۱. گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید:

- اگر R و S ترایایی باشند آنگاه: $R \cup S$ هم ترایایی است
- اگر R و S بازتابی باشند آنگاه: $R \cup S$ هم بازتابی است.
- اگر R و S متقارن باشند آنگاه: $R \cap S$ هم متقارن است.

حل. اولی غلط است با مثال $R = (a, b),\ S = (b, c)$

دومی درست است. هر عضو $R \cup S$ یا در S بوده یا در R که در هر دو حالت چون R و S بازتابی اند با خودش رابطه دارد.

سومی هم درست است. هر جفتی که در اشتراک آن‌ها رابطه داشته باشد در هر دوی آن‌ها بوده که پس برعکس آن‌ها در هردوی آن‌ها بوده و در اشتراک R و S هم وجود دارد. ▷

۳. ثابت کنید رابطه هم مولفه بودن دو راس در گراف بدون جهت G یک رابطه هم ارزی است.

حل. هر راس با خودش در یک مولفه است(بازتابی)، اگر مسیر از a به b باشد از b به a هم مسیر وجود دارد(متقارن)، اگر از a به b و از b به c مسیر باشد با کنار هم قرار دادن آن‌ها از a به c مسیر هست(ترایایی) ▷

۲. به چند حالت می‌توان به سه متغیر روابطی اختصاص داد که خاصیت‌های زیر را داشته باشند:

الف) کل روابط

پ) متقارن

پ) ترتیب جزئی

ت) هم‌ارزی

ث) بازتابی

ج) پادمتقارن

حل. جواب‌هاي آخر به ترتیب: ۵۱۲، ۶۴، ۱۹، ۵، ۶۴، ۲۱۶
تمامی بخش‌ها با حالت بندی یا شمارش حل می‌شوند. برای تعداد روابط ترتیب جزئی که نسبتا سخت‌تر است: ۱ حالت که دوبه‌دو مقایسه نشوند، ۶ حالت که همه مقایسه پذیر باشند. ۶ حالت که فقط یک جفت قابل مقایسه داریم و ۳ حالت که یکی از دوتای دیگر کمتر است، ۳ حالت که یکی از دوتای دیگر بیشتر است. جمعا ۱۹ حالت. ▷

۴. این گزاره را ثابت یا رد کنید: اگر $R^۲$ بازتابی باشد آنگاه R هم بازتابی است.

حل. غلط است. مثال نقض:

$$R = (a,b),(b,a),(b,b)$$

$$R^۲ = (a,a),(a,b),(b,a),(b,b)$$

▷

۶. ثابت کنید $(x,y) \in R^n$ اگر و تنها اگر در گراف رابطه R مسیری جهتدار به طول n از x به y وجود داشته باشد .

حل. با استقرا ثابت می کنیم. پایه استقرا : توجه کنید $(x,y) \in R^1$ اگر و تنها اگر یک یال جهت دار (که مسیری جهتدار به طول ۱ است) از x به y وجود داشته باشد. حال در نظر بگیرید که $(x,y) \in R^k$ اگر و تنها اگر مسیری جهتدار به طول k از x به y وجود داشته باشد . حال فرض کنید مسیری جهتدار به طول $k+1$ از x به y وجود داشته باشد. اگر ما یال آخر را حذف کنیم ، در این صورت یک مسیر جهت‌دار به طول k داریم از x به راسی مانند v، و یال حذف شده ، مسیری جهت‌دار به طول ۱ از v به y است . چون مسیری جهت‌دار به طول k از x به v وجود دارد از فرض استقرا نتیجه می‌شود که $[x,v] \in R^k$.
و یال جهت‌دار از v به y به این معنا است که $[v,y] \in R^1$ که با ترکیب این دو داریم : $[x,y] \in R^{k+1}$
برعکس فرض کنید که $[x,y] \in R^{k+1}$ در نتیجه بنا به تعریف R^n یک v وجود دارد که $[x,v] \in R^k$ و $[v,y] \in R^1$ چون $[x,v] \in R^k$ طبق فرض استقرا مسیری جهت‌دار به طول k از x به v وجود دارد و چون $[v,y] \in R^1$ پس یالی جهت‌دار از v به y نیز وجود دارد و ترکیب این دو مسیر، مسیر دلخواه ما را نتیجه می دهد.

▷

۷. اگر R یک رابطه متقارن باشد، ثابت کنید R^n هم یک رابطه متقارن است.

حل. طبق سوال قبل اگر a و b در R^n رابطه داشته باشند مسیری به طول n روی R بین آن‌ها وجود دارد. چون R تقارن دارد می‌توانیم در جهت یال‌های برعکس روی این مسیر حرکت کنیم و بنابراین b هم با a در R^n رابطه دارد.

