



طراحی الگوریتم‌ها

نیم‌سال دوم ۹۹-۰۰

مدرس: مسعود صدیقین

تمرین چهاردهم

مسئله‌ی ۱*. گراف اقلیدسی

فرض کنید یک گراف کامل داریم که راس‌های آن هر کدام یک نقطه در فضا است و وزن یال میان هر دو راس برابر با فاصله اقلیدسی میان آن دو است. الگوریتمی چندجمله‌ای با تقریب دو برای پیدا کردن دور همیلتونی با وزن کمینه این گراف خاص ارائه دهید.

مسئله‌ی ۲. فروشنده دوره‌گرد

نشان دهید برای مساله ۱، در حالتی که گراف اقلیدسی نباشد و هیچ محدودیتی بر روی وزن یال‌ها وجود نداشته باشد، هیچ الگوریتمی با ضریب تقریب ثابت وجود ندارد، مگر آن که $P = NP$.

مسئله‌ی ۳*. سیارک

در یک پروژه فضایی سفینه‌هایی با گنجایش ۱۰۰۰ تن، به کمربند سیارک‌ها اعزام می‌شوند. هر سفینه می‌تواند به سیارک‌های مختلف سفر کند و به شرطی که ظرفیت کافی داشته باشد، تمام منابع موجود در سیارک را استخراج کند. میزان منابع فلزی موجود در یک سیارک نوع SS حداکثر ۱۰۰۰ تن برآورد می‌شود. تعداد سیارک‌های هدف n است و دانشمندان به دنبال این هستند که کمترین تعداد سفینه را اعزام کنند. برای این کار الگوریتم تقریبی با ضریب تقریب ۲ پیشنهاد دهید.

مسئله‌ی ۴. ترم تابستان

دانشکده‌ی کامپیوتر تصمیم دارد تا درس‌هایی را برای تابستان جاری انتخاب و آن‌ها را ارائه دهد. برای این کار همه‌ی دانشجویان مجاز به ثبت یک لیست از دروسی که تمایل به گذراندن آن دارند می‌باشند. به تعداد s دانشجو این لیست را ثبت کرده‌اند. لیست ثبت شده توسط دانشجوی i را L_i در نظر می‌گیریم. هدف یافتن مجموعه‌ی C است که مجموعه‌ای از دروس انتخاب شده برای تابستان است به گونه‌ای که $|C|$ کمینه باشد و این مجموعه حداقل دارای یک درس از هر لیست باشد. الگوریتم تقریبی با زمان چند جمله‌ای برای این کار پیشنهاد دهید.

مسئله‌ی ۵*. پوشش راسی

یکی از دانشجویان در کلاس، پیشنهاد داد که برای مساله پوشش راسی، در هر مرحله راس با درجه بیشینه را به مجموعه پوشش راسی اضافه کنیم و سپس آن راس و یالهای مجاور آن را از گراف حذف کنیم. مثالی ارائه دهید که نشان دهد که جواب به دست آمده توسط این الگوریتم ممکن است ضریب تقریب $\log n$ داشته باشد.

مسئله‌ی ۶. پوشش مجموعه‌ای

برای مسئله پوشش مجموعه‌ای، الگوریتم حریصانه‌ای را در نظر بگیرید که در هر مرحله مجموعه‌ای را انتخاب میکند که بیشترین تعداد عضو پوشش داده نشده از مجموعه زمینه را پوشش می‌دهد. نشان دهید ضریب تقریب این الگوریتم $\theta(\log n)$ است.

مسئله‌ی ۷*. عبارات

به تعداد n متغیر از نوع بولی داریم که دو مقدار $true$ و $false$ را می‌توانند داشته باشند و به تعداد m عبارت C_1, C_2, \dots, C_m داریم. هر عبارت از or کردن متغیرها یا نقیض آن‌ها با هم بدست می‌آید. برای مثال ممکن است یکی از عبارات به شکل زیر باشد:

$$C_k = x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3$$

می‌خواهیم یک مقداردهی به متغیرها پیدا کنیم که تعداد عبارات‌های درست بیشینه شود. الگوریتم تقریبی با ضریب تقریب دو برای این کار ارائه دهید.

مسئله‌ی ۸*. برش بیشینه

فرض کنید یک گراف جهتدار $G = (V, E)$ داریم. می‌خواهیم یک برش در این گراف پیدا کنیم، یعنی می‌خواهیم یک جفت (S, T) از رئوس پیدا کنیم به طوری که $S \subseteq V$ و $T = V - S$. همچنین می‌خواهیم این کار را طوری انجام دهیم که بیشترین تعداد یال بین S, T موجود باشد. الگوریتم تقریبی با ضریب تقریب ۲ برای این کار ارائه دهید.

مسئله‌ی ۹*. حریصانه

در مسئله برنامه ریزی بازه‌ها یک مجموعه J از کارهایی که می‌توانند انجام شوند داریم. برای هر کار $j \in J$ ، سه عدد p_j, d_j, r_j مشخص شده‌اند که به ترتیب برابر با کمترین زمان ممکن برای شروع، دیرترین زمان ممکن برای پایان و مدت زمان انجام کار هستند. یک الگوریتم حریصانه با ضریب تقریب ۲ برای این مساله ارائه دهید.

