



تمرین هشتم

مسئله‌ی ۱*. الگوریتم ادموندز-کارپ

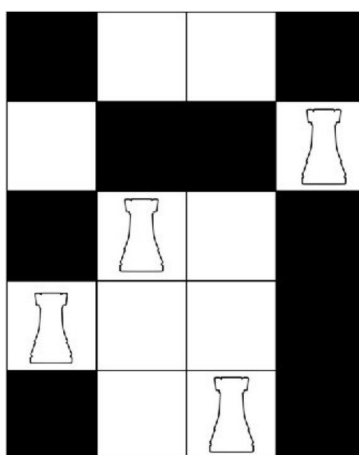
همانطور که در کلاس اشاره شد، الگوریتم ادموندز-کارپ در واقع همان الگوریتم فورد فولکرسون است، با این تفاوت که برای پیدا کردن مسیر از s به t در گراف باقی‌مانده^۱ به جای DFS از BFS استفاده می‌کند. نشان دهید حداکثر تعداد مراحل تکرار این الگوریتم برابر با $O(mn)$ خواهد بود.

مسئله‌ی ۲*. بازار تطابق

در یک گراف دوبخشی وزن‌دار، تطابق بیشینه در واقع یک تطابق است که جمع وزن یال‌های آن بیشینه می‌شود. حال، در مساله بازار تطابق که در کلاس راجع به آن بحث شد، نشان دهید که در یک تعادل رقابتی، تطابق مربوط به خانه تخصیص داده شده به هر فرد تشکیل یک تطابق وزن‌دار بیشینه می‌دهد.

مسئله‌ی ۳*. رخ‌ها

یک جدول شطرنجی $m \times n$ که تعدادی از خانه‌های آن مسدود است. می‌خواهیم در این صفحه تعدادی مهره رخ قرار دهیم به طوری که هیچ دو مهره‌ی رخی یکدیگر را تهدید نکنند. دو مهره‌ی رخ همدیگر را تهدید می‌کنند اگر در یک سطر مشترک یا در یک ستون مشترک باشند. همچنین در خانه‌های مسدود نمی‌توان مهره قرار داد. بیشینه تعداد مهره رخی را که می‌توان در صفحه قرار داد به طوری که هیچ دو مهره رخی همدیگر را تهدید نکنند، بیابید.



¹Residual

مسئله‌ی ۴*. تغییرات خوب

یک گراف جهت دار $G = (V, E)$ داده شده است. $v \in V$ را مرکز گوییم به طوری که برای هر $u \in V$ داشته باشیم $uv, vu \in E$. (از مرکز به خودش نیز باید یالی وجود داشته باشد). گراف را خوب می‌گوییم هرگاه برای هر $v \in V$ که v مرکز نیست، درجه ورودی و خروجی برابر ۲ باشند. تغییر در گراف شامل حذف یک یال یا اضافه کردن آن است. کمینه تعداد تغییر لازم در یک گراف را بیابید به طوری که گراف بعد از تغییرات خوب باشد.

مسئله‌ی ۵. آتش‌سوزی

در یک ساختمان عمومی مثل یک سینما، داشتن یک نقشه خروج برای موارد اضطراری نظیر آتش‌سوزی مهم است. در این سوال می‌خواهیم با استفاده از شار بیشینه یک نقشه خروج اضطراری طراحی کنیم. فرض کنید که نقشه سینما یک گراف $G = (V, E)$ است که در آن هر اتاق یا طبقه با یک رأس و هر راهرو یا پله با یک یال مشخص شده‌است. هر راهرو یا پله دارای ظرفیتی c است که نشان می‌دهد حداکثر c نفر همزمان می‌توانند از این راهرو استفاده کنند. پیمایش یک راهرو از یک سر تا سر دیگر یک واحد زمانی طول می‌کشد. (پیمایش یک اتاق صفر واحد زمانی طول می‌کشد). فرض کنید در ابتدا همه مردم در اتاق S هستند و تنها یک خروجی T به خیابان وجود دارد. نشان دهید که چگونه با استفاده از مسئله شار بیشینه، سریعترین راه برای خارج کردن همه افراد از ساختمان را پیدا کنیم.

مسئله‌ی ۶*. زوج و فرد

فرض کنید G شبکه‌ای باشد با مبدا s و مقصد t که ظرفیت‌های آن صحیح هستند. عبارات زیر را اثبات کنید یا مثال نقض بیاورید:

- اگر همه ظرفیت‌ها زوج باشند، یک جریان بیشینه f وجود دارد که $f(e)$ برای همه یال‌ها زوج باشد.
- اگر همه ظرفیت‌ها فرد باشند، یک جریان بیشینه f وجود دارد که $f(e)$ برای همه یال‌ها فرد باشد.

مسئله‌ی ۷*. یال اشباع شده

فرض کنید G شبکه‌ای با رأس مبدا s و رأس مقصد t باشد که ظرفیت‌های آن صحیح هستند. اثبات کنید که در هر $s - t$ جریان بیشینه، یال e اشباع شده‌است اگر و تنها اگر با کاهش ظرفیت یال e به اندازه یک واحد، مقدار جریان بیشینه $s - t$ در این گراف کاهش یابد.

مسئله‌ی ۸. ظرفیت

فرض کنید $G = (V, E)$ شبکه شار با دو رأس s و t باشد که ظرفیت یال‌ها در آن اعدادی صحیح‌اند. همچنین فرض کنید که شار بیشینه‌ی G داده شده‌است.

الف) فرض کنید که ظرفیت یال مشخص $(u, v) \in E$ یک واحد افزایش داده‌شود. الگوریتمی خطی ارائه دهید که شار بیشینه را در گراف جدید پیدا کند.

ب) قسمت قبل را با این فرض که ظرفیت یال یک واحد کاهش یافته باشد، حل کنید.

