



طراحی الگوریتم‌ها

نیم‌سال دوم ۱۴۰۰-۱۳۹۹

مدرس: مسعود صدیقین

تمرین سیزدهم

مسئله‌ی ۱*. کدوم کلاس

برای مسائل زیر کوچکترین کلاس پیچیدگی از بین P و NP و NP -Complete که می‌توانید ثابت کنید مسئله در آن است کدام است؟ دلیل مختصری بیاورید.

(آ) یک گراف $G = (V, E)$ داده شده است، آیا $V' \subseteq V$ موجود است که $|V'| = k$ و بین هر دو رأس در V' یالی در G باشد؟ (k یک عدد ثابت است و جز ورودی‌های مسئله نیست).

(ب) یک گراف $G = (V, E)$ و عدد k داده شده است، آیا $V' \subseteq V$ موجود است که $|V'| = k$ و بین هر دو رأس در V' یالی در G باشد؟

(ج) یک گراف $G = (V, E)$ و عدد k داده شده است، آیا $E' \subseteq E$ وجود دارد که $|E'| < k$ و برای هر $v \in V$ ، یالی مانند e در E' باشد که v یکی از دو سر e باشد؟

(د) یک گراف $G = (V, E)$ و عدد k داده شده است، آیا $V' \subseteq V$ وجود دارد که $|V'| < k$ و برای هر $e \in E$ ، رأسی مانند v در V' باشد که v یکی از دو سر e باشد؟

(ه) مسئله‌ی $SAT - 3$ با این فرض اضافه برای ورودی که در ورودی هر متغیر یا نقیض آن حداکثر ۲ بار در ورودی ظاهر شده است.

(و) مسئله‌ی $SAT - 3$ با این فرض اضافه برای ورودی که در ورودی هر متغیر یا نقیض آن حداکثر ۴ بار در ورودی ظاهر شده است.

مسئله‌ی ۲*. زیباترین مسئله

تعریف ۱. مسئله 3 -Coloring به این صورت تعریف می‌شود: اگر یک گراف غیرجهتدار G داشته باشیم، آیا رئوس آن را می‌توان با ۳ رنگ، رنگ کرد به طوری که هیچ دو راس مجاوری هم‌رنگ نباشند؟

حال با توجه به مسئله بالا، نشان دهید مسئله 3 -SAT را می‌توان به مسئله 3 -Coloring کاهش داد. در واقع نشان دهید: 3 -SAT \leq_P 3-Coloring.

مسئله‌ی ۳*. خیلی مستقل

در گراف $G = (V, E)$ یک زیرمجموعه از راس‌ها مثل U را خیلی مستقل می‌گوییم هرگاه هیچ مسیری با طول حداکثر ۲ در G بین دو راس از U موجود نباشد. ثابت کنید مسئله‌ی زیر NP -complete است:

یک گراف $G = (V, E)$ و عدد k داده شده است، آیا G زیرمجموعه‌ی خیلی مستقل به اندازه‌ی حداقل k دارد؟

مسئله‌ی ۴. به تیر با سه هدف

هر جفت از مسئله‌های زیر را به یکدیگر کاهش دهید.

الف) گراف G داده شده است، بزرگترین مجموعه راس‌ها را پیدا کنید که هر جفت از راس‌های مجموعه همسایه باشند. (Clique Problem)

ب) گراف G داده شده است، بزرگترین مجموعه راس‌ها را پیدا کنید که هیچ کدام از جفت راس‌های موجود در مجموعه همسایه نباشند. (Independent-set Problem)

ج) گراف $G = (V, E)$ داده شده است، کوچکترین مجموعه راس‌های U را پیدا کنید که به ازای هر یال $e = (u, v) \in E$ حداقل یکی از u یا v در U باشند. (Vertex Cover Problem)

مسئله‌ی ۵. جمع مجموعه‌ای

مسئله‌های زیر را به یکدیگر کاهش دهید.

• مجموعه S از اعداد صحیح داده شده است، آیا می‌توان این مجموعه را به دو زیرمجموعه‌ی P و Q افراز کرد به طوری که جمع اعضای آنها برابر باشد؟

• مجموعه اعداد صحیح S و عدد K داده شده است، آیا زیرمجموعه‌ای از S با جمع اعضای برابر با K وجود دارد؟

مسئله‌ی ۶*. اسم ندارم

علی‌آقا در تدارک یک سفر است. او می‌داند در این راه سختی‌های زیادی وجود دارد و ریسک بالایی را باید بپذیرد چرا که مسیر او بسیار پر خطر است. پس از تحقیق درباره‌ی روستاهای مختلف متوجه شد که اهالی آن ناحیه به مسافران تا حد امکان کمک می‌کنند. آن‌ها همچنین بنا به شناختی که از جاده‌ها و خطرهای آن‌ها دارند، میزان مشخصی کمک (پول) برای هر جاده در نظر می‌گیرند. همچنین در صورتی که آن جاده بی‌خطر باشد، توصیه می‌کنند تا مسافر از مسیر لذت برده و مسافران نیز بیشتر خریدهای خود را در این جاده‌ها انجام می‌دهند. علی‌آقا با یکی از خوب‌های ناحیه صحبت کرده است و پس از آن می‌داند برای هر جاده چه میزان پول به عنوان کمک دریافت خواهد کرد و برای جاده‌های بی‌خطر نیز برنامه‌ریزی کرده‌است تا هر یک از آن‌ها چه مقدار خرج کند (جاده‌ها لزوماً دو طرفه نیستند در نقشه و بعضی از جاده‌ها یک‌طرفه‌اند). علی‌آقا در پی این است که آیا می‌تواند مسیر را طی کند و به آن برگردد در حالیکه پول اولیه‌ی وی با پول نهاییش برابر باشد؟ ثابت کنید پیدا کردن چنین مسیری، NP-Complete است.

مسئله‌ی ۷*. بی‌اسم

فرض کنید مجموعه‌ی F مجموعه‌ی تمامی دوستان شما باشد که می‌خواهید تعدادی از آن‌ها را به مهمانی دعوت کنید. می‌دانیم k گروه دوستی S_1, S_2, \dots, S_k در بین این افراد وجود دارد (که لزوماً مجزا نیستند). شما می‌خواهید n نفر از دوستانتان را دعوت کنید طوری که از هیچ گروهی تمامی افراد دعوت نشده باشند. ثابت کنید تصمیم این که این کار امکان‌پذیر است یا خیر NP-Complete است.

مسئله‌ی ۸.*. اسم

منظور از «برجستگی» یک گراف، بیش‌ترین درجه در آن گراف است. گراف ساده‌ی G داده شده است. هدف پیدا کردن یک زیردرخت فراگیر از G با کم‌ترین برجستگی است. ثابت کنید برای این مسئله الگوریتم چندجمله‌ای با ضریب تقریب بهتر از $1/5$ وجود ندارد مگر $NP = P$.

مسئله‌ی ۹.*. اسمی

گراف جهت‌دار G داده شده است. می‌خواهیم بزرگ‌ترین زیرگراف (با بیش‌ترین تعداد یال) از G را بیابیم که هیچ دور جهت‌داری نداشته باشد. ثابت کنید تصمیم‌گیری اینکه آیا زیرگرافی از G وجود دارد که دور جهت‌دار نداشته باشد و با حذف حداکثر k یال به دست آمده باشد، NP -Hard است.

