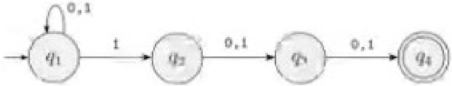
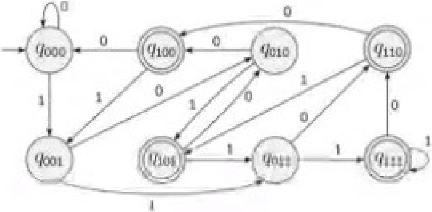
۲. فرض کنید زبان L شامل رشته‌هایی از صفر و یک است که سومین حرف از آخرشان یک باشد. برای مثال ۰۰۰۱۰۰ عضو L است اما ۰۰۱۱ عضو L نمی‌باشد.برای زبان L:

الف) یک ماشین حالت متناهی غیرقطعی ارائه دهید.

ب) یک ماشین حالت متناهی قطعی ارائه دهید.





۳. فرض کنید A زبان تک‌رشته‌ای متشکل از رشته‌ی S باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$s = \begin{cases} ۱ & \text{اگر روزی در مریخ موجود زنده پیدا شود} \\ ۰ & \text{اگر هیچگاه در مریخ موجود زنده‌ای پیدا نشود} \end{cases} \qquad (۱)$$

آیا این زبان تصمیم‌پذیر است؟ چرا؟

حل.

زبان A بالاخره یک از دو حالت $\{۰\}$ و یا $\{۱\}$ است. در هر صورت متناهی است و در نتیجه تصمیم‌پذیر است. هرچند ما جوابش را نمی‌دانیم (احتمالا!) و نمی‌توانیم برای آن یک ماشین تصمیم‌گیرنده توصیف کنیم. ولی می‌توانیم دو ماشین تورینگ ارائه دهیم که حتما یکی از آنها برای این زبان تصمیم‌گیرنده باشد.

▷

۴. نشان‌دهید مجموعه‌ی زبان‌های تصمیم‌پذیر نسبت به عمل اجتماع گیری بسته‌است.

حل.
برای زبان‌های تصمیم‌پذیر L_1، L_2 فرض کنید M_1، M_2 ماشین‌های تورینگی باشند که آنها را تصمیم می‌گیرند.
اکنون ماشین تورینگ M' را به گونه‌ای می‌سازیم که اجتماع آنها را تصمیم بگیرد. برای هر رشته‌ی ورودی مانند w:

(آ) ماشین M_1 را روی این رشته اجرا کن. اگر تایید کرد، تایید کن.
(ب) همین کار را با ماشین M_2 انجام بده. اگر تایید کرد تایید کن. وگرنه رد کن.

۵. اگر زبان A منظم باشد، نشان‌دهید که زبان زیر نیز منظم است:

$$\{w \in A | w \text{ is not the proper prefix of any string in A}\}$$

که منظور از زیررشته‌ی سالم [1] زیررشته‌ای است که برابر خود رشته نباشد. مثلا برای رشته‌ی $abcd$ رشته‌ی abc یک زیررشته‌ی سالم است ولی $abcd$ نیست.

حل.
برای زبان A یک ماشین حالت متناهی غیرقطعی در نظر بگیرید. حال آن را به گونه‌ای تغییر می‌دهیم که به زبان جدید برسیم. برای هر حالت تایید فعلی مانند S یک حالت تایید جدید اضافه کنیم و S را به یال ϵ به آن ببریم. همچنین S را به حالت عادی تبدیل کنیم. به این صورت هر بار که به یک حالت تایید می‌رسیم، ممکن نیست که در طول مسیر از حالت تایید دیگری رد شده باشیم و در نتیجه هیچ رشته‌ی دیگری در زبان نیست که زیررشته‌ی سالم رشته‌ی ما باشد.

▷

۶. با استفاده از لم پمپاژ نشان دهید که زبان زیر منظم نیست:

(آ) $\{a^{۲n} | n \geqslant ۰\}$

حل.
مقدار p را به عنوان طول پمپاژ در نظر بگیرید. اکنون با استفاده از رشته‌ی $a^{۲p}$ سوال را حل می‌کنیم. آن را به فرم xyz می‌توان نوشت به طوری که xy^iz عضو زبان باشد. همچنین لم پمپاژ به ما می‌گوید که $p \leqslant |xy|$. و از آنجا که $p < ۲^p$ است، نتیجه می‌گیریم $|y| < ۲^p$. همچنین می‌دانیم که $|y| > ۱$ و در نتیجه $۲^p < |xyyz| < ۲^{p+۱}$ که نتاقض است.

