۵. فرض کنید می‌خواهیم یال‌های یک گراف همبند را به گیلاس افراز کنیم. (یا همان $P_۲$) ثابت کنید شرط لازم و کافی برای چنین کاری این است که تعداد یال‌های گراف زوج باشد.

حل. چون هر گیلاس دو یال دارد برای افراز به گیلاس‌ها لازم است تعداد یال‌ها زوج باشد. حال اینکه شرط کافی هم هست را ثابت می‌کنیم. می‌توان به مسئله به این شکل نگاه کرد که می‌خواهیم یال‌ها را جهت‌دهی

کنیم به طوری که درجه ورودی هر راسی زوج باشد چرا که اگر چنین جهت بندی‌ای کنیم یال‌های ورودی هر راس را دوبه‌دو با هم به گیلاس جفت می‌کنیم. در ابتدا یک جهت‌دهی تصادفی انجام می‌دهیم. بعد از آن تعدادی از رئوس درجه ورودی فرد دارند که تعدادشان زوج است چون زوج یال داریم. هر بار دو تا از این راس‌ها را انتخاب می‌کنیم و جهت یال‌های یک مسیر بین آن‌ها را برعکس می‌کنیم. با اینکار زوجیت درجه ورودی راس‌های وسط مسیر چون دو یال مجاورشان برعکس شده عوض نمی‌شود اما زوجیت دو سر مسیر عوض می‌شود. ▷

۶. در یک گراف ساده ۲۰۰۰ راسی ، راس درجه ۰ وجود ندارد و دقیقا دو راس با درجه برابر یافت می شود . درجه این دو راس چند است؟

حل. پاسخ برابر ۱۰۰۰ است ، درجه هر راس این گراف عددی بین ۱ تا ۱۹۹۹ است . از فرض نتیجه می‌گیریم به ازای هر $1 \leqslant i \leqslant 1999$ ، راسی از درجه i وجود دارد، این راس را با v_i نشان می‌دهیم. یک راس باقی می‌ماند که آن را با v_{2000} نشان می‌دهیم . شروع به رسم گراف می‌کنیم . ابتدا v_{1999} را باید به همه رئوس وصل کنیم ، سپس v_{1998} را باید به همه رئوس غیر از v_1 وصل کنیم، سپس v_{1997} را باید به همه رئوس غیر از v_1 و v_2 وصل کنیم ... و در نهایت v_{1000} را باید به همه راس‌ها به غیر از v_1 و ... و v_{999} وصل کنیم و به این صورت گراف به طور یکتا ساخته می‌شود. نتیجه می‌شود v_{2000} با راس های $v_{1999}, \ldots, v_{1000}$ مجاور است ، پس درجه این راس برابر ۱۰۰۰ است . ▷

۸. فرض کنید G گرافی ساده باشد و $m > \frac{۱}{۲}n\sqrt{n+۱}$ به طوری که m تعداد یال‌ها و n تعداد راس‌های G باشند. ثابت کنید G دوری به طول ۳ یا ۴ دارد.

حل. فرض کنید حکم درست نباشد ، x را راسی از G بگیرید و فرض کنید

$$N(x) = y_۱, \ldots, y_k$$

ثابت کنید:

$$n \geqslant ۱ + k + \sum_{i=۱}^{k}(d(y_i) - ۱) = ۱ + \sum_{i=۱}^{k} d(y_i)$$

و نتیجه بگیرید که

$$n^۲ \geqslant n + \sum_{x\in V}(d(x)^۲)$$

و سپس به تناقض برسید. ▷

۹. فرض کنید G یک گراف است که مکمل آن ناهمبند است. ثابت کنید در این صورت داریم:

$$|E(G)| \leqslant \Delta(G)^{2}$$

حل. می‌دانیم که $|E(G)| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_{v_i} \leqslant \frac{1}{2}n\Delta(G)$ لذا برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم که : $\frac{1}{2}n \leqslant \delta(G)$ برای اثبات این موضوع ، ابتدا توجه می‌کنیم که چون مکمل G ناهمبند است ، پس حداقل ۲ مولفه همبندی دارد . یکی از مولفه‌های همبندی $\overline{G}$ را که کمترین تعداد راس را دارد G_1 می‌نامیم و تعریف می‌کنیم: $\overline{G} - G_1 = G_2$ حال راسی از G_1 را در نظر بگیرید وآن را v بنامید. اولا توجه کنید که با توجه به انتخاب G_1 داریم: $|G_1| \leqslant \frac{n}{2}$. حال توجه کنید که v در G به همه راس های G_2 متصل است و می‌دانیم که $|G_2| \geqslant \frac{n}{2}$ لذا داریم : $\Delta(G) \geqslant d(v) \geqslant |G_2| \geqslant \frac{n}{2}$ و لذا آنچه که می‌خواستیم ثابت شد.

