



ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۹۹-۰۰

مدرس: مسعود صدیقین

سؤالات سری اول

مسئله‌ی ۱*. تیکه سنگین (تقسیم و حل)

آرایه‌ای به طول n از اعداد صحیح داده شده است. زیرآرایه‌ای با اعضای متوالی در آرایه اصلی را طوری بیابید که جمع اعضای آن در بین تمام چنین زیرآرایه‌هایی، بیشینه باشد.

مسئله‌ی ۲*. قطعی (مرتب‌سازی)

ثابت کنید کمینه زمان لازم برای حل مساله پوش محدب در بدترین حالت، $\Omega(n \log n)$ است.

مسئله‌ی ۳*. سؤال پنجم (تقسیم و حل)

می‌دانیم یک آرایه صعودی مرتب شده با n عضو وجود داشته است. اما دوستان این آرایه را k خانه آن را شیف‌ت دوری داده است. الگوریتمی با مرتبه $O(n)$ ارائه دهید که مقدار k را بیابد. به عنوان مثال آرایه اولیه

$[5, 19, 113, 2745, 3159, 4000]$

را در نظر بگیرید. اگر مقدار k را ۳ در نظر بگیریم، به

$[2745, 3159, 4000, 5, 19, 113]$

تبدیل می‌شود.

مسئله‌ی ۴*. برش کیک (تقسیم و حل)

در این بخش، مساله برش کیک را بررسی می‌کنیم. فرض کنید یک کیک مستطیل شکل داریم که آن را به صورت بازه $[0, 1]$ مدل می‌کنیم. همچنین n بازیکن داریم، و هر بازیکن p_i یک تابع ارزش f_i دارد که در حقیقت میزان رضایت این بازیکن را از قسمت‌های مختلف کیک نشان می‌دهد. این تابع دارای خاصیت‌های زیر می‌باشد:

• بازیکن p_i بازه بین a تا b ($0 \leq a \leq b \leq 1$) را به اندازه \int_a^b دوست دارد.

• هر بازیکن کل کیک را به اندازه یک دوست دارد: $\int_0^1 f_i(x) dx = 1$

• تابع f_i همه جا مثبت است.

توجه کنید که به ازای دو بازیکن متفاوت p_i و p_j ، توابع f_i و f_j لزوماً شبیه یکدیگر نیستند. حال، هدف این است که کیک را بین این بازیکن به گونه ای تقسیم کنیم که ارزش قطعه ای که به هر فرد میرسد، برای او حداقل به میزان $1/n$ باشد. همچنین فرض کنید که ما از توابع افراد اطلاع نداریم و تنهای می توانیم از پرسش های زیر جهت به دست آوردن توابع ارزش افراد استفاده کنیم:

- $eval_i(a, b)$: از بازیکن i ام سوال می کند که بازه بین a تا b را به چه اندازه دوست دارد.
- $cut_i(a, v)$: از بازیکن i ام می خواهد که نقطه b را مشخص کند، به گونه ای که ارزش بازه (a, b) برای او برابر با v است.

الف) روشی ارائه دهید که با $O(n^2)$ پرسمان این کار را انجام دهد.
 ب) روشی ارائه دهید که با $(n \log n)$ پرسمان این کار را انجام دهد.

مسئله ۵*. ضرب سوباسا (تقسیم و حل)

۲ عدد n بیتی به صورت دو آرایه با اندازه n داده شده است. الگوریتمی ارائه دهید که این دو عدد را در زمان $O(n^{1/6})$ در هم ضرب کنید.

مسئله ۶. سریع تر (تقسیم و حل)

چند جمله ای با درجه $n - 1$ زیر را در نظر بگیرید.

$$A(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x^1 + a_n$$

می دانیم معادله $x^n = 1$ ، n ریشه دارد که آن ها را ریشه های واحد می نامیم. اگر این ریشه ها w_0, w_1, \dots, w_{n-1} باشند، مقدار $A(w_i)$ ها را در زمان $O(n \log n)$ بیابید. برای اطلاع بیشتر راجع به محاسبات اعداد مختلط و ریشه های واحد، می توانید توضیحات این معادله که به تبدیل فوریه گسسته^۱ معروف است را مطالعه کنید.

مسئله ۷. نقاط خوب (تقسیم و حل)

روی یک صفحه مختصات n نقطه مشخص شده است. به یک وضعیت از n نقطه خوب گوییم اگر به ازای هر جفت نقطه مثل (x, y) و (x', y') یکی از سه شرط زیر برقرار باشد:

$$x = x' \quad \bullet$$

$$y = y' \quad \bullet$$

- نقطه ای دیگری چون (x'', y'') موجود باشد به طوری که

$$\min(x, x') \leq x'' \leq \max(x, x')$$

^۱ (DFT) Transform Fourier Discrete

و

$$\min(y, y') \leq y'' \leq \max(y, y').$$

می‌خواهیم تعدادی نقطه به مجموعه نقاط اضافه کنیم تا در انتها به یک وضعیت خوب برسیم؛ الگوریتمی طراحی کنید که در زمان $O(n \log n)$ به مقدار $O(n \log n)$ نقطه به این نقاط اضافه کند طوری که در انتها یک وضعیت خوب از نقاط داشته باشیم.

مسئله‌ی ۸. شمارش وارونگی (مرتب‌سازی درجی)

آرایه‌ی $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ از n عدد مجزا داده شده است. به زوج مرتب (i, j) یک وارونگی می‌گوییم هرگاه داشته باشیم $i \leq j$ و $a_i \geq a_j$. تعداد جفت‌های وارونه در آرایه A را محاسبه کنید.