▷

حل.

از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید که زبان داده شده منظم باشد. همچنین فرض کنید که طولی که لم پمپاژ به ما می‌دهد برابر P باشد. اکنون رشته‌ی $0^p1^p2^p$ را در نظر بگیرید. چون این رشته عضو زبان است، و همچنین از آنجایی که طولش از p بیشتر است، لم پمپاژ ضمانت می‌کند که آن را می‌توان به سه قسمت مانند xyz تقسیم کرد به طوری که برای هر $i \geqslant 0$ رشته‌ی xy^iz عضو زبان باشد. اکنون حالات مختلف ممکن برای y را در نظر بگیرید و با استفاده از آن حکم را اثبات کنید.

▷

۸. در نظر بگیرید که $\Sigma = \{a, b\}$ می‌باشد. حال اثبات کنید که زبان زیر منظم نمی‌باشد.

$$L = \{w \in \Sigma^* : n_a(w) < n_b(w)\}$$

حل. فرض کنید که طول پمپاژ را m در نظر بگیریم. با توجه به آزادی کامل، $w = a^m b^{m+1}$ در نظر می‌گیریم . در این صورت باید $y = a^k \ : 1 \leqslant k \leqslant m$ باشد .حال کافیست $i = 2$ را در نظر بگیریم تا $w_2 = a^{m+k} b^{m+1}$ که در L موجود نمی‌باشد. ▷

۹. نشان دهید زبان زیر منظم نیست.

$$L = \{(ab)^n a^k \mid n > k \geqslant ۰\}$$

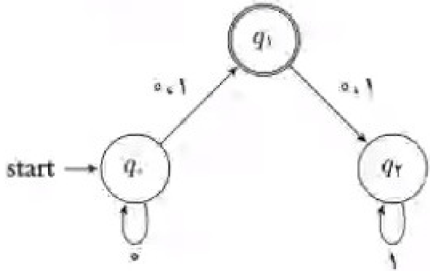
حل. فرض کنید که طول پمپاژ را m در نظر بگیریم. با توجه به آزادی کامل، $w = (ab)^{m+۱} a^m$ در نظر می‌گیریم. با توجه به شرط $|xy| \leqslant m$ باید x و y هر دو بخشی از قسمت شامل ab باشند. حال هر y انتخاب شود به صورت $a^l b^k$ خواهد بود که $k \geqslant ۰$، $l \geqslant ۰$. به سادگی می‌توان فهمید برای هر l و k کافیست $i = ۰$ در نظر گرفته شود تا نشان دهیم در L موجود نیستند. ▷

۱۰. ثابت کنید که هر ماشین حالت متناهی غیرقطعی دلخواه قابل تبدیل به یک ماشین حالت متناهی غیرقطعی معادل با یک حالت تایید است.

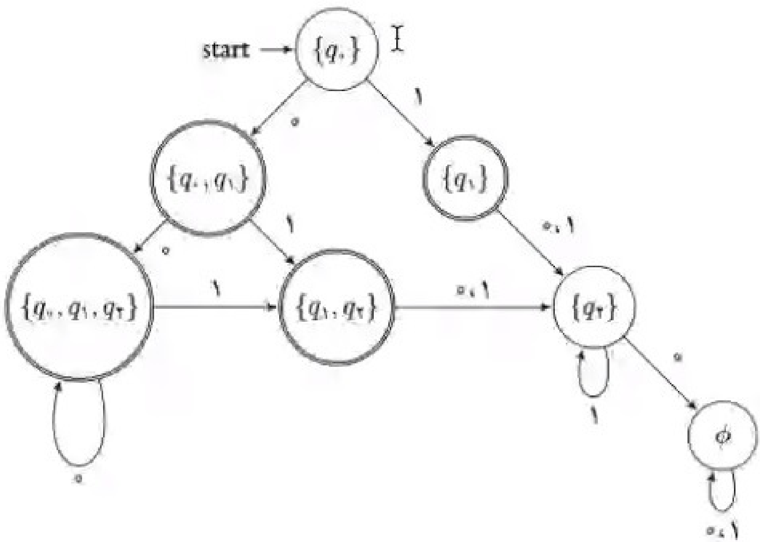
حل.
به این صورت ماشین حالت متناهی غیرقطعی جدید را می‌سازیم که ابتدا یک حالت تایید جدید اضافه می‌کنیم. سپس تمام حالات تایید قبلی را به حالت عادی تبدیل کرده و آنها را با یال ε به حالت تایید جدیدی که اضافه کرده‌ایم می‌بریم.

