تمرین ششم

مسئله‌ی ۱*. درخت پوشای بیشینه (درخت پوشای کمینه)

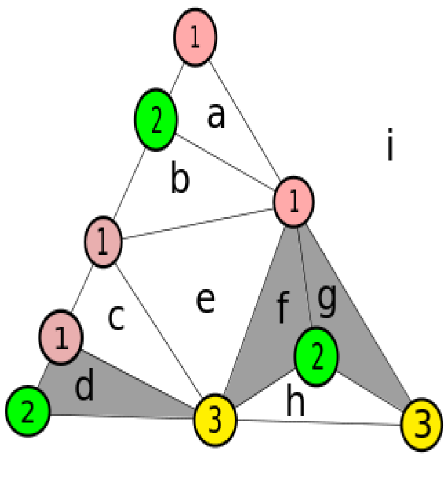
«درخت پوشای بیشینه» در یک گراف همبند وزن‌دار و بدون جهت، درختی با بیشترین مجموع وزن یال‌ها است که شامل تمام رئوس گراف بوده و همهٔ یال‌های آن نیز از یال‌های گراف اصلی انتخاب شده باشند.

با این توصیف اگر الگوریتم کراسکال را تنها با این تفاوت اجرا کنیم که در هر مرحله به جای سبک‌ترین یال، سنگین‌ترین یال انتخاب شود (باقی ملاحظات الگوریتم تغییری نمی‌کند)، آیا یک درخت پوشای بیشینهٔ گراف ورودی حاصل می‌شود؟ اگر بله، ادعای خود را اثبات کنید وگرنه مثال نقض ارائه دهید.

مسئله‌ی ۲*. مثلث های معین (گراف)

فرض کنید مثلثی به‌نام T در اختیار داریم که به تعدادی مثلث کوچتر تقسیم شده، به نحوی که مثلث ها در راس و یا تمام یک ضلع مشترک هستند. حال سه راس مثلث اصلی را با اعداد ۱،۲و۳ نشانه‌گذاری می کنیم(به صورت دلخواه). حال مثلث های کوچکتر باید به گونه‌ای نشانه گذاری شوند که هر راس از آن‌ها که روی ضلعی از T، که دو سر آن رئوس i و j باشند قرار گیرد باید به یکی از دو رنگ i و یا j نشانه‌گذاری شود.(شکل درج شده مثالی از این تقسیم بندی و نشانه‌گذاری است.)

زیرمثلث‌هایی که شامل هر سه نشانه‌ی ۱،۲و۳ هستند را مثلث‌های معین می‌نامیم(که در شکل خاکستری شده‌اند). ثابت کنید تعداد مثلث‌های معین در هر تقسیم‌بندی و هر نشانه‌گذاری با شرایط ذکر شده دارای تعداد فردی مثلث معین می‌باشد.



مسئله‌ی ۳. قانون اول نیوتن (درخت پوشای کمینه)

فرض کنید T درخت پوشای کمینهٔ گراف G باشد. سپس L را لیست مرتب‌شدهٔ وزن یال‌های T تعریف می کنیم.

اثبات کنید به ازای هر درخت پوشای کمینهٔ دیگر مانند T'، لیست مرتب شدهٔ وزن‌یال‌های T' با L برابر است.

مسئله‌ی ۴*. تخریب و اصلاح درخت پوشای کمینه (درخت پشای کمینه)

فرض کنید G یک گراف همبند وزن‌دار و بدون جهت باشد که T یکی از درخت‌های پوشای کمینهٔ آن است. اکنون وزن یکی از یال‌های G به نام e را که واصل دو رأس u و v است، تغییر می‌دهیم.

- توضیح دهید که در چه صورتی تغییر وزن e منجر می‌شود T دیگر یک درخت پوشای کمینهٔ G نباشد (دقت کنید که e لزوماً یالی از T نبوده است).
- در شرایطی که T در اثر تغییر مذکور دیگر درخت پوشای کمینه نباشد، الگوریتمی بهینه ارائه دهید که با ایجاد کم‌ترین تغییرات در T آن را دوباره به یک درخت پوشای کمینه تبدیل کند. البته توجه کنید که طبیعتاً حق تغییر وزن هیچ یک از یال‌های G را ندارید.

مسئله‌ی ۵*. افراز گراف (DFS)

گرافی nراسی با mیال و بدون جهت در اختیار داریم. قصد داریم این گراف را به مسیرهای مجزاـ یال به طول ۲، افراز کنیم (تمام یال‌ها باید در افراز حضور داشته باشند.) و در صورت عدم امکان رسیدن به این مهم نیز، این نتیجه را اعلام کنیم.

آ) برای چه گراف‌هایی قادر به انجام این افراز نخواهیم بود؟

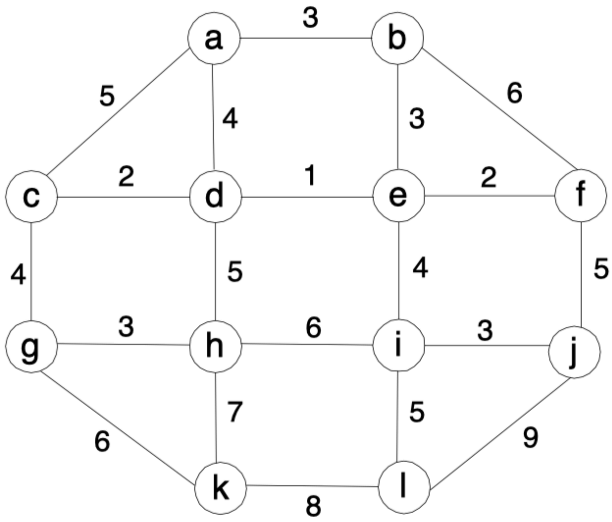
ب) الگوریتمی ارائه دهید که این مساله را در $O(n+m)$ حل کند.

مسئله‌ی ۶*. رأس خوب (الگوریتم‌های پیمایش گراف)

گراف بدون جهت G با هزینه یال‌های مثبت داده شده است. الگوریتمی با مرتبه‌ی زمانی $O(|V|+|E|)$ طراحی کنید که بتواند تعیین کند که آیا در گراف جهت‌دار داده شده رأسی وجود دارد که بتوان از آن به همه‌ی رئوس دیگر رسید یا خیر.

مسئله‌ی ۷. پوشا رو پیدا کردن (درخت پوشای کمینه)

در گراف داده شدهٔ زیر، درخت پوشای کمینه را با تعریف کمترین حاصلضرب وزن یال‌ها پیدا کند. (فرایند یافتن این درخت توسط الگوریتم را به‌طور کامل شرح دهید)



مسئله‌ی ۸*. یافتن مسیر (الگوریتم‌های پیمایش گراف)

برای هر کدام از مسائل زیر یک الگوریتم با مرتبه‌ی زمانی $O(|V|+|E|)$ طراحی کنید.

آ) گراف بدون جهت G داده شده است. می‌دانیم هزینه‌ی هر یال در G برابر ۱ یا ۲ است. کوتاه‌ترین مسیرها از رأس مبدأ s به همه‌ی رأس‌های دیگر را بدست آورید.

ب) گراف $G=(V,E)$ و عدد W داده شده است. مسیری از رأس مبدأ s به رأس مقصد t بدست آورید که هزینه‌ی هر یال آن حداقل W باشد. سپس به کمک این الگوریتم، مسئله‌ی یافتن مسیری از s به t که در آن کمینه‌ی هزینه‌ی یال‌ها در آن، بیشینه است را در زمان $O((|V|+|E|)\log|E|)$ حل کنید.