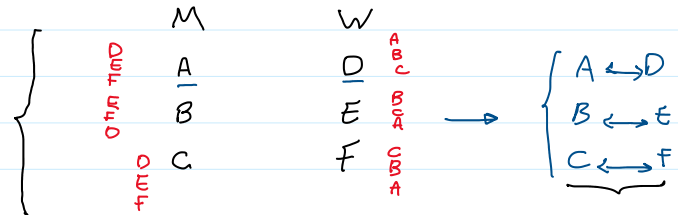
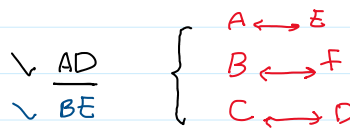


موضوع: ازدواج پایدار - الگوریتم‌ها

مساله: یک مجموعه  $M$  شامل  $n$  مرد و یک مجموعه  $W$  شامل  $n$  زن داده شده است. هر مرد  $[z]$  یک رتبه‌بندی شامل یک جایبست از زن‌ها  $[مردها]$  دارد. ترجیح دی برای ازدواج را مشخص می‌کند.



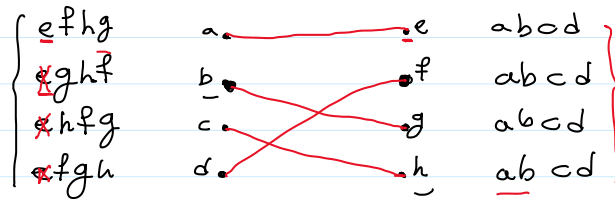
یک تطابق، تخصیص مردها و زن‌ها به یکدیگر است، به طوری که هر مرد دقیقاً به یک زن و هر زن دقیقاً به یک مرد رسیده باشد.



یک تطابق پایدار است، به شرطی که هیچ مرد  $m$  و زن  $w$  وجود نداشته باشد که

- $m$  و  $w$  به هم تخصیص داده نشده باشند
- $m$  و  $w$  را به هم ترجیح می‌دهند
- $m$  و  $w$  را به هم ترجیح می‌دهند

d c b  
b a c  
v f d



الگوریتم ساده: تمام روش‌های تخصیص را بررسی کن!  $\Theta(n!)$

الگوریتم 1962 Gale-Shapley: Deferred Acceptance [دورن خواسته‌ها]

تأییدی که یک مرد مجرد وجود دارد

فرض کنید  $w$  با کمترین زن در لیست  $m$  باشد که هنوز به او پیشنهاد داده است.

اگر  $w$  مجرد است یا  $w$  را به  $m$  به هم ترجیح می‌دهد،  $m$  را از همسر فعلی جدا کرده و با  $m$  ازدواج می‌کند.

(همسر قبلی  $w$  را مجرد می‌شود)

اثبات درستی:

۱. الگوریتم GS، حتماً پایانی می‌یابد

\* هیچ مردی به هیچ زنی  $1$  بار پیشنهاد نمی دهد

- حداقل  $n$  پیشنهاد تمام می شود.

\*  $2$  - اگر در  $n$  نهایتاً یک تطابق کامل برقرارند

\* زنی که یک زن ماهر می شود دیگر هیچگاه مجرد نمی شود.

یک مرد  $m$  در صورتی توسط یک زن  $w$   $reject$  می شود  
 زن  $w$   $reject$  ماهر است!  
 - زن ماهر باشد و شوهرش را ترجیح دهد  
 - زن با  $m$  باشد و پیشنهاد بهتری دریافت کند

اگر یک مرد آخر کار مجرد باشد به توسط تمام زن ها  $reject$  شد.  
 به تمام زن ها ماهر بودند.

$3$  - خردی لزوماً یک تطابق پایدار است!

برهان خلف!

فرض کنید زوج  $m$  و  $w$  یک  $blocking$  است.

\* شرایط زن ها در طول  $n$  دور می شود.  
 \* مرد ها به زودتر ...

$m$  و  $w$  یک  $blocking$  است.  $m$  زمانی توسط  $w$  رکبت شده است.

و هس خود را به  $m$  ترجیح می داده

←  $w$  هس نهایی خود را به  $m$  ترجیح می دهد

✗

قضیه: اگر در  $n$  پسلی بعد از  $n$  مرحله، یک تطابق پایدار پیدا می کند.

←

\* تطابق پایدار لزوماً یکتا نیست.

\* مرها

به ازای هر مرد  $m$ ،  $Best(m)$  را قرار دهید بهترین زنی که در یک تطابق پایدار به  $m$  می رسد.

$n$   $1$   $2$   $3$   $4$   $5$   $6$   $7$   $8$   $9$   $10$   $11$   $12$   $13$   $14$   $15$   $16$   $17$   $18$   $19$   $20$   $21$   $22$   $23$   $24$   $25$   $26$   $27$   $28$   $29$   $30$   $31$   $32$   $33$   $34$   $35$   $36$   $37$   $38$   $39$   $40$   $41$   $42$   $43$   $44$   $45$   $46$   $47$   $48$   $49$   $50$   $51$   $52$   $53$   $54$   $55$   $56$   $57$   $58$   $59$   $60$   $61$   $62$   $63$   $64$   $65$   $66$   $67$   $68$   $69$   $70$   $71$   $72$   $73$   $74$   $75$   $76$   $77$   $78$   $79$   $80$   $81$   $82$   $83$   $84$   $85$   $86$   $87$   $88$   $89$   $90$   $91$   $92$   $93$   $94$   $95$   $96$   $97$   $98$   $99$   $100$

به  $m$  می‌رسد.

\* الگوریتم  $GS$ ، هر مرتبه را با  $Best(m)$  مطابق می‌کند.  $\leftarrow$

اثبات \*

\* الگوریتم  $GS$ ، هر وزن را با  $worst(w)$  مطابق می‌کند.  $\leftarrow$  صدقانه نیست \*