ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۹۹-۹۸

مدرس: حمید ضرابی‌زاده

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری هفتم | رابطه‌های بازگشتی و توابع مولد | مبحث آزمون ۳

۱. برای هر یک از مقادیر زیر یک رابطه‌ی بازگشتی با درجه‌ی ثابت به دست آورید.

الف) تعداد راه‌های پوشاندن کامل یک مستطیل $n \times ۱$ با تعدادی مستطیل با عرض واحد.

ب) تعداد راه‌های پوشاندن نه لزوماً کامل یک مستطیل $n \times ۱$ با تعدای مستطیل با عرض واحد.

۲. فرض کنید a_n تعداد اعداد طبیعی با رقم‌های ۱ و ۲ و ۴ باشد که مجموع ارقام هریک از این اعداد برابر n است. یک رابطه‌ی بازگشتی برای a_n به دست آورید.

۳. فرض کنید a_n تعداد حالات رنگ‌آمیزی یک جدول $n \times ۲$ با دو رنگ سیاه و سفید باشد، طوری که هیچ دوخانه‌ی مجاوری هر دو به رنگ سیاه نباشند. برای a_n یک رابطه‌ی بازگشتی با درجه‌ی ثابت پیدا کنید.

۴. فرض کنید یک قورباغه در راس $A_۱$ از هشت‌ضلعی منتظم $A_۱A_۲ \dots A_۸$ قرار دارد. این قورباغه در هر ثانیه از هر راسی که روی آن قرار دارد، به غیر از $A_۵$ به یکی از دو راس مجاور می‌جهد و هنگامی که به راس $A_۵$ برسد متوقف می‌شود. فرض کنید a_n تعداد راه‌های رسیدن قورباغه به راس $A_۵$ پس از دو ثانیه باشد. یک رابطه‌ی بازگشتی برای a_n بیابید.

۵. فرض کنید S عددی k رقمی و با ارقام ۶ و ۸ باشد. برای $n \geqslant k$، $F(n,k)$ را تعداد اعداد n رقمی می‌گیریم که با حذف $n-k$ رقم از آن‌ها S حاصل می‌شود. (این اعداد می‌توانند تعدادی صفر در سمت چپ خود داشته باشند.) ثابت کنید:

$$F(n,k) = F(n-۱, k-۱) + ۱۰F(n-۱, k).$$

۶. فرض کنید a_n تعداد ماتریس‌های متقارن $n \times n$ با درایه‌های ۰ و ۱ باشد به طوری که در هر سطر دقیقا یک درایه‌ی ۱ وجود داشته باشد. یک رابطه‌ی بازگشتی برای a_n بیابید.

۷. یک مگس در نقطه‌ی $(۰,۰,۰)$ از دستگاه مختصات سه‌بعدی قرار دارد. این مگس از نقطه‌ی (x,y,z) به هر نقطه‌ی با مختصات صحیح مانند (x',y',z') که $x' > x$، $y' > y$ و $z' > z$می‌تواند برود. فرض کنید مگس به a_n طریق بتواند خود را به نقطه‌ای از صفحه‌ی $x+y+z=n$ برساند. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید.

۸. فرض کنید a_n تعداد اعداد n رقمی متشکل از ارقام ۱، ۲ و ۳ باشد که تعداد زوجی رقم ۱ دارند. یک رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید و سپس این رابطه‌ی بازگشتی را حل کنید.

۹. تعداد نامحدودی مهره داریم که برخی از آن‌ها سفید و برخی سیاه هستند. می‌خواهیم ۱۰مهره را به گونه‌ای بچینیم که بلوک‌های سفید همیشه زوج‌تایی و بلوک‌های سیاه همیشه فردتایی باشد. بلوک به مجموعه ماکزیمال از مهره‌هایی گفته می‌شود که پست سر هم قرار گرفته‌اند و از یک نوع هستند. مثلا در چینش (سفید، سفید، سفید، سیاه، سفید، سیاه، سیاه، سفید) سه بلوک از مهره‌های سفید و دو بلوک از مهره‌های سیاه داریم. به کمک روابط بازگشتی بگویید که به چند طریق می‌توان این ۱۰مهره را انتخاب کرد تا به چینش دلخواه برسیم.

۱۰. یک پستچی وظیفه‌ی رساندن نامه‌های ۱۲ خانه را در یک روستای دورافتاده برعهده دارد. می‌دانیم هیچ دو خانه‌ی مجاوری وجود ندارد که در یک روز هر دو، نامه دریافت کنند و هیچ سه خانه مجاوری وجود ندارد که در یک روز هیچ‌یک نامه‌ای دریافت نکنند. به کمک روابط بازگشتی تعداد حالات ممکن در یک روز را از نظر نامه‌داشتن یا نداشتن این ۱۲ خانه پیدا کنید.

۱۱. فرامرز می‌خواهد یک مسابقه‌ی سنگین برای مردان آهنین طراحی کند. برای این منظور او می‌خواهد k وزنه را روی هم قرار دهد تا یک وزنه‌ی بسیار سنگین ساخته شود. وزنه‌ها به ترتیب ۱ تا k تن هستند. او برای قرار دادن این وزنه‌ها روی هم، از دو قانون زیر تبعیت می‌کند:

الف) هر وزنه می‌تواند پایین‌ترین وزنه باشد.