▷

۱۰. فرض کنید G یک گراف جهت‌دار است که درجه خروجی هر راس آن حداکثر k است. ثابت کنید رئوس G را می‌توان به $2k + 1$ بخش مستقل افراز کرد. (منظور از بخش مستقل مجموعه ای از راس هاست که هیچ دو تای آن ها به هم یالی ندارند.)

حل. روی تعداد رئوس گراف استقرا بزنید. پایه ساده است. فرض کنید تعداد رئوس n است و ما درستی حکم به ازای $n - 1$ را می‌دانیم. فرض کنید رئوس گراف $v_n, \ldots, v_1$ باشند. در نتیجه می‌دانیم که

$$|E(G)| = \sum d^{+}_{v_i} \leqslant nk$$

و در نتیجه $\sum d^{-}_{v_i} \leqslant nk$ و لذا طبق اصل لانه کبوتری راسی مانند v_i وجود دارد که $d^{-}_{v_i} \leqslant k$ حال مجموعه رئوسی که v_i به آن ها یال خروجی دارد را A و مجموعه رئوسی که به v_i یال ورودی دارند را B بگیرید، لذا داریم: $|A| + |B| \leqslant 2k$/ حال v_i را حذف کنید، طبق فرض استقرا گراف باقی مانده را می‌توان به $2k + 1$ [illegible] $|A| + |B| \leqslant 2k$ پس بخشی هست که هیچ یک از اعضای A و B در آن

۱۴. ثابت کنید یک یال e در گراف G برشی است اگر و تنها اگر در تمام زیردرخت‌های فراگیر G وجود داشته باشد.

حل. با حذف e گراف ناهمبند می‌شود پس درخت فراگیری ندارد و e در تمامی درخت‌های فراگیر وجود دارد. از طرفی اگر e در تمام درخت‌های فراگیر باشد و برشی نباشد آن را حذف می‌کنیم. چون گراف همبند باقی می‌ماند و درخت فراگیری دارد که e را ندارد به تناقض می‌رسیم. ▷

۱۵. فرض کنید d_n، d_2، ...، d_1 اعداد طبیعی با جمع $2n - 2$ باشند. ثابت کنید درخت n راسی وجود دارد که دنباله درجات آن این اعداد هستند.

حل. با استقرا ثابت می‌کنیم. پایه استقرا برای $n = 1$ درست است. گام استقرا: فرض کنیم حکم برای $n - 1$ درست است درستی آن را برای n اثبات می‌کنیم. حتما یکی از این اعداد ۱ است (وگرنه جمع آن‌ها $2n$ می‌شود) با حذف آن و کم کردن یکی دیگر از اعداد باقی مانده که حداقل ۲ باشد طبق فرض استقرا برای $n - 1$ یک درخت درست می‌کنیم. با اضافه کردن این برگ به راسی که درجه آن را کم کردیم درخت دلخواه n راسی ساخته می‌شود. ▷

۱۶. تعداد روش‌های رنگ آمیزی یک درخت n راسی T را با k رنگ حساب کنید. آیا این تعداد به شکل T هم بستگی دارد؟

حل. خیر بستگی ندارد. درخت را از یک راس v دلخواه ریشه‌دار می‌کنیم و از طبقه بالا شروع به رنگ آمیزی آن می‌کنیم. تعداد حالات رنگ آمیزی v برابر k است. بعد از آن به هر راسی می‌رسیم $k - ۱$ حالت برای رنگ آن داریم که همه رنگ‌ها به جز رنگ پدرش است. پس تعداد روش‌ها می‌شود: $k \times (k - ۱)^{n-۱}$ ▷

۱۷. ثابت کنید گرافی وجود ندارد که دقیقا ۲ زیردرخت فراگیر داشته باشد.

حل گرافی که بیشتر از یک درخت فراگیر داشته باشد حتما دور دارد. می‌توان مسیرهای روی این دور را به یک درخت فراگیر گسترش داد و چون طول این دور حداقل ۳ است پس حداقل باید ۳ درخت فراگیر داشته باشد.

۱۸. ثابت کنید هر درخت T دارای لااقل $\Delta(T)$ برگ است.

