

موضوع: تقسیم و حمله - هندسه محاسباتی

۱. مساله نزدیکترین جفت:

یک مجموعه  $P$  شامل  $n$  نقطه در صفحه داده شده است. هدف پیدا کردن  $\Delta$  نقطه از  $P$  با کمترین فاصله است. \* هیچ سه نقطه ای روی یک خط نیستند.

$$P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$$

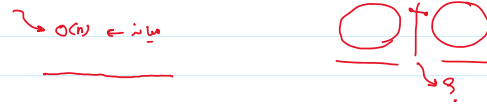
(نقطه) (نقطه)

$$O(1) \rightarrow \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

روش ۱) به ازای هر  $\Delta$  نقطه، فاصله آن دو را حساب کرده و کمینه فاصله ها را به دست آوریم.

$$O(n^2) = \Theta(n^2) \rightarrow O(n^2)$$

روش ۲) \* divide & conquer \*  $O(n \log n)$



$$O(n \log n) \left\{ \begin{array}{l} P_x \leftarrow P \\ P_y \leftarrow P \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{نقاط } P \text{ مرتب شده بر حسب } x \\ \text{نقاط } P \text{ مرتب شده بر حسب } y \end{array}$$

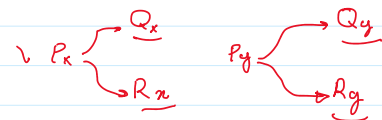
۰ -  $P_x$  و  $P_y$  را حساب کن.

$O(1)$

۱ - نقطه عمودی  $L$  که نقاط را به  $\Delta$  زیر مجموعه با اندازه برابر تقسیم می کند را پیدا کن.



۲ - مجموعه  $Q_x, Q_y, R_x, R_y$  را تشکیل بده.



conquer ۳ - مساله نزدیکترین جفت را برای  $Q$  و  $R$  حل کن.

$$q^* = \min(q_Q, q_R) \leftarrow \text{آیا جواب نهایی } q^* \text{ است؟}$$

۵ -  $O(n)$  مجموعه  $P$  را تشکیل دهیم که شامل تمامی است که فاصله آن ها از  $L$  کمتر از  $q^*$  است.

۶ -  $O(n)$  فاصله هر نقطه از  $S_y$  را با  $\Delta$  نقطه پائینی محاسبه کن.  $Q_y \rightarrow Q'_y$  و  $R_y \rightarrow R'_y$

۷ -  $O(n)$  فاصله هر نقطه از  $S_y$  را با  $\Delta$  نقطه پائینی محاسبه کن.  $Q_y \rightarrow Q'_y$  و  $R_y \rightarrow R'_y$

$$q_p = \min(q^*, q^*) \rightarrow O(1)$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n) = T(n) = \Theta(n \log n)$$

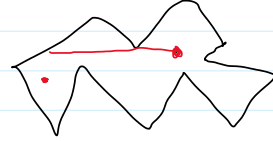
$$T(n) = \Theta(n \log n + n \log n)$$

$$= \Theta(n \log n)$$

هندسه محاسباتی (Computational Geometry) :

شأن :  $n$  نقطه داده شده ، قطر نقاط را حساب کنید

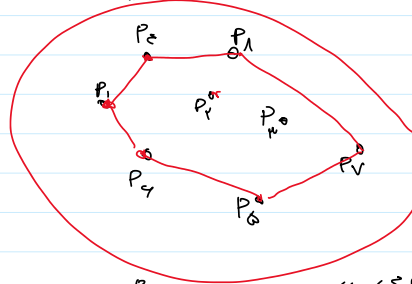
Art Gallery : یک  $n$  ضلعی داده شده ، کمترین تعداد نگهبان که هر  $n$  ضلعی را بپوشاند  
همه  $n$  ضلعی را بپوشاند.



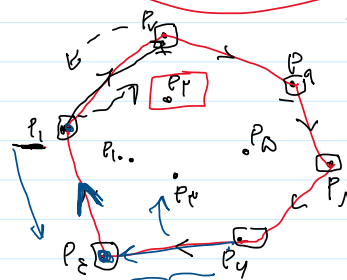
\* پوشش محذب : مجموعه  $P$  شامل  $n$  نقطه داده شده است. کوچکترین چند ضلعی محذب را پیدا کنید که هر نقطه  $P$  را بپوشاند (یعنی نقطه ای روی یک خط نیستند)



محذب : یک چند ضلعی  $R$  محذب است اگر به ازای هر دو نقطه  $P_i, P_j \in R$  ، تمام نقاط روی خط  $P_i P_j$  داخل  $R$  باشند.



\* مشاهده : همه رئوس ها پوشش محذب ، از نقاط داخل  $P$  هستند



خروجی : دنباله رئوس های پوشش محذب به ترتیب ساعتگرد.

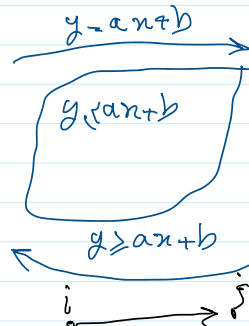
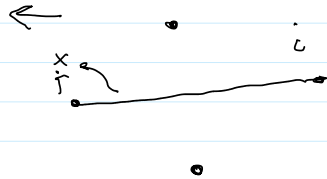
$$P_1 - P_v - P_9 - P_8 - P_7 - P_6$$

$$P_v - P_9 - P_8 - P_7 - P_6 - P_1$$

$$\rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 7 & - & 1 & - & 4 & 9 & 6 & 8 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array} \leftarrow \text{output}$$

روش ۱) الگوریتم  $O(n^3)$  :

الر  $P_i P_j$  یک ضلع پوشش محذب باشد ، همه نقاط  $P$  دیگر در سمت راست  $P_i P_j$  است



for (i: 1 to n)  
for (j: 1 to n)

for( $i:1 \rightarrow n$ )

for( $j:1 \rightarrow n$ )

for( $k:1 \rightarrow n$ )

if  $p_k$  is to the left of  $\overrightarrow{P_i P_j}$

return

add( $\overrightarrow{i j}$ ) to edge list  $\rightarrow$  output  $[i] = j$

$\begin{cases} O(n^2) \text{ روش} \\ O(n \log n) \text{ روش} \end{cases}$

\*