ب) وزنه‌ای که دقیقا روی وزنه‌ی دیگر قرار می‌گیرد وزنش حداکثر ۲ تن بیشتر از وزنه‌ی زیرین باشد.

اگر a_n تعداد راه‌های مختلف فرامرز برای تهیه‌ی این وزنه باشد، یک رابطه‌ی بازگشتی برای a_n یافته و آن را به روش دلخواه حل کنید.

۱۲. ماتریسی $n \times n$ در نظر بگیرید که درایه‌های روی قطر اصلی و بالای آن همگی برابر ۱ و بقیه‌ی درایه‌ها برابر ۰ باشند. به چند طریق می‌توان $n - ۱$ درایه‌ی ۱ از این ماتریس انتخاب کرد به طوری که هیچ دوتا در یک سطر یا ستون نباشند؟

۱۳. اعداد ۱ تا n را دور یک دایره به ترتیب و در جهت عقربه‌های ساعت چیده‌ایم. از عدد ۱ شروع و اعداد را یکی در میان حذف می‌کنیم تا سرانجام یک عدد باقی بماند. این عدد را $J(n)$ می‌نامیم. برای مثال $J(۵) = ۳$، زیرا اگر اعداد ۱ تا ۵ را دور دایره قرار دهیم، اعداد ۲ و ۴ و ۱ و ۵ به ترتیب حذف می‌شوند و عدد ۳ باقی می‌ماند.

الف) ثابت کنید $J(۲n) = ۲J(n) - ۱$ و $J(۲n + ۱) = ۲J(n) + ۱$

ب) فرض کنید $n = ۲^m + l$ که در آن $۰ \leqslant l < ۲^m$. ثابت کنید $J(n) = ۲l + ۱$.

۱۴. $n + k$ خط مستقیم در صفحه داده شده‌اند، به طوری که k تا از این خطوط با یکدیگر موازی‌اند و به غیر از این k خط، هیچ دو خط موازی دیگری وجود ندارند و در ضمن هیچ سه خطی از این $n + k$ خط از یک نقطه نمی‌گذرند. فرض کنید $G(n, k)$ تعداد ناحیه‌های ایجاد شده در صفحه با این خطوط باشند. مثلا $G(۱, ۲) = ۶$ و $G(۲, ۲) = ۱۰$. $G(n, k)$ را بر حسب n و k بیابید.

۱۵. سینا ۲^n تومان پول در تعدادی بانک دارد. در هر بانک او مقداری صحیح و نامنفی موجودی دارد. او می‌خواهد همه‌ی سرمایه‌ی خود را در یک بانک جمع کند. او در هر تراکنش می‌تواند به اندازه‌ای که در یک حساب a دارد از حسابی دیگر که حداقل به اندازه‌ی این حساب پول داشته باشد بردارد و به حساب a واریز کند. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n سینا می‌تواند این کار را انجام دهد.

توضیح بیشتر در مورد تراکنش‌ها: اگر سینا در دو حساب مقادیر a و b تومان داشته باشد و a از b بیشتر نباشد، بعد از تراکنش مقادیر موجودی عبارت خواهند بود از $۲a$ و $b - a$. (راهنمایی: ابتدا ثابت کنید که سینا می‌تواند موجودی همه‌ی حساب‌های خود را زوج کند، سپس با استقرا روی n حکم را اثبات کنید)

۱۶. n لامپ در یک ردیف قرار دارند. ابتدا همه‌ی آن‌ها خاموش هستند. در هر مرحله می‌توانیم وضعیت یکی از لامپ‌ها را تغییر دهیم (از خاموش به روشن و از روشن به خاموش). ثابت کنید می‌توان این عمل را طوری تکرار کرد که هر یک از ۲^n وضعیت مختلف لامپ‌ها دقیقا یک بار ظاهر شود و در پایان همه‌ی لامپ‌ها خاموش باشند.

۱۷. فرض کنید a و b اعدادی حقیقی هستند. برای دنباله‌های f زیر توابع مولد بیابید. توابعی که معرفی می‌کنید باید صریح باشند. (عبارات شامل Σ مورد قبول نیستند.)

الف)

$$f(n) = \begin{cases} a & ۲ \mid n \\ b & ۲ \mid n+۱ \end{cases}$$

ب)

$$\begin{cases} f(n) = f(n-۱) + f(n-۲) \\ f(۰) = a, f(۱) = b \end{cases}$$

۱۸. به چند طریق می‌توان n ریال را با سکه‌های ۱ و ۲ ریالی خرد کرد؟ برای خواسته‌ی سوال ابتدا یک تابع مولد نوشته، سپس با استفاده از آن سوال را حل کنید.

۱۹. رابطه‌ی بازگشتی زیر را با استفاده از توابع مولد حل کنید.

$$\begin{cases} a_n = ۴a_{n-۱} - ۴a_{n-۲} \\ a_۰ = ۱, a_۱ = ۱ \end{cases}$$

۲۰. رابطه‌های بازگشتی زیر را به کمک توابع مولد حل کنید.

الف)

$$\begin{cases} a_n = ۶a_{n-۱} - ۹a_{n-۲} \\ a_۰ = ۱, a_۱ = ۹ \end{cases}$$

ب)

$$\begin{cases} a_n = a_{n-۲} - ۴n \\ a_۰ = ۳, a_۱ = ۲ \end{cases}$$