حل. فرض کنید تعداد برگ‌ها برابر k باشد و $V(T) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ چون $n-k$ راس دیگر دارای درجه حداقل ۲ هستند، داریم:

$$۲(n-۱) = \sum_{i=1}^{n} d_{v_i} \geqslant ۱ + \cdots + ۱ + \Delta(T) + ۲(n-k-۱)$$

که از این رابطه نتیجه می‌شود که $k \geqslant \Delta(G)$. ▷

۱۹. فرض کنید T یک درخت ریشه دار و n راسی با ریشه v باشد که هر راس غیر برگ آن حداقل ۲ فرزند دارد. برای هر راس v، d_v را فاصله آن تا نزدیک‌ترین برگ تعریف می‌کنیم. ثابت کنید $\sum_{i=1}^{n} d_v \leqslant n\log(n)$ است.

حل. می‌توان نشان داد برای هر راس d_v کمتر از $\log(n)$ است. برای اینکه بیشتر از این باشد فرزندان آن تا $\log(n)$ لایه نباید برگ باشند که چون هر راس دو فرزند دارد تعداد رئوس بعد از $\log(n)$ لایه از n بیشتر می‌شود و به تناقض می‌رسیم. ▷

۲۰. تعداد کلاس‌های یک‌ریختی درخت‌هایی که قطر آن‌ها برابر ۳ است را برای درخت‌های n راسی پیدا کنید. (قطر گراف به طول بلندترین کوتاه‌ترین مسیر بین جفت راس‌های آن گفته می‌شود.)

حل. شکل چنین درخت‌هایی دو ستاره که مرکز آن‌ها به هم یال دارند است. و تعداد آن ها یک مسئله شمارشی ساده است. برای کمتر از ۴ راس که وجود ندارد. برای بیش از ۴ راس معادل تعداد روش‌های نوشتن $n-2$ به صورت جمع دو عدد طبیعی است که می‌شود $\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$.

▷

۲۱. یال‌های گراف کامل n راسی را با دو رنگ آبی و قرمز رنگ کرده‌ایم ، ثابت کنید این گراف زیر درخت فراگیری دارد که همه یال‌های آن همرنگ هستند. (یعنی یا همه قرمز اند یا همه آبی)

حل. اگر تنها یال‌های آبی را در نظر بگیریم و این زیر گراف فراگیر را G_1 بنامیم ، در این صورت مکمل G_1 همان زیرگراف گراف کامل با در نظر گرفتن یال‌های قرمز است. (این زیرگراف را نیز G_2 بنامید.) حال می‌دانیم که از بین یک گراف و مکمل‌اش، حتما یکی همبند است (چرا؟). لذا نتیجه می‌شود از بین G_1 و G_2 حتما یکی همبند است. بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید G_1 همبند است. حال می‌دانیم که هر گراف همبند زیر درختی فراگیر دارد. پس زیر درختی فراگیر از G_1 مانند T_1 وجود دارد. T_1 همان زیر گراف جواب مسئله است. ▷

۲۲. هر یک از یال های گراف کامل $K_{۲n+۱}$ را با یکی از سه رنگ آبی و قرمز و سبز رنگ کرده‌ایم . ثابت کنید زیرگرافی همبند از این گراف با $n + ۱$ راس وجود دارد که همه یال های آن همرنگ‌اند .

حل. از استقرا روی n استفاده کنید. به ازای $n = ۱$ حکم درست است. فرض کنید حکم به ازای $n - ۱$ درست باشد. اکنون گراف $K_{۲n+۱}$ را در نظر بگیرید. چون حکم به ازای $n - ۱$ درست است، زیر مجموعه‌ای n عضوی مانند A از راس‌های گراف وجود دارد که زیر گراف با راس‌های A و یال‌های به رنگ آبی (مثلا) همبند است . دو راس از A را کنار بگذارید . دوباره، بنابر درستی حکم به ازای $n - ۱$، زیرمجموعه‌ای n عضوی مانند B از راس‌های گراف وجود دارد که زیر گراف با راس های B و یال های از یک رنگ همبند است . اگر رنگ این یال ها آبی باشد به راحتی حکم نتیجه میشود . فرض کنید رنگ یال های این زیرگراف قرمز باشد و C مجموعه راس‌هایی باشد که در هیچ یک از A و B نیستند. اگر حکم درست نباشد، آن‌گاه کلیه یال‌های بین C و $A \cap B$ به رنگ سبز هستند و کلیه یال‌های بین $A - B$ و $B - A$ نیز به رنگ سبز هستند. یکی از دو مجموعه $C \cup (A \cap B)$ و $(B - A) \cup (A - B)$ حداقل $n + ۱$ راس دارد.

▷