▷

۱۱. ماشین حالت متناهی غیرقطعی زیر را به یک ماشین حالت متناهی قطعی متناظر تبدیل کنید.

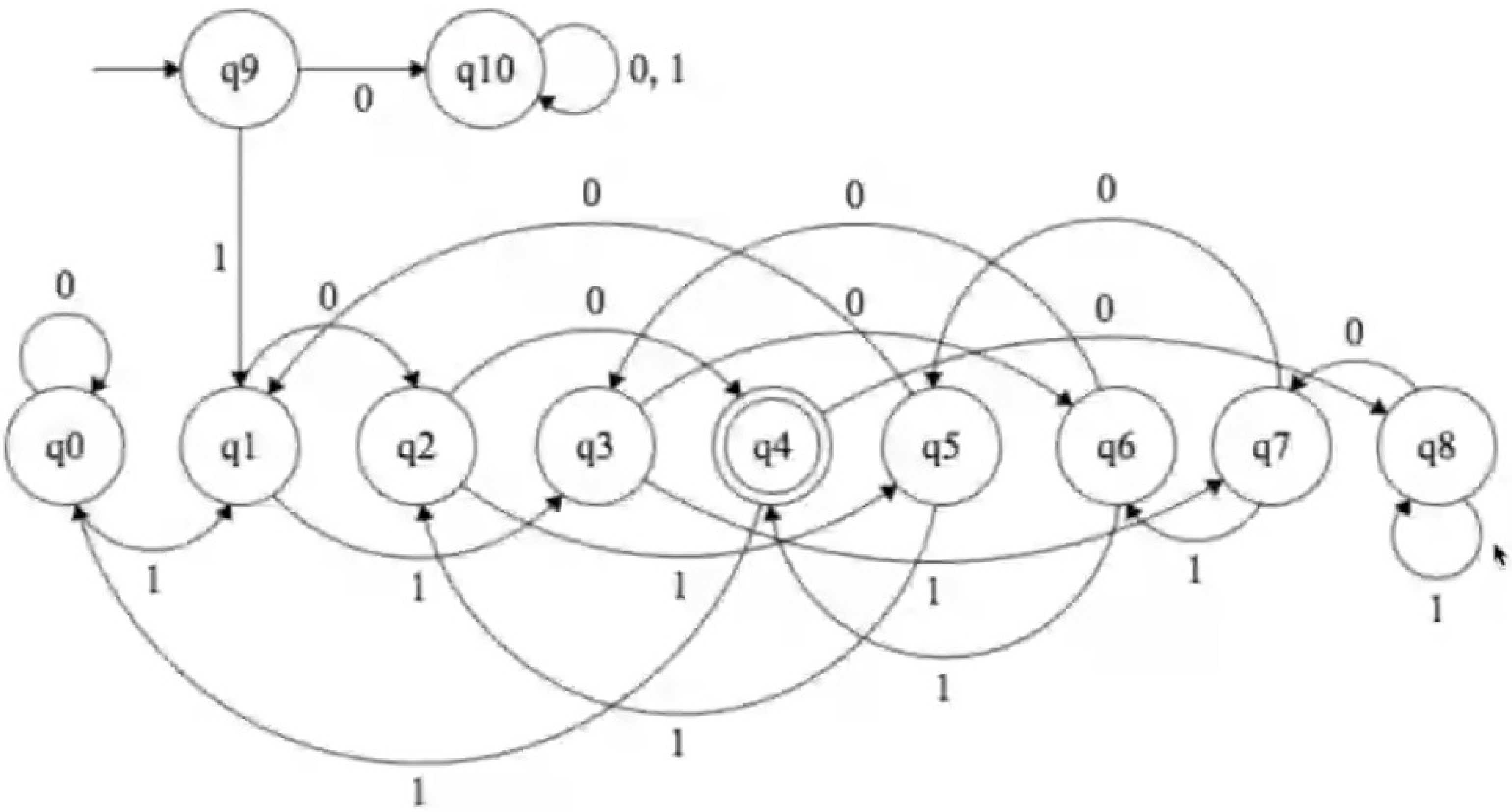


حل.



