

موضوع: برنامه نویسی خطی، نرم افزار ندارد.

میانترم: ساعت 9 صبح جمعه تا 13:30 ظهر

شنبه شنبه جلسه نداریم - 5شنبه رفع اشکال.

درجه قبل: LP (شناختیم). به طور کلی، یک برنامه نویسی خطی در یکی از فرم استاندارد زیر خطا هوی شود:

فرم ماکسیم: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
 فرم مینیم: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
 objective: $\text{Min } c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \text{Max } c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$
 s.t:
 $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$
 $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$
 \vdots
 $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$
 constraint: $\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array} \right.$
 شرط مرزی: $\left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ \vdots \\ x_n \geq 0 \end{array} \right.$

در واقع می توان یک LP را به صورت فرم جبهی زیر نوشت:

$\underline{c} = [c_1, c_2, \dots, c_n]$
 $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$
 $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$
 $\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$
 $\text{Max } \underline{c} \underline{x}$
 s.t.
 $\underline{A} \underline{x} \leq \underline{b}$
 $\underline{x} \geq 0$
 $\text{Min } \underline{c} \underline{x}$
 s.t.
 $\underline{A} \underline{x} \geq \underline{b}$
 $\underline{x} \geq 0$

Remark: از این ها می تواند به دست

$\text{Max } 3x_1 + 5x_2 + x_3$
 s.t.
 $2x_1 + 5x_2 \leq 3$
 $3x_1 + x_3 \leq 5$
 $x_i \geq 0$

نکته: می شود این فرم را به هم تبدیل کرد!

$\text{Max } \underline{c} \underline{x}$
 $\underline{A} \underline{x} \leq \underline{b}$
 $\underline{x} \geq 0$
 \longleftrightarrow
 $\text{Min } \underline{c}' \underline{x}$
 $\underline{A}' \underline{x} \geq \underline{b}'$
 $\underline{x} \geq 0$
 $\underline{c}' = -\underline{c}$
 $\underline{A}' = -\underline{A}$
 $\underline{b}' = -\underline{b}$

فرم غیر استاندارد:

$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 \leq 3 \\ 3x_1 + x_3 \geq 5 \end{array} \right.$

* در فرم استاندارد همه مساوی ها
 نوشته شود.

فرم استاندارد:

$$\begin{cases} 1x_1 + 10x_2 \leq 50 \\ 3x_1 + 5x_2 \geq 3 \end{cases}$$

* اگر جهت به نامساوی ها یکی باشد.

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 5 \\ x_1 &\text{ هم محدودیتی نداشته باشد.} \end{aligned}$$

* شرایط مرزی ممکن است ظاهر نشود یا متفاوت باشد.

$$\begin{aligned} &\geq \leq \\ 5x_1 + 3x_2 &= 8 \end{aligned}$$

* ممکن است = داشته باشیم:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 5x_2 = 7 \\ & 3x_2 + 5x_3 \leq 9 \\ & 7x_3 + 2x_4 \geq 10 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq -5 \end{aligned}$$

نکته: هر LP غیر استاندارد را می توان به یک LP استاندارد تبدیل کرد.

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 \leq 5 & \leftarrow x-1 \leq \\ -5x_1 - 2x_2 \geq -5 \end{aligned}$$

$$3x_1 + 5x_2 = 7 \quad \text{ب، اگر = داشته؟}$$

$$3x_1 + 5x_2 \geq 5$$

$$x-1 \leftarrow 3x_1 + 5x_2 \leq 5$$

ج، شرایط مرزی:

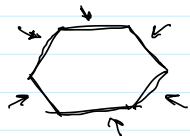
$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{aligned} x_1 - x'_1 &\geq 5 \\ x_1 &\geq 0 \\ x'_1 &\geq 0 \end{aligned} \right\} \leftarrow \overline{x_1 \geq 5} \\ &\left\{ \begin{aligned} x_1 + x'_1 &\leq 10 \\ x_1 &\geq 0 \\ x'_1 &\geq 0 \end{aligned} \right\} \leftarrow \overline{x_1 \leq 10} \end{aligned}$$

* اگر هیچ محدودیتی نداشته باشد: $x_1 \in [-\infty, +\infty]$

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 - x''_1 \\ &\rightarrow x'_1 \geq 0 \\ &\rightarrow x''_1 \geq 0 \end{aligned}$$

در LP، شرط ها باید به صورت \leq یا \geq باشند. نتایج شرایط خاص می توانیم $<$ یا $>$ داشته باشیم

$$\begin{aligned} \max \quad & x \\ \text{s.t.} \quad & x \leq 1 \end{aligned}$$

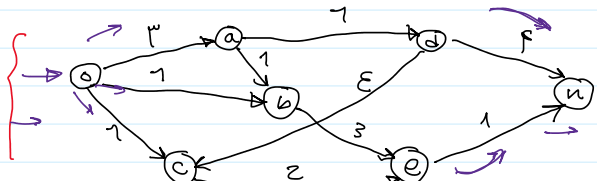


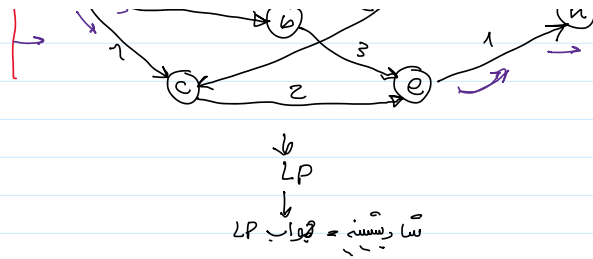
: compact

$$5 \leq x_i \leq 10$$

$$IP \quad x_i \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

مثال ۱) شبکه شار زیر داده شده است. شار بیشینه از ۰ به n را پیدا کنید.





