



تمرین یازدهم

مسئله‌ی ۱*. بزرگترین دایره محیطی

یک n ضلعی محدب در ورودی به فرم زیر داده شده است:

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) \rangle$$

که مختصات رئوس این n ضلعی را به ترتیب دوری نشان می‌دهد. ما در این مسئله به دنبال شعاع بزرگترین دایره‌ای که بتوان داخل این n ضلعی محدب قرار داد، هستیم. یک برنامه‌ریزی خطی ارائه دهید که جواب آن به ما اندازه شعاع بزرگترین دایره با این شرایط را بدهد.

مسئله‌ی ۲*. گراف جهت دار

در گراف جهت دار $G = (V, E)$ می‌خواهیم مقدار شار D را از راس $s \in V$ به راس $t \in V$ بفرستیم. در این گراف علاوه بر این که هر یال $(u, v) \in E$ دارای ظرفیت $C(u, v) > 0$ و هزینه‌ی $f(u, v) > 0$ است هر راس $u \in V$ نیز دارای ظرفیت $C(u) > 0$ و هزینه‌ی $f(u) > 0$ است. با استفاده از برنامه‌ریزی خطی مسئله یافتن کمترین هزینه‌ی عبور شار D از راس s به راس t را مدل کنید و دوگان آن را به دست آورید.

مسئله‌ی ۳*. کشاورز

کشاورزی ۲۰ هکتار زمین برای کاشتن گندم و جو در اختیار دارد. این کشاورز می‌خواهد بداند چند هکتار را به کاشت هر یک اختصاص دهد. برای کاشت هر هکتار جو نیاز به ۳۰ چوق و برای کاشت هر هکتار گندم نیاز به ۲۰ چوق پول دارد. مقدار پولی که این کشاورز می‌خواهد به این کار اختصاص دهد نیز ۴۸۰ چوق است. کاشت هر هکتار جو نیاز به ۱ روز کار و کاشت هر هکتار گندم نیاز به ۲ روز کار مفید دارد. کشاورز می‌خواهد کار در ۳۶ روز تمام شود.

مقدار سود به دست آمده از هر هکتار جو ۱۰۰ چوق و سود به دست آمده از هر هکتار گندم برابر ۱۲۰ چوق است. با استفاده از برنامه‌ریزی خطی به دست آورید که برای هر یک از محصولات چند هکتار باید اختصاص داده شود تا سود به دست آمده حداکثر باشد.

مسئله‌ی ۴*. کوتاه‌ترین مسیر ۱

مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را برای گرافی جهت‌دار و وزن‌دار مثل G در نظر بگیرید، که یال $u \rightarrow v$ آن دارای وزن

w_{uv} می‌باشد و همچنین s و t دو رأس متفاوت از این گراف باشد.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{uv \in E(G)} x_{uv} w_{uv} \\ \forall uv \in E(G) : \quad & 0 \leq x_{uv} \leq 1 \\ \forall v \neq s, t : \quad & \sum_{u \in out(v)} x_{vu} - \sum_{u \in in(v)} x_{uv} = 0 \\ \sum_{u \in out(s)} x_{su} = 1 \end{aligned}$$

که در آن $out(v)$ مجموعه رئوسی است که v به آن یال جهتدار دارد و $in(v)$ مجموعه رئوسی است که به v یال جهتدار دارند.

ثابت کنید جواب این برنامه‌ریزی خطی کوتاهترین مسیر از s به t را نمایش می‌دهد.
(راهنمایی: ثابت کنید جوابی بهینه وجود دارد که در آن x_{uv} ها یا صفر هستند و یا یک.)

مسئله‌ی ۵*. کوتاهترین مسیر ۲

گراف G مسئله قبل را در نظر بگیرید. حال فرض کنید مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را برای آن تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \max \quad & d_t \\ d_s = 0 \\ \forall u \rightarrow v \in E(G) : \quad & d_v \leq d_u + w_{uv} \end{aligned}$$

الف) ثابت کنید اگر مسیری با وزن $WP_{s,x}$ از رأس s به رأس x داشته باشیم، در اینصورت:

$$d_x \leq WP_{s,x}$$

. سپس از این استدلال استفاده کنید تا نشان دهید $d_t \leq \text{shortest_path}(s, t)$ و نشان دهید کوتاهترین مسیر بین s و t پاسخ مسئله برنامه‌ریزی خطی بالاست.

ب) با استفاده از Dual گرفتن مسئله قبل (کوتاهترین مسیر ۱) ثابت کنید این مسئله Dual مسئله قبلی است و در نتیجه مقادیر هدفشان برابرند.

مسئله‌ی ۶*. بستنی فروشی

یک کارخانه بستنی فروشی داریم که قرار است در طول n روز بستنی درست کند و به مشتری‌های خودش بدهد. می‌دانیم در روز i ام باید c_i کیلو بستنی به دست مشتریان خود برساند. این کارخانه می‌تواند هر روز هر مقدار که بخواهد بستنی تولید کند و یا مقداری بستنی را برای روزهای آینده انبار کند.

هزینه انبارداری هر روز یک کیلو بستی A می‌باشد و هزینه تغییر میزان تولید بستی نیز B است. برای مثال اگر در روز اول $۱۰/۵$ کیلو بستی تولید کند و ۱۰ کیلو از آن در آن روز مصرف شود. سپس فردای آن روز $۱/۵$ کیلو بستی تولید کند و نیم کیلو را از روز قبل در انبار نگه داشته‌باشد، هزینه این کار برابر مقدار زیر خواهد بود:

$$|۱۰/۵ - ۱/۵|B + ۰/۵ \times A = ۹B + \frac{1}{4}A$$

فرض کنید c_i ها و A و B به شما داده شده. مسئله را با برنامه‌ریزی خطی طوری مدل کنید که جواب آن کم هزینه‌ترین استراتژی تولید و انبارداری را به ما بدهد به طوری که در روز i ام بتوانیم c_i تا بستی را تامین کنیم. همچنین تعداد شرایط و اندازه هر کدام از شرایط و تابع هدف چندجمله‌ای بر اساس اندازه ورودی مسئله باشد.

توجه کنید همه بستی مازاد یک روز در انبار نگهداری می‌شود و دور ریخته نمی‌شود. همچنین اگر در روز اول x کیلو بستی تولید کنیم، این تولید $|x - ۰| \times B$ واحد هزینه خواهد داشت.

مسئله‌ی ۷*. کوله‌پشتی

یک حالت از مسئله کوله‌پشتی را در نظر بگیرید که در آن، m شی با ارزش‌های p_1, \dots, p_m وجود دارد و تعداد موجود از این اشیا به ترتیب n_1, \dots, n_m است و حجم این اشیا نیز به ترتیب v_1, \dots, v_m است. این اشیا را قابل تقسیم در نظر بگیرید به طوری که هر نسبتی از هر کدام را می‌توانیم برداریم. همچنین فرض کنید که حجم کوله‌پشتی ما V است. می‌خواهیم کوله‌پشتیمان را با این اشیا پر کنیم به طوری که بیشترین ارزش را برداشته باشیم. با استفاده از روش برنامه‌ریزی خطی، این مسئله را حل کنید.

