



طراحی الگوریتم‌ها

نیم‌سال دوم ۹۹-۰۰

مدرس: مسعود صدیقین

تمرین نهم

مسئله‌ی ۱. کران (شار بیشینه)

مسئله پیدا کردن شار بیشینه را در نظر بگیرید. در این مسئله هر یال مانند e ، یک ظرفیت مانند $c(e)$ داشت و اگر $f(e)$ میزان شار گذرنده از این یال بود، داشتیم: $f(e) \leq c(e)$. حال فرض کنید هر یال علاوه بر ظرفیت، یک کران پایین هم داشته باشد، یعنی باید برای هر یال داشته باشیم: $l(e) \leq f(e) \leq c(e)$. حال در این مسئله شار بیشینه را پیدا کنید.

مسئله‌ی ۲*. راس‌های با ظرفیت (شار بیشینه)

مسئله پیدا کردن شار بیشینه را در نظر بگیرید. فرض کنید برای هر راس $v \in V(G)$ داشته باشیم:

$$f^{in}(v) - f^{out}(v) = d(v)$$

که $d: V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد که به هر راس یک عدد $d(v)$ را نسبت می‌دهد. حال با این شرط جدید، مسئله شار بیشینه را حل کنید. (مقادیر $f^{in}(v)$, $f^{out}(v)$ نیز مقادیر شار ورودی و خروجی از راس v را نشان می‌دهند.)

مسئله‌ی ۳*. گرفتن دزد! (شار بیشینه)

فرض کنید نقشه‌ی یک شهر را به صورت یک گراف بدون وزن و جهت‌دار $G = (V, E)$ در نظر بگیریم که در آن یال‌های گراف نشان‌گر خیابان‌ها و رئوس بیانگر تقاطع خیابان‌ها باشد. یک دزد قصد فرار از این شهر را دارد و هدف این است که با بستن کم‌ترین تعداد خیابان‌ها (قرار دادن مانع روی یال‌ها) جلوی خروج او از شهر را بگیریم. (اجازه‌ی رسیدن او به یکی از نقاط خروجی شهر را ندهیم.) زیرمجموعه‌ی $C \subset V$ از رئوسی که دزد ممکن است در آن حضور داشته باشد و همچنین زیرمجموعه‌ی $P \subset V$ از نقاط خروجی از شهر داده شده است. الگوریتمی با مرتبه‌ی زمانی $O(|E|)^2$ برای یافتن کم‌ترین تعداد یال که با مسدود کردن آن‌ها دزد امکان خروج از شهر را نداشته باشد، طراحی کنید.

مسئله‌ی ۴. تقسیم شکلات‌ها (تبدیل به شار بیشینه)

می‌خواهیم n شکلات با اندازه‌های s_1, s_2, \dots, s_n را بین n نفر تقسیم کنیم. فرض کنید نفر شماره‌ی i با شکلاتی با حداقل اندازه‌ی t_i سیر می‌شود. می‌خواهیم الگوریتمی طراحی کنیم که بتواند تعیین کند آیا امکان سیر کردن همه‌ی افراد وجود دارد یا خیر. نشان دهید چطور می‌توان با تبدیل این مسئله به یک مسئله‌ی شار بیشینه آن را حل کرد.

مسئله ۵*. رسیدگی به تصادف‌ها! (تبدیل به شار بیشینه)

نقشه‌ی یک کشور به صورت یک گراف بدون جهت $G = (V, E)$ داده شده است که در آن رئوس گراف شهرها، و یال‌ها نشان‌گر جاده‌های بین شهرها هستند. در هر جاده‌ی $(i, j) \in E$ در این شهر، روزانه n_{ij} تصادف روی می‌دهد که نیازمند امداد جاده‌ای هستند. برای این مشکل در هر شهر i دقیقاً t_i اتومبیل امداد قرار گرفته است و هر تصادف در شهر (i, j) باید دقیقاً توسط یک اتومبیل امداد که در شهر i یا j هستند، سرویس داده شود.

الگوریتمی با مرتبه‌ی زمانی چندجمله‌ای برای تعیین امکان سرویس دادن همه‌ی تصادف‌های روزانه توسط اتومبیل‌های امداد مستقر در شهرها طراحی کنید. همچنین الگوریتم طراحی شده باید مشخص کند چه تعداد از n_{ij} تصادف توسط اتومبیل‌های امداد شهر i و چه تعداد توسط اتومبیل‌های امداد شهر j باید سرویس بگیرند.

مسئله ۶*. کاهش شار (شار بیشینه)

یک مسئله‌ی شبکه‌ی شار متشکل از گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ ، رأس مبدأ $s \in V$ و رأس مقصد $t \in V$ و همچنین ظرفیت یال‌های واحد را در نظر بگیرید. همچنین عدد صحیح k نیز داده شده و هدف حذف k یال از G است طوری که مقدار شار بیشینه از s به t بیشترین کاهش ممکن را داشته باشد. الگوریتمی با مرتبه زمانی چندجمله‌ای برای یافتن این k یال ارائه دهید.

مسئله ۷*. زیر مساله‌ها (شار بیشینه)

فرض کنید x و y دو راس از گراف جهت‌دار G باشند:

(آ) بیشینه‌ی تعداد مسیرهای جهت‌دار مجزا-یال از x به y در G برابر است با کمینه‌ی تعداد یال‌هایی که حذف آن‌ها تمام مسیرهای جهت‌دار از x به y را از بین می‌برد.

(ب) *بیشینه‌ی تعداد مسیرهای جهت‌دار مجزا-راس درونی از x به y در G برابر است با کمینه‌ی تعداد راس‌هایی که حذف آن‌ها تمام مسیرهای جهت‌دار از x به y را از بین می‌برد.

مسئله ۸. تطابق کامل (شار بیشینه)

شرط تطابق هال را به کمک شار بیشینه نتیجه بگیرید.

مسئله ۹*. ماتریس صحیح (شار بیشینه)

فرض کنید A یک ماتریس $n \times m$ یک ماتریس از اعداد حقیقی غیرمنفی می‌باشد که مجموع اعداد هر سطر و هر ستون در آن عددی صحیح است. ثابت کنید ماتریس $m \times n$ ای وجود دارد که تنها شامل اعداد صحیح مثبت است به نحوی که جمع عناصر هر سطر و هر ستون دقیقاً برابر جمع سطر یا ستون متناظر آن در ماتریس A باشد.

