

موضوع: کوله پشتی - مسئله ای برناردی گراف

مسئله کوله پشتی ۱-۵:

همه اعداد صحیح

کوله: حجم V
 n شیء: شیء نام حجم v_i و ارزش w_i
 w_1, w_2, \dots, w_n و v_1, v_2, \dots, v_n

هدف: انتخاب زیر مجموعه از اشیاء با مجموع حجم حداکثر V و ارزش بیشینه.

* ۱- الگوریتم حریصانه: اشیاء را بر حسب $\frac{w_i}{v_i}$ مرتب کنیم و به این ترتیب انتخاب کنیم.

مثال بد: حجم $V = 10$
 ارزش $\begin{matrix} 1 & 10 \\ 2 & 10 \\ \downarrow & \downarrow \end{matrix}$

برنامه نویسی پویا:

بیشترین ارزش ممکن با استفاده از n شیء اول و حجم j
 $\rightarrow \text{opt}[i][j]$:

$$\text{opt}[i][j] = \begin{cases} \text{شیء نداشت} : \text{opt}[i-1][j] \\ \text{شیء داشت} : \text{opt}[i-1][j-v_i] + w_i \end{cases}$$

تعداد اشیاء

$$\rightarrow * \text{opt}[i][j] = \max(w_i + \text{opt}[i-1][j-v_i], \text{opt}[i-1][j])$$

$$\begin{cases} \text{opt}[k][0] = 0 \\ \text{opt}[0][k] = 0 \end{cases}$$

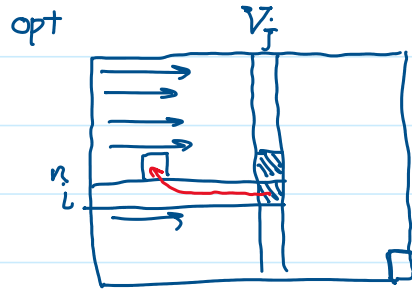
$$\begin{cases} \text{opt}[K][0] = 0 \\ \text{opt}[0][K] = 0 \end{cases}$$

مقداردهی اولیه //

for (i: 1 → n)

for (j: 1 → V)

*



1. زمان اجرا : $O(nV)$

مثال: مساله Subset sum: یک مجموعه شامل n عدد داده شده. آیا یک

زیرمجموعه از اعداد وجود دارد که

مجموع آن برابر با K باشد؟

$$\sum_{i=1}^n x_i = S$$

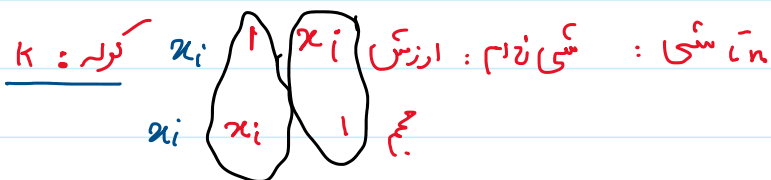
Boolean: $f[i][j] =$ زیرمجموعه‌ای از اعداد وجود دارد که

مجموع آن برابر با j باشد؟

جواب نهایی $f[n][K]$

$$f[i][j] = \begin{cases} f[i-1][j] \\ f[i-1][j-x_i] \end{cases} \quad \text{OR}$$

$$O(nK)$$



Remark 1: زمان: $O(nV)$: خطی - Polym - exp
 $O(n)$ $O(n^k)$ $O(2^n)$

$$O(2^n) \quad O(n^2) \quad O(n) \quad \leftarrow \boxed{O(2^n)} \leftarrow$$

ورودی : $v_i \leq n \quad w_i \leq n$

$$\frac{\log v}{\log v} \leftarrow \frac{v}{1} \leftarrow \log v \leftarrow \frac{O(nv)}{\log v}$$

سوال : الگوریتم که $\log v$ در زمان اجرا باشد؟ ← فعلاً نه!

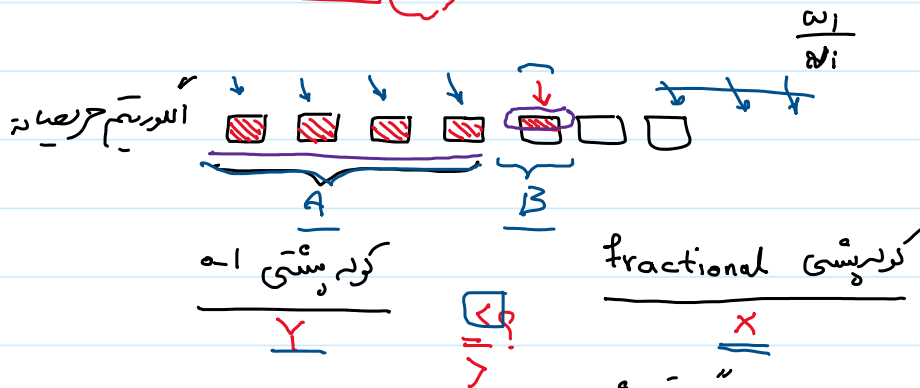
NP-hard

Remark 2 : الگوریتم چند جمله ای با تقریب $\frac{1}{2}$ ؟



$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 10 \\ \hline 2 & 10 \\ \hline \end{array}$$

الگوریتم حریصانه:



- 1- $O(n \log n)$ ← الگوریتم حریصانه را انجام بده ← A و K انتخاب شده
- 2- پاسخ دوم B : تنها شی $K+1$ ام را انتخاب کن.
- 3- A و B ، جوابی که بهتر است را برگردان.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 10 \\ \hline 2 & 10 \\ \hline \end{array}$$

ادعا : این الگوریتم دارای تقریب $\frac{1}{2}$ است.

ادعا ۱) جواب بهینه کوله پستی Fractional \Leftarrow جواب بهینه کوله پستی ساده

ادعا ۲) $\{A \cup B\}$ (شی اول) یک مجموعه با ارزش سسته از جواب Fractional است

\Leftarrow یا جواب A و یا جواب B ، ارزش حاصل μ از کوله پستی Fractional را دارد

\Leftarrow یا A و یا B ، ارزش حاصل μ از جواب بهینه کوله پستی \circ را دارد.

— *