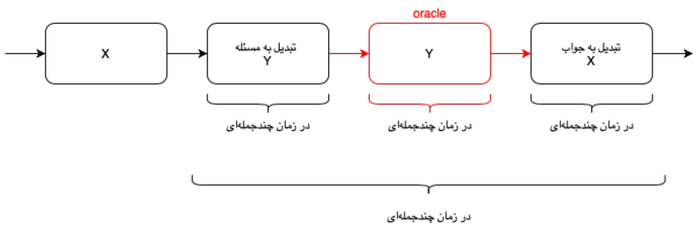
در جلسه قبل با موضوع پیچیدگی محاسباتی آشنا شدیم. ابتدا زمان چندجمله‌ای را تعریف کردیم و سپس مثال‌هایی از مسائلی که الگوریتم با زمان چندجمله‌ای ندارند، ارائه دادیم.

تعریف ۱ (زمان چندجمله‌ای). *اگر اندازه ورودی n باشد، زمان‌های $n^۲$، $n^۳$، $n \log n$، n^k (به ازای k ثابت) یا $n^۳ \log^۵ n$ چندجمله‌ای محسوب می‌شوند.*

تکنیک کاهش

در این تکنیک هدف این است که سختی مسئله‌ها را نسبت به هم بسنجیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

مسئله X در زمان چندجمله‌ای به مسئله Y کاهش پیدا می‌کند، اگر بتوان مسئله X را در زمان چندجمله‌ای توسط یک oracle که مسئله Yرا در زمان چندجمله‌ای حل می‌کند حل کرد. منظور از oracle نیز الگوریتمی است که در زمان چند جمله‌ای مسئله Y را حل می‌کند. در واقع به این صورت است که می‌توان مسئله X را به مسئله Y تبدیل کرد و با استفاده از oracle مسئله Y مورد نظر را حل کرد و با استفاده از خروجی oracle جواب‌های X را به دست آورد که این فرآیند در شکل زیر هم نشان داده شده است.



همانطور که مشاهده می‌شود اگر تبدیل مسئله، حل oracle و تبدیل به جواب X در زمان چندجمله‌ای باشد، کل این پروسه که همان حل مسئله X می‌باشد در زمان چندجمله‌ای اتفاق می‌افتد. این مسئله را به صورت $X \leq_P Y$ می‌توان نشان داد.

اگر $X \leq_P Y$، آنگاه:

- اگر Y در زمان چندجمله‌ای حل شود، آنگاه X هم در زمان چندجمله‌ای حل می‌شود.
- اگر X در زمان چندجمله‌ای حل نشود، آنگاه Y نیز حل نخواهد شد.

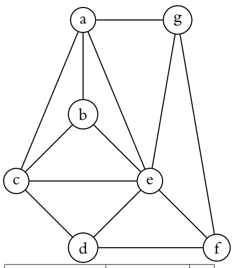
اگر داشته باشیم $X \leq_P Y$ و $Y \leq_P X$ می‌توان نتیجه گرفت که $X \equiv_P Y$.

مسئله پوشش رأسی و مجموعه مستقل

تعریف ۲ (مجموعه مستقل). *گراف G و یک عدد k داده شده، آیا یک زیر مجموعه با اندازه k یا کم‌تر از راس‌ها وجود دارد که هیچ یالی بین آن‌ها نباشد.*

تعریف ۳ (پوشش رأسی). *آیا یک زیرمجموعه از راس‌ها با اندازه k وجود دارد که هر یال حداقل یک سرش در این زیرمجموعه باشد؟*

