



توضیحات:

- برای پاسخ به سوالات تا ساعت ۱۸ مهلت دارید.
- پاسخ هر کدام از سوالات را بر روی یک برگه جداگانه بنویسید.
- بر روی هر برگ نام و نام خانوادگی و شماره دانشجویی درج شده باشد.
- پاسخ‌های خود را در کوثر آپلود کنید.
- بعد از ساعت ۴ در طول آزمون اگر سوالی داشتید می‌توانید به **این** لینک گوگل میتینگ وارد شوید.

مسئله‌ی ۱. سه صدق‌پذیری (۳۰ نمره)

فرض کنید می‌دانیم مساله $SAT - 3$ یک مساله $NP - complete$ است. در این صورت نشان دهید که مساله دور همیلتونی در گراف جهت‌دار نیز یک مساله $NP - complete$ است.

مسئله‌ی ۲. پوشش راسی (۳۰ نمره)

الف) (۲۰ نمره) مسئله‌ی پوشش راسی وزن دار را به کمک برنامه‌ریزی خطی مدل کنید. در این مساله، هدف انتخاب تعدادی راس است به طوری که وزن راس‌های انتخاب شده کمینه شود و به ازای هر یال حداقل یکی از دو سر آن انتخاب شده باشد. نشان دهید یک پاسخ بهینه (a_1, a_2, \dots, a_n) برای برنامه خطی وجود دارد که در آن

$$a_i \in \left\{0, \frac{1}{3}, 1\right\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

ب) (۱۰ نمره) آیا می‌توانید با استفاده از برنامه نوشته شده در قسمت قبل، یک الگوریتم تقریبی با ضریب تقریب ۲ برای مساله پوشش راسی وزن دار بدهید؟

مسئله‌ی ۳. میانگی (۴۰ نمره)

مجموعه V از اشیا را داریم. همچنین یک تعداد محدودیت به صورت $x \rightarrow (y, z)$ داریم که به این معنی است که شیء x باید بین اشیای y و z باشد. هدف قرار دادن اشیا در یک ردیف است به گونه‌ای که تعداد محدودیت‌های ارضا شده بیشینه شود.

الف) (۵ نمره) فرض کنید می‌دانیم که دنباله‌ای وجود دارد که همه محدودیت‌های داده شده را ارضا می‌کند. در این صورت نشان دهید شیء x ای وجود دارد که به ازای آن هیچ محدودیتی به شکل $x \rightarrow (y, z)$ وجود ندارد.

ب) (۳۵ نمره) الگوریتم چند جمله‌ای پیدا کنید که با فرض این که می‌دانیم که همه محدودیت‌ها قابل ارضا هستند، یک ترتیب خطی از اشیا بدهد که حداقل نیمی از محدودیت‌ها را ارضا کند. هر چقدر الگوریتم شما سریع‌تر باشد نمره بیشتری می‌گیرید.

مسئله‌ی ۴. پاسخ‌های نه چندان بلند (۴۰ نمره)

در مورد هر کدام از این گزاره‌ها پاسخی نه چندان بلند بدهید:

الف) (۱۰ نمره) رشته‌ای مثال بزنید که آرایه مربوط به پیش پردازش آن در الگوریتم KMP به صورت زیر باشد:

۰, ۱, ۲, ۰, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴

- ب) (۱۰ نمره) با فرض این که می‌دانیم که مساله یافتن خوشه بیشینه، یک مساله $NP - Complete$ است، می‌توان ادعا کرد که این مساله هیچ الگوریتم $FPTAS$ ندارد.
- ج) (۱۰ نمره) آیا همان استدلال قسمت الف شما برای $PTAS$ نیز صادق است؟
- د) (۱۰ نمره) مساله پیدا کردن بزرگترین مجموعه مستقل در گراف دو بخشی یک مساله $NP - complete$ است.

مسئله ۵. جدول بزرگ (۲۰ نمره)

این سوال امتیازی است و تا زمان ۲۰ تیرماه امکان ارسال پاسخ برای آن وجود دارد.

یک جدول $\infty \times \infty$ داریم که تعداد متناهی از خانه‌های آن سیاه و مابقی سفید هستند. در هر مرحله می‌توانیم یک زیرجدول از آن را انتخاب کنیم و رنگ تمام خانه‌های آن را برعکس کنیم. هدف این است که با کمترین تعداد استفاده از این عمل رنگ تمام خانه‌های جدول سفید بشود. برای این کار یک الگوریتم تقریبی با تقریب ۳ ارائه دهید.