Logic 2

Tuesday, March 3, 2020 1:13 AM

بنام خدا

روش های اثبات

- قوانین استنتاج
- اثبات مستقیم
- برهان خلف
- اثبات از طریق تناقض
- حالت گیری
- مثال نقض

قوانین استنتاج

مجموعه قوانینی که درستی یک گزاره یا نتیجه را بر اساس درستی گزاره های فرض تعیین می کند

تعریف استدلال $p_1, p_2 \dots p_n \therefore q$ معتبر است

اگر و تنها اگر $(p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \to q$ یک راستگو باشد

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

مثال

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

p	q	$p \to q$	$((p \to q) \wedge p) \to q$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

اثبات $((p \to q) \wedge p) \to q$ یک راستگو است.

قوانین استنتاج مهم

TABLE 1 Rules of Inference.

Rule of Inference	*Tautology*	*Name*	
p, $p \to q$, $\therefore q$	$[p \wedge (p \to q)] \to q$	Modus ponens	وضع مقدم
$\neg q$, $p \to q$, $\therefore \neg p$	$[\neg q \wedge (p \to q)] \to \neg p$	Modus tollens	رفع تالی
$p \to q$, $q \to r$, $\therefore p \to r$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$	Hypothetical syllogism	قیاس
$p \vee q$, $\neg p$, $\therefore q$	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \to q$	Disjunctive syllogism	قیاس فصلی
p, $\therefore p \vee q$	$p \to (p \vee q)$	Addition	افزودن
$p \wedge q$, $\therefore p$	$(p \wedge q) \to p$	Simplification	ساده سازی
p, q, $\therefore p \wedge q$	$[(p) \wedge (q)] \to (p \wedge q)$	Conjunction	عطف
$p \vee q$, $\neg p \vee r$, $\therefore q \vee r$	$[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)] \to (q \vee r)$	Resolution	حل

مثال آیا استدلال زیر معتبر است؟

p : امروز آفتابی است

q : هوا سرد است

r : در خانه می‌مانم

s : درس می‌خوانم

$$\begin{array}{l} p \to \neg q \\ q \land r \\ \neg p \to s \\ \hline \therefore r \land s \end{array}$$

حل

۱) فرض	$q \land r$
۲) ساده‌سازی (۱)	q
۳) فرض	$p \to \neg q$
۴) رفع تالی (۲)،(۳)	$\neg p$
۵) فرض	$\neg p \to s$
۶) رفع مقدم (۴)،(۵)	s
۷) ساده‌سازی (۱)	r
۸) عطف (۶)،(۷)	$r \land s$

قوانین استنتاج برای سورها

TABLE 2 Rules of Inference for Quantified Statements.

Rule of Inference	*Name*	
$\forall x P(x)$ / $\therefore P(c)$	Universal instantiation	حذف سور عمومی
$P(c)$ for an arbitrary c / $\therefore \forall x P(x)$	Universal generalization	معرفی سور عمومی
$\exists x P(x)$ / $\therefore P(c)$ for some element c	Existential instantiation	حذف سور وجودی
$P(c)$ for some element c / $\therefore \exists x P(x)$	Existential generalization	معرفی سور وجودی

مثال نشان دهید

$F(a), \ \forall x (F(x) \to Q(x)) \ \therefore Q(a)$

حل

$\forall x \; F(x) \to Q(x)$ ۱) فرض

$F(a) \to Q(a)$ ۲) حذف سور عمومی (۱)

$F(a)$ ۳) فرض

$Q(a)$ ۴) وضع مقدم (۲) و (۳)

سفسطه: استدلال غیرمعتبر

مثال $(p \to q) \wedge q \to p$

مثال $(p \to q) \wedge \neg p \to \neg q$

اثبات

رشته‌ای از استنتاج‌های منطقی که با شروع از اصول موضوعه و گزاره‌های قبلاً اثبات شده به درستی گزاره یا نتیجه نهایی می‌شود.