▷

۸. فرض کنید L یک شبکه متناهی و توزیع‌پذیر باشد. ثابت کنید هر عضو L حداکثر یک متمم دارد.

حل. فرض کنید که a دو متمم دارد: b و c و عنصر بیشینه ۱ و عنصر کمینه ۰ است و بزرگترین کران پایین را با $\wedge$ و کوچکترین کران بالا را با $\vee$ نشان می‌دهیم. داریم:

$$b = b \wedge ۱$$

$$= b \wedge (a \vee c)$$

$$= (b \wedge a) \vee (b \wedge c)$$

$$= ۰ \vee (b \wedge c) = b \wedge c$$

$$\longrightarrow b <= c$$

و طبق روندی مشابه می توانیم بگوییم که $c \wedge b = c$ و در نتیجه $c <= b$. در نتیجه داریم $b = c$. ▷

۹. تعداد روابط روی مجموعه اعداد طبیعی ۱ تا n که بستار ترایایی آن ها یک رابطه ترتیب کامل است را بیابید.

حل. اگر بستار ترایایی رابطه R، رابطه R' باشد که ترتیب کامل است. در این صورت فقط یک جایگشت $a_1, \ldots, a_n$ از اعداد ۱ تا n وجود دارد که برای هر $1 \leqslant i \leqslant n-1$ داشته باشیم: $(a_i, a_{i+1}) \in R'$. ثابت میکنیم که برای هر i که $1 \leqslant i \leqslant n-1$، $(a_i, a_{i+1}) \in R$. برای اثبات برهان خلف می‌زنیم. اگر (a_i, a_{i+1}) عضو رابطه R نباشد، حتما دنباله ای از عددها مثل $a_{x_0}, a_{x_1}, \ldots, a_{x_t}$ وجود دارد که $x_0 = i$ و $x_t = i+1$ و $t \geqslant 2$، و جفت مرتب هر دو عضو متوالی عضو رابطه R است . حال فرض کنید این دنباله کوتاه‌ترین دنباله با این خاصیت است. پس دو حالت خواهیم داشت: حالت اول: $x_1 < i$ که در این حالت طبق تعریف جایگشت x داریم : $a_{x_1} R' a_i$. اما با توجه به وجود دنباله گفته شده ، حتما $a_i R' a_{x_1}$، که چون $a_{x_1} \neq a_i$ به تناقض می رسیم. حالت دوم : $x_1 > i+1$ که در این حالت طبق تعریف جایگشت x خواهیم داشت: $a_{i+1} R' a_{x_1}$. اما با توجه به وجود دنباله مذکور لزوما $a_{x_1} R' a_{i+1}$، که باز چون داریم : $a_{x_1} \neq a_{i+1}$ باز هم تناقض است. بنابراین R باید همه جفت های مرتب متوالی یک جایگشت را داشته باشد و به جز این هم می‌تواند تعداد دلخواهی از $\frac{n(n-1)}{2} - (n-1)$ جفت مرتب دیگر را داشته باشد . در نتیجه تعداد برابر است با $n! \times 2^{\frac{(n-1)^2}{2}}$.

▷

۱۰. اگر f_n تعداد روابط هم ارزی یک مجموعه n عضوی باشد . نشان دهید: $f_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} f_{n-i-1}$

حل. این مجموعه n عضوی را X بنامید و فرض کنید x یکی از اعضای X باشد . همچنین Y یک زیر مجموعه‌ی دلخواه و i عضوی از $X - \{x\}$ باشد. می‌خواهیم تعداد روابط هم‌ارزی را بشماریم که در آن اعضای مجموعه $Y \cup \{x\}$ تشکیل یک کلاس هم‌ارزی می‌دهند. تعداد این روابط برابر با تعداد روابط هم‌ارزی مختلف روی $X - Y - \{x\}$ است که برابر با f_{n-i-1} است. همچنین به $\binom{n-1}{i}$ روش نیز میتوان زیر مجموعه Y را انتخاب کرد. پس تعداد رابطه های هم‌ارزی که در آن اندازه کلاس شامل x ، $i + 1$ تا است برابر با $\binom{n-1}{i} f_{n-i-1}$ است . برای شمردن همه رابطه‌های هم‌ارزی باید همه حالات مختلف برای اندازه کلاس هم‌ارزی x را در نظر بگیریم و لذا رابطه سوال ثابت می‌شود.

$\triangleright$

۱۱. ثابت کنید اگر مجموعه‌های با ترتیب جزیی (L_1, R_1) و (L_2, R_2) مشبکه باشند، آنگاه $(L_1 \times L_2, R)$ هم یک مشبکه است. توجه کنید که R ضرب دکارتی R_1 و R_2 است.