x_{oa} : شار از a به o
 x_{ab} : شار از a به b
 \vdots
 متغیرها

$$\begin{aligned}
 \text{Max: } & x_{oa} + x_{ob} + x_{oe} \\
 \text{st: } & \left. \begin{aligned} & x_{oa} \leq 3 \\ & x_{ad} \leq 1 \\ & \vdots \end{aligned} \right\} \text{ محدودیت‌ها ظرفیتی} \\
 & \left. \begin{aligned} & x_{ab} + x_{ob} = x_{be} \\ & \vdots \end{aligned} \right\} \text{ شار ورودی = شار خروجی} \\
 & \left. \begin{aligned} & x_{oa} \geq 0 \\ & x_{ab} \geq 0 \\ & \vdots \end{aligned} \right\} \text{ شارها \(\geq 0\)}
 \end{aligned}$$

جواب این LP، شار بهینه را مشخص می‌کند.

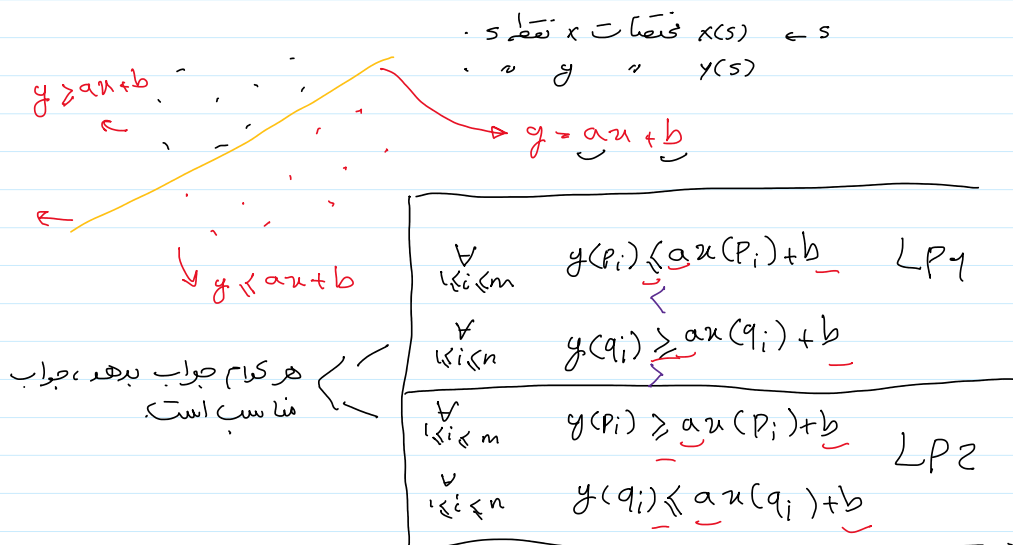
← Dual : مسئله Min-cut

* اگر برای یک حداقل شار داشته باشد ← 1 محدودیت جدید در LP

* اگر برای همه حدها داشته باشد ← Min cost flow

مثال ۲) m نقطه سفید p_1, \dots, p_m و n نقطه سیاه q_1, \dots, q_n در صفحه داریم

می‌خواهیم سیستم ایضی وجود دارد که این نقاط را از هم جدا کند؟



هر کدام جواب بدهد، جواب مناسب است.

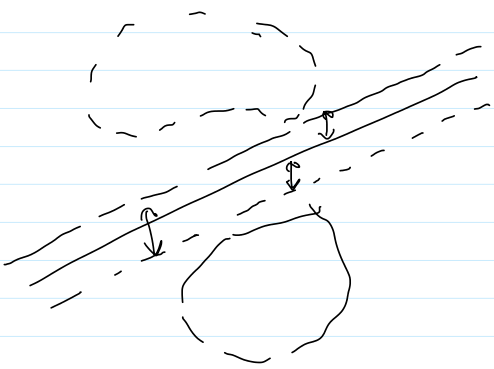
LP_1 و LP_2 : خط نه‌اشد!

* ممکن است نقاط روی خط بیافتد.

سوال ۱: آیا LP وجود دارد که می‌تواند همه نقاطی روی خط بیافتد؟

* ممکن است بعضی روی خط نباشد.

سوال: آیا LP وجود دارد که بتواند هیچ نقطه‌ای روی خط نیافتد؟



$$\rightarrow \max \epsilon$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall 1 \leq i \leq m \quad y(p_i) \leq ax(p_i) + b - \epsilon \\ \forall 1 \leq i \leq n \quad y(q_i) \geq ax(q_i) + b + \epsilon \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \epsilon \\ y(p_i) \geq ax(p_i) + b + \epsilon \\ y(q_i) \leq ax(q_i) + b - \epsilon \end{array} \right.$$