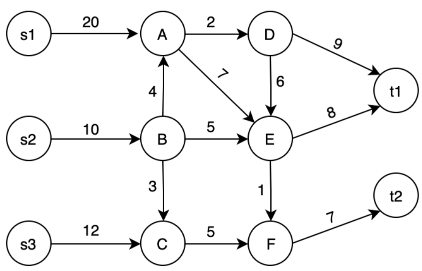
- دو رأس s' و t' را به گراف اضافه می‌کنیم.
- به ازای هر یال، یک یال از رأس s' به رأس انتهای آن یال(اگر s یا t نباشد)، و یک یال از رأس ابتدای آن یال(اگر s یا t نباشد) به رأس t' ایجاد می‌کنیم، که شار و ظرفیت آن برابر با، حد پایین آن یال باشد.
- یک یال از t به s با ظرفیت بی‌نهایت وصل می‌کنیم.

در روبه‌رو مثالی از این تعمیم آمده‌است که ۱ گراف اصلی و ۱ اعمال راه گفته‌شده را نشان می‌دهد.



۵. هر یالی علاوه بر ظرفیت، یک هزینه هم داشته‌باشد. هدف پیدا کردن شار بیشینه است که $\sum_{e\in E} f(e)\times cost(e)$ را کمینه می‌کند.

پرسش در گراف زیر شار بیشینه از سه مبدأ s_1، s_2 و s_3 به دو مقصد t_1 و t_2 بیابید.



پاسخ های خود را می توانید تا قبل از شروع کلاس به این لینک ارسال کنید.