دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

طراحی الگوریتم‌ها

نیم‌سال دوم ۰۰ ـ ۹۹

مدرس: مسعود صدیقین

تمرین سوم

مسئله‌ی ۱. صداقت یا دروغ؟! (الگوریتم گیل ـ شپلی)

نشان دهید که الگوریتم گیل شپلی برای زن‌ها صادقانه نیست. به عبارتی یک زن ممکن است با ارائه لیست نادرست به نتیجه بهتر برسد.

مسئله‌ی ۲*. حالات خاص (ازدواج پایدار)

برای هر یک از موارد زیر یک مثال از یک مسئله‌ی ازدواج پایدار ارائه کنید. در صورت عدم وجود، دلیل خود را بنویسید:

آ) یک مثال با $n > ۱$ که دارای یک ازدواج پایدار باشد که در آن یک مرد m با زن w ازدواج کرده باشد طوری‌که w آخرین اولویت m باشد و همچنین m آخرین اولویت w باشد.

ب) یک مثال که دارای یک ازدواج پایدار باشد که در آن یک مرد m با زن w ازدواج کرده باشد طوری‌که w آخرین اولویت m باشد و همچنین m آخرین اولویت w باشد و همچنین یک مرد m' با زن w' ازدواج کرده باشد طوری‌که w' آخرین اولویت m' باشد و همچنین m' نیز آخرین اولویت w' باشد.

ج) یک مثال که الگوریتم گیل ـ شپلی $\Theta(n^۲)$ گام برای خاتمه نیاز داشته باشد.

مسئله‌ی ۳*. اثبات‌های هافمن (کد هافمن)

آ) نشان دهید اگر فراوانی یک نماد در یک متن بیش‌تر از $\frac{۲}{۵}$ باشد، در این حالت در درخت هافمن این متن قطعاً کدی به طول یک بیت خواهیم داشت. همچنین ثابت کنید اگر فراوانی همه‌ی نمادها کم‌تر از $\frac{۱}{۳}$ باشد آن‌گاه کدی به طول یک وجود نخواهد داشت.

ب) فرض کنید یک الفبا شامل n نماد باشد. طول کد هافمن یک نماد حداکثر چند بیت می‌تواند باشد؟ چه فراوانی‌هایی می‌تواند این مقدار حداکثر را بدست آورد؟

مسئله‌ی ۴*. کدهای ۲ ـ بیتی (کد هافمن)

فرض کنید پیغامی متشکل از چهار حرف A، B، C و D داریم و احتمال رخداد هر کدام از آنان را $p(A)$، $p(B)$، $p(C)$ و $p(D)$ می‌نامیم. می‌دانیم رابطه‌ی زیر بین احتمال رخدادها برقرار است:

$$p(A) \geqslant p(B) \geqslant p(C) \geqslant p(D)$$

شرط لازم و کافی برای این که الگوریتم هافمن برای هر کدام از حروف یک کد ۲ ـ بیتی ایجاد کند را به دست آورده و ادعای خود را اثبات کنید.

مسئله‌ی ۵. ازدواج‌های نمایی (ازدواج پایدار)

نشان دهید تعداد جواب‌های مسئله‌ی ازدواج پایدار می‌تواند نمایی باشد؛ در واقع برای هر $n \in \mathbb{N}$ دست‌کم یک نمونه‌ی I از مسئله‌ی ازدواج پایدار با n مرد و n زن وجود دارد طوری‌که تعداد جواب‌های I برای یک $c > 1$ حداقل c^n باشد.

مسئله‌ی ۶*. دزد بازنده (الگوریتم‌های حریصانه)

دزدی به همراه یک چاقو و یک جعبه به ظرفیت W، به یک شیرینی فروشی دستبرد زده‌است. درون مغازه n کیک مختلف وجود دارد. کیک iام با میزان خوشمزگی t_i و حجم w_i در یخچال مغازه قرار گرفته‌است. از آنجایی که این دزد یک بازنده‌ی واقعی است تمایل دارد که در انتهای دزدی جعبه‌اش را با خوشمزه ترین ترکیب ممکن از کیک‌ها پر کرده باشد. حال با در نظر گرفتن این موضوع که دزد بازنده در حین پر کردن جعبه می تواند از چاقویش نیز استفاده کرده و قسمتی از کیک را درون جعبه‌اش قرار دهد، الگوریتمی برای کمک به او ارائه دهید تا بتواند خوشمزه ترین ترکیب ممکن از کیک‌ها را در جعبه‌ی خود قرار داده و از مغازه خارج کند.

مسئله‌ی ۷*. هافمن‌ـ‌ادامه (کد هافمن)

فرض کنید به ازای الفبای C،دو حرف x, y دو کاراکتر با فرکانس کمینه باشند و قرار دهید:

$$C' = C \backslash \{x, y\} \cup z$$

$$fr(z) = fr(x) + fr(y)$$

همچنین فرض کنید T' درخت بهینه برای C' باشد. نشان دهید در این صورت درخت T که با اضافه کردن دو راس مربوطه به z برای کاراکترهای x, y تولید می‌شود،درخت بهینه C است.

مسئله‌ی ۸. یار کِشی بهینه (الگوریتم‌های حریصانه)

در یک گروه n بازیکن فوتبال $P_1, P_2, \dots, P_n$ در اختیار داریم. فرض کنید هر بازیکن P_i دارای قدرت s_i باشد. می‌خواهیم این n بازیکن را به تیم‌های دو نفره تقسیم کنیم طوری‌که اولاً مجموع قدرت دو بازیکن هر تیم از یک مقدار ثابت T بیشتر شود، ثانیاً هر بازیکن دقیقاً در یک تیم عضو باشد و ثالثاً تعداد تیم‌ها بیشینه باشد.

الگوریتمی حریصانه با مرتبه‌ی زمانی $O(n \log n)$ برای حل این مسئله ارائه کنید و درستی آن را به طور کامل اثبات کنید.