ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۹۹–۹۸

مدرس: حمید ضرابی‌زاده

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری پنجم — اصل لانه‌کبوتری — مبحث آزمون ۲

۱. ثابت کنید در هر مجموعه از ۱۶ عدد طبیعی متفاوت کوچک‌تر از ۱۰۰ همواره می‌توان چهار عدد متمایز مانند a, b, c, d پیدا کرد طوری که $a + b = c + d$.

۲. ۲۸ تیم در یک دوره مسابقات فوتبال شرکت کرده‌اند.(هر دو تیم یک بار باهم بازی کردند.) در هر مسابقه به برنده ۲، به بازنده صفر و در صورت تساوی یک امتیاز به طرفین تعلق گرفت. بیش از ٪۷۵ بازی‌ها مساوی شده‌اند. ثابت کنید دو تیم وجود دارند که امتیازشان برابر است.

۳. یک چندضلعی محدب با ۲۰۰۰ رأس داده شده است. هیچ سه قطری از این چندضلعی نقطه‌ی مشترکی (درون چندضلعی) ندارند. هر یک از قطرها با یکی از ۹۹۹ رنگ، رنگ‌آمیزی شده‌اند. ثابت کنید مثلثی وجود دارد که اضلاع آن روی سه قطر همرنگ قرار دارند. (لزومی ندارد که راس‌های مثلث از راس‌های چندضلعی باشند.)

۴. عددهای طبیعی $a_1, a_2, \ldots$ چنان‌اند که برای هر n، $a_n < 2n$ و در ضمن $a_1 < a_2 < \cdots$. ثابت کنید هر عدد طبیعی برابر یکی از جملات این دنباله یا برابر تفاضل دو جمله از آن است.

۵. برای مجموعه‌های R، S و T از اعداد، مجموعه‌های $\{r + s \mid r \in R, s \in S\}$ و $\{2t \mid t \in T\}$ را به ترتیب با $R + S$ و $2T$ نشان می‌دهیم. فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از مجموعه‌ی $\{1, 2, \ldots, n\}$ باشند. ثابت کنید مجموعه‌ی D وجود دارد طوری که $D + D \subset 2(A + B)$ و $|D| \geqslant \frac{|A||B|}{2n-1}$.

۶. فرض کنید $a_1, a_2, \ldots, a_n$ دنباله‌ای دلخواه از عددهای صحیح مثبت باشد ($n \geqslant 5$). ثابت کنید همواره می‌توان زیردنباله‌ای انتخاب کرده و عضوهایش را با هم جمع یا تفریق کرد به گونه‌ای که حاصل مضربی از n^2 باشد.

۷. اعضای یک انجمن بین‌المللی از ۶ کشور گوناگون هستند. لیست اعضا شامل ۱۹۷۸ نفر است که با $1, 2, \ldots, 1978$ شماره‌گذاری شده‌اند. ثابت کنید حداقل یک عضو وجود دارد به گونه‌ای که شماره‌ی او برابر مجموع شماره‌های دو عضو از کشور خودش یا دو برابر عضوی از کشور خودش باشد.

۸. $n + 2$ عدد از مجموعه‌ی $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ داده شده‌اند ($n > 1$). ثابت کنید در بین این اعداد دو عدد یافت می‌شود که تفاضل آن‌ها از n بزرگتر و از $2n$ کوچکتر است.

۹. فرض کنید $k^3 < n$ و رئوس یک $3n$ـ‌ضلعی منتظم با k رنگ، رنگ شده باشند. ثابت کنید دو مثلث متساوی‌الاضلاع می‌توان یافت که رئوس آن‌ها طبق الگویی یکسان رنگ شده باشند.

۱۰. هر عدد طبیعی با یکی از k رنگ، رنگ‌آمیزی شده است. ثابت کنید اعداد متمایز و همرنگ a, b, c, d وجود دارند طوری که $ad = bc$، $\frac{b}{a}$ توانی از ۲ و $\frac{c}{a}$ توانی از ۳ باشد.

۱۱. تعدادی دایره با شعاع‌های نامعلوم درون مربعی به ضلع واحد قرار گرفته‌اند. می‌دانیم مجموع محیط‌های تمام دایره‌ها برابر ۱۰ واحد است. ثابت کنید می‌توان خطی عمود بر یکی از اضلاع مربع رسم کرد که حداقل ۴ دایره را قطع کند.

