Generating Functions

Sunday, April 19, 2020 10:30 AM

به نام خدا

توابع مولد

تعریف

مسائل شمارش

حل روابط بازگشتی

توابع مولد

تابع مولد دنباله‌ی $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$

عبارت است از $G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$

مثال

$$1, 3, 5 \leftrightarrow 1 + 3x + 5x^2$$

$$1, 1, 1, 1, \dots \leftrightarrow 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

$$1, -1, 1, -1, \dots \leftrightarrow 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x}$$

$$1, a, a^2, a^3, \dots \leftrightarrow 1 + ax + a^2x^2 + \dots = \frac{1}{1-ax}$$

$$1, 0, 1, 0, \dots \leftrightarrow 1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x^2}$$

(scaling) $$2, 0, 2, 0, \dots \leftrightarrow 2 + 2x^2 + 2x^4 + \dots = \frac{2}{1-x^2}$$

(مشتق) $$1, 2, 3, 4, \dots \leftrightarrow 1 + 2x + 3x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

(شیفت به راست) $$0, 1, 2, 3, \dots \leftrightarrow 0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n} \leftrightarrow \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \dots \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n$$

قضیه

اگر $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ و $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ آنگاه

$$F(x) + G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$$

$$F(x) \cdot G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right) x^k$$

مثال

$$1, 1, 1, 1, \dots \leftrightarrow \frac{1}{1-x}$$

$$+ \quad 1, -1, 1, -1, \dots \leftrightarrow \frac{1}{1+x}$$

$$2, 0, 2, \dots \leftrightarrow \frac{1}{\ } + \frac{1}{\ } = \frac{2}{\ }$$

$$+ \quad 1, -1, 1, -1, \ldots \longleftrightarrow \frac{1}{1+x}$$

$$2, 0, 2, 0, \ldots \longleftrightarrow \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{2}{1-x^2}$$

مثال

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} 1\right) x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k$$

تعریف (ضریب دوجمله‌ای تعمیم یافته)

اگر $u \in \mathbb{R}$ ، $k \in \mathbb{N}$ آنگاه،

$$\binom{u}{k} = \frac{u(u-1)\cdots(u-k+1)}{k!}$$

و $\binom{u}{0} = 1$

مثال

$$\binom{-n}{k} = \frac{-n(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}$$

$$= (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

قضیه اگر $x, u \in \mathbb{R}$ و $|x| < 1$ ،

$$(1+x)^u = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{u}{k} x^k$$

مثال

$$(1-x)^{-2} = \sum_{k}^{\infty} \binom{-2}{k} (-x)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{k} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k$$

کاربرد در مسائل شمارش

مثال تعداد جواب‌های معادله‌ی

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

$$2 \leq x_1 \leq 4 \quad \text{و} \quad x_2, x_3 \geq 3$$

حل برابر است با ضریب x^{10} در عبارت زیر

$$(x^2+x^3+x^4)(x^3+x^4+x^5)(x^3+x^4+x^5)$$

مثال تعداد راه‌های افراز n به ۲، ۳، ۵ (خردکردن پول) به ترتیب و بدون ترتیب

حل تعداد افرازهای نامرتب = ضریب x^n در

$$(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)$$

افراز مرتب با دقیقاً k جزء = ضریب x^n در

$$(x^2+x^3+x^5)^k$$

کل افرازها = ضریب x^n در

$$1+(x^2+x^3+x^5)^1+(x^2+x^3+x^5)^2+\cdots$$

$$= \frac{1}{1-(x^2+x^3+x^5)}$$

کاربرد در حل رابطه‌های بازگشتی

مثال

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1}+1 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

حل با جمع دو طرف رابطه‌ی بازگشتی به ازای مقادیر مختلف n داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 3a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

فرض کنید $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. در نتیجه

$$G(x) - \cancel{a_0}^{0} = 2x\,G(x) + \frac{x}{1-x}$$

$$\Rightarrow \quad (1-2x)\,G(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$\Rightarrow \quad G(x) = \frac{x}{(1-2x)(1-x)} = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-x}$$

$$A(1-x) + B(1-2x) = x$$

$$A - Ax + B - 2Bx = x$$

$$\underbrace{(A+B)}_{0} - x\,(\underbrace{A+2B+1}_{0}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}\ ,\quad B = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad G(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(2^n - 1\right) x^n$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_n = \frac{1}{2}\left(2^n - 1\right)}$$