طراحی الگوریتم‌ها

نیم‌سال دوم ۰۰ ـ ۹۹

مدرس: مسعود صدیقین

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین دوازدهم

مسئله‌ی ۱*. حل گرافیکی

برنامه ریزی خطی زیر را با استفاده از روش هندسی نشان داده و سپس آن را حل کنید.

$$\max. Z = ۱۲۰X + ۱۰۰Y \text{st.}$$
$$۲X + ۲/۵Y \leqslant ۱۰۰۰,$$
$$۳X + ۱/۵Y \leqslant ۱۲۰۰,$$
$$۱/۵X + ۴Y \leqslant ۱۲۰۰,$$
$$X, Y \geqslant ۰$$

مسئله‌ی ۲*. پوشش راسی (برنامه‌ریزی خطی)

آ) مسئله ی پوشش راسی وزن دار را به کمک برنامه‌ریزی خطی مدل کنید. در این مساله، هدف انتخاب تعدادی راس است به طوری که وزن راس‌های انتخاب شده کمینه شود و به ازای هر یال حداقل یکی از دو سر آن انتخاب شده باشد.

ب) نشان دهید اگر $(a_۱, a, \ldots, a_n)$ یک راس برای برنامه‌ریزی خطی بخش الف باشد آنگاه داریم:

$$a_i \in \left\{۰, \frac{۱}{۲}, ۱\right\} \quad \forall i \in \{۱, \ldots, n\}.$$

ج) آیا می‌توانید با استفاده از برنامه نوشته شده در قسمت قبل، یک الگوریتم تقریبی با ضریب تقریب ۲ برای مساله پوشش راسی وزن‌دار بدهید؟

مسئله‌ی ۳. برش بهینه (برنامه‌ریزی خطی)

گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ با وزن‌های نامنفی w_{ij} برای هر یال داده شده است. هدف انتخاب زیرمجموعه‌ای از رئوس به نام A است به نحوی که مجموع وزن یال‌هایی که از A به $V \setminus A$ جهت‌داراند کمینه گردد. مساله‌ی فوق را به کمک برنامه‌ریزی خطی مدل کنید.

مسئله‌ی ۴*. خط مناسب (برنامه‌ریزی خطی)

مجموعه‌ی P شامل n نقطه در صفحه داده شده است. می‌خواهیم خط ℓ را بیابیم طوری‌که بیشینه‌ی فاصله‌ی عمودی نقاط در P تا خط ℓ کمینه باشد. این مسئله را با تبدل به فرم یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی، حل کنید.

مسئله‌ی ۵*. چندضلعی ستاره‌ای (برنامه‌ریزی خطی)

چندضلعی ساده‌ی P را ستاره‌ای می‌نامیم اگر شامل نقطه‌ای مانند q باشد طوری‌که برای همه‌ی نقاط $p \in P$ پاره‌خط pq کاملاً داخل P قرار بگیرد. مسئله‌ی تشخیص ستاره‌ای بودن چندضلعی P را به کمک تبدیل به یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی حل کنید.

مسئله‌ی ۶*. مسابقه‌ی پیامکی (برنامه‌ریزی خطی)

در یک مسابقه ی پیامکی n سؤال در اختیار شرکت کنندگان قرار می‌گیرد که هر یک دارای امتیاز v_i و قیمت p_i است. برای پاسخ دادن به هر سؤال، ابتدا باید آن را خریداری کرد. برای رسیدن به مرحله ی قرعه کشی حداقلD امتیاز لازم است. هدف یافتن زیرمجموعه ای از سؤالات با کم ترین هزینه است که با پاسخ دادن به آن ها، حداقل D امتیاز به دست آید.

آ) یک برنامه‌ریزی خطی متفاوت از قسمت بعدی این سوال برای این مساله ارائه دهید.