۱۳. یک ماشین حالت متناهی رسم کنید که تمام رشته‌های دودویی که باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد متناظر آنها به ۹ برابر ۴ است را بپذیرد. فرض کنید بیت‌های عدد به ترتیب از پرارزش به کم‌ارزش به ماشین داده می‌شوند. رشته‌هایی که با صفر شروع می‌شوند مورد قبول نیستند.

حل.



۱۵. فرض کنید یک ماشین تورینگ تک‌نویس، ماشین تورینگی باشد که هر خانه‌ی نوار را بتواند حداکثر یکبار تغییر دهد (شامل قسمت ورودی نوار). نشان‌دهید که این نوع از ماشین‌های تورینگ، از نظر قدرت با ماشین‌های تورینگ معمولی معادل‌اند.

حل.

ابتدا با یک راهنمایی شروع می‌کنیم. اول سعی کنید حالتی را در نظر بگیرید که بتوان در هر خانه‌ی نوار، حداکثر دو بار نوشت (ماشین تورینگ دونویس). از تعداد زیادی نوار استفاده کنید. حال به حل سوال می‌پردازیم. ابتدا نشان می‌دهیم که ماشین تورینگ دونویس با ماشین تورینگ معمولی معادل است. به این صورت عمل می‌کنیم که در هر گام، تمام محتوای فعلی نوار را به یک قسمت دست نخورده در سمت راست نوار منتقل می‌کنیم. در حین انقال اعمال لازم را انجام می‌دهیم و هر خانه را که منتقل می‌کنیم، علامتش می‌زنیم. پس هر خانه حداکثر دو بار تغییر کرده است. یک‌بار با کپی کردن مقادیر داخل آن و یک‌بار با علامت خوردنش. حال برای آن که نشان دهیم ماشین تورینگ دو نویس با ماشین تورینگ تک‌نویس معادل است، مانند سابق عمل می‌کنیم. با این تفاوت که برای هر خانه از نوار قبلی، اینجا دو خانه در نظر می‌گیریم. اولی برای نگه داشتن نمادی است که در نوار قبلی بوده است. دومی برای نگه داشتن این که آیا آن خانه علامت خورده است یا خیر.

▷

۱۶. یک تورینگ ماشین طراحی کنید که زبان زیر را قبول کند.

$$L = \{a^n b^n : n \geqslant ۱\}$$

حل. این‌گونه عمل می‌کنیم که با شروع از چپ‌ترین a، آن را با یک نماد مانند x جایگزین می‌کنیم. سپس سر نوار را آن قدر به سمت راست می‌بریم تا به چپ‌ترین b برسیم. آن را هم با یک نماد مانند y جایگزین می‌کنیم. دوباره به چپ برگشته، چپ‌ترین a را با x جایگزین کرده و دوباره به راست می‌رویم. این‌کار را مرتبا تکرار می‌کنیم. در واقع با این کار داریم به ازای هر a یک b را پیدا می‌کنیم و بالعکس. اگر بعد از مدتی نه a باقی بماند و نه b، پس رشته مورد نظر در زبان L موجود می‌باشد:

$$Q = \{q_۰, q_۱, q_۲, q_۳, q_۴\}, F = \{q_۴\}, \Sigma = \{a, b\} \Gamma = \{a, b, x, y, \square\}$$

$$\delta(q_۰, a) = (q_۱, x, R), \delta(q_۱, a) = (q_۱, a, R), \delta(q_۱, y) = (q_۱, y, R), \delta(q_۱, b) = (q_۲, y, L)$$

$$\delta(q_۰, y) = (q_۳, y, R), \delta(q_۳, y) = (q_۳, y, R), \delta(q_۳, \square) = (q_۴, \square, R)$$

$$\delta(q_۲, y) = (q_۲, y, L), \delta(q_۲, a) = (q_۲, a, L), \delta(q_۲, x) = (q_۰, x, R)$$