

موضوع: مساله کوله پشتی - PTAS

مساله کوله پشتی: n عدد شی داریم. شی i ام دارای حجم v_i و ارزش w_i است. کوله ای با حجم V داریم. هدف انتخاب زیر مجموعه ای از اشیاء با حجم حداکثر V و بیشترین ارزش ممکن است.

هدف: به ازای هر $\epsilon > 0$ ، الگوریتم تقریبی با ضریب تقریب $1 + \epsilon$ بدهیم.

راه حل دینامیک:

کمترین حجم مورد نیاز برای این که بتوانیم با استفاده از $\text{opt}[i][w]$ به شی اول ارزش حداقل w را به دست آوریم.

بعد از پر کردن جدول opt ، کافی است بزرگترین w را پیدا کنیم که به ازای آن $\text{opt}[n][w] \geq V$

$$\text{opt}[i][w] = \begin{cases} 0 & w = 0 \\ \infty & w \neq 0 \text{ و } i = 0 \\ \min \{ \text{opt}[i-1][w], v_i + \text{opt}[i-1][w - v_i] \} & \text{در این حالت} \end{cases}$$

زمان اجرا: $O(nW)$ ← $\sum w_i \leq n \times w_{\max}$ ← $O(n \times n \times w_{\max})$

پس $V = O(n^2 w_{\max})$

* دقت کنید که اگر مثلاً $w_{\max} = O(n)$ باشد، آنگاه الگوریتم زمان $O(n^3)$ خواهد بود.

مسئله: w_{max} ممکن است خیلی زیاد باشد.

ارزش اشیا	حجم	تقسیم بر ۱۰	ارزش	حجم
۹۰۰۰۰	۱		۹	۱
۹۰۰۰۰۰	۲		۹۰	۲
۱۷۰۰۰۰	۵		۱۷	۵
۱۰۰۰۰۰۰	۴		۱۰۰	۴
۳۰۰۰۰۰۰	۷		۳۰۰	۷

$90 + 17 = 107$
 $107 \times 1000 = 107000$

ارزش	حجم	ارزش	حجم
۹۲۴۲۲۱	۱	۹	۱
۵۹۵۶۳۴۲	۲	۹۰	۲
۱۷۸۱۰۰۱۳	۵	۱۸۰	۵
۲۱۲۱۷۸۰۰	۴	۲۲۰	۴
۲۷۳۴۳۱۹۹	۷	۲۱۰	۷

24×10^4
 240000

الگوریتم:

- ۱- یک مقدار θ انتخاب کنید.
- ۲- به ازای هر i قرار دهد $\hat{w}_i = \left\lceil \frac{w_i}{\theta} \right\rceil$ که در آن $\theta = \frac{w_{max}}{V_n}$
- ۳- مساله را برای ارزش ها \hat{w}_i و حجم V_i حل می کنیم

۴- جواب به دست آمده را به عنوان جواب مساله اصلی برلردا

$$\hat{w}_{max} = \left\lceil \frac{w_{max}}{\theta} \right\rceil \quad O(n^2 \hat{w}_{max}) : \text{نیز اجرا:}$$

$$\frac{w_{max} \times \epsilon}{\gamma_n} = \hat{w}_{max} = \left\lceil \frac{\gamma_n}{\epsilon} \right\rceil = O\left(\frac{n}{\epsilon}\right)$$

بر حسب n و ϵ چند \leftarrow : $O(n^2 \times \frac{n}{\epsilon}) = O(\frac{n^3}{\epsilon})$ ←
 جمله ای

b) جواب نه دست آمده چند خوب است؟

جواب بهینه مساله اصلی



$$\sum_{i \in S^*} \hat{w}_i$$

جواب بهینه مساله مقادیر شده



فرض

$$q = \left\lceil \frac{25}{3} \right\rceil$$

$$3 \times q \geq 25$$

$$\sum_{i \in S^*} \hat{w}_i \leq \sum_{i \in S^*} \theta \hat{w}_i$$

$$\leq \theta \sum_{i \in S^*} \hat{w}_i$$

$$\leq \theta \sum_{i \in S} \hat{w}_i$$

$$\leq \sum_{i \in S} \theta \hat{w}_i$$

$$\leq \sum_{i \in S} \theta \left\lceil \frac{w_i}{\theta} \right\rceil \rightarrow \lceil 3, 25 \rceil \leq \underbrace{3, 25 + 1}_{\epsilon, 25}$$

$$\leq \sum_{i \in S} \theta \left(\frac{w_i}{\theta} + 1 \right)$$

$$\leq \sum_{i \in S} w_i + \theta$$

$$\leq \sum_{i \in S} w_i + n\theta$$

$$\leq \sum_{i \in S} w_i + n \times \frac{w_{\max}}{2n} \times \epsilon$$

$$\leq \underbrace{\sum_{i \in S} w_i} + \boxed{\frac{\epsilon w_{\max}}{2}} \quad *$$

\downarrow
 $\leq \underbrace{\epsilon \times \sum_{i \in S} w_i}$

$$\leq \underbrace{\sum_{i \in S} w_i (1 + \epsilon)}$$

□

* جواب بهینه > جواب مساله scale شده $(1 + \epsilon)$

FPTAS $\underbrace{O(\frac{n^3}{\epsilon})}$ \downarrow $\underbrace{(1 + \epsilon)}$ * الگوریتم با تقریب

\nwarrow \nearrow \nwarrow \nearrow

FPTAS : الگوریتم با تقریب $1 + \epsilon$ و زمان اجرای $O(\text{poly}(n) \text{poly}(\frac{1}{\epsilon}))$

PTAS : الگوریتم با تقریب $1 + \epsilon$ و زمان اجرای $O(\text{poly}(n) \times \exp(\frac{1}{\epsilon}))$

\downarrow
 $\hookrightarrow O(n \times 2^{\frac{1}{\epsilon}})$