۵. فرض کنید S عددی k رقمی و با ارقام ۶ و ۸ باشد. برای $n \geqslant k$، $F(n,k)$ را تعداد اعداد n رقمی می‌گیریم که با حذف $n-k$ رقم از آن‌ها S حاصل می‌شود. (این اعداد می‌توانند تعدادی صفر در سمت چپ خود داشته باشند.) ثابت کنید

$$F(n,k) = F(n-1,k-1) + 10F(n-1,k).$$

حل. عدد n رقمی X را در نظر بگیرید، برای رقم nام آن ۲ حالت داریم، یا این رقم را حذف می‌کنیم یا خیر. اگر این رفم را حذف نکنیم یعنی با رقم kام عدد S باید برابر باشد پس در این حالت تعداد برابر است با $F(n-1,k-1)$. زیرا یک رقم از S و یک رقم از X کم شده و برای انتخاب رقم n ام عدد X یک انتخاب داریم که آن برابر با رقم kام عدد S است.
اگر رقم nام عدد X حذف شود، این رقم هر عددی می‌تواند باشد که ۱۰ حالت دارد. سپس باید $n-1$ رقم اول X را به کل S تبدیل کنیم که تعداد آن $F(n-1,k)$ است. پس با فرض حذف آخرین رقم S تعداد اعداد برابر با $10F(n-1,k)$ می‌باشد. پس $F(n,k) = F(n-1,k-1) + 10F(n-1,k)$.
▷

۸. فرض کنید a_n تعداد اعداد n رقمی متشکل از ارقام ۱، ۲ و ۳ باشد که تعداد زوجی رقم ۱ دارند. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید و سپس این رابطه‌ی بازگشتی را حل کنید.

حل. دنباله‌ی کمکی b_n را برابر تعداد اعدادی تعریف می‌کنیم که فرد رقم ۱ دارند. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n &= 2b_{n-1} + a_{n-1} \end{aligned}$$

جملات اولیه‌ی این دو دنباله $a_1 = 2$ و $b_1 = 1$ هستند.
برای حل رابطه‌ی بازگشتی داریم:

$$b_{n-1} = a_n - 2a_{n-1} \Rightarrow b_n = 2b_{n-1} + a_{n-1} = 2a_n - 3a_{n-1}$$
$$\Rightarrow a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$$

پس معادله‌ی مشخصه این رابطه به صورت $r^2 - 4r + 3 = 0$ خواهد بود. ریشه‌های این معادله $r_1 = 3$ و $r_2 = 1$ هستند. پس جواب‌های معادله به صورت $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ خواهد بود که مقدار مناسب α_1 و α_2 با توجه به مقدار a_1 و a_2محاسبه می‌شوند و در نهایت خواهیم داشت: $a_n = \frac{3^n+1}{2}$ ▷

۱۲. ماتریسی $n \times n$ در نظر بگیرید که درایه‌های روی قطر اصلی و بالای آن همگی برابر ۱ و بقیه‌ی درایه‌ها برابر ۰ باشند. به چند طریق می‌توان $n-1$ درایه‌ی ۱ از این ماتریس انتخاب کرد به طوری که هیچ دوتا در یک سطر یا ستون نباشند؟

حل. فرض کنید پاسخ مسئله برابر f_n باشد. برای انتخاب $n-1$ درایه‌ی ۱ از ماتریس داده‌شده به طوری که هیچ دوتا در یک سطر و یک ستون نباشند دو حالت در نظر می‌گیریم.
حالت اول: هیچ درایه‌ای از سطر اول انتخاب نشود. در این حالت باید از هر یک از سطرهای دوم تا nام

