



ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۹۹-۰۰

مدرس: مسعود صدیقین

اصلاحیه‌ی راه حل سوال ۷ سری نهم

مسئله‌ی ۱. زیر مساله‌ها (شار بیشینه)

فرض کنید x و y دو راس از گراف جهت دار G باشند:

(آ) بیشینه‌ی تعداد مسیرهای جهت‌دار مجزا-یال از x به y در G برابر است با کمینه‌ی تعداد یال‌هایی که حذف آن‌ها تمام مسیرهای جهت‌دار از x به y را از بین می‌برد.

(ب) *بیشینه‌ی تعداد مسیرهای جهت‌دار مجزا-راس درونی از x به y در G برابر است با کمینه‌ی تعداد راس‌هایی که حذف آن‌ها تمام مسیرهای جهت‌دار از x به y را از بین می‌برد.

حل.

▷

(آ) برای حل این قسمت کافیت راس‌های x و y را به عنوان راس‌های مبدا و مقصد گرفته و سپس ظرفیت همه‌ی یال‌ها را برابر یک قرار می‌دهیم. حال الگوریتم شار بیشینه را روی گراف مربوطه اجرا کرده و در هر دور اجرای این الگوریتم که مسیری افزایشی از مبدا به مقصد پیدا می‌شود تمام یال‌های آن از گراف حذف می‌شوند لذا مسیرهای مذکور در انتهای الگوریتم مسیرهایی مجزا یال خواهند بود و میدانیم الگوریتم شار بیشینه تعداد کمینه‌ی این مسیرها را به دست می‌دهد. از ظرفی می‌دانیم الگوریتم شار بیشینه معادل یافتن برش کمینه است و برش کمینه بین مبدا و مقصد به این معنی است که حذف آن‌ها راس‌های مبدا و مقصد را از یکدیگر جدا می‌کند لذا حکم سوال نتیجه می‌گردد.

(ب) برای حل این بخش گراف جدیدی از روی گراف اصلی G می‌سازیم به این صورت که به ازای هر راس u دو راس u' و u'' و بین آن‌ها یالی قرار می‌دهیم که از u' به u'' جهت‌دار است. حال به ازای هر یالی که در گراف اصلی به راس u وارد می‌شود یک یال به u' وارد و به ازای هر یال خروجی از u یک یال از u'' خارج می‌شود. حال اگر وزن تمامی یال‌ها را معادل یک قرار دهیم هر مسیر مجزا یال در گراف جدید یک مسیر مجزا راس درونی در گراف اصلی خواهد بود. حال باید ثابت کرد که کمینه‌ی یال‌هایی که حذف آن‌ها تمامی مسیرهای مجزا یال را در گراف جدید حذف می‌کند برابر حداقل تعداد رئوسی است که حذف آن‌ها در گراف اصلی راس‌های x و y را از هم جدا می‌کند. برای اثبات این نکته کافی است بتوانیم هر کدام از مسیرهای مجزا یال گراف جدید را با یک یال u' به u'' متناظر کنیم. این کار نیز امکان‌پذیر است زیرا u' به u'' های متفاوت هستند لذا هر کدام از مسیرهای مجزا یال در گراف جدید را میتوان به صورت گفته شده متناظر کرد. حال می‌دانیم حذف یک یال u' به u'' در گراف جدید معادل حذف u در گراف اصلی است. لذا بیشینه‌ی تعداد مسیرهای مجزا یال در گراف جدید که با شار بیشینه به دست می‌آید معادل بیشینه تعداد رئوسی است که حذف آن‌ها در گراف اصلی تمام مسیرهای مجزا یال درونی را از بین می‌برد.