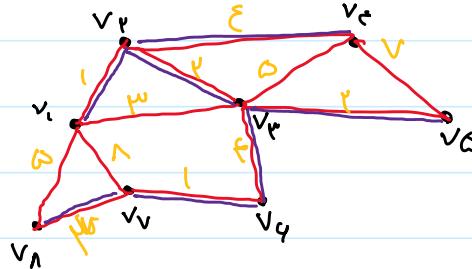


موضوع: درخت پوشای کمینه. الگوریتم کراسکال.

مساله MST: گراف همبند وزن دار  $G$  داده شده است. زیردرخت فراگیر  $G$  با وزن کمینه را پیدا کنید.



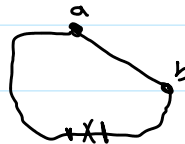
$$T = \{ (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_6, v_7), (v_7, v_8) \}$$

تعداد مراحل:  $n-1$  مرحله.

الگوریتم کراسکال: با  $T = \emptyset$  شروع کن. در هر مرحله، یال با کمترین وزن که اضافه کردن آن به  $T$  ایجاد دور نمی کند را به  $T$  اضافه کن.

سوال: چرا الگوریتم کراسکال درست است؟ (فرض: وزن تمام یال ها متفاوت)

\* اضافه کردن یک یال به درخت ایجاد دوری شامل آن یال می کند.  
حذف کردن هر یالی از آن دور مجدداً یک درختی دهد.

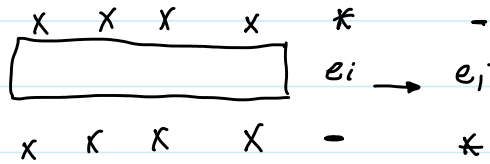


\* فرض کنید یال های گراف بر حسب وزن مرتب شده اند

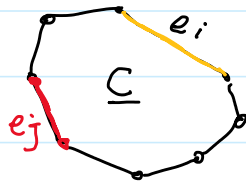
کراسکال	*	*	*	-	-	*	*	-	*
	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$e_8$	$e_9$
بهبود:	*	*	*	-	-	-	*	*	*

$e_i$ : اولین یالی که در جواب کراسکال و بهبود با هم متفاوتند.





$e_i$  در کراسکال هست و در بهینه نیست. ☒  
 $e_j$  در بهینه هست و در کراسکال نیست. ☒



$e_j$  را به درخت بهینه اضافه کند  
 ← دور ایجاد می شود.  
 ← حداقل یکی از یال های دور  $C$  در کراسکال  
 نیست. ←  $e_j$

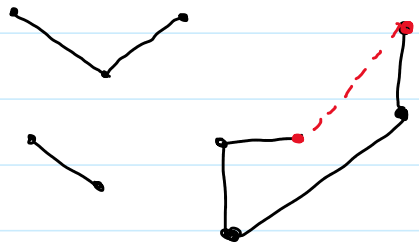
سوال:  $w(e_i)$  ؟  $w(e_j)$  ؟  
 <

←  $e_i$  را اضافه می کنیم و  $e_j$  را حذف می کند ← وزن درخت کم می شود  
 ← بایسته بودن در تناقض  $\square$

بخش دوم: زمان اجرای کراسکال.

$m = O(n^2)$   
 $\uparrow$   
 $O(m \log n)$   
 $\uparrow$   
 $O(m \log m)$  : مرتب کردن یال ها  
 $\uparrow$   
 $O(m)$  : مرتب سازی قطعی  
 مرتب سازی مقایسه ای

\* ۲- چک کردن این که هر یال  $e$ ، اگر به  $T$  اضافه شود دور ایجاد  
 می کند یا خیر.



