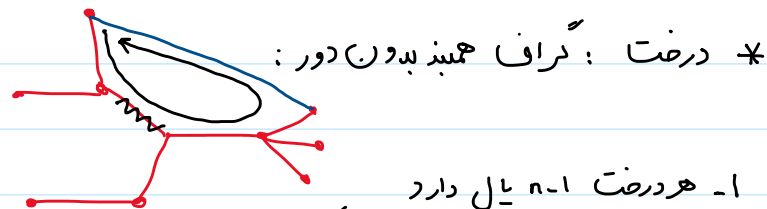


موضوع: درخت پوشای کمینه MST [الگوریتم PRIM]

* گراف وزن دار \leftarrow (وزن v_i) w : وزن بین v_i و v_j



* ۲- اضافه کردن هر یال به درخت یک دور (شامل آن یال) ایجاد می‌کند.

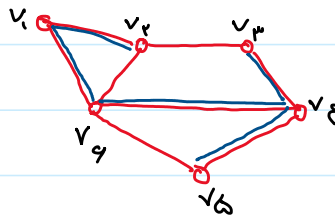
و حذف هر یالی از آن دور مجدداً یک درخت می‌دهد.

۳- حذف هر یال از درخت آن را ناممکن می‌کند.

۴- بین هر ۲ رأس از یک درخت یک مسیر یکتا وجود دارد.

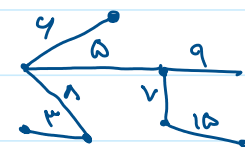
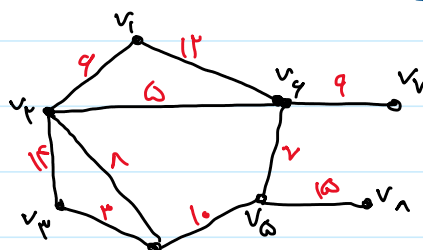
* ۵- هر درخت حداقل ۲ برگ دارد: مسیر ماکسیمال...

زیر درخت فرالیر: گراف همبند G داده شده است. یک زیر درخت فرالیر از G یک زیر گراف شامل همه رأس‌های G است که درخت است.



تعداد زیر درخت‌های فرالیر k_n : $n-2$

مسئله درخت پوشای کمینه: گراف همبند و وزن دار G داده شده است. زیر درخت پوشای G با کمترین وزن را پیدا کنید.



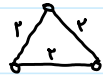
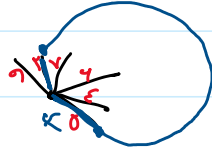
v_e

مشاهدات:

* یال با کمترین وزن (به شرط یکپارچگی) همیشه در MST هست.



* به ازای هر رأس، کوچکترین همسایه همیشه در MST هست.



* آیا MST یکپارچه است؟ نه

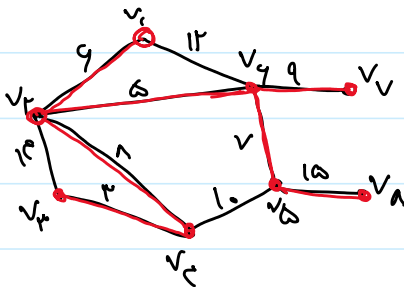
اگرچه یال‌ها وزن متفاوت داشته باشند؟

1965 solin

الگوریتم Prim: 1957 Prim (Jarhik 1930) . 1926 Brückner

0. با $S = \{v_1\}$ شروع کن. $T = V/S$

1. در هر مرحله (کل $n-1$) رأس $v_j \in T$ را که با یال با کمترین وزن به یکی از رأس‌های مجموعه S (شکلاً v_k) متصل است را به S اضافه کن + یال (v_k, v_j) درخت اضافه کن



* الگوریتم حریصانه

$S = \{v_1\}$

$\{v_1, v_2\}$

$\{v_1, v_2, v_3\}$

$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$

$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$

$dist[v_j]$: کمترین یال از v_j تا رأس‌ها v_i
 $v_j \in T$

$dist[v_j]$: کمترین میل از v_j تا راس‌ها
 $v_j \in T$ مجموعه S

$$S = \{v_1\}$$

$$dist[v_j] = \begin{cases} v_j = v_1 & : 0 \\ v_j \neq v_1 \text{ و } v_j \text{ با } v_1 \text{ بین‌الملی و } v_j \text{ نباشد} & : \infty \\ \text{oth} & : \omega(v_1, v_j) \end{cases}$$

$\alpha n \log n$ ← $\left(\begin{array}{l} \xrightarrow{n-1 \text{ بار}} \text{while } (S \neq V) \{ \\ \xrightarrow{\log n} * \text{select } v_j \in V/S \text{ such that } dist[v_j] \text{ is min} * * O(n \log n) \\ * \text{add } v_j \text{ to } S \end{array} \right.$

→ * v_j که v_1 را با کمترین وزن به S متصل می‌کند به مجموعه میل‌های MST اضافه کن

* \rightarrow for every $v_k \in N(v_j)$
 $O(m \log n) \leftarrow \begin{array}{l} \text{if } (v_k \notin S \wedge \omega(v_j, v_k) < dist[v_k]) \\ \quad \underline{dist[v_k] = \omega(v_j, v_k)} \end{array} \rightarrow O(m)$

$O(n^2)$: for : ماتریس مجاورت - انتخاب کمینه با : Case 1
 $O(n^2 + m)$: " : لیست مجاورت - : Case 2



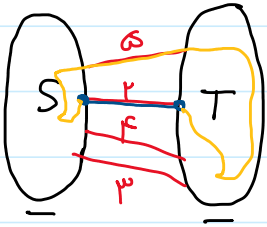
$O(n^2)$
 $O(m \log n)$: لیست مجاورت + انتخاب کمینه با هرم : Case 3
 $O(m + n \log n)$: " + " : Case 4
 استفاده از داده ساختار هیپ :

insert	decrease key	delete min
$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$ هرم
$O(1)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$ * هرم با نیویال
$O(1)$	$O(1)$	$O(\log n)$ * هرم فیبوناچی

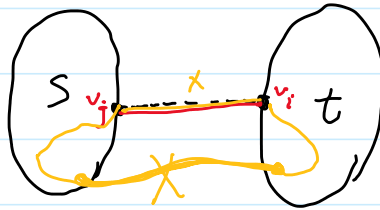
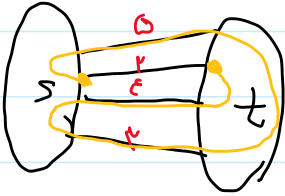
G

اثبات درستی Prim

** خاصیت مهم MST



ادعا: یال داخل cut با کمترین وزن
همیشه داخل MST هست.



_____ *