



طراحی الگوریتم‌ها

نیم‌سال دوم ۹۹-۰۰

مدرس: مسعود صدیقین

تمرین پنجم

مسئله ۱*. درخت دی‌پی (برنامه‌نویسی پویا)

فرض کنید یک درخت ریشه‌دار داریم که هر راس v در آن ارزش w_i دارد. می‌خواهیم یک زیرمجموعه از رئوس آن را انتخاب کنیم، به طوری که هیچ دو راس v_i و v_j در آن وجود نداشته باشد که v_i پدر v_j باشد (یا فرزند آن باشد). یک الگوریتم کارا ارائه دهید که زیرمجموعه با بیشترین مجموع ارزش رئوس^۱ را پیدا کند.

مسئله ۲*. جزیره (برنامه‌نویسی پویا)

در جزیره‌ای که قلقلی در آن ساکن است، n غار وجود دارد که از کدام به دیگری حداقل یک مسیر تونلی جهت‌دار وجود دارد. او تصمیم گرفته که از غار v به غار v_n برود اما چون دمدمی مزاج است، اگر در غار v_i باشد به احتمال $p_{i,j}$ تونل بین v_i و v_j را انتخاب می‌کند (هر تونل جهت‌دار، دو غار را متصل می‌کند). می‌دانیم که جمع احتمال تونل‌های خروجی از هر غار برابر با ۱ است و او از غار تکراری عبور نمی‌کند. احتمال محتمل‌ترین مسیری که در نهایت قلقلی انتخاب می‌کند را پیدا کنید.

مسئله ۳*. سکه‌های یگانه (برنامه‌نویسی پویا)

فرض کنید که n نوع سکه با ارزش‌های متمایز $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ و به تعدادهای $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ داریم. تعداد روش‌های خرد کردن k تومان با این سکه‌ها را در پیچیدگی زمانی $O(n \times k)$ بدست بیاورید^۲.

مسئله ۴*. زیرمجموعه خوب ۱ (برنامه‌نویسی پویا)

فرض کنید n شیء داریم که هر کدام یک وزن مشخص دارند. به زیرمجموعه‌ای از اشیاء زیرمجموعه خوب گفته می‌شود اگر بتوان چند شیء دیگر را به آن اضافه کرد تا وزن کل اشیاء برابر با k شود. برای هر زیرمجموعه خوب A_i با اشیاء t_1, t_2, \dots, t_l را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$S_i = \sum_{j=1}^n w_{t_j}$$

تمامی مقادیر ممکن S_i را با پیچیدگی زمانی $O(n \times k^2)$ به دست بیاورید^۳.

^۱ $\sum_{i=1}^n w_i$
^۲ دقت کنید که مقدار n برابر با تعداد کل سکه‌ها نیست بلکه نشان دهنده تعداد نوع سکه‌هاست.
^۳ یعنی تمامی S_i های ممکن که یک زیر مجموعه خوب می‌تواند داشته باشد.

مسئله‌ی ۵. زیرمجموعه خوب ۲ (برنامه‌نویسی پویا)

فرض کنید که در سوال قبل علاوه بر وزن، قیمت اشیاء نیز به ما داده شده است (قیمت‌ها می‌توانند منفی هم باشند). S_i زیرمجموعه خوب با بیشترین مجموع قیمت را در پیچیدگی زمانی $O(n \times k)$ بدست بیاورید.

مسئله‌ی ۶. سکه‌های سپهر (برنامه‌نویسی پویا)

تعدادی سکه داریم که در یک ردیف پشت سرهم چیده شده‌اند و سکه i ام دارای ارزش c_i است. دو نفر این سکه‌ها را بر می‌دارند به طوری که نفر اول یک سکه برمی‌دارد و نفر دوم باید سکه قبلی و بعدی سکه برداشته شده را بردارد. نفر اول یک محدودیت هم دارد که جمع ارزش سکه‌هایی که برمی‌دارد نباید بیشتر از k باشد. بیشترین مقداری که نفر اول می‌تواند برد چقدر است؟

مسئله‌ی ۷. فیلم باز (برنامه‌نویسی پویا)

غلی فردی فیلم باز است که روزانه L دقیقه فیلم به صورت متوالی می‌بیند. در حال حاضر n فیلم در سینما اکران می‌شود که مدت زمان فیلم i ام l_i دقیقه است و در کل c_i بار پخش می‌شود. همچنین زمان‌های پخش فیلم i ام $t_i[0], t_i[1], \dots, t_i[c_i - 1]$ است. از آن که حوصله‌ی غلی سریعاً سر می‌رود، ممکن است هر لحظه در میانه‌ی یک فیلم، دیدن آن را رها کند و از سالن بیرون برود اما در این صورت دیگر نمی‌تواند تا انتهای فیلم به سالن اکران آن بازگردد زیرا مسئول سالن با دیدن دوباره‌ی یک فرد به شدت عصبانی می‌شود. همچنین او می‌تواند هر زمانی دیدن یک فیلم را شروع کند و لازم نیست از اول فیلم در سالن حضور داشته باشد. الگوریتمی با مرتبه زمانی $O(n \times \log(\max(c_i)) \times 2^n)$ ارائه دهید که غلی با استفاده از آن بتواند تشخیص دهد می‌تواند از زمان 0 تا زمان L به صورت متوالی فیلم ببیند یا خیر.

مسئله‌ی ۸. سرکیف (برنامه‌نویسی پویا)

کوروش از کودکی آدم سرکیفی است و همواره علاقه به تعریف کردن خاطرات خوش خود داشته است. او دوستان خود را برای صرف شام به خانه‌ی خود دعوت کرده و برای آن‌ها یک بازی تدارک دیده است! بازی او به این صورت است که از دوستان خود می‌خواهد هر یک در یکی از خانه‌های یک جدول $m \times n$ بایستند و کوروش از یکی از خانه‌های ستون اول با انتخاب خود شروع می‌کند و در آن خانه، میتواند به مقدار گنجایش هر شخص برای او از سرکیفی‌های خود تعریف کند. سپس کوروش میتواند دو حرکت انجام دهد، یا به خانه‌ی راست و بالا یا به خانه‌ی راست و پایین خانه‌ای که در حال حاضر در آن است برود (حرکات کوروش قطری هستند) و شروع به گفتن خاطرات خود کند. الگوریتمی در زمان $O(mn)$ ارائه دهید که کوروش با استفاده از آن بتواند بیشترین مقدار خاطره را برای دوستان خود تعریف کند. توجه کنید که تعداد دوستان کوروش mn است و او گنجایش هر یک از دوستان خود که یک عدد طبیعی است را می‌داند.

مسئله‌ی ۹*. نجاری مش حسن (برنامه‌نویسی پویا)

مش حسن در نجاری خود یک تکه چوب دارد که می‌خواهد آن را به n قسمت تقسیم کند. او دستگاهی دارد که به کمک آن می‌تواند یک تکه چوب را با هزینه‌ی c_k به k قسمت تقسیم کند. کمترین هزینه‌ای که مش حسن می‌تواند با آن مقدار چوبش را به n قسمت تقسیم کند، بدست آورید.