ماتریس یک درایه‌ی ۱ را انتخاب کنیم. چنانچه درایه‌های ۱ را به ترتیب از سطرهای nام ، $n-1$ام، ... و دوم انتخاب کنیم، نتیجه می‌گیریم فقط یک روش برای انتخاب این درایه‌ها وجود دارد.
حالت دوم: یکی از درایه‌های سطر اول انتخاب شود. در این حالت ابتدا $n-2$ درایه‌ی ۱ را از سطرهای دوم تا nام ماتریس انتخاب می‌کنیم که این کار را به f_{n-1} طریق می‌توانیم انجام دهیم، سپس یک درایه‌ی ۱ از سطر اول انتخاب می‌کنیم که این کار را نیز به ۲ طریق می‌توانیم انجام دهیم. نتیجه می‌گیریم در این حالت به $2f_{n-1}$ طریق می‌توانیم درایه‌های ۱ را انتخاب کنیم.
در نتیجه $f_n = 2f_{n-1} + 1$. برای حل رابطه‌ی بازگشتی، این تساوی را به فرم ساده‌تر $f_n + 1 = 2(f_{n-1} + 1)$ در می‌آوریم و چون $f_1 = 1$، پس $f_n + 1 = 2^n$ و لذا $f_n = 2^n - 1$.

۱۳. اعداد ۱ تا n را دور یک دایره به ترتیب و در جهت عقربه‌های ساعت چیده‌ایم. از عدد ۱ شروع و اعداد را یکی در میان حذف می‌کنیم تا سرانجام یک عدد باقی بماند. این عدد را $J(n)$ می‌نامیم. برای مثال $J(5) = 3$، زیرا اگر اعداد ۱ تا ۵ را دور دایره قرار دهیم، اعداد ۲ و ۴ و ۱ و ۵ به ترتیب حذف می‌شوند و عدد ۳ باقی می‌ماند.

الف) ثابت کنید $J(2n) = 2J(n) - 1$ و $J(2n+1) = 2J(n) + 1$
ب) فرض کنید $n = 2^m + l$ که در آن $0 \leqslant l < 2^m$. ثابت کنید $J(n) = 2l + 1$.

حل. الف: اگر $2n$ عدد دور دایره باشند، ابتدا اعداد ۲، ۴، ... و $2n$ حذف می‌شوند و پس از این، مسئله دقیقا همانند حالتی که تنها n عدد ۱ تا n دور دایره قرار دارند، فقط با این تفاوت که به جای عدد j، عدد $2j-1$ نوشته شده‌است. در مورد $J(2n+1)$ نیز استدلالی مشابه به کار می‌رود.
ب) با استفاده از قسمت اول با استفاده از استقرا بر بروی mنتیجه می‌شود.

▷

سوال 13) ب) اثبات با استقرا روی m:

• حالت پایه: $m=0$

$0 \leq l < 2^m = 1 \Rightarrow l=0$

$n = 2^m + l = 2^0 + 0 = 1+0 = 1$

$J(n) = J(1) = 1 = 2l+1 = 2\times 0+1 = 1$ ✓

• فرض استقرا: فرض می‌کنیم حکم برای $m-1$ برقرار باشد.

• اثبات برای m: $n = 2^m + l$

حالت ①: اگر n فرد باشد، طبق قسمت الف داریم:

$J(n) = 2J\left(\frac{n-1}{2}\right)+1$

$= 2J\left(2^{m-1} + \frac{l-1}{2}\right)+1$

طبق فرض استقرا ← $= 2\left(\frac{2(l-1)}{2}+1\right)+1$

$= 2l+1$ ✓

حالت ②: اگر n زوج باشد، داریم:

$J(n) = 2J(n/2)-1$

$= 2J\left(2^{m-1} + \frac{l}{2}\right)-1$

طبق فرض استقرا ← $= 2\left(2\frac{l}{2}+1\right)-1$

$= 2l+1$ ✓

⇐ حکم اثبات شد.

۱۶. n لامپ در یک ردیف قرار دارند. ابتدا همه آن‌ها خاموش هستند. در هر مرحله می‌توانیم وضعیت یکی از لامپ‌ها را تغییر دهیم (از خاموش به روشن و از روشن به خاموش) ثابت کنید می‌توان این عمل را طوری تکرار کرد که هر یک از ۲^n وضعیت مختلف لامپ‌ها دقیقا یک بار ظاهر شود و در پایان همه‌ی لامپ‌ها خاموش باشند.

حل. با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. در حالت پایه یک لامپ داریم که ابتدا خاموش است. سپس آن را روشن می‌کنیم و دو مرتبه خاموش می‌کنیم. حالا می‌خواهیم برای n ثابت کنیم، با فرض اینکه برای $n-۱$ ثابت شده است. دو نوع کار تعریف می‌کنیم. کار استقرایی: همان کاری است که طبق فرض استقرا برای $n-۱$ انجام دادیم. کار لامپ اول: یعنی تغییر وضعیت لامپ اول.

