یادآوری جلسه بیستم | *برنامه‌نویسی خطی* | گردآورنده: محمدعلی خدابنده‌لو ـ زهرا فاضل

در جلسه قبل با برنامه‌نویسی خطی آشنا شدیم و با یک مثال آن را بررسی کردیم.

دیدیم که فرم کلی یک مسئله برنامه‌نویسی خطی به یکی از دو صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{m} a_{i,1} y_i \le c_1, \\
& \sum_{i=1}^{m} a_{i,2} y_i \le c_2, \\
& \vdots \\
& \sum_{i=1}^{m} a_{i,n} y_i \le c_n, \\
& \forall 1 \le i \le m : y_i \ge 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} a_{1,i} x_i \ge b_1, \\
& \sum_{i=1}^{n} a_{2,i} x_i \ge b_2, \\
& \vdots \\
& \sum_{i=1}^{n} a_{m,i} x_i \ge b_m, \\
& \forall 1 \le i \le n : x_i \ge 0
\end{aligned}$$

که خط اول عبارتی‌است که می‌خواهیم آن را بهینه کنیم و خطوط بعدی، قیود ما روی متغیرهاست.

به عنوان مثال، مسئله زیر را بررسی کردیم:

هر انسان برای زنده ماندن به ۰/۵ میلی‌گرم ویتامین A، ۱۵ میلی‌گرم ویتامین C، و ۴گرم فیبر نیاز دارد. مقدار این سه ماده در هویج، کلم و خیار به صورت روبه‌رو است. می‌خواهیم کمترین هزینه برای تأمین مواد ضروری بدن را بیابیم.

	هویج	کلم	خیار
ویتامین A mg/kg	۳۵	۰/۵	۰/۵
ویتامین C mg/kg	۶۰	۳۰۰	۱۰
فیبر g/kg	۳۰	۲۰	۱۰
قیمت (ریال بر کیلوگرم)	۰.۷۵	۰.۵	۰.۱۵

فرض کنیم x_1 میزان خرید هویج، x_2 میزان خرید کلم و x_3 میزان خرید خیار باشد. اگر $X = 0.75x_1 + 0.5x_2 + 0.15x_3$، در واقع مسئله‌ای که می‌خواهیم حل کنیم، به شکل روبه‌رو است.

$$\begin{aligned}
\min \quad & X \\
\text{s.t.} \quad & 35x_1 + 0.5x_2 + 0.5x_3 \ge 0.5, \\
& 60x_1 + 300x_2 + 10x_3 \ge 15, \\
& 30x_1 + 20x_2 + 10x_3 \ge 4, \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

می‌خواهیم برای X حد پایین پیدا کنیم. با استفاده از قید سوم داریم:

$$30x_1+20x_2+10x_3 \ge 4 \implies \begin{cases} 0.75x_1 + 0.5x_2 + 0.25x_3 \ge 0.1 \\ 0.3x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 \ge 0.04 \end{cases} \implies 0.45x_1+0.3x_2+0.15x_1 \ge 0.06 \implies X \ge 0.06$$

اگر از قیود دوم و سوم استفاده کنیم، به حد پایین متفاوتی می‌رسیم:

$$\begin{cases} 60x_1 + 300x_2 + 10x_3 \ge 15 \\ 0.75x_1 + 0.5x_2 + 0.25x_3 \ge 0.1 \end{cases} \implies \begin{cases} 0.06x_1 + 0.3x_2 + 0.01x_3 \ge 0.015 \\ 0.3x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 \ge 0.0.4 \end{cases} \implies$$

$$0.36x_1 + 0.5x_2 + 0.11x_3 \ge 0.055 \implies X \ge 0.055$$

حال می‌خواهیم بهترین حد پایین را برای X بیابیم. ضرایب y_1، y_2 و y_3 را در نظر می‌گیریم و به ترتیب در قیود اول، دوم و سوم ضرب می‌کنیم.

$$y_1(35x_1 + 0.5x_2 + 0.5x_3 \geq 0.5)$$

$$y_2(60x_1 + 300x_2 + 10x_3 \geq 15)$$

$$y_3(30x_1 + 20x_2 + 10x_3 \geq 4)$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

بنابراین هدف ما پیدا کردن y_1، y_2 و y_3 است به گونه‌ای که سمت راست نامساوی را بیشینه کنند. از طرفی وقتی ضرایب x_1، x_2و x_3 را با یکدیگر جمع می‌کنیم نباید مقدار آن‌ها از ضریب‌های متناظر در عبارت $X = 0.75x_1 + 0.5x_2 + 0.15x_3$ بیشتر بشود. بنابراین محدودیت‌های زیر را باید در نظر بگیریم:

$$35y_1 + 60y_2 + 30y_3 \leq 0.75$$

$$0.5y_1 + 300y_2 + 20y_3 \leq 0.5$$

$$0.5y_1 + 10y_2 + 10y_3 \leq 0.15$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

و در این حالت هدف ما پیدا کردن بیشینه عبارت $Y = 0.5y_1 + 15y_2 + 4y_3$ است. خود این مسئه هم دوباره یک مسئله برنامه‌نویسی خطی است و به آن دوگان مسئه اصلی گفته می‌شود.

$$\begin{aligned} \max \quad & 0.5y_1 + 15y_2 + 4y_3 \\ \text{s.t.} \quad & 35y_1 + 60y_2 + 30y_3 \leq 0.75, \\ & 0.5y_1 + 300y_2 + 20y_3 \leq 15, \\ & 0.5y_1 + 10y_2 + 10y_3 \leq 4, \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

قضیه ۱ (strong duality)**.** *جواب مسئله اصلی و مسئله دوگان با هم برابر است.*

پرسش فرم دوگان مسئله زیر را به دست آورید.

$$\begin{aligned} \min \quad & 5x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 5, \\ & x_1 - x_2 + 3x_3 + 10x_4 \geq 27, \\ & 4x_1 + x_2 + 10x_3 \geq 9, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

پاسخ های خود را می توانید تا قبل از شروع کلاس به این لینک ارسال کنید.