

موضوع: تقسیم و غلبه و قضیه اصلی.

$$\overbrace{T(n)}^{\text{یا دآوری: قضیه اصلی}} = a \overbrace{T\left(\frac{n}{b}\right)}^{\text{طبیعی}} + \overbrace{f(n)}^{\text{طبیعی}}$$

$\underline{n^{\log_b a}} \quad \underline{f(n)}$

case 1:  $f(n) = O\left(\frac{n^{\log_b a - \epsilon}}{n^{\epsilon/2}}\right)$  for some  $\epsilon > 0$ .  $T(n) = \Theta\left(\frac{n^{\log_b a}}{n^{\epsilon/2}}\right)$

case 2:  $f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

\* case 3:  $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$  for some  $\epsilon > 0$ .  $T(n) = \Theta(f(n))$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \quad \text{مثال:}$$

$$n \log_2^2 = n' = \Theta(n) \rightarrow \text{case 2}$$

$$\hookrightarrow T(n) = \Theta(n \log n)$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \sqrt{n} \rightarrow \frac{n}{n^{\frac{1}{2}}} \rightarrow \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}$$

$$T(n) = \Theta(n^{\log_2^2}) = \Theta(n)$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \rightarrow \text{case 3}$$

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \log n$$

$$\frac{n}{n} \quad \frac{n \log n}{n} \rightarrow \kappa \quad \text{هیچ کدام}$$

تقسیم و غلبه . divide & conquer

## تقسیم و فتح: Divide & conquer

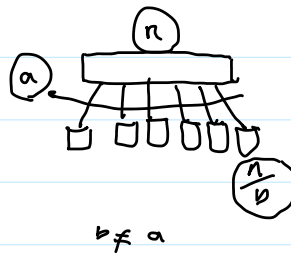
۱- Divide

۲- Conquer

۳- combine

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

combine  
↑  
f(n)  
←  
T(n/b)



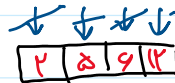
مثال ۱) مرتب سازی ادغای:



۱- آرایه A را به ۲ زیر آرایه  $A_1$  و  $A_2$  تقسیم کن  
 $\frac{n}{2}$        $\frac{n}{2}$

۲-  $A_1$  و  $A_2$  را به طرز بازگشتی با استفاده از Merge sort مرتب کن

۳-  $A_1$  و  $A_2$  را ادغام کن.



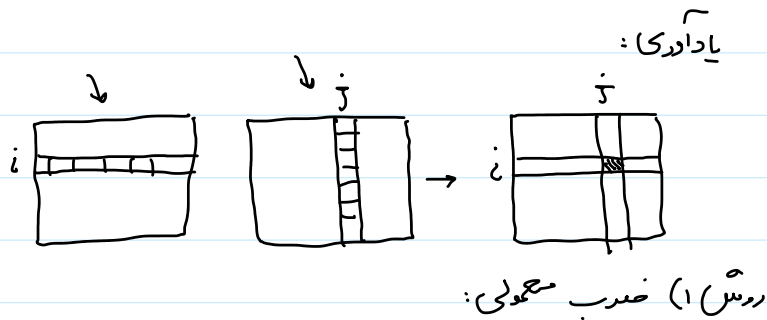
$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \underbrace{O(n)}_{\text{زمان ادغام}}$$

$$\rightarrow T(n) = \Theta(n \log n)$$

مثال ضرب ماتریس استراسن.

ماتریس های  $A$  و  $B$  هر کدام به صورت یک آرایه ۲ بعدی  $n \times n$  داده شده است  
محاسبه  $A \times B$  را حساب کنید.