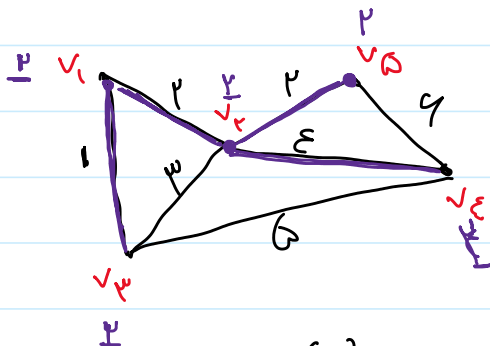
در هر مرحله  $T$  شامل تعدادی مولفه همبندی است که هر مولفه بندهای

در هر مرحله ۲ شامل تعدادی مولفه همبندی است که هر مولفه همبندی یک درخت

\* یک یال ایجاد دوری کند اگر دو سر آن داخل یک مولفه همبندی باشد.

{ چک کنیم آیا دو سر یال در یک مولفه هست یا نه  
 { اضافه کردن به T : ادغام دو مولفه همبندی مربوط به ۲ سر e

روش ۱ - بر حسب لذاری



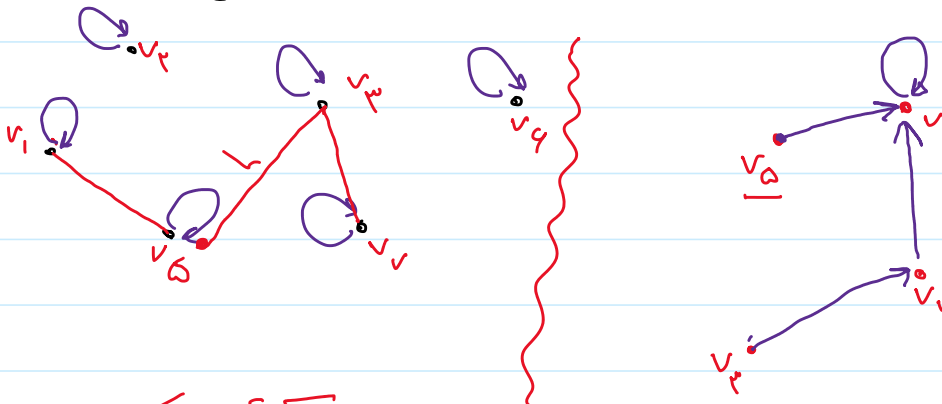
(بر حسب)

\* پیدا کردن مولفه هر اس :  $O(1)$

\* ادغام دو مولفه همبندی :  $O(n)$

$$O(n^2 + m \log n)$$

روش ۲ - ساختار درختی. هر مولفه به صورت یک درخت ریشه دار در نظر گرفته شود : شناسه هر مولفه، ریشه آن باشد.

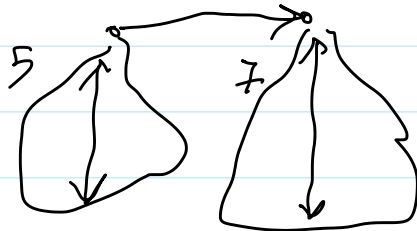


{  $v_1$   
 $v_2$  } ← یکی نیستند.

پیداکردن مولفه هر اس : پیداکردن رسته  $O(n)$   $\rightarrow$   
 ادغام دو مولفه : [به شرطی که رسته ها را داریم]  $O(1)$

$$O(nm + m \log n)$$

بهبود 1: هنگام ادغام 2 مولفه، رسته درخت با ارتفاع کمتر،  
 به رسته درخت با ارتفاع بیشتر اشاره کند



$\leftarrow$  ارتفاع درخت ها کمتر می شود.

پیداکردن مولفه هر اس :  $O(\log n)$   
 ادغام :  $O(1)$

$$O(m \log n + m \log n) = O(m \log n)$$

بهبود 2: ...



پیداکردن مولفه هر اس :  $O(\alpha(n))$   
 ادغام دو مولفه :  $O(1)$

۵-۴

$$\alpha(n) = O(\log^* n)$$

$$\delta - \epsilon \quad \underline{\alpha(n)} = O(\log^* n)$$

$$O(m\alpha(n) + m \log n) = O(m \log n)$$

$$O(m\alpha(n)) = O(m\alpha(n) + \underbrace{m}_{\text{خطی}}) \quad \text{اگر مرتب سازی خطی:}$$

$$\simeq \underline{O(m)}$$


---