حل. اگر $\wedge_1, \vee_1$ عملگرهای مشبکه L_1 و $\wedge_2, \vee_2$ عملگرهای L_2 باشند. برای هر $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in L$ داریم که:

$$(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = (x_1 \wedge_1 x_2, y_1 \wedge_2 y_2)$$

$$(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (x_1 \vee_1 x_2, y_1 \vee_2 y_2)$$

لذا طبق تعریف یک مشبکه خواهد بود.

۱۲. فرض کنید A یک مجموعه باشد، اگر R یک رابطه هم‌ارزی روی A باشد، زوج یا فرد بودن $|R| - |A|$ را بررسی کنید.

حل. زوج است. زیرا برای هر $(x, y) \in A$ اگر $y = x$ آنگاه طبق خاصیت بازتابی، $(x, y) \in A$ و اگر $x \neq y$ آنگاه طبق خاصیت تقارنی $(x, y) \in R$ اگر و تنها اگر $(y, x) \in R$، پس اختلاف این دو عدد لزوما زوج خواهد بود. ▷

حل. با استقرا روی اندازه مجموعه S اثبات می‌شود. پایه برای $n = ۲$ که از فرض مشبکه بودن داریم. با حذف عضو دلخواه a گام استقرا هم نتیجه می‌شود.

$$glb(S) = glb(glb(S - a), a)$$

$$lub(S) = lub(lub(S - a), a)$$

پس برای تمامی زیر مجوعه‌ها lub و glb داریم. ▷

۱۴. ترتیب جزئی مجموعه توانی $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ را با رابطه $\subset$ در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید:

۱. بلندترین زنجیر آن چه طولی دارد؟

۲. یک ترتیب توپولوژیک برای آن ارائه دهید و استدلال کنید که چرا درست است.

۳. یک مجموعه مستقل به اندازه‌ی حداقل $\frac{۲^n}{n+۱}$ برای آن پیدا کنید.

حل.

۱. بلندترین زنجیر حداکثر طولش n+۱ است چون هر دنباله‌ای درنظر بگیریم اندازه مجموعه هربار یکی زیاد می‌شود. و چنین مثالی هم وجود دارد:

$$\{\}, \{۱\}, \{۱, ۲\}, \ldots, \{۱, ۲, ۳, \ldots n\}$$

۲. مجموعه‌ها را بر حسب اندازه‌شان مرتب می‌کنیم و درست است چون یک زیرمجوعه اکید یک مجموعه حتما اندازه‌اش از آن کمتر است.

۳. تمامی مجموعه‌های به اندازه $\frac{n}{۲}$ را در نظر بگیریم هیچ‌کدام رابطه ندارند. همچنین تعداد آن‌ها از مقدار خواسته شده بیشتر است چون مقدار $\binom{n}{k}$ برای $k = \frac{n}{۲}$ بیشینه است و جمع آن‌ها برابر ۲^k است. ▷

۱۵. فرض کنید $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ تعداد روابطی را روی این مجموعه بیابید که نه بازتابی هستند و نه نا بازتابی. منظور از رابطه نابازتابی ، رابطه ای است که در آن هیچ یک از زوج مرتب های (x_i, x_i) نیامده است.

حل. می‌دانیم که تعداد کل زوج مرتب ها برابر n^2 است. و لذا تعداد کل رابطه ها برابر 2^{n^2} است . هر رابطه بازتابی، شامل همه زوج مرتب‌های (x_i, x_i) هست پس تعداد این روابط برابر 2^{n^2-n} است . و هر رابطه نابازتابی هیچ یک از (x_i, x_i)ها را ندارد و لذا تعداد این روابط نیز برابر 2^{n^2-n} است. لذا پاسخ مسئله برابر است با $2^{n^2} - 2^{n^2-n}$ ▷

۱۸. فرض کنید X یک جبر بول متناهی باشد. ثابت کنید برای هر عضو $x \in X$ عضو $a \in X$ وجود دارد به طوری که اولا $x \leqslant a$ و ثانیا به ازای هر $y \in X$ داشته باشیم : $a \wedge y = a$ و یا $a \wedge y = 0$ که 0 همان کوچک‌ترین عضو جبر بول است.

حل. اگر x خود ویژگی های a را داشته باشد که مسئله حل است . پس فرض کنید که x چنین ویژگی‌ای نداشته باشد . لذا وجود دارد یک $z \in X$ به طوری که $w = z \wedge x$ که w خودش برابر با 0 و یا x نیست و لذا اکیدا از x کمتر است . حالا همین استدلال را تکرار می‌کنیم ، اگر z ویژگی‌های مطلوب a را داشت که مسئله حل است و اگرنه به همین ترتیب ادامه می‌دهیم و از آن جا که تعداد اعضا متناهی است ، لذا نزول نامتناهی نداریم و بالاخره در یکی از این مراحل به عضو مطلوب خواهیم رسید.

$\triangleright$