۱۲. ۱۷ نقطه در صفحه قرار دارند که هیچ سه تا از آن‌ها هم‌خط نیستند. خطوط وصل‌کننده بین هر دو تا از این نقاط را با یکی از رنگ‌های آبی، سبز و قرمز رنگ کرده‌ایم. نشان دهید در بین مثلث‌های به‌وجودآمده، مثلثی هست که همه‌ی اضلاع آن همرنگ هستند.

۱۳. در یک مهمانی حداقل ۱۰ نفر حضور دارند. نشان دهید یا ۳ نفر دوبه‌دو آشنا و یا ۴ نفر دوبه‌دو غریبه وجود دارد.

۱۴. در یک بازی هر شرکت‌کننده با پر کردن تعدادی کارت در بازی شرکت می‌کند. پر کردن یک کارت به این معنا است که فرد ۴ عدد در بین اعداد ۱ تا ۱۶ انتخاب کرده و روی کارت بنویسد. بعد از تحویل کارت‌ها توسط شرکت‌کنندگان، ۴ عدد تصادفی بین ۱ تا ۱۶ انتخاب می‌شود. کارتی برنده است که شامل هیچ‌کدام از این اعداد نباشد. ثابت کنید اگر فردی ۶ کارت را پر کرده باشد، همیشه این احتمال وجود دارد که هیچ‌کدام از آن کارت‌ها برنده نشود.

۱۵. فردی هر روز حداقل یک فنجان قهوه می‌نوشد. هم‌چنین در بازه‌ای یک ساله حداکثر ۵۰۰ فنجان قهوه می‌نوشد. ثابت کنید تعدادی روز متوالی وجود دارد که این فرد در طی آنها دقیقا ۱۰۰ فنجان قهوه خورده است.

۱۶. یک جدول ۱۰ در ۱۰ با اعداد صحیح مثبت در نظر بگیرید به طوری‌که هر دو عدد مجاور حداکثر ۵ واحد با هم اختلاف داشته باشند. نشان دهید دو عدد برابر در جدول وجود دارد.

۱۷. در دو طرف خیابانی ۱۸ چراغ برق در دو ردیف ۹ تایی مقابل هم نصب شده‌اند. فاصله بین دو چراغ متوالی ۵۰ متر و عرض خیابان ۱۰ متر است. بعضی چراغ‌ها خاموش شده‌اند، اما در فاصله‌ی کمتر از ۶۰ متر از هر چراغ خاموش حداکثر ۳ چراغ خاموش دیگر وجود دارد. تعداد چراغ‌های خاموش حداکثر چندتا است؟

۱۸. فرض کنید X مجموعه‌ی تمام عددهای طبیعی نابیش‌تر از ۱۹۹۷ باشد که توانی از ۲ نیستند و A زیرمجموعه‌ای ۹۹۷ عضوی از X باشد. ثابت کنید دو عضو x و y در A وجود دارند طوری که $x+y$ توانی از ۲ است.

۱۹. هر دو نفر در یک تورنمنت شطرنج دو بار با هم بازی می‌کنند، یک بار یکی با مهره‌ی سفید و دیگری سیاه و بار دیگر برعکس. در پایان امتیاز همه افراد برابر شده است. در شطرنج برد، مساوی و باخت به ترتیب یک، نیم و صفر امتیاز دارد. ثابت کنید دو نفر وجود دارند که تعداد برد آنها در بازی‌هایی که با مهره‌ی سفید انجام داده‌اند برابر است.

۲۰. سه مدرسه هر یک ۲۰۰ دانش‌آموز دارند. هر دانش‌آموز در هر مدرسه حداقل یک دوست دارد. مجموعه‌ی E شامل ۳۰۰ دانش‌آموز وجود دارد که برای هر مدرسه‌ی S و هر دو دانش‌آموز $x, y \in E$ که در S قرار ندارند، تعداد دوستان x و y در S برابر نیست. ثابت کنید ۳ دانش‌آموز، از هر مدرسه یک نفر، وجود دارند که دوبه‌دو با هم دوست باشند.