



طراحی الگوریتم‌ها

نیم‌سال دوم ۹۹-۰۰

مدرس: مسعود صدیقین

تمرین هفتم

مسئله‌ی ۱. دو مقداری (گراف)

گراف وزن‌دار، همبند و بدون جهت G با n راس و m یال را در نظر بگیرید که در آن وزن هر یال یکی از دو مقدار a یا b باشد. الگوریتمی از مرتبه $O(m)$ ارائه دهید که درخت پوشای کمینه G را پیدا کند.

مسئله‌ی ۲*. ترجمه کتاب (گراف)

یک کتاب به زبان فارسی داریم و می‌خواهیم آن را به n زبان دیگر ترجمه کنیم. قیمت ترجمه میان هر دو زبان را هم می‌دانیم (جهت اهمیتی ندارد). الگوریتمی چند جمله‌ای دهید که کمینه هزینه لازم برای ترجمه کتاب به بقیه زبان‌ها را محاسبه کند.

مسئله‌ی ۳*. هست یا نیست؟ (گراف)

یک گراف ساده وزن‌دار بدون جهت با n راس و m یال با وزنی مثبت و حداکثر w داریم. الگوریتمی کارا ارائه دهید که برای هر یال بررسی کند آیا داخل حداقل یک درخت پوشای کمینه است یا درون هیچ درخت پوشای کمینه‌ای نیست.

مسئله‌ی ۴*. تنهای بدبخت (گراف)

یک یال تنهای بدبخت است اگر در گراف همبند و وزن‌داری مانند G ، در هیچ یک از دورها حضور نیافته باشد. همچنین سنگین‌ترین یال گراف را یال پربار می‌نامیم.
الف) ثابت کنید هر یال تنهای بدبخت عضو درخت پوشای کمینه است.
ب) ثابت کنید هر یال پربار که تنها سنگین‌ترین یال یک دور باشد، عضو درخت پوشای کمینه نیست.

مسئله‌ی ۵. ایچ (گراف)

ایچ دانشجویی کر و کثیف است که هرگز حاضر به حمام رفتن نمی‌شود! وی n تا تیله با شماره‌های ۱ تا n دارد که آن‌ها بر خلاف خودش تمیزند و این موضوع باعث رنجش خاطر ایچ شده! لذا ایچ می‌خواهد m مرحله تیله‌بازی کند تا همه‌ی تیله‌ها در حالت جذاب قرار بگیرند! از نظر او یک حالت جذاب است اگر از هر دو تیله‌ی بهم چسبیده‌ای، دقیقاً یکی کثیف باشد، زیرا از نظر او این‌گونه کثیفی انتشار می‌یابد! بازی به این شکل است که او هر بار سعی می‌کند دو تیله‌ی متمایز را بهم بچسباند و تا زمانی که آن‌ها را از هم جدا نکند، آن دو کنار هم می‌مانند. او همواره سعی می‌کند جذابیت گوی‌ها حفظ شود و لذا اگر نتواند تیله‌های تمیز را کثیف و یا تیله‌های کثیف را تمیز کند طوری که شرط جذابیت آن‌ها رعایت شود، دو تیله‌ی دیگر را انتخاب می‌کند! تمیز یا کثیف کردن هر گوی نیز ۱ واحد ایچ را

خسته می‌کند. روشی به ایچ ارائه کنید که وی حداکثر $O((n + m) \log n)$ واحد خسته شود بلکه حال داشته باشد حمام کند!

مسئله‌ی ۶*. پایدار؟ (گراف)

الف) فرض کنید T ، درخت پوشای کمینه‌ی گراف G است. ثابت کنید اگر وزن یکی از یال‌های T را کاهش دهیم، باز هم T ، درخت پوشای کمینه‌ی گراف G باقی می‌ماند.
ب) فرض کنید این بار وزن یکی دیگر از یال‌های G را کاهش می‌دهیم، با این تفاوت که این یال عضو T نباشد. الگوریتمی برای یافتن درخت پوشای کمینه برای گراف تغییر یافته ارائه دهید.

مسئله‌ی ۷. راست یا دروغ؟ (گراف)

خاسپاخوف قهرمان شطرنج روسیه، در دفترچه‌ی خاطرات خود همواره جدول امتیازات نهایی هر مسابقه را به ترتیب امتیازات نوشته است اما به دلیلی خستگی، ریزنتایج مسابقات را ننوشته است! می‌دانیم که در بازی شطرنج، هر برد، تساوی و باخت به ترتیب ۲، ۱ و ۰ امتیاز دارند. الگوریتمی ارائه دهید که در صورت موجود بودن جدولی از نتایج مسابقات که با اعداد ثبت شده در دفترچه مطابقت داشتند، آن جدول را بیابد.

مسئله‌ی ۸*. گلوگاه (گراف)

فرض کنید G ، یک گراف ساده، همبند، وزن‌دار اما بی‌جهت با n راس و m یال باشد. عدد گلوگاهی این گراف، بزرگترین عددی است که بین هر دو راس از این گراف، مسیری موجود باشد که وزن همه‌ی یال‌های آن مسیر، حداقل به اندازه‌ی این عدد باشد. الگوریتمی با زمان اجرای $O(n + m \log n)$ ارائه دهید که عدد گلوگاهی گراف را بیابد.

مسئله‌ی ۹. ایزی (تطابق بیشینه)

ثابت کنید یک گراف دوبخشی مانند G تطابقی با سائز حداقل $\frac{E(G)}{\Delta(G)}$ دارد.

مسئله‌ی ۱۰*. ایزی-۲ (تطابق بیشینه)

الگوریتم حریصانه‌ای را جهت پیدا کردن تطابق در گراف دو بخشی در نظر بگیرید که در هر مرحله یک یال دلخواه را به تطابق افزوده و راس‌های دو سر آن را از گراف حذف می‌کند. نشان دهید اندازه تطابق خروجی این الگوریتم حداقل به میزان نصف تطابق بیشینه خواهد بود.

مسئله‌ی ۱۱. مجموعه مستقل بیشینه در گراف دوبخشی (تطابق بیشینه)

به مجموعه‌ای از رئوس که بین هیچ دوتایی‌شان یال وجود نداشته باشد یک مجموعه مستقل در گراف می‌گویند. یکی از مسائل جالب که برای گراف‌ها در حالت کلی NP-Hard است مسئله پیدا کردن ماکسیمم مجموعه مستقل است. اما در گراف‌های دوبخشی خوشبختانه این مسئله در زمان چندجمله‌ای به کمک بزرگترین تطابق قابل حل است.

الف) اگر اندازه بزرگترین مجموعه مستقل در گراف را α بنامیم و اندازه بزرگترین تطابق را α' بنامیم، نشان دهید در یک گراف G داریم: $\alpha \leq |V(G)| - \alpha'$

ب) فرض کنید یک تطابق بیشینه مثل M را در یک گراف دوبخشی به دست آورده ایم. الگوریتمی از $\mathcal{O}(|E(G)| + |V(G)|)$ ارائه دهید که مجموعه مستقلی با اندازه $|V(G)| - |M|$ بدهد و به کمک بخش قبل ثابت کنید این مجموعه مستقل بیشینه است.

ج) نشان دهید الگوریتمی از $\mathcal{O}(m\sqrt{n})$ برای به دست آوردن ماکسیمم مجموعه مستقل در گراف دوبخشی وجود دارد.

