



## طراحی الگوریتم‌ها

نیم‌سال دوم ۹۹-۰۰

مدرس: مسعود صدیقین

## تمرین پانزدهم

## مسئله‌ی ۱\*. مجموع زیرمجموعه‌ها (FPTAS)

مجموعه‌ی  $S$  شامل  $n$  عدد صحیح مثبت و همچنین عدد صحیح مثبت  $K$  داده شده است. می‌خواهیم زیرمجموعه‌ای از  $S$  را بیابیم که مجموع اعضای آن بیشترین مقدار ممکن باشد اما بیشتر از  $K$  نباشد. یک FPTAS برای مسئله ارائه دهید.

## مسئله‌ی ۲\*. رنگ‌آمیزی راسی (الگوریتم‌های تقریبی)

فرض کنید یک گراف بدون جهت  $G = (V, E)$  داده شده است. رئوس این گراف را با حداقل تعداد رنگ، رنگ کنید به طوری که دو راس دو سر هر یالی، غیر هم‌رنگ باشند.

الف) یک الگوریتم حریصانه برای رنگ کردن با  $\Delta + 1$  رنگ ارائه دهید. ( $\Delta$  بزرگترین درجه رئوس گراف است).

ب) یک الگوریتم ارائه دهید که یک گراف ۳-رنگ پذیر را با  $O(\sqrt{n})$  رنگ، رنگ کند. (منظور از گراف ۳-رنگ پذیر، گرافی است که می‌توان رئوس آن را با ۳ رنگ، رنگ کرد که هیچ دو راس مجاور هم‌رنگ نباشند.)

## مسئله‌ی ۳\*. مساله‌ی تقریب ناپذیر (الگوریتم‌های تقریبی)

مساله‌ی بزرگ‌ترین مجموعه‌ی رئوس مستقل در یک گراف را در نظر بگیرید.

آ) ثابت کنید به ازای هر عدد ثابت  $c \geq 1$  با فرض  $P \neq NP$  برای این مسئله هیچ الگوریتم چندجمله‌ای با خروجی دارای  $OPT - c$  رأس یا بیش‌تر وجود ندارد.

ب) نشان دهید برای این مساله FPTAS وجود ندارد.

## مسئله‌ی ۴\*. Ratio Subset-Sum (الگوریتم‌های تقریبی)

یک FPTAS را برای مسئله زیر به دست آورید:

فرض کنید  $n$  عدد صحیح مانند  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  داده شده است. دو زیرمجموعه ناتهی و مجزا مانند  $S_1, S_2 \subseteq \{1, \dots, n\}$  بیابید به طوری که  $\sum_{i \in S_1} a_i \geq \sum_{i \in S_2} a_i$  و همچنین نسبت  $\frac{\sum_{i \in S_1} a_i}{\sum_{i \in S_2} a_i}$  مینیمم شود.

## مسئله ۵\*. گراف بی‌دور (الگوریتم‌های تقریبی)

فرض کنید یک گراف جهت‌دار بی‌دور داریم که یک رأس  $s$  به عنوان source و یک رأس  $t$  به عنوان sink دارد. همچنین هر یالی مانند  $e$  یک هزینه  $c_e$  و یک طول  $l_e$  دارد. فرض کنید  $L$  یک حد برای طول مسیر باشد. یک الگوریتم با تقریب کامل چندجمله‌ای برای پیدا کردن کم‌هزینه‌ترین مسیر که طول آن حداکثر  $L$  است، پیدا کنید.

