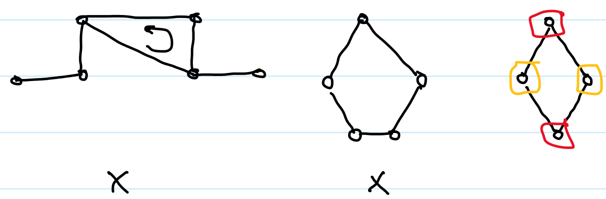
جلسه پانزدهم

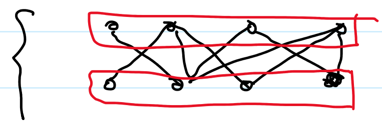
13:16 Tuesday, April 20, 2021

موضوع: تطابق در گراف های دوبخشی. الگوریتم Karp_Hopcroft:

تعریف، گراف دوبخشی: گرافی که بتوان راس های آن را به دو زیرمجموعه X و Y افراز کرد، به طوری تمام یال‌ها تنها بین راس های X و Y باشد. بین دو راس در X یا دو راس در Y یالی نباشد.

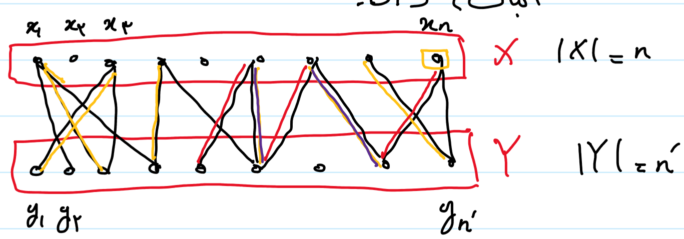
مثال:



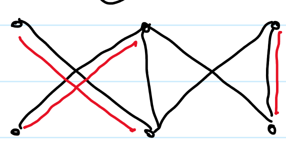


قضیه: یک گراف ۲ بخشی است، اگر و تنها اگر هیچ دور فردی نداشته باشد.

اثبات، BFS.

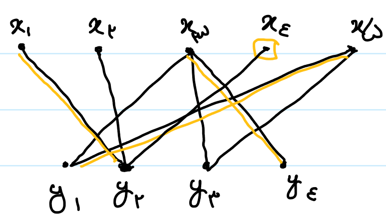


تطابق Matching: زیرمجموعه‌ای از یال ها که هیچ کدام سرمشترک ندارند.



مسئله: گراف دوبخشی G داده شده است. تطابق بیشینه این گراف را پیدا کنید.

بیشترین تعداد یال.

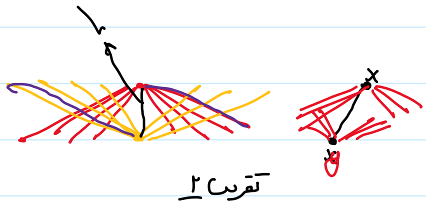


$M = \{ (x_1, y_2)$
(x_3, y_4)
$(x_5, y_1) \}$

الگوریتم پیدا کردن تطابق بیشینه؟

الگوریتم پیدا کردن تطابق بیشینه؟

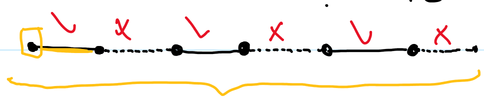
حریصانه ، *



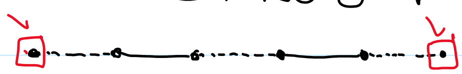
تعریف های ابتدایی : تطابق M از گراف G را در نظر بگیرید.

* راس آزاد (free) : یک راس آزاد است، اگر با هیچ یالی از M مجاور نباشد.

* alternating path : یک مسیر در G، یک مسیر alternating است، اگر یال های مسیر یکی در میان متعلق به M باشد.

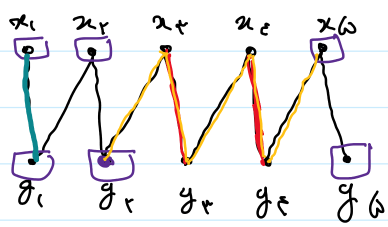


* augmenting path : یک مسیر augmenting، در واقع یک مسیر alternating است که راس ابتدا و انتهای آن free است.



