

موضوع: الگوریتم‌های تقریبی.

* پروژه آخر: کنسل - نمره را بروی سایر پروژه‌ها بخش می‌نیم.
* کوئیز دوم: سهشنبه آینده - ساعت ۱۳:۳۰ الی ۱۴:۳۰ (کاربردها سارو LP)

* روش هیوریستیک

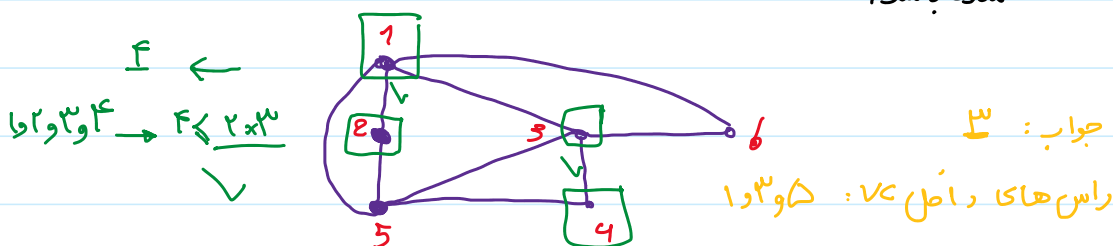
* الگوریتم‌های تقریبی.

جواب نهایی نهند \rightarrow Max
جواب بهینه هست

جواب نهایی حداقل \rightarrow Min
۲ برابر جواب بهینه است.

مساله کوله پشتی \leftarrow Greedy \leftarrow ۱

مساله پوشش رئی V_C : گراف G داده شده است. کمترین تعداد رئس را انتخاب کند به طوری که به ازای هر یال حداقل یکی از دو سر آن انتخاب شده باشد.



یادآوری: مساله پوشش رئی کمینه NP-C.

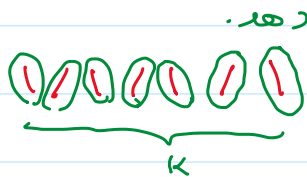
الگوریتم با تقریب ۲: با $S = \emptyset$ شروع کند. در هر مرحله یک یال که تاکنون توسط مجموعه S پوشیده نشده است را انتخاب و دو سر آن را به S اضافه کنیم.

اثبات درستی: فرض کند e_1 و e_2 و ... و e_j یال‌هایی باشند که در مراحل مختلف

اثبات درستی: فرض کنید e_1, e_2, \dots, e_k یایی‌هایی باشند که در مراحل مختلف انتخاب شده‌اند \leftarrow یایی‌های e_1, e_2, \dots, e_k تسلسل یک تطابق می‌دهند

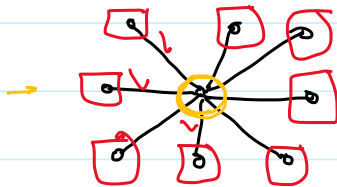
$$|S| = 2k$$

اندازه جواب بهینه: $OPT \leq k$: زیرا جواب بهینه باید e_k را پوشش دهد.



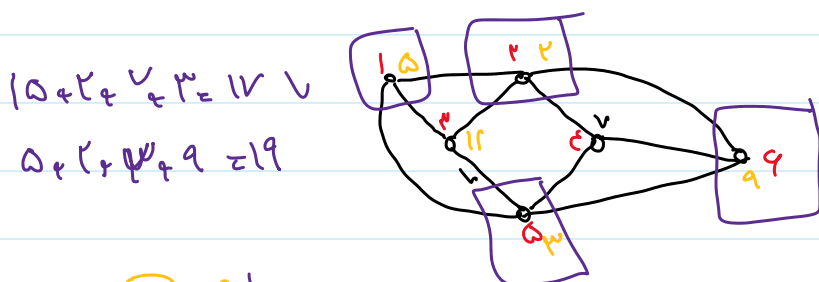
$$\frac{|S|}{OPT} \leq 2 \quad \square$$

* سوال: در هر مرحله یک یایی پوشش داده نشده را انتخاب و یکی از دو سر آن را به S اضافه کنیم:



