



نام و نام خانوادگی:

۲۶ فروردین ۱۳۹۷

شماره‌ی دانش‌جویی:

زمان: ۹۰ دقیقه

## مسئله‌ی ۱. سؤالات کوتاه [۲۴ نمره]

درستی یا نادرستی عبارات زیر را با کشیدن دایره دور حروف «د» و «ن» در هر سطر مشخص کنید.

(۱) د ن می‌خواهیم مکعبی بسازیم که اعداد ۱ تا ۶ دقیقاً یک بار روی وجوه آن آمده و جمع اعداد هر دو وجه مقابل آن ۷ باشد. تعداد مکعب‌های متفاوتی که می‌توانیم به این طریق بسازیم چهار است.

(۲) د ن اگر  $P(x)$  و  $Q(x)$  گزاره‌نما باشند، آن‌گاه  $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists xP(x)) \vee (\exists xQ(x))$

(۳) د ن  $kn$  نفر را به  $(n-1)!$  طریق می‌توان دور  $k$  میز دایره‌ای متمایز نشانند، طوری که دور هر میز دقیقاً  $n$  نفر نشسته باشند.

(۴) د ن با شروع از عدد ۱۳۳ و با ۶۹۴ بار اضافه کردن یک واحد تا رسیدن به عدد ۸۲۷، مجموع تعداد تغییرات ارقام ۷۷۰ است.

(۵) د ن به ازای هر دو گزاره‌نمای  $P(x)$  و  $Q(x)$  داریم  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow [(\exists xP(x)) \rightarrow (\forall xQ(x))]$

(۶) د ن مجموعه‌ی تمام توابع  $f$  به شکل  $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, \dots, 9\}$  شمارا است.

(۷) د ن اگر  $f: A \rightarrow B$  تابعی یک به یک و  $C$  و  $D$  زیرمجموعه‌هایی از  $B$  باشند، آن‌گاه  $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) = f^{-1}(C \cap D)$

(۸) د ن سه عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ وجود دارند که مربع هر کدام از آن‌ها منهای ۱ بر دو عدد دیگر بخش‌پذیر است.

## مسئله‌ی ۲. استنتاج [۲۵ نمره]

به کمک قواعد استنتاج نشان دهید اگر داشته باشیم:

$$\forall x \exists y (P(x) \rightarrow (Q(y) \wedge L(y, x))) \quad (۱)$$

$$\forall x \forall y ((Q(x) \wedge S(y)) \rightarrow \neg L(x, y)) \quad (۲)$$

$$\forall x (P(x) \rightarrow \neg S(x)) \quad \text{آن‌گاه:}$$

### مسئله ۳. شمارش [۲۵ نمره]

در بین زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی  $\{1, 2, \dots, n\}$  چند سه‌تایی  $(A, B, C)$  با شرط  $A \cap B \subseteq C \subseteq A \cup B$  وجود دارد؟

### مسئله ۴. بخش‌پذیری [۳۰ نمره]

الف) ثابت کنید اگر  $a^2 + b^2 \mid 3$ ، آن‌گاه  $a$  و  $b$  هر دو بر ۳ بخش‌پذیرند.

ب) نشان دهید هیچ دو عدد گویای  $x$  و  $y$  وجود ندارند طوری که  $x^2 + y^2 = 3$ . [می‌توانید از قسمت (الف) استفاده کنید].