

موضوع: برنامه ریزی خطی / Linear programming

مثال ۱) هواشناس برای سامان دادن نیاز به ۰/۵ کیلوگرم ویتامین A و ۱ کیلوگرم ویتامین C و ۲ کیلوگرم ویتامین E دارد. مقدار این ۳ ماده در هر کیلوگرم کلم و خیار به صورت زیر است:

	کلم	خیار	۰/۵	۰/۵
۱	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۲	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۳	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۴	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۶	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۷	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۸	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۹	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۱۰	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۱۱	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۱۲	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۱۳	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۱۴	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۱۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۱۶	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۱۷	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۱۸	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۱۹	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۲۰	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵

سوال: کمترین هزینه برای تامین مواد ضروری چقدر است؟ فرض کنید

مثلاً یک راه این است که فقط هویج بخوریم! در این صورت باید چقدر کیلوگرم هویج بخوریم؟

$$x \leq \frac{0.75}{1} = 0.75 \dots$$

راه ۲: صدفا از کلم اسفند ده کند. در این صورت باید چقدر کیلوگرم کلم بخوریم؟

$$x \leq 0.5$$

$$\text{راه حل سوم: } 1 \text{ کیلو خیار} + \frac{1}{2} \text{ کیلو کلم} \leftarrow x \leq 0.15 + \frac{1}{2} \times 0.75 = 0.1875 \dots$$

در واقع مسأله ای که می خواهیم حل کنیم به این شکل است:

$$\begin{aligned} \text{Objective: } & X = \min: 0.75x_1 + 0.5x_2 + 0.15x_3 \\ \text{s.t.: } & \begin{cases} 25x_1 + 0.5x_2 + 0.5x_3 \geq 0.5 \\ 40x_1 + 300x_2 + 10x_3 \geq 15 \\ 30x_1 + 20x_2 + 10x_3 \geq 4 \end{cases} \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

مسئله به فرم استاندارد، یک برنامه خطی می گویند. LP ← Linear program

m: تعداد محدودیت ها
n: متغیرها

$$\begin{aligned} \text{Min } & 0.75x_1 + 0.5x_2 + 0.15x_3 \\ \text{s.t.: } & \begin{cases} 25x_1 + 0.5x_2 + 0.5x_3 \geq 0.5 \\ 40x_1 + 300x_2 + 10x_3 \geq 15 \\ 30x_1 + 20x_2 + 10x_3 \geq 4 \end{cases} \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Min } & 0.75x_1 + 0.5x_2 + 0.15x_3 \\ \text{s.t.: } & \begin{cases} g_1 * 25x_1 + 0.5x_2 + 0.5x_3 \geq 0.5 \\ g_2 * 40x_1 + 300x_2 + 10x_3 \geq 15 \\ g_3 * 30x_1 + 20x_2 + 10x_3 \geq 4 \end{cases} \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 0.04 & 0.3 & 0.01 & 0.15 \\ 0.13 & 0.2 & 0.1 & 0.05 \end{cases} \\ & \rightarrow 0.13x_1 + 0.15x_2 + 0.11x_3 \geq 0.055 \end{aligned}$$

سوال: اگر بخواهیم بهترین حد پایین را به دست آوریم؟

$$\text{Max: } 0.5g_1 + 15g_2 + 4g_3$$

سوال: اگر بخواهیم بهترین حد پایین را به دست آوریم؟

Dual

$$\begin{cases} \text{Max: } 0.5g_1 + 1.5g_2 + 4g_3 \\ \rightarrow 3.5g_1 + 4g_2 + 3g_3 \leq 0.75 \\ \rightarrow 0.5g_1 + 2.0g_2 + 2.0g_3 \leq 0.5 \\ \rightarrow 0.5g_1 + 1.0g_2 + 1.0g_3 \leq 0.15 \\ g_1, g_2, g_3 \geq 0 \end{cases}$$

جواب نهایی: هیچ جوابی ندارد
کمتر از ۳۸ گرم

مثال ۲) تولید نوشیدنی:

	کامل	آریش	وانیل	سود
اسپرسو	۵	۴	۳۵	۱۳
هات چاکلت	۱۵	۴	۲۰	۲۳
موجودی	۴۸۰	۱۹۰	۱۱۹۰	

توضیح: هدف: بیشترین سود کافه.

x_1 : میزان اسپرسو
 x_2 : هات چاکلت

LP

$$\begin{aligned} X = \max & \quad 13x_1 + 23x_2 \\ \text{s.t.} & \quad \begin{cases} 5x_1 + 15x_2 \leq 480 & g_1 \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 190 & g_2 \\ 35x_1 + 20x_2 \leq 1190 & g_3 \end{cases} \end{aligned}$$

روش ۱) فقط از هات چاکلت تولید کند: $x \geq 734$
روش ۲) فقط اسپرسو: $x \geq 842$
۱۲ واحد اسپرسو + ۲۱ واحد هات چاکلت: $x \geq 100$

$x \geq 100$

$x < 1440$ محدودیت ۳: $15x_1 + 45x_2 \leq 1440$

obj: $\min 41.0g_1 + 4.0g_2 + 11.9g_3$

Dual: $0.5g_1 + 4g_2 + 3.5g_3 \geq 13$
 $1.5g_1 + 4g_2 + 2.0g_3 \geq 23$
 $g_1, g_2, g_3 \geq 0$

$13x_1 + 23x_2 \leq 100$
 $x = 100$

جواب Dual: $\frac{100}{1}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{100}{\text{}} : \text{Dual جواب} \\ \frac{100}{\text{}} : \text{جواب برنامہ اصلی} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \text{Strong Duality: (Primal) LP جواب} = \text{Dual جواب} \right\}$$
