یادآوری جلسه بیست‌وچهارم — **پیچیدگی محاسباتی** — گردآورنده: علی ونکی ــ زهرا فاضل

در جلسه قبل در ادامه بحث پیچیدگی محاسباتی، ابتدا سه فرم کلی مسائل یعنی تصمیم‌گیری، جست‌وجو و بهینه‌سازی و سپس مسئله دور همیلتونی در گراف ساده و جهت‌دار را بررسی کردیم.

مسائل را به سه فرم تصمیم‌گیری، جست‌وجو و بهینه‌سازی می‌توان در نظر گرفت. برای مثال برای مسئله پوشش رأسی داریم:

- فرم تصمیم‌گیری: آیا یک پوشش رأسی با اندازه حداکثر k وجود دارد؟
- فرم جست‌وجو: یک پوشش رأسی با اندازه حداکثر k بیابید.
- فرم بهینه‌سازی: کوچک‌ترین پوشش رأسی را بیابید.

قضیه ۱. مسئله به فرم تصمیم‌گیری به مسئله فرم جست‌وجو کاهش پیدا می‌کند.

اثبات. اگر خواسته مسئله جست‌وجو پیدا شود، پاسخ مسئله تصمیم‌گیری «بله» است. در غیر این صورت «خیر» است. □

قضیه ۲. مسئله به فرم جست‌وجو به مسئله به فرم بهینه‌سازی کاهش پیدا می‌کند.

اثبات. اگر اندازه پاسخ مسئله بهینه‌سازی کوچک‌تر یا مساوی با اندازه مسئله جست‌وجو باشد، همان پاسخ مسئله جست‌جو نیز هست. در غیر این صورت مسئله جست‌جو جواب ندارد. □

قضیه ۳. مسئله به فرم جست‌وجو به مسئله به فرم بهینه‌سازی کاهش پیدا می‌کند.

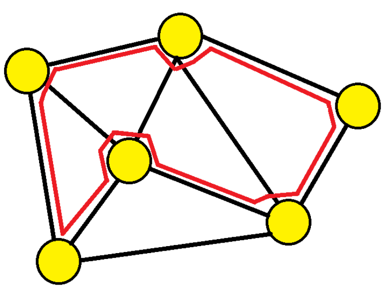
اثبات. با جست‌وجوی دودویی بر روی اندازه داده‌شده در مسئله تصمیم‌گیری، اندازه پاسخ بهینه را پیدا می‌کنیم. سپس باید پاسخ بهینه را بیابیم. برای مثال مسائل فرم تصمیم‌گیری و بهینه‌سازی پوشش رأسی را در نظر بگیرید. برای یافتن جواب بهینه یک رأس را کنار می‌گذاریم. اگر برای گراف باقی‌مانده پاسخی با اندازه $k-1$ وجود داشته‌باشد، آن رأس کنار گذاشته‌شده در جواب بهینه هست. در غیر این صورت این رأس در جواب بهینه نبوده و می‌توانیم آن را کنار بگذاریم. با همین روند می‌توان مشخص کرد کدام رئوس در جواب بهینه‌اند و جواب به دست می‌آید. □

$$Decision \underset{p}{\leq} Search \quad Search \underset{p}{\leq} Opt \quad Opt \underset{p}{\leq} Decision$$

مسئله دور همیلتونی

در یک گراف بدون جهت ، به دوری که از تمام رأس‌های آن گراف عبور کند ،دور همیلتونی گفته می‌شود .حال فرض کنید گراف G به ما داده‌شده‌است. در مسئله دور همیلتونی هدف ما این است که متوجه شویم آیا یک دور همیلتونی در این گراف وجود دارد یا خیر؟

در مسئله دور همیلتونی جهت‌دار ، گراف مورد نظر ما گرافی جهت‌دار است و هدف ما آن است که متوجه شویم آیا در این گراف دور همیلتونی وجود دارد یا خیر.



