طراحی الگوریتم‌ها

بهار ۱۴۰۰

مدرس: مسعود صدیقین

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

یادآوری جلسه بیست‌وششم | الگوریتم‌های تقریبی | گردآورنده: زهرا فاضل

در جلسه قبل با الگوریتم‌های تقریبی آشنا شدیم و مسائل پوشش رأسی و پوشش رأسی وزن‌دار را بررسی کردیم.

در مبحث پیچیدگی محاسباتی دانستیم که بعضی از مسائل الگوریتم چندجمله‌ای ندارند و در دسته NP قرار می‌گیرند. برای حل این مسائل می‌توانیم از روش‌های هیوریستیک و الگوریتم‌های تقریبی استفاده کنیم.

در الگوریتم‌های تقریبی نشان می‌دهیم که جواب نهایی حداکثر $a$ برابر جواب بهینه است. نمونه‌ای از الگوریتم تقریبی، الگوریتم حریصانه با دقت ۰/۵ برای مسئله کوله‌پشتی است که در جلسه یازدهم آشنا شدیم.

## مسئله پوشش رأسی

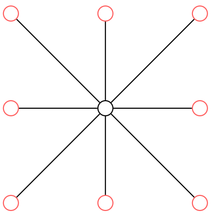
گراف G داده‌شده‌است. می‌خواهیم کمترین تعداد رأس را انتخاب کنیم که به ازای هر یال حداقل یکی از دو سر آن انتخاب شده‌باشد. می‌دانیم که این مسئله در دسته NP قرار دارد و الگوریتم چندجمله‌ای برای آن نداریم. برای این مسئله دو الگوریتم با تقریب‌های ۲ و $\log n$ داریم.

۱. الگوریتم با تقریب ۲

(آ) با $S = \emptyset$ شروع می‌کنیم.

(ب) در هر مرحله یالی را که تاکنون توسط مجموعه S پوشیده‌نشده‌است، انتخاب کرده و دو رأس سر آن را به $S$ اضافه می‌کنیم.

برای اثبات درستی الگوریتم فرض کنیم $e_1$، $e_2$، ...، $e_k$ یال‌هایی باشند که در مراحل مختلف انتخاب شده‌اند. این یال‌ها تشکیل یک تطابق می‌دهند و بنابراین $|S| = 2k$. اندازه جواب بهینه بزرگ‌تر یا مساوی با $k$ است زیرا باید یال‌های $e_1$، $e_2$، ...، $e_k$ را پوشش دهد. بنابراین اندازه خروجی الگوریتم حداکثر ۲ برابر اندازه جواب بهینه است.



دقت کنید که نمی‌توان یکی از دو سر از یال انتخابی در هر مرحله را به $S$ اضافه کرد زیرا ممکن است همه رئوس پوشش داده‌نشوند. مثالی از این حالت در شکل روبه‌رو آمده‌است.

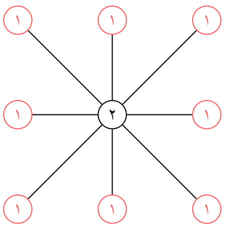
۲. الگوریتم با تقریب $\log n$

(آ) با $S = \emptyset$ شروع می‌کنیم.

(ب) در هر مرحله رأس با درجه ماکزیمم را که تاکنون توسط مجموعه S پوشیده‌نشده‌است، انتخاب کرده به $S$ اضافه می‌کنیم. سپس یال‌های مجاور آن رأس را حذف می‌کنیم.

## مسئله پوشش رأسی وزن‌دار

گراف G داده‌شده‌است که هر رأس دارای یک وزن است. می‌خواهیم رئوس با کمینه مجموع وزن را انتخاب کنیم به‌گونه‌ای که به ازای هر یال حداقل یکی از دو سر آن انتخاب شده‌باشد.




الگوریتم حریصانه در این حالت پاسخ درست برنمی‌گرداند. مثالی از این حالت در شکل روبه‌رو آمده‌است.

این مسئله را می‌توان به شکل یک مسئله برنامه‌نویسی صحیح نوشت.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & \forall (i,j) \in E : x_i + x_j \geq 1 \\ & \forall 1 \leq i \leq n : x_i \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

برای ارائه الگوریتم تقریبی برای این مسئله از برنامه‌نویسی خطی استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & \forall (i,j) \in E : x_i + x_j \geq 1 \\ & \forall 1 \leq i \leq n : 0 \leq x_i \leq 1 \end{aligned} \tag{1}$$

در جواب برنامه‌نویسی خطی ۱ مقدار $x_i$ها لزوما ۰ یا ۱ نیست. برای تبدیل جواب اعشاری به جواب ۱ ـ ۰، یک مقدار $\alpha$ در نظر گرفته و اگر $x_i \geq \alpha$ بود، آن را برابر ۱ قرار می‌دهیم و در غیر این صورت آن را ۰ می‌گذاریم.

شرط $\forall (i,j) \in E : x_i + x_j \geq 1$ ایجاب می‌کند که حداقل یکی از دو سر هر یال انتخاب شود.

جواب الگوریتم حداکثر دو برابر جواب ۱ است و جواب ۱ کوچک‌تر یا مساوی با جواب بهینه است. بنابراین جواب الگوریتم حداکثر ۲ برابر جواب بهینه است.