

موضوع: شار بیشینه یا Maximum Flow

مساله شار بیشینه: گراف وزن دار و جهت دار G داده شده است.
 در رأس s (منبع) و t (مقصد) نیز مشخص شده است.
 وزن هر یال، در واقع ظرفیت یال را نشان می‌دهد.
 هدف: پیدا کردن بیشینه شار از s به t .

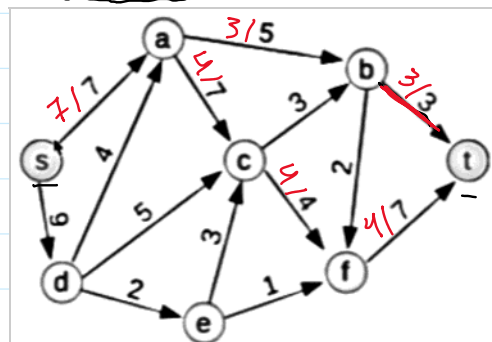
$$s \rightarrow a : 7$$

$$a \rightarrow c : 7$$

نسل ۱

$$s \rightarrow b \rightarrow t \rightarrow 3$$

$$s \rightarrow a \rightarrow c \rightarrow f \rightarrow t \rightarrow 4$$



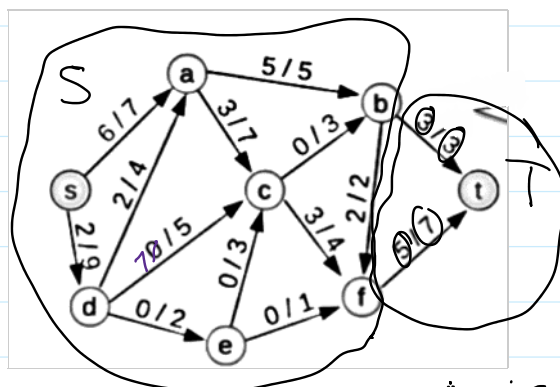
* شار بیشینه از s به t به چه معناست؟

فرض کنید قرار است تعدادی کالا را از s به t ببریم.
 از هر یال، به اندازه ظرفیت آن می‌توانیم کالا عبور دهیم
 حداکثر کالا که می‌توانیم از s به t ببریم چقدر است؟

* لوله آب شهری

* هدف، صرفاً یک مسیر نیست!

* شکل دادن شار در شبکه:



نسل ۲

قوانین شار:

۱. هیچ یالی نباید بیشینه از ظرفیتش شار حمل کند.
۲. شار ورودی به هر رأس = شار خروجی از آن رأس (غیر s و t)

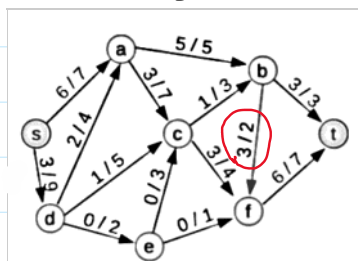
شار ورودی به هر رأس = شار خروجی از آن رأس (غیر s و t)

* آیا شار سطح ۲ قابل قبول است؟

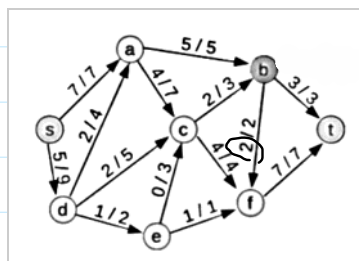
* آیا شار سطح ۱ بیشینه است؟

شان هایی از شار غیر قابل قبول:

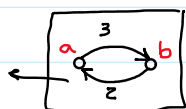
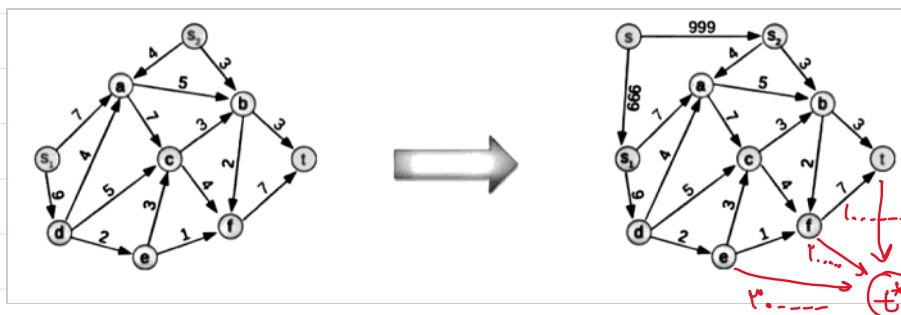
شکل ۳:



شکل ۲:



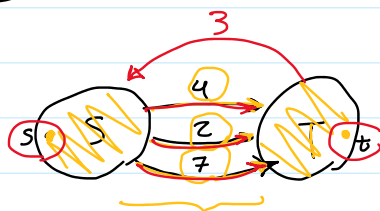
فرض ۱: تنها ۱ راس مبدأ و ۱ راس مقصد داریم.



فرض ۲: یال های antiparallel نداریم.