حالا ما به صورت یکی در میان این کارها را انجام می‌دهیم. طبق استقرا $n-۱$ لامپ دیگر جز لامپ اولی تمام حالت‌های ممکن را می‌گیرند. لامپ اول هم به ازای هر حالت از آن‌ها هر دو حالت را می‌گیرد. پس دقیقا ۲^n حالت انجام می‌شود. در نهایت هم تمام لامپ‌های دومم تا آخر خاموش می‌شوند طبق فرض استقرا و لامپ اول را هم ما خاموش می‌کنیم و مساله حل می‌شود. ◁

۷. یک مگس در نقطه‌ی $(۰,۰,۰)$ از دستگاه مختصات سه‌بعدی قرار دارد. این مگس از نقطه‌ی (x,y,z) به هر نقطه‌ی با مختصات صحیح مانند (x',y',z') که $x'>x$، $y'>y$ و $z'>z$ می‌تواند برود. فرض کنید مگس به a_n طریق بتواند خود را به نقطه‌ای از صفحه‌ی $x+y+z=n$ برساند. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید.

حل. اگر مگس در حرکت اول به نقطه‌ای از صفحه‌ی $x+y+x=k$ برود، تعداد راه‌های انجام این کار برابر تعداد جواب‌های مساله در مجموعه اعداد طبیعی خواهد بود که برابر است با $\binom{k-۱}{۲}$.
حال اگر مگس از هر نقطه‌ی صفحه‌ی $x+y+z=k$ به a_{n-k} طریق می‌تواند به صفحه‌ی $x+y+z=n$ برود و در نتیجه

$$a_n=\sum_{k=۱}^{n}\binom{k-۱}{۲}a_{n-k}.$$

◁

۹. تعداد نامحدودی مهره داریم که برخی از آن‌ها سفید و برخی سیاه هستند. می‌خواهیم ۱۰ مهره را به گونه‌ای بچینیم که بلوک‌های سفید همیشه زوج‌تایی و بلوک‌های سیاه همیشه فردتایی باشد. بلوک به مجموعه

ماکزیمال از مهره‌هایی گفته می‌شود که پست سر هم قرار گرفته اند و از یک نوع هستند. مثلا در چینش (سفید، سفید، سفید، سیاه، سفید، سیاه، سیاه، سفید) سه بلوک از مهره‌های سفید و دو بلوک از مهره‌های سیاه داریم. به کمک روابط بازگشتی بگویید که به چند طریق می‌توان این ۱۰مهره را انتخاب کرد تا به چینش دلخواه برسیم.

حل. p_n را تعداد چینش‌های مطلوبی بگیرید که با مهره سفید پایان می‌یابد و s_n را تعداد چینش‌های مطلوبی که با مهره سیاه پایان می‌یابند.

اگر مهره آخر سفید باشد، چون بلوک مهره‌های سفید زوج‌تایی خواهد بود، مهره یکی مانده به آخر قطعا سفید بوده و به طور یکتا تعیین می‌شود. بقیه $n-۲$ مهره باقی مانده، خود یک آرایش مطلوب را تشکیل خواهند داد که می‌تواند با یک مهره سفید یا سیاه پایان یابد. پس داریم:

$$p_n = p_{n-۲} + s_{n-۲}$$

هم‌چنین اگر مهره آخر سیاه باشد، برای مهره بعدی دو حالت دارد. یا سفید است که تعداد حالاتش معادل با $p_{n-۱}$ خواهد بود، یا سیاه است که در این صورت مهره‌های $n-۱$ و $n-۲$ نیز سیاه خواهند بود. پس داریم:

$$s_n = p_{n-۱} + s_{n-۲}$$

از طرفی به راحتی می‌توان به دست آورد:

$$p_۱ = ۰, p_۲ = ۱, s_۱ = ۱, s_۲ = ۰$$

پس با جایگذاری داریم:

$$p_{۱۰} = ۱۶, s_{۱۰} = ۲۱$$

پس تعداد کل آرایش‌های مطلوب ۳۷ مورد است. ▷