جلسه بیست و سوم

13:22 Tuesday, May 25, 2021

موضوع: پیچیدگی محاسباتی.

زمان چندجمله ای: $n \leftarrow n,\ n\log n,\ n^2,\ n^3$ (و به ازای k ثابت n^k) ، $n^3 \log^5 n$

polynomial

مثال هایی از مسائل که برای آن ها راه حل چندجمله ای تاکنون ارائه شده:

×	✓
longest path	shortest path
max cut	min cut
3-SAT	2-SAT
factoring	primality check
→ Integer linear programming	→ linear programming

تکنیک کاهش: مساله X در زمان چندجمله ای به مساله Y کاهش پیدا کند اگر بتوان مساله X را در زمان چندجمله ای توسط یک oracle که مساله Y را در زمان چندجمله ای حل می کند حل کرد.

$X \rightarrow$ [تبدیل به مساله Y] $\rightarrow$ [Y] $\rightarrow$ [تبدیل به جواب X] $\rightarrow$

در زمان چندجمله‌ای ، در زمان چندجمله‌ای ، در زمان چندجمله‌ای

چندجمله‌ای

$$X \leq_P Y$$

اگر $X \leq_P Y$ ، آنگاه

اگر Y در زمان چندجمله‌ای حل شود، آنگاه X هم در زمان چندجمله ای حل می شود

اگر X در زمان چندجمله‌ای حل نشود، آنگاه Y نیز حل نخواهد شد.

$$X \equiv_P Y \Leftarrow Y \leq_P X \text{ و } X \leq_P Y$$

مثال ۱) پوشش راسی و مجموعه مستقل:

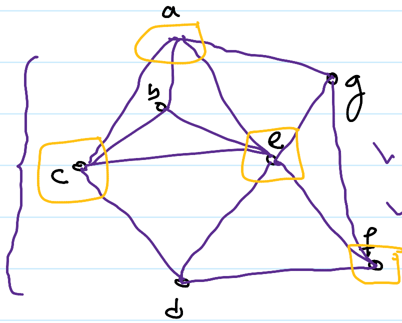
$\Sigma \quad S$

مجموعه مستقل: گراف G و یک عدد k داده شده است. آیا یک زیرمجموعه

IS

مجموعه مستقل : گراف G و یک عدد k داده شده است. آیا یک زیرمجموعه با اندازه k (یا کمتر) از راس ها وجود دارد که هیچ یالی بین آن ها نباشد

VC :	
NO	$1=k$
NO	$2=k$
NO	$3=k$
feac Yes	$4=k$
Yes	$5=k$
Yes	$6=k$
⋮	⋮



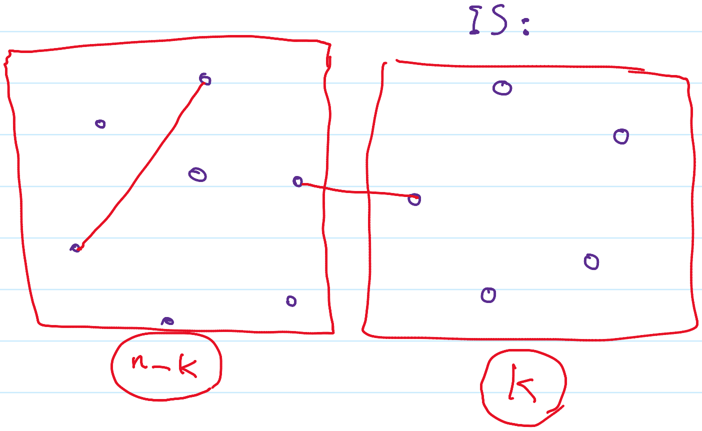
IS	
yes	$1=k$
yes	$2=k$
yes	$3=k$
NO	$4=k$
NO	$5=k$
NO	$6=k$
⋮	

مساله پوشش راسی : آیا یک زیرمجموعه از راس ها با اندازه k وجود دارد که هر یال حداقل یک سرش در این زیرمجموعه باشد؟ VC

قضیه Independent set $\equiv_p$ Vertex cover

اثبات) اگر یک IS با اندازه k داشته باشیم، آنگاه یک مجموعه VC با اندازه $n-k$ داریم

IS :



بنابراین : آیا یک IS با اندازه k داریم $\equiv$ آیا یک VC با اندازه $n-k$ داریم؟

" VC " k " $\equiv$ " IS " $n-k$ " ؟

بنابراین $IS \equiv_p VC$

مثال ۲) پوشش مجموعه ای Set_Cover

پوشش مجموعه ای : یک مجموعه U شامل m عضو داده شده است. همچنین تعدادی زیرمجموعه S_n و ... و S_2 و S_1 از U داده شده است. آیا می توان k تا (یا کمتر) از

پوشش مجموعه‌ای: یک مجموعه U شامل m عضو داده شده است. همچنین تعدادی زیرمجموعه $S_1, S_2, \dots, S_n$ از U داده شده است. آیا می‌توان k تا (یا کمتر) از این زیر مجموعه‌ها را انتخاب کرد، به طوری که اجتماع آن‌ها برابر U شود.

