یادآوری جلسه بیست‌ودوم — برنامه‌نویسی خطی — گردآورنده: پرهام چاوشیان ـ زهرا فاضل

در جلسه قبل با هندسه برنامه‌نویسی خطی و روش‌های حل آن آشنا شدیم و دیدیم که اگر $X = \{x_۱, x_۲, \cdot, x_n\}$ باشد مسئله برنامه‌نویسی خطی به طور کلی به فرم روبه‌رو است.

$$\begin{array}{ll} \text{min-max} & f(X) \\ \text{s.t} & c_۱(X) \\ & c_۲(X) \\ & \vdots \\ & c_m(x) \\ & X \geq ۰ \end{array}$$

که $f(X)$ یک تابع خطی بر روی X و c_iها شروطی خطی بر روی X هستند.
در ادامه بخش‌های مختلف یک مسئله برنامه‌نویسی خطی را از نظر هندسی بررسی کردیم.

متغیرها

اگر n متغیر داشته‌باشیم، جواب یک نقطه در فضای حداکثر nبعدی است. برای مثال در مسئله روبه‌رو ۳ متغیر داریم اما جواب یک نقطه در فضای دو بعدی است.

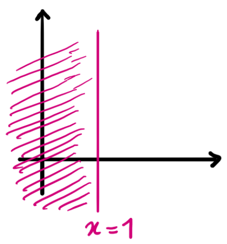
$$\begin{array}{ll} \min & x+y+z \\ \text{s.t} & x+۴y-z \geq ۱ \\ & ۳x+۷y-۲z \leq ۳ \\ & -۲x-۳y+z \leq -۲ \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} ۳x+۷y-۲z \leq ۳ \\ -۲x-۳y+z \leq -۲ \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

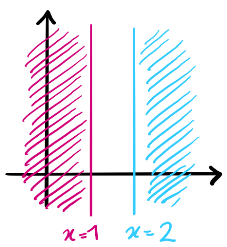
$$x+۴y-z \leq ۱ \overset{x+۴y-z\geq ۱}{\Longrightarrow} x+۴y-z = ۱$$

محدودیت‌ها

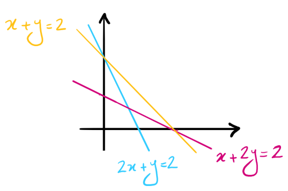
فرض کنیم در مسئله ۲ متغیر داریم. در این صورت هر کدام از محدودیت‌ها یک نیم‌صفحه‌اند که تعیین می‌کنند جواب نهایی باید در کدام ناحیه نسبت به آن نیم‌صفحه باشد. (در حالت ۳ متغیره هر کدام از محدودیت‌ها یک نیم‌فضا و در حالت با بیش از ۳ متغیر هر کدام یک نیم‌ابرفضاند.) اشتراک نیم‌صفحه‌های متناظر با محدودیت‌ها برابر با یک چندضلعی محدب است که به آن ناحیه feasible solution می‌گوییم.
با در نظر گرفتن این چندضلعی می‌توانیم بگوییم که برای نقطه‌ای داخل این چندضلعی تمامی محدودیت‌ها به صورت اکید برقرارند. برای نقطه‌ای بر روی اضلاع این چند ضلعی حداقل یکی از محدودیت‌ها مساوی است. برای رئوس این چندضلعی می‌توان گفت که حداقل دو تا از محدودیت‌ها به صورت مساوی برقرار شده‌اند.



شکل ۱: فضای نامحدود



شکل ۲: فضای تهی



شکل ۳: محدودیت بدون اثر

در مورد feasible solution چند حالت برقرار است:

- فضای feasible solution یک فضای محدب است.
- ممکن است مانند شکل ۱ این فضا محدود نباشد. در این ممکن است $f(x) = \infty$ شود و یا ممکن است محدود باشد.
- ممکن است مانند شکل ۲ این فضا تهی باشد. در این صورت مسئله جواب ندارد.
- ممکن است مانند شکل ۳ بعضی محدودیت‌ها در تشکیل این فضا بی‌اثر باشند.

حل مسئله برنامه‌نویسی خطی

اگر ناحیه solution feasible محدود باشد، جواب مسئله یکی از رئوس این ناحیه است. برای حل مسئله برنامه‌نویسی خطی الگوریتم‌های زیر را داریم:

- الگوریتم $elipsoid$
- روش $interialpoint$
- روش $incremental$
- الگوریتم $simplex$

قضیه ۱ (strong duality). برای یک LP و دوگان آن یکی از شرایط زیر برقرار است:

۱. هر دو LP اولیه و دوگان infeasible باشند. یعنی solution feasible آن‌ها تهی باشد.

۲. LP اولیه unbounded و دوگانش infeasible باشد.

۳. LP اولیه infeasible و دوگانش unbounded باشد.

۴. LP اولیه و دوگانش feasible و دارای جواب یکسان باشند.