Sets and Functions

Sunday, March 15, 2020 1:27 PM

به نام خدا

مجموعه
توابع
کاردینالیتی

مجموعه

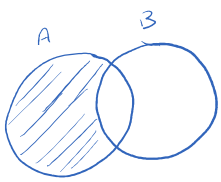
گردایه‌ای نامرتب از اشیاء متمایز

مثال: $\{۱, ۲, ۳\}$

مجموعه‌های ویژه

- مجموعه‌های اعداد: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ، $\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, \dots\}$
- مجموعه توانی: $P(A) = \{S : S \subseteq A\}$

عملگرهای مجموعه‌ای



نمودار ون
(Venn)

اجتماع: $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

اشتراک: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

تفاضل: $A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
$= A \cap \overline{B}$

متمم: $\bar{A} = \{x \in U : x \notin A\}$
$= U - A$

مجموعه مرجع

ضرب دکارتی: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

خواص

$$A \subseteq B \equiv \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$A = B \equiv \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

قوانین مجموعه‌ها

TABLE 1 Set Identities.

Identity	*Name*	
$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$	Identity laws	همانی
$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	Domination laws	غلبه
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Idempotent laws	خودتوانی
$\overline{(\overline{A})} = A$	Complementation law	متمم گیری
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Commutative laws	جابجایی
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Associative laws	شرکت پذیری
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributive laws	توزیع پذیری
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	De Morgan's laws	دمورگان
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Absorption laws	جذب
$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$	Complement laws	متمم

مثال نشان دهید $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

اثبات: با استفاده از تعریف مجموعه‌ها و قانون دمورگان منطق

$$
\begin{aligned}
x \in \overline{A \cup B} &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\
&\Leftrightarrow \neg (x \in A \cup B) \\
&\Leftrightarrow \neg (x \in A \lor x \in B) \\
&\Leftrightarrow \neg (x \in A) \land \neg (x \in B) \\
&\Leftrightarrow x \in \overline{A} \land x \in \overline{B} \\
&\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}
\end{aligned}
$$

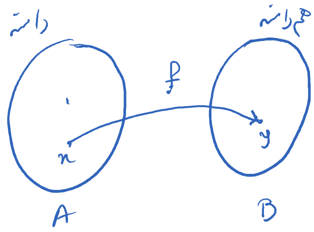
اصل خوش ترتیبی

هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از اعداد طبیعی دارای یک کوچک‌ترین عضو است.

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x > ۱۰\}$$

نکته اصل خوش ترتیبی هم ارز اصل استقرا (ضعیف/قوی) است.

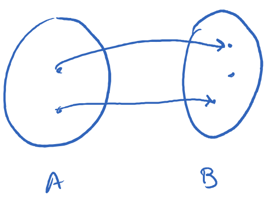
تابع یک تابع $f: A \to B$ به هر عضو مجموعه‌ی A دقیقاً یک عضو از مجموعه‌ی B را نسبت می‌دهد.



f برد $= \{y : \exists x : f(x)=y\}$

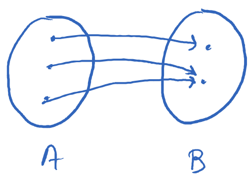
انواع تابع

- یک به یک



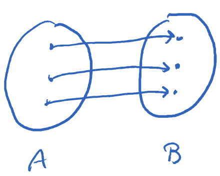
$$x \neq y \to f(x) \neq f(y)$$

- پوشا



$$\forall y \in B \ \exists x \in A : f(x) = y$$

- تناظر یک به یک : یک به یک و پوشا



کاردینالیتی

تعداد عناصر مجموعه‌ی A را کاردینالیتی A نامیم

با $|A|$ نمایش می‌دهیم.

تعریف

$|A|=|B|$ اگر یک تناظر یک‌به‌یک بین A و B باشد.

$|A|\leq|B|$ اگر یک تابع یک‌به‌یک از A به B باشد.

مثال

مجموعه‌ی اعداد فرد مثبت

$$A: 1, 3, 5, 7, \dots$$

$$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \downarrow \quad \updownarrow$$

$$\mathbb{N}: 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \dots$$

$$|A| \leq |\mathbb{N}| \qquad f(n) = n$$

$$|A| = |\mathbb{N}| \qquad f(n) = \frac{n+1}{2}$$

تعریف مجموعه‌ی A شمارا است اگر یا متناهی باشد،

یا هم‌اندازه‌ی مجموعه‌ی اعداد طبیعی باشد. [بتوان آن را شمرد]

در غیر این صورت ناشمارا است.

مجموعه‌های شمارا

- اعداد طبیعی $\mathbb{N}$
- اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ $\quad 0, 1, -1, 2, -2, \dots$
- اعداد گویا $\mathbb{Q}$

1	2	3	4	5	$\dots$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\dots$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	

$$\begin{matrix} (1,1) & (2,1) & (3,1) & \cdots \\ (1,2) & (2,2) & (3,2) & \cdots \\ (1,3) & (2,3) & (3,3) & \end{matrix}$$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ -

قضیه $\mathbb{R}$ ناشمارا است.

اثبات برهان خلف. فرض کنید اعداد بین $[0,1)$ شمارا است.

در نتیجه می‌توان آن‌ها را به ترتیب زیر فهرست کرد:

$r_1 : 0.d_{11} d_{12} d_{13} \cdots$

$r_2 : 0.d_{21} d_{22} d_{23} \cdots$

$r_3 : 0.d_{31} d_{32} d_{33} \cdots$

$\vdots$

عدد $r = 0.d_1 d_2 d_3 \cdots$ به شرطی که

$$d_i = \begin{cases} 4 & \text{اگر } d_{ii} = 5 \text{ باشد} \\ 5 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این فهرست وجود ندارد. ✗

قضیه (شرودر - برنشتین)

اگر $|A| \leq |B|$ و $|B| \leq |A|$

آنگاه $|A| = |B|$

مثال نشان دهید $|(0,1)| = |[0,1]|$

حل ۱) $(0,1) \subseteq [0,1] \Rightarrow |(0,1)| \leq |[0,1]|$

۲) تابع یک‌به‌یک از $[0,1]$ به $(0,1)$:

$$f(x) = \frac{1+x}{3}$$

$$f([0,1]) = [\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}] \subseteq (0,1)$$

$$\Rightarrow |[0,1]| \leq |(0,1)| \qquad \square$$

<u>قضیه</u> $|P(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$

$$|P(\mathbb{N})| = |[0,1)| = |\mathbb{R}|$$

هر زیرمجموعه = یک رشته‌ی دودویی نامتناهی

<u>حدس تسلسل</u> [کانتور ۱۸۷۸]

هیچ مجموعه A با شرط $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$

وجود ندارد. [هنوز باز، جزو ۲۳ مسئله‌ی تحت هیلبرت ۱۹۰۰]