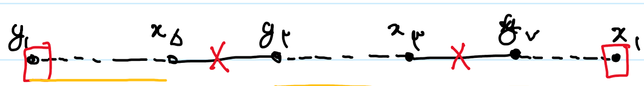
مثال :

$M=\{(x_3,y_3),(x_4,y_4)\}$



* طول یک مسیر augmenting (افزوده) حتماً فرد است.

← * اگر یک مسیر augmenting داشته باشیم، می توانیم اندازه تطابق را بزرگ کنیم.



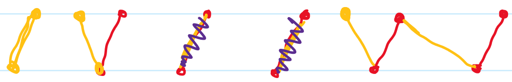
قضیه : در گراف دوبخشی G، تطابق M یک تطابق بیشینه است، اگر

۷) قضیه: در گراف دوبخشی G، تطابق M یک تطابق بیشینه است، اگر و تنها اگر هیچ مسیر افزوده ای نداشته باشیم.

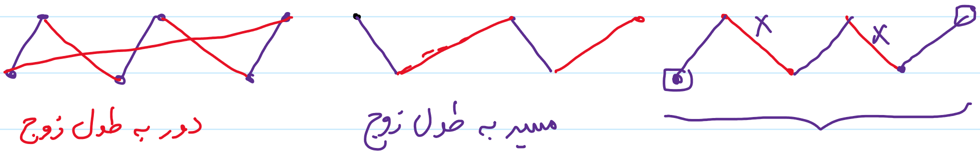
⇐ بدیهی. اگر مسیر افزایشی داشته باشیم می توانیم تطابق را بزرگ کنیم

⇒ : برهان خلف، $\boxed{M}$ تطابق ماست اما M' تطابق بیشینه است

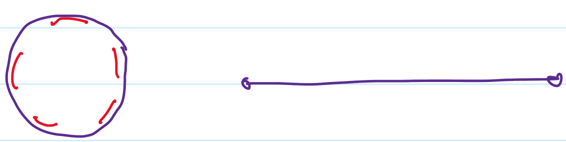
$|M'| > |M|$



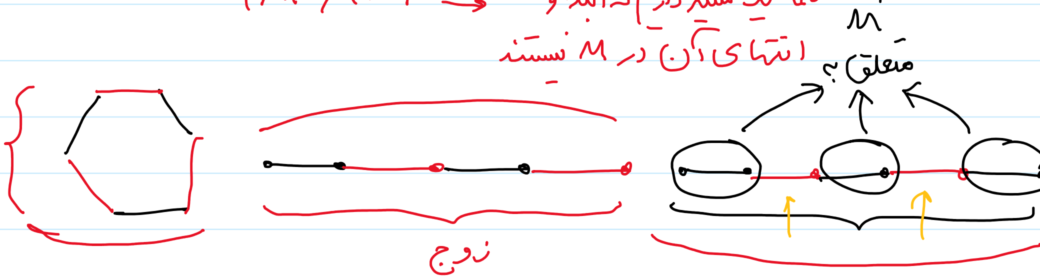
$M \oplus M' =$ تفاضل متقارن



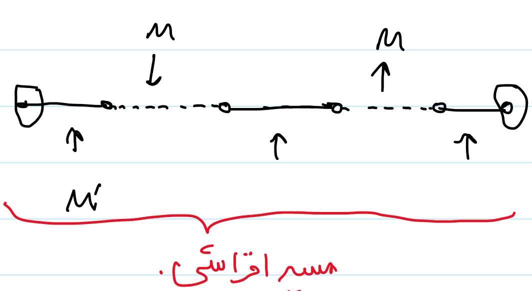
$M \oplus M'$



$|M'| > |M|$ → حتما یک مسیر داریم که ابتدا و انتهای آن در M نیستند



$M \oplus M \rightarrow$



الگوریتم پیدا کردن تطابق در گراف دوبخشی:

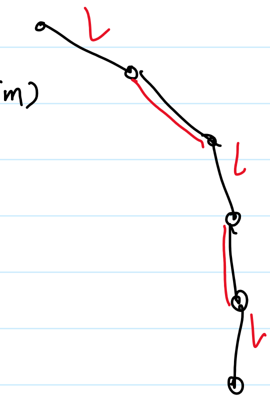
$M = \phi$

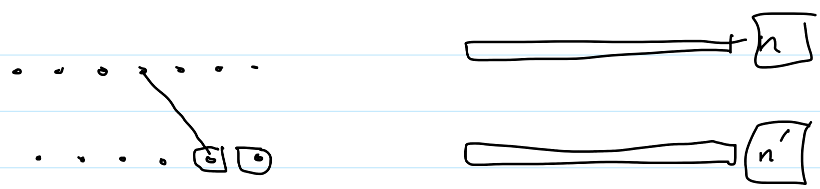
repeat

$\sqrt{\min(n,n')}$: $*$, BFS — $\min(n,n')$ { $*$ P: an augmenting path $\rightarrow O(m)$

