



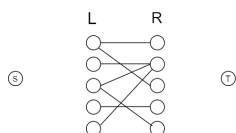
در جلسات گذشته، مسئله‌ی شار بیشینه در کلاس مطرح شد. در این مسئله، یک شبکه‌ی شار، که گرافی شامل یال‌های جهت دار و معمولاً شامل دو راس s و t می‌باشد، داده شده است و هدف محاسبه بیشترین شار از s به t است. در جلسه گذشته، هدف این بود که با استفاده از شار بیشینه، مساله‌های مختلف را حل کنیم. برای این کار ابتدا قضیه شار صحیح را معرفی می‌کنیم.

قضیه ۱ (شار صحیح). اگر اندازه‌ی همه‌ی ظرفیت‌ها در یک شبکه عدد صحیح باشند، آنگاه شار بیشینه‌ی وجود دارد که در آن میزان شار عبوری از هر یال عدد صحیح است.

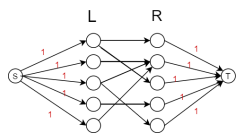
در جلسه گذشته، سه مساله مختلف را مورد بررسی قرار دادیم و سعی کردیم هر کدام از آن‌ها را با استفاده از شار بیشینه حل کنیم. در این خلاصه به عنوان نمونه دو مورد از این مسائل را بررسی می‌کنیم.

تطابق دوبخشی

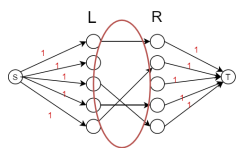
گراف دو بخشی G داده شده است. تطابق بیشینه در G را پیدا کنید. به یاد داشته باشید که تطابق بیشینه در یک گراف برابر است با بیشترین تعداد یالی که می‌توانیم انتخاب کنیم به شرط آنکه هیچکدام از یال‌ها با یکدیگر راس مشترک نداشته باشند.



حل: راس s را سمت چپ گراف دو بخشی و راس t را سمت راست آن قرار می‌دهیم. راس s به همه‌ی راس‌های مجموعه L با ظرفیت ۱ وصل است و تمام راس‌های مجموعه R با ظرفیت ۱ به t وصل هستند و یال‌هایی که بین L و R هستند همه از L به R جهت دهی شده‌اند. مشخصاً شار بیشینه از s به t برابر با اندازه تطابق بیشینه در گراف G است.



اثبات. \Rightarrow اگر تطابق بیشینه در این گراف را در نظر بگیریم، میتوانیم در هر کدام از یال‌های تطابق یک واحد شار بفرستیم. بنابراین اگر یک تطابق با اندازه k داشته باشیم، حتماً یک شار با اندازه k نیز خواهیم داشت.



\Leftarrow : در اینجا می‌توانیم از قضیه شار صحیح نتیجه بگیریم که چون ظرفیت‌ها صحیح هستند، شار بیشینه‌ای وجود دارد که در آن شار هر یال عدد صحیح است و از طرفی واضح است که هیچوقت ۲ واحد شار وارد یک راس نمی‌شود و یا از آن خارج نمی‌شود. حال کافیست یال‌های میانی را به عنوان یال‌های تطابق بیشینه انتخاب کنیم.

□

مسیرهای مجزا یال

دو مسیر در گراف مجزا یال هستند، اگر یال مشترک نداشته باشند. در مساله مسیرهای مجزا یال گراف جهت دار G داده شده است و هدف پیدا کردن بیشترین تعداد مسیر از راس s به t است به طوری که مسیرها مجزا یال باشند.

این سوال را به مسئله‌ی پیدا کردن شار بیشینه تبدیل میکنیم به این صورت که ظرفیت تمام یال‌ها را ۱ می‌دهیم و سپس شار بیشینه را پیدا می‌کنیم. شار بیشینه‌ای که از s به t پیدا میکنیم مساوی است با ماکسیمم تعداد مسیرهای مجزا یالی که از s به t وجود دارد.