مثال:

$U = \{1, 2, \dots, 7\}$

$S_1 = \{3, 7\}$

$\checkmark\ S_2 = \{3, 4, 5, 6\}$

$S_3 = \{1\}$

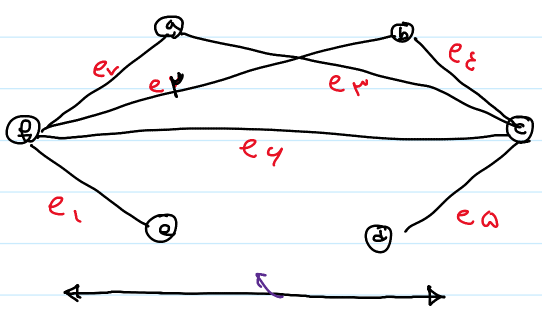
$S_4 = \{2, 4\}$

$S_5 = \{5\}$

$\checkmark\ S_6 = \{1, 2, 3, 6, 7\}$

$k=1$	no
$k=2$	yes
$k=3$	"
$k=4$	"
⋮	

قضیه: vertex cover $\leq_P$ set cover



$U = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_7\}$

$S_a = \{e_7, e_3\}$

$S_f = \{e_7, e_2, e_6, e_1\}$

$S_e = \{e_1\}$

⋮

در نتیجه: آیا VC با اندازه k وجود دارد $\Leftarrow$ آیا یک SC با اندازه k وجود دارد؟

$$VC \leq_P \text{Set cover}$$

$$\boxed{\text{set cover} \leq_P VC} \ ?$$

$$IS \equiv_P VC \leq_P \text{Setcover}$$

$$IS \leq_P \text{Setcover}$$

مثال ۳: 3_SAT :

n تا متغیر داریم $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ [بولین]

یک عبارت بولین به صورت CNF :

$$\phi = \underbrace{(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)}_{\text{claus}} \wedge \underbrace{(x_2 \vee \bar{x}_5 \vee \bar{x}_7)} \wedge \underbrace{(x_4 \vee x_5 \vee x_6)} \dots$$

تعداد جمله ها m تا.

آیا یک مقدار دهی به متغیرها وجود دارد که ϕ را True کند.

$$\phi = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4)$$

$x_1 = 1$	$x_1 = 0$
$x_2 = 1$	$x_2 = 0$
$x_3 = 1$	$x_4 = 1$
$x_4 = 1$	$x_3 = 0$

$0 = \bar{x}_1 \Leftrightarrow 1 = x_1$

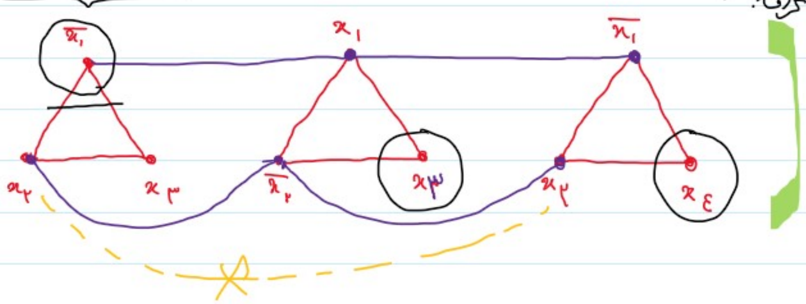
.yes

قضیه: $3SAT \leq_p IS$

$$\phi = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4)$$

گراف با

IS



لم) گزاره ϕ قابل ارضاست اگر و تنها اگر گراف معادل آن یک مجموعه مستقل با اندازه ...۳... داشته باشد.

* از هر مثلث ۱ راس انتخاب می شود.
* اگر یک x_i در مجموعه مستقل باشد، هیچ $\bar{x}_i$ ای در مجموعه مستقل نخواهد بود و برعکس

مقدار دهی معادل مجموعه مستقل مشخص شده:

$x_1 = 0 \rightarrow \bar{x} = 1$

مقدار دهی معادل مجموعه مستقل مشخص شده :

$x_1 = 0 \longrightarrow \bar{x}_1 = 1$

$x_3 = 1 \longrightarrow$ گزاره دوم

$x_4 = 1 \longrightarrow$ گزاره سوم

x_2 : مهم نیست.

(۰) ۸۱۲

$$3SAT \leq_P IS \equiv_P VC \leq_P SC$$