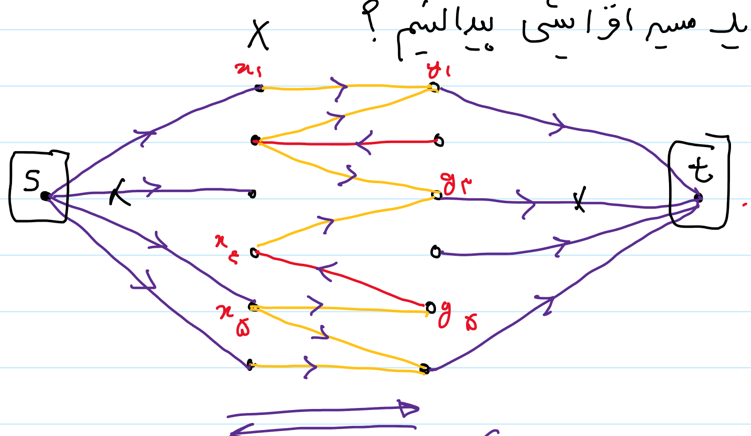
$\rightarrow$ $M: M \oplus P$

until no augmenting path is found





چگونه یک مسیر افزایشی پیدا کنیم؟

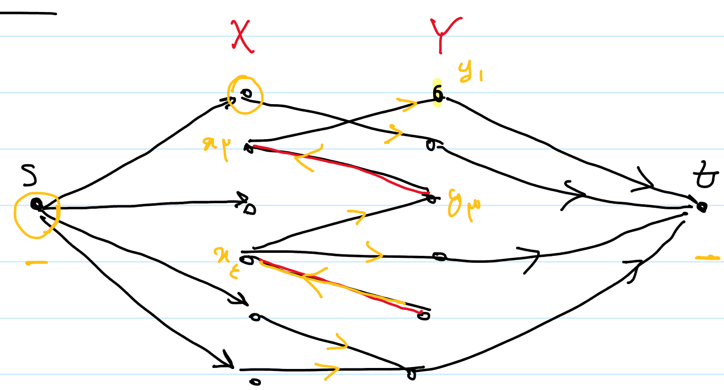


هر مسیر از s به t حتماً یک مسیر افزایشی است.

از s یک DFS می‌زنیم! $\leftarrow$ $O(m)$ کل زمان $O(\min(n,n') \times m)$

BFS $\leftarrow$ " "

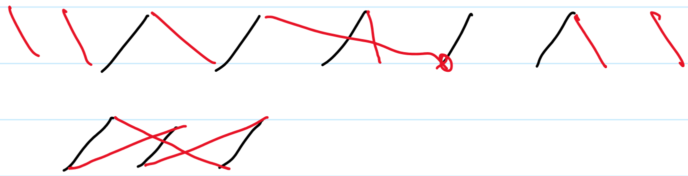
$O(m\sqrt{\min(n,n')})$ $\leftarrow$ $O(m)$ $\leftarrow$



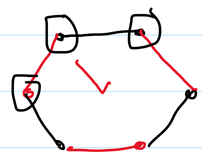
$M \leftarrow$ بیشینه نیست M' $\leftarrow$

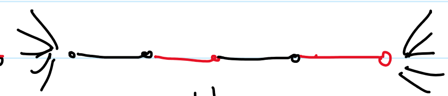
M' بهینه نیست ← $\underline{M}$ ←

$\boxed{M \oplus M'}$ → شامل تعدادی دور و مسیر



دور با طول زوج

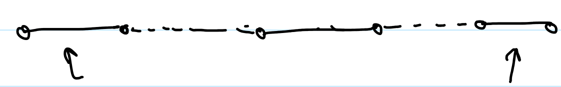




$|M'| > |M|$

مسیر با طول زوج

مسیر افزایشی ←



M'