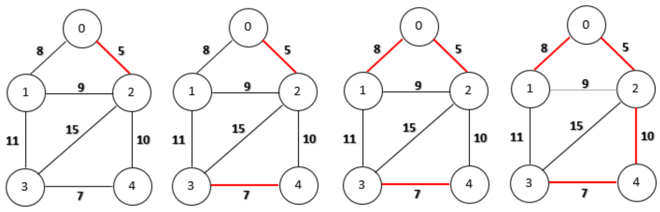
یادآوری جلسه چهاردهم — **الگوریتم‌های گراف** — گردآورندگان: پرهام صارمی ــ زهرا فاضل

در جلسه قبل در ادامه مسئله MST با الگوریتم حریصانه کراسکال آشنا شدیم.

الگوریتم کراسکال



در این الگوریتم، از یک مجموعه تهی شروع کرده و در هر مرحله، یال با کمترین وزن را که با اضافه کردن آن دور ایجاد نمی‌شود، به این مجموعه اضافه می‌کنیم. در شکل روبه‌رو مثالی از این الگوریتم آمده‌است.

برای اثبات درستی الگوریتم، فرض کنیم جواب بهینه‌ای به جز جواب کراسکال وجود دارد، یال‌های دو جواب را بر اساس وزن مرتب می‌کنیم. فرض کنیم e_i اولین یالی در خروجی کراسکال باشد که جواب کراسکال و بهینه با هم متفاوتند. اگر این یال را به جواب بهینه اضافه کنیم، دور ایجاد می‌شود. بنابراین یکی از یال‌های این دور در خروجی کراسکال نیست. وزن این یال نمی‌تواند کمتر از وزن e_i باشد و اگر از وزن e_i بیشتر باشد، با بهینه بودن در تناقض است. بنابراین وزن این دو یال برابر است و جواب کراسکال نیز بهینه است.

زمان اجرا و پیاده‌سازی

در ابتدا یال‌ها را بر اساس وزن مرتب می‌کنیم که پیچدگی آن $O(m \log n)$ است. برای بررسی وجود دور، در نظر می‌گیریم که دو سر یک یال نباید در یک مؤلفه‌ی همبندی باشد. برای پیاده‌سازی دو روش ارائه دادیم:

۱. برچسب‌گذاری: به هر عضو مؤلفه برچسب اختصاص می‌دهیم. در این صورت جست‌وجو از $O(1)$ و ادغام از $O(n)$ است، زیرا در ادغام برچسب کل راس‌های یکی از مولفه‌ها باید تغییر کند. بنابراین در کل زمان اجرای الگوریتم $O(n^2 + m \log n)$ می‌شود.

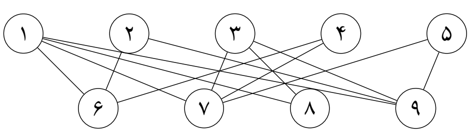
۲. ساختار درختی: مؤلفه‌ها را به صورت درخت با ریشه‌ی برچسب خورده ذخیره می‌کنیم. در این صورت جست‌وجو از $O(n)$ و ادغام از $O(1)$ است. بنابراین در کل زمان اجرای الگوریتم $O(mn + m \log n)$ می‌شود. این روش را می‌توان بهبود داد:

- بهبود اول: ریشه درخت با ارتفاع کمتر به ریشه درخت با ارتفاع بیشتر متصل می‌کنیم، بنابراین ارتفاع درخت لگاریتمی شده و پیچیدگی زمانی الگوریتم $O(m \log n)$ می‌شود.
- بهبود دوم: یال‌های پیمایش شده در هنگام جست‌وجو را به ریشه متصل می‌کنیم. این کار در جست‌وجوهای بعدی کمک می‌کند. زمان اجرای الگوریتم در این حالت برابر با $O(m\alpha(n) + m \log n)$ و اگر امکان مرتب‌سازی با استفاده از روش‌های خطی وجود داشته باشد برابر با $O(m\alpha(n))$ خواهد بود که در آن $\alpha(n)$ یک تابع با رشد بسیار بسیار پایین بر حسب n است.

پرسش یک تطابق در گراف G زیرمجموعه‌ای از مجموعه یال‌هاست که هیچ دوتایی از آن‌ها با یک‌دیگر رأس مشترک ندارند. یک تطابق ماکزیمم، تطابقی است که بیشترین تعداد یال‌های G را دارد.

یک پوشش رأس‌ها در گراف G زیرمجموعه‌ای از مجموعه رئوس است که حداقل شامل یکی از رئوس دو سر هر یال گراف است. مینیمم پوشش رئوس، پوشش رئوسی است که کمترین تعداد رأس را داشته‌باشد.

در گراف زیر تطابق ماکزیمم و پوشش رئوس مینیمم را بیابید.



پاسخ های خود را می توانید تا قبل از شروع کلاس به این لینک ارسال کنید.