



طراحی الگوریتم‌ها

نیم‌سال دوم ۱۴۰۰-۱۳۹۹

مدرس: مسعود صدیقین

تمرین دهم

مسئله‌ی ۱*. یک جور خوبی

گراف وزن دار و جهت دار $G = (V, E)$ و رئوس s و t از این گراف داده شده است. می‌دانیم اگر راس t را از این گراف حذف کنیم، از راس s به هر راسی مانند u دقیقاً یک مسیر باقی خواهد ماند و راس u به راس s مسیری نخواهد داشت. با این فرض، الگوریتمی از مرتبه‌ی زمانی $O(n + m)$ ارائه دهید که شار بیشینه از s به t را در این گراف پیدا کند.

مسئله‌ی ۲*. کم و کم و کم تر

گراف جهت دار G با n راس و m یال را در نظر بگیرید و فرض کنید که به هر راس یک وزن نامنفی نسبت داده‌ایم. دو راس دلخواه u و v داده شده است. الگوریتمی از مرتبه‌ی زمانی $O(nm^2)$ ارائه کنید که زیرمجموعه‌ای از رئوس با مجموع وزن کمینه را پیدا کند طوری که حذف آن زیرمجموعه، تمام مسیرهای بین u و v را از بین ببرد.

مسئله‌ی ۳*. سفرتون آزاد!

در یک کشور n شهر داریم که بین آن‌ها m جاده وجود دارد. یک مأمور سرشماری در یک روز تعداد افراد حاضر در هر شهر را می‌شمارد و لیستی که تهیه کرده را به شما می‌دهد. فردای آن روز یک مأمور دیگر همین کار را انجام می‌دهد و لیست دیگری به شما می‌دهد. اگر بدانیم مأمور اول اشتباه نکرده است و همچنین بدانیم طی این یک روز افراد یا در شهر خود مانده‌اند و یا به یکی از شهرهای مجاور آن شهر رفته‌اند، الگوریتمی از مرتبه‌ی $O(nm^2)$ طراحی کنید که تعیین کند آیا مأمور دوم اشتباه کرده است یا خیر و درستی الگوریتم خود را اثبات کنید.

مسئله‌ی ۴*. زیرگراف

گراف ساده و بدون جهت $G = (V, E)$ داده شده است. هر راس این گراف دارای وزن a_i و هر یال آن نیز دارای وزن w_i می‌باشد. یک زیرگراف از گراف G زیرمجموعه‌ای از رئوس و یال‌های آن است بطوریکه دو سر همه‌ی یال‌های انتخابی در مجموعه رئوس انتخاب شده قرار داشته باشد. وزن یک زیرگراف برابر است با مجموع وزن یال‌های آن منهای مجموع وزن راس‌های آن. می‌خواهیم زیرگرافی را انتخاب کنیم که بیشترین وزن ممکن را داشته باشد. الگوریتمی از مرتبه‌ی $O(|V|^2|E|)$ برای این مساله ارائه دهید.

مسئله‌ی ۵*. مسیر جدا

گراف وزن دار با وزن‌های طبیعی و بدون جهت G و دو رأس s و t از رئوس G داده شده است. می‌خواهیم در این گراف دو مسیر متمایز از s به t بیابیم، طوری که این دو مسیر در هیچ یالی مشترک نباشند. و همچنین وزن هر کدام

برابر با وزن کوتاهترین مسیر از s به t باشد. دقت کنید که این دو مسیر می‌توانند در یک یا چند رأس مشترک باشند. با کمک مسئله‌ی شار بیشینه، الگوریتمی برای پیدا کردن این دو مسیر ارائه دهید.

مسئله‌ی ۶*. زیرگراف بیشینه

گراف وزن‌دار و بدون جهت G را در نظر بگیرید. در این گراف به هر رأس و هر یال وزنی طبیعی و کمتر از C نسبت داده شده‌است. برای هر زیرگراف مثل H در G ، وزن H را مجموع وزن یال‌های H منهای مجموع وزن رأس‌های H تعریف می‌کنیم. (بدیهی است که اگر یال e در زیرگراف H باشد، آنگاه حتماً رأس‌های ابتدا و انتهای e نیز در زیرگراف هستند) با کمک الگوریتم شار بیشینه، الگوریتمی ارائه دهید که زیرگرافی با وزن بیشینه در گراف G را بیابد.

مسئله‌ی ۷. یال‌های اضافی

در یک شبکه جریان داده شده، رأس منبع s دارای یال‌های ورودی است. ثابت کنید که نیازی به این یال‌ها نیست. یا به عبارتی دیگر، ثابت کنید جریان بیشینه‌ی f^* وجود دارد که $\forall u \in V : f^*(u, s) = 0$