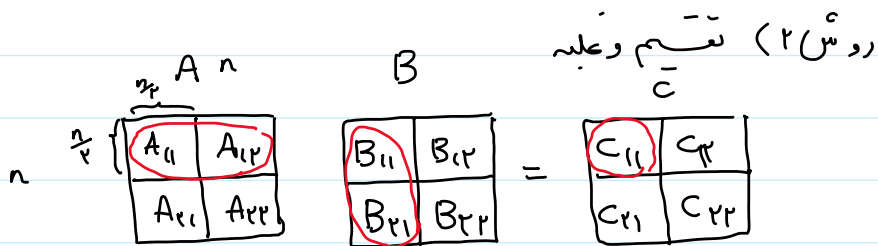
یادآوری:



```

for (i: 1 → n)
  for (j: 1 → n)
    for (k: 1 → n)
       $C[i][j] = C[i][j] + A[i][k] * B[k][j]$ 
  
```

$O(n^3)$



$$\begin{aligned}
 * \quad \checkmark \quad C_{11} &= A_{11} \times B_{11} + A_{12} \times B_{21} \\
 * \quad \checkmark \quad C_{12} &= A_{11} \times B_{12} + A_{12} \times B_{22} \\
 * \quad \checkmark \quad C_{21} &= A_{21} \times B_{11} + A_{22} \times B_{21} \\
 * \quad \checkmark \quad C_{22} &= A_{21} \times B_{12} + A_{22} \times B_{22}
 \end{aligned}$$

divide - ۱. A و B را به ۴ زیرماتریس (طبق بالا) تقسیم کن  
 conquer - ۲. ضرب مشخص شده در \* را حساب کن  
 combine - ۳. با استفاده از عبارت‌های \*، مقدارها  $C_{11}$  و  $C_{12}$  و  $C_{21}$  و  $C_{22}$  را حساب کن

$$T(n) = 1T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n^2) = n^{\log_2 1} = n^0 = 1$$

$$T(n) = O(n^3)$$

آیا بهتر می‌شود؟

$$\begin{aligned}
 P &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}) \\
 Q &= (A_{21} + A_{22})B_{11}
 \end{aligned}$$

$$A_{11} \times B_{11} + A_{12} \times B_{21}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q = (A_{11} + A_{12}) B_{11} \\ R = A_{11} (B_{12} - B_{22}) \\ S = A_{22} (B_{21} - B_{11}) \\ T = (A_{11} + A_{12}) B_{22} \\ U = (A_{21} - A_{11}) (B_{11} + B_{12}) \\ V = (A_{12} - A_{22}) (B_{21} + B_{22}) \end{array} \right.$$

$$C_{11} = P + S - T + V$$

$$C_{12} = R + T$$

$$C_{21} = Q + S$$

$$C_{22} = P - Q + R + V$$

$$\begin{aligned} T(n) &= rT\left(\frac{n}{r}\right) + O(n^v) \\ &= \Theta(n^{\log_r v}) = \Theta(n^{r, \log_r v}) \end{aligned}$$

$$= \Theta(n^{\log_c v}) = \Theta(n^{r, 1.0 \cdot v})$$

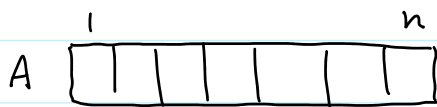
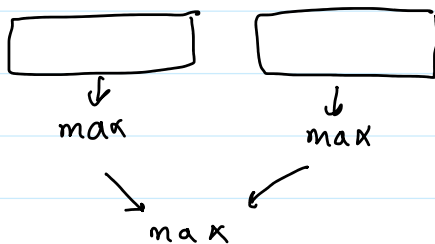
→  $\theta(n^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}})$  : wingrad-coppersmith-1990  
 $\theta(n^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}})$  : Alman-williams - 2020

$\theta(n^{p,q,v,f})$  • Alman-Williams - 2020

مسألة سد المردن) بئسنة :

←  
 $A[i] = \text{Max}$  : new len  $n-1$

```
for (i: 1 → n)
```

$$i \neq (\text{A}[i] > \text{Max})$$
$$Max \in A[i]$$

$$\sim \log n - 1$$


$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \rightarrow T(n) = n - 1$

$$T(\nu) = 1$$

$$r \times \left( \frac{n-1}{r} + 1 \right) = \underline{n-1}$$

مقایسه و کپی ← مقایسه  $T_{n-2}$  ← مقایسه  $T_{n-3}$  .



$$\boxed{\frac{n}{2} - 2}$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 2 \quad \underline{T(2) = 1}$$

$$= 2 \times \left(\frac{n}{2} - 2\right) + 2 = \underline{\frac{n}{2} - 2}$$

---

\*