روش‌های اثبات

اثبات مستقیم

برای اثبات $p \to q$

- فرض کنید p درست است
- نتیجه بگیرید q به طور منطقی می‌شود.

مثال ثابت کنید اگر n یک عدد فرد باشد، آنگاه n^2 یک فرد است.

اثبات عدد فرد دلخواه n را در نظر بگیرید

چون n فرد است، عدد صحیح k وجود دارد طوری که $n = 2k+1$

$$\Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$= 2(\underbrace{2k^2+2k})+1$$

$= 2k' + 1$ $\square$

برهان خلف

برای اثبات $p \to q$

- فرض کنید $\neg q$
- نتیجه بگیرید $\neg p$

مثال ثابت کنید اگر r گنگ باشد، $\sqrt{r}$ نیز گنگ است.

اثبات با برهان خلف

فرض کنید $\sqrt{r} = \frac{a}{b}$ در نتیجه $r = \frac{a^2}{b^2}$ $\square$

اثبات از طریق تناقض

برای اثبات p

- فرض کنید $\neg p$
- نتیجه بگیرید F $(r \wedge \neg r)$

$$\neg p \Rightarrow \cdots \Rightarrow \underbrace{r \Rightarrow \cdots \Rightarrow \neg r}_{F} \quad \therefore p$$

مثال عدد $\sqrt{2}$ گنگ است.

اثبات از طریق تناقض. فرض کنید $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ طوری که a و b عامل مشترک نداشته باشند

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2$$

$$\Rightarrow a^2 = 2b^2$$

$$\Rightarrow a = 2k \qquad (a \text{ زوج است})$$

$$\Rightarrow 4k^2 = 2b^2$$

$$\Rightarrow b^2 = 2k^2$$

※ a و b عامل مشترک دارند ⇐ b زوج است =

اثبات هم‌ارزی

$$p \leftrightarrow q \equiv p \to q \wedge q \to p$$

$$p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow p_n \equiv p_1 \to p_2 \to \cdots \to p_n \to p_1$$

اثبات با حالت‌گیری

مثال: ثابت کنید دو عدد گنگ x و y وجود دارند طوری که x^y گویا است.

اثبات: عدد $c = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ را در نظر بگیرید.

۱) اگر c گویا باشد، قضیه برقرار است

۲) اگر گنگ باشد آنگاه $c^{\sqrt{2}}$ گویا است.

$$p \to q$$
$$\neg p \to q$$
$$\therefore q$$

$$c^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{۲} = ۲ \quad \square$$

اثبات با مثال نقض

حدس اویلر ۱۷۶۹: معادله‌ی $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$ در $\mathbb{Z}^+$ جواب ندارد.

- باز برای دو قرن
- مثال نقض توسط Elkies در سال ۱۹۸۷

$a = ۹۵۸۰۰$, $b = ۲۱۷۵۱۹$

$c = ۴۱۴۵۶۰$, $d = ۴۲۲۴۸۱$

حدس گلدباخ ۱۷۴۲: هر عدد طبیعی زوج بزرگتر از ۲ را می‌توان به صورت جمع دو عدد اول نوشت.

$۴ = ۲ + ۲$, $۱۸ = ۱۱ + ۷$, ...

- بررسی با کامپیوتر تا عدد ۴۰۰/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰

- جستجوی مثال نقض

حدس فرما ۱۶۳۷: به ازای $n > 2$ ، معادله‌ی $a^n + b^n = c^n$ در $\mathbb{Z}^+$ جواب ندارد

- جستجو به دنبال نقض

- اثبات پس از ۳۵۰ سال در سال ۱۹۹۵ توسط Andrew Wiles

خلاصه

اثبات مستقیم:

$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

برهان خلف:

$$\begin{array}{l} p \\ \neg q \to \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

اثبات از طریق تناقض:

$$\begin{array}{l} \neg p \to F \\ \hline \therefore p \end{array}$$

حالت‌گیری:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \neg p \to q \\ \hline \therefore q \end{array}$$