شکل ۱: دور همیلتونی در گراف

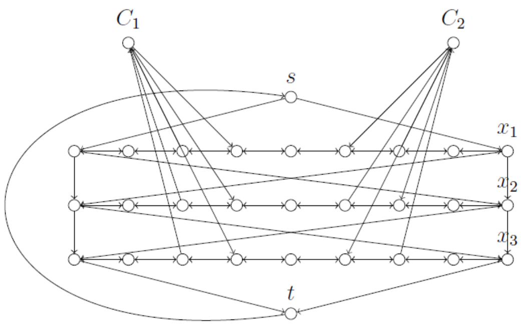
قضیه ۴. مسئله دور همیلتونی در گراف جهت‌دار به مسئله دور همیلتونی در گراف ساده کاهش پیدا می‌کند.

اثبات. برای اثبات قضیه فوق در گراف جهت‌دار به ازای هر رأس V، ۳ رأس V_{in}، V و V_{out} در نظر می‌گیریم. سپس یک یال بدون جهت بین V و V_{in} و یک یال بدون جهت بین V و V_{out} قرار می‌دهیم. هم‌چنین به ازای هر یال ورودی به V در گراف جهت‌دار ، یالی بدون جهت را از V_out رئوس مبدأ به V_{in} می‌کنیم. هم‌چنین به شکل مشابه به ازای هر یال خروجی از V در گراف جهت‌دار ، یالی را از V_{out} به V_in رئوس مبدأ وصل می‌کنیم. اگر این گراف ساده ساخته‌شده دور همیلتونی داشته‌باشد، همان دور یا عکس آن دور همیلتونی در گراف اصلی است. □

قضیه ۵. مسئله ۳-SAT به مسئله دور همیلتونی در گراف جهت‌دار کاهش پیدا می‌کند.

اثبات. برای اثبات کافی است نشان دهیم که می‌توان مسئله ۳-SAT را با یک گراف جهت‌دار مدل‌سازی کرد به گونه‌ای که پیدا کردن دور همیلتونی در گراف مورد نظر معادل پیدا کردن جواب مسئله ۳-SAT باشد .

گراف جهت‌دار مورد نظر را به شکل زیر تعریف می‌کنیم .



۱. به ازای هر متغیری که در عبارت مسئله وجود دارد یک لایه در گراف قرار می‌دهیم. برای مثال در شکل مقابل لایه نخست متعلق به متغیر x_1 است.

۲. در هر لایه گراف تعدادی رأس قرار می‌دهیم و بین هر دو رأسی که در یک لایه قرار دارند دو یال با رفت و برگشت مطابق شکل مقابل قرار می‌دهیم.

۳. رأس‌های ابتدا و انتهایی لایه بالاتر را به رأس‌های ابتدایی و انتهایی لایه پایین‌تر متصل می‌کنیم.

۴. دو رأس s و t را در بالاترین و پایین‌ترین لایه گراف قرار می‌دهیم . از t به s یالی جهت‌دار رسم می‌کنیم. هم‌چنین از s مطابق شکل یال‌های جهت‌داری را به لایه پایین‌تر رسم می‌کنیم و هم‌چنین یال‌هایی را از پایین‌ترین لایه به t مطابق شکل متصل می‌کنیم.

حال توجه کنید که اگر در گراف جهت‌دار مورد نظر دوری همیلتونی پیدا شود این دور در بین لایه‌های مختلف همواره باید یا به سمت چپ باشد یا به سمت راست. حال یکی از این جهت‌ها را حالت true متغیر مخصوص آن لایه در نظر می‌گیریم و جهت دیگر را حالت false متغیر مخصوص آن لایه فرض می‌کنیم.

۵. در نهایت به ازای هر جمله که در مسئله ۳-SAT ما وجود دارد، یک رأس در گراف قرار می‌دهیم و مطابق متغیرهای استفاده‌شده در آن جمله، از رأس‌های مربوطه به آن یال وصل می‌کنیم.

در انتها ثابت کردیم با پیدا کردن مسیر همیلتونی در گراف جهت‌دار مورد نظر جواب مسئله ۳-SAT را می‌یابیم.

□

پرسش مقدار متغیرهای x_1، x_1، x_1، x_1 و x_1 را به گونه‌ای تعیین کنید که مقدار Φ برابر با true شود.

$$\Phi = (x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_5}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_5) \wedge (\overline{x_2} \vee x_4 \vee \overline{x_5})$$

پاسخ های خود را می توانید تا قبل از شروع کلاس به این لینک ارسال کنید.