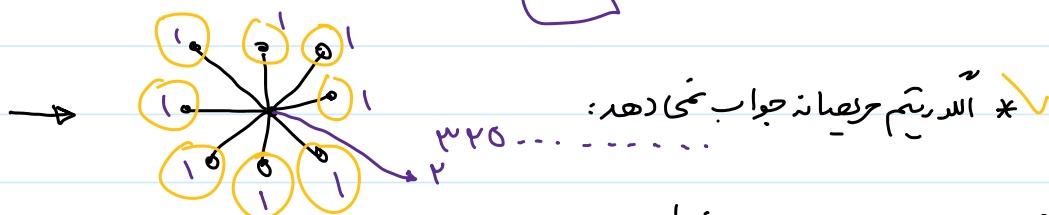
۱) الگوریتم ۲: در هر مرحله راس با درجه ماکسیمم را به S اضافه کنیم و آن راس و یایی‌های مجاور آن را از گراف حذف کنیم \square \leftarrow تقریب $\log n$

مساله ۲: پوشش راسی وزن دار: همان مساله VC ، با این تفاوت که هر راس دارای یک وزن است و هدف کمینه کردن وزن راس‌های انتخاب شده



$$15 + 2 + 2 + 2 + 3 = 17$$

$$5 + 2 + 3 + 9 = 19$$



* الگوریتم حریصانه جواب نمی‌دهد:

{ استفاده از برنامه نویسی خطی LP:

راس نام پوشش راسی هست \leftarrow راس نام در پوشش راسی نیست

IP مربوط به VC : $\{x_i \in \{0,1\} : \sum w_i x_i \leq W\}$

$\rightarrow w_i$: وزن راس نام

$\rightarrow x_i$: $\{0,1\}$

ω_i : وزن راس i ام \rightarrow

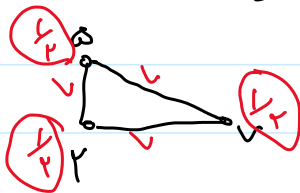
$$IP \left\{ \begin{array}{l} \min \sum x_i \omega_i \rightarrow \\ \text{s.t.} \quad \forall (i,j) \in E \quad x_i + x_j \geq 1 \\ \rightarrow \quad x_i \in \{0,1\} \end{array} \right.$$

$$\textcircled{LP} \left\{ \begin{array}{l} \min \sum x_i \omega_i \rightarrow \\ \text{s.t.} \quad \forall (i,j) \in E \quad x_i + x_j \geq 1 \\ 0 \leq x_i \leq 1 \end{array} \right. \rightarrow \text{در زمان چند جمله‌ای حل می‌شود.}$$

پس جواب این LP را داریم.

یونیشن رانی میس $\leftarrow [LP]$

پس در جواب LP لزوماً مقدار x_i ها برابر با 0 یا 1 نیست
مثلاً ممکن است $\frac{1}{2}$ باشد



\leftarrow تبدیل جواب اعشاری به یک جواب 0-1 : LP Rounding

پیشنهاد: یک مقدار α در نظر بگیریم

$$\left. \begin{array}{l} x_i \geq \frac{1}{2} \rightarrow x_i = 1 \\ x_i < \frac{1}{2} \rightarrow x_i = 0 \end{array} \right\} Alg$$

* به ازای هر یالی در Alg حداقل یکی از دو سر انتخاب شده است.

$$1 \leq x_i + x_j \leq \frac{1}{2} \rightarrow x_i + x_j \geq 1 \rightarrow (i,j) \in E$$

پس یکی از 2 سر در Alg انتخاب شده

* جواب $Alg \leftarrow Alg$ حداکثر 2 برابر جواب بهینه است.

$$|A|g| \leq 2|LP|$$

$$\begin{aligned} x_i &\leq \frac{1}{2} \rightarrow x_i = 0 \\ x_i &\geq \frac{1}{2} \rightarrow x_i = 1 \end{aligned} \quad \leftarrow \text{جواب}$$

x_i حداقل ۱ برابر شده

* جواب حداقل ۲ برابر جواب LP است

$$|A|g| \leq 2|LP|$$

پوشش راسی بهینه $|LP|$

$$\rightarrow |A|g| \leq 2 \times \text{پوشش راسی بهینه}$$

∴ jobscheduling