قضیه ۱. *دو مسئله پوشش رأسی و مجموعه مستقل هم‌ارزند.*



مجموعه مستقل	پوشش رأسی	k
✓	×	۱
✓	×	۲
✓	×	۳
×	✓	۴
×	✓	۵
×	✓	۶

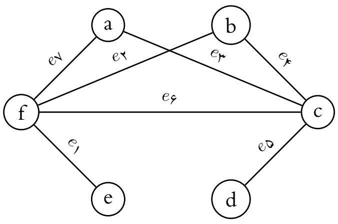
اثبات. اگر یک مجموعه مستقل با اندازه k داشته باشیم، اگر سایر راس‌ها را در نظر بگیریم آنگاه یک مجموعه پوشش رأسی با اندازه $n-k$ داریم بنابراین سوال‌های زیر معادل یکدیگرند:

آیا یک مجموعه مستقل با اندازه k داریم؟ ≡ آیا یک پوشش رأسی با اندازه n-k داریم؟

آیا یک پوشش رأسی با اندازه k داریم؟ ≡ آیا یک مجموعه مستقل با اندازه n-k داریم؟

در نتیجه مسئله مجموعه مستقل با مسئله پوشش رأسی هم ارزند. □

مسئله پوشش مجموعه‌ای



تعریف ۴ (پوشش مجموعه‌ای). *یک مجموعه U شامل m عضو داده شده است، همچنین تعدادی زیرمجموعه $S_1, S_2, ..., S_n$ از U داده شده است آیا می توان k تا یا کم‌تر از این زیرمجموعه‌ها را انتخاب کرد، به طوری که اجتماع آنها برابر U شود.*

$U = \{e_1, e_2, ..., e_7\}$

$S_a = \{e_3, e_7\}$

$S_b = \{e_4, e_2\}$

$S_c = \{e_3, e_4, e_5, e_6\}$

$S_d = \{e_5\}$

$S_e = \{e_1\}$

$S_f = \{e_1, e_2, e_6, e_7\}$

قضیه ۲. *مسئله پوشش رأسی به مسئله پوشش مجموعه‌ای کاهش پیدا می‌کند.*

اثبات. اگر مجموعه‌ای از یال‌ها به اندازه k داشته باشیم، زیرمجموعه های مورد نظر ما هر کدام مجموعه‌ی یال‌های همسایه یک راس می باشد. بنابراین

آیا یک پوشش رأسی با اندازه k وجود دارد؟≡آیا یک پوشش مجموعه‌ای با اندازه k وجود دارد؟ □

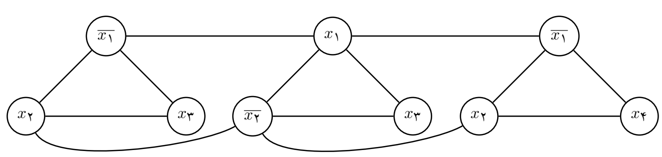
مسئله ۳ــ صدق‌پذیری

تعریف ۵ (مسئله 3-SAT). *n تا متغیر $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ داریم که این متغیرها هر کدام به صورت صفر و یک هستند، یک عبارت نیز به صورت CNF داده شده که برابر با and تعدادی عبارت است که هر عبارت or سه متغیر یا نقیض آن‌هاست. آیا یک مقداردهی به متغیرها وجود دارد که کل عبارت true شود یا نه.*

قضیه ۳. *مسئله $3\text{-}SAT$ به مسئله مجموعه مستقل کاهش پیدا می‌کند.*

اثبات. به ازای هر کدام از متغیرهای هر عبارت یک راس گراف در نظر می‌گیریم و متغیرهای هر عبارت را به هم وصل می‌کنیم. همچنین هر متغیر را به راس متناظر خود که not آن است وصل می‌شود. حال اگر گراف متناظر با عبارت کلی یک مجموعه مستقل با اندازه تعداد عبارت‌ها داشته‌باشد آنگاه می‌توان آن را معادل یک مقداردهی متغیرها دانست که عبارت کلی ما را true خواهد کرد. x_i در مجموعه مستقل باشد، not آن در مجموعه مستقل نخواهد بود و برعکس.

□



$$\Phi = (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_4)$$

$$x_1 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1$$