ب) برنامه‌ریزی خطی زیر را برای این مساله در نظر بگیرید

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_{i=۱}^{n} p_i x_i \\ \text{to subject} & \sum_{i\in\{۱,\dots,n\}\setminus A} v_i^A x_i \geqslant D_A \quad \forall A \in S \\ & ۰ \leqslant x_i \leqslant ۱ \quad i = ۱, \dots, n \end{array}$$

که در آن S مجموعه ی همه ی زیرمجموعه هایی از سؤالات است که جمع امتیازشان کمتر از D است و $D_A = D - \sum_{i\in A} v_i$ و همچنین $v_i^A = \min(v_i, D_A)$. توضیح دهید که چرا محدودیت‌های فوق در این مساله برقرارند.

مسئله‌ی ۷. غذای مقوی (برنامه‌ریزی خطی)

مجموعه‌ی F شامل m نوع غذای $F_۱, F_۲, \dots, F_m$ و همچنین مجموعه‌ی V شامل n نوع ویتامین $V_۱, V_۲, \dots, V_n$ را در نظر بگیرید. فرض کنید c_j حداقل نیاز به مصرف روزانه‌ی ویتامین V_j و b_i هزینه‌ی هر واحد از غذای F_i و a_{ij} مقدار ویتامین V_j موجود در غذای F_i باشد. یک برنامه‌ی خطی (با تعریف متغیرهای مورد نیاز و تعیین تابع هدف و محدودیت‌ها) برای یک وعده غذا با کم‌ترین هزینه که همه‌ی ویتامین‌های موردنیاز را تأمین کند، بنویسید.

مسئله‌ی ۸. ایستگاه راداری (برنامه‌ریزی خطی)

قرار است برای مجموعه‌ای از n ایستگاه فضایی یک سیستم رادار برای ردیابی سفرهای فضایی فضاپیماها ساخته

شود. مکان ایستگاه فضایی شماره‌ی i را با نقطه‌ی سه‌بعدی (x_i, y_i, z_i) نشان می‌دهیم. همچنین ایستگاه فضایی شماره‌ی i مجهز به یک رادار با قدرت r_i خواهد بود.

می‌خواهیم قدرت رادار هر ایستگاه را طوری تعیین کنیم که هنگام انجام هر سفر بین دو ایستگاه توسط یک فضاپیما، این فضاپیما همواره در محدوده‌ی راداری ایستگاه اول و یا ایستگاه دوم باشد. یک رادار به قدرت r قادر به ردیابی فضاپیماهایی است که در محدوده‌ی یک کره به مرکز آن رادار به شعاع r از آن در حال حرکت هستند. پس یک فضاپیما هنگام سفر از ایستگاه i به ایستگاه j در محدوده‌ی راداری این دو ایستگاه قرار دارد اگر هر نقطه روی خط متصل کننده‌ی دو نقطه‌ی (x_i, y_i, z_i) و (x_j, y_j, z_j) داخل کره‌ی به شعاع r_i و مرکز (x_i, y_i, z_i) و یا داخل کره‌ی به شعاع r_j و مرکز (x_j, y_j, z_j) قرار گیرد.

هزینه‌ی هر رادار متناسب با قدرت آن است و می‌خواهیم با کم‌ترین هزینه همه‌ی ایستگاه‌ها را مجهز به رادار کنیم. ورودی مسئله مختصات n نقطه‌ی مربوط به ایستگاهای فضایی است و هدف یافتن مقادیر $r_۱, r_۲, \ldots, r_n$ است. این مسئله را با تبدیل به یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی حل کنید.

مسئله‌ی ۹*. تطابق (برنامه‌ریزی خطی)

مساله یافتن تطابق بیشینه در گراف‌های دوبخشی را به یاد آورید. حال برنامه نویسی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_{e\in E} x_e \\ \text{to subject} & \sum_{e\in N(v)} x_e \leqslant ۱ \quad \forall v \in V \\ & ۰ \leqslant x_e \leqslant ۱ \qquad \forall e \in E \end{array}$$

که در آن $N(v)$ مجموعه یال‌های مجاور v در گراف هستند. نشان دهید پاسخ برنامه نویسی خطی بالا برابر با تطابق بیشینه در گراف است. به عبارتی نشان دهید که برنامه نویسی خطی بالا یک جواب دارد که در آن مقدار هر x_e صفر یا یک است.