مسئله‌ی ۱. سوالات کوتاه [۲۱ نمره]

درستی یا نادرستی عبارات زیر را با کشیدن دایره دور حروف «د» و «ن» در هر سطر مشخص کنید.

۱) **د ن** مجموعه‌ی $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : ۲x + y \in \mathbb{N},\ x - ۲y \in \mathbb{N}\}$ ناشمارا است.

۲) **د ن** اگر تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$ را نوشته و اعضای آن‌ها را با هم جمع کنیم عدد به‌دست‌آمده برابر با $۲^{n-۱}\binom{n}{۲}$ خواهد بود.

۳) **د ن** ۵ توپ مشابه را به صورت تصادفی در ۵ جعبه قرار می‌دهیم. احتمال این که دقیقا دو جعبه خالی بماند کم‌تر از $\frac{۴}{۱۰}$ است.

۴) **د ن** تعداد روش‌هایی که می‌توان دو زیرمجموعه‌ی مجزای ناتهی از یک مجموعه‌ی n عضوی را به صورت یک دوتایی مرتب انتخاب کرد برابر با $۳^n - ۲^{n+۱} + ۱$ است.

۵) **د ن** تابعی یک‌به‌یک و پوشا مثل $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ وجود دارد که به ازای هر $x \in \mathbb{N}$ داریم $f(x) > x$.

۶) **د ن** اگر مجموعه‌ی A شمارا باشد، تعداد تناظرهای یک‌به‌یک قابل تعریف روی A نیز شمارا است.

۷) **د ن** فرض کنید P و Q ترکیبی از گزاره‌های ساده‌ی $p_۱, p_۲, \ldots, p_n$ باشند و S_P و S_Q مجموعه‌ی همه‌ی انتساب‌های ممکن مقادیر True و False به $p_۱, p_۲, \ldots, p_n$ باشد به گونه‌ای که به ترتیب P و Q برابر True شوند. اگر بدانیم $P \Rightarrow Q$ آن گاه داریم $S_P \subseteq S_Q$.

مسئله‌ی ۲. شطرنج [۱۴ نمره]

فرض کنید گزاره‌نمای $P(i, j)$ زمانی درست است که خانه‌ی واقع در سطر i و ستون j از یک صفحه‌ی شطرنجی اشغال شده است. با استفاده از این گزاره‌نما و عملگرهای منطقی، عبارات زیر را بازنویسی کنید.

الف) در هر سطر از صفحه حداقل دو خانه اشغال شده است.

ب) اگر در یک سطر خانه‌ای اشغال شده بود، در تمام سطرهای بالای آن نیز خانه‌ای اشغال شده است.

مسئله‌ی ۳. تغییر جهت [۲۵ نمره]

مورچه‌ای قصد دارد از گوشه‌ی پایین سمت چپ یک مستطیل $m \times n$ با دنباله‌ای از حرکات به سمت راست یا بالا، به گوشه‌ی بالای سمت راست مستطیل برسد. مورچه به چند شکل می‌تواند این کار را انجام دهد اگر تصمیم بگیرد که در طول مسیر حداقل ۴ بار تغییر جهت داشته باشد.

مسئله‌ی ۴. مثبت و منفی [۲۵ نمره]

فرض کنید $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ عددهای صحیح مثبت باشند، طوری که به ازای هر $۱ \leqslant k \leqslant n$، داریم $a_k \leqslant k$. همچنین می‌دانیم $a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$ عددی زوج است. با استفاده از استقرا ثابت کنید انتخابی از علامت‌های مثبت و منفی وجود دارد طوری که $a_۱ \pm a_۲ \pm \cdots \pm a_n = ۰$.

مسئله‌ی ۵. توابع متناوب [۲۵ نمره]

تابع $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ را متناوب می‌نامیم اگر عددی مانند $m \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد، طوری که برای هر $x \in \mathbb{Z}$ داشته باشیم $h(x+m) = h(x)$. نشان دهید مجموعه‌ی توابع متناوب روی $\mathbb{Z}$ شمارا است.