مجموع یال های S و T

$$c(s, T) = 13$$



منه cut یا بیش:

مشاهده: شار بیشینه \geq برش کمینه

بکرا: $\text{شار بیشینه} = \text{برش کمینه}$

الگوریتم پیشنهادی ۱

* با شار ۰ به ازای هر یال شروع کن: f

* از روی گراف G ، گراف G_f را بساز که شار باقی مانده هر یال را نشان می دهد.



$$= 2$$

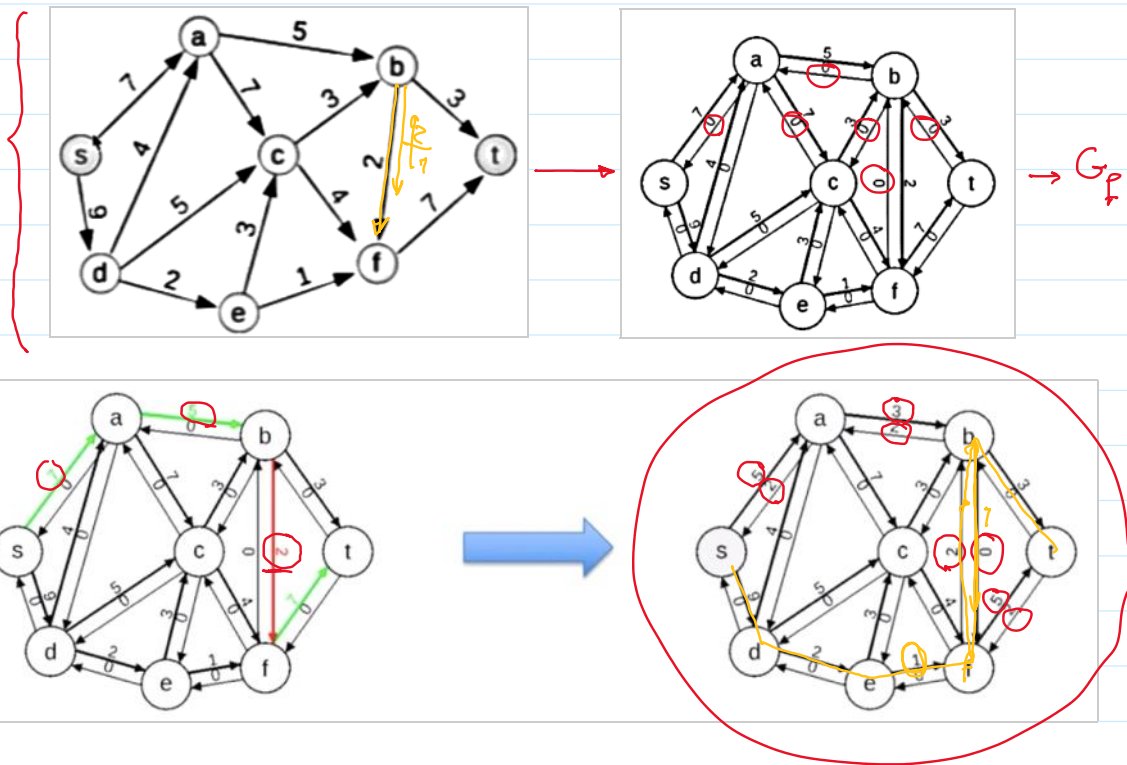
جدا اللدرتم ، صحيح نیست ؟



ایده 2: باید بتوانیم در طول مسیر، شریک میل را کم کنیم! ← شارب رعل

گراف residual یا باقی مانده



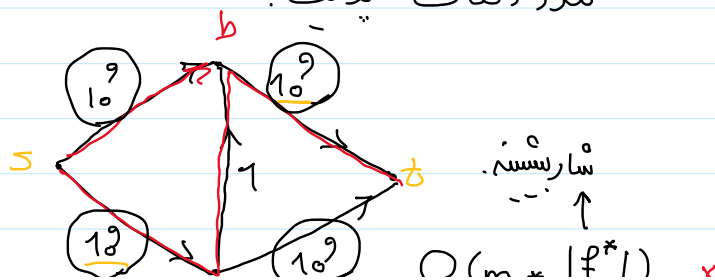


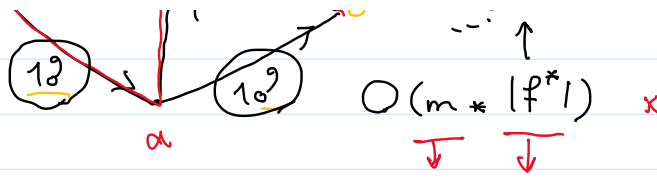
الگوریتم فورد - فولکرسون : Ford - Fulkerson (1965)

- * با شمار صغریه ازای جریان شروع کن : f
 - * گراف G_f را از روی G و شمار f بساز : G_f گراف $residual$
 - * یک مسیر از s به t در G_f پیدا کن : C : بنیاد : تمام
 - * شمارهای های مسیر C را به اندازه ظرفیت کمینه C کم یا زیاد کن.
- ↓ ↓
تال مستقیم تال برعکس

زمان اجرا : ساخت G_f : مسیره از s به t در G_f : DFS : $O(m)$

تعداد دفعات آپدیت ؟





الگوریتم ادسونز - کرب 1972 Edmonds - karp

فورد فولکرسون - DFS + BFS



تعداد دفعات آپدیت: $|mn \text{ مرتبه}|$
 زمان اجرا: $O(nm^2)$

اثبات: تمرین.

* درستی الگوریتم: فرض کنید G یک شبکه شار باشد و f یک شاراز G باشد. آن‌گاه
 گزاره‌های زیر معادل هستند:

- a - f شار بیشینه است \vee
- b - G_f هیچ مسیری از s به t ندارد. \vee
- c - برش S و T در G وجود دارد $|f^*| = c(S, T)$

