Logic 1

Friday, February 28, 2020 5:53 PM

به نام خدا

منطق
- گزاره‌ها
- عملگرهای منطقی
- هم‌ارزی
- قوانین هم‌ارزی
- گزاره‌نما و سورها

منطق

مجموعه قواعدی که بتوان با آن اعتبار یک استدلال را مشخص کرد.

گزاره: یک جمله‌ی خبری که یا درست است یا نادرست (نه هر دو)

مثال:
- ✓ • مجموع اولین ۱۰ عدد فرد مثبت یک مربع کامل است.
- ✓ • ۲+۲=۵
- ✗ • علی کجا است؟
- ✗ • ۲+۳
- ✗ • تمرین را انجام دهید

گزاره‌های مرکب

از ترکیب گزاره‌های ساده توسط عملگرهای منطقی به دست می‌آید.

عملگرهای منطقی

نقیض: $\neg P$ درست است اگر P نادرست باشد.

P	$\neg P$
T	F
F	T

ترکیب عطفی: $P \wedge q$ درست است اگر P و q هر دو درست باشند

ترکیب فصلی: $P \vee q$ " " " هرگاه یکی از P و q درست باشد.

یای انحصاری: $P \oplus q$ " " " تنها یکی از P و q درست باشد.

ترکیب شرطی: $P \rightarrow q$ " " " P نادرست یا q درست باشد.

جدول درستی

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	T	T	F
F	F	F	F	F	T	T

$p \to q$

فرض/مقدم   نتیجه/تالی

تعابیر مختلف $p \to q$

اگر p آنگاه q

p نتیجه می‌دهد q

p فقط اگر q

p شرط کافی برای q

q شرط لازم برای p

$p \to q$

ابری $\to$ باران

گزاره‌های هم‌ارز

دو گزاره که جدول درستی یکسان داشته باشند.

با $\equiv$ نمایش می‌دهیم

مثال

$\neg(\neg p) \equiv p$

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
T	F	T
F	T	F

$p \to q \equiv \neg p \vee q$

تعریف: عبارت $p \to q$ را در نظر بگیرید.

عکس $q \to p$

وارون $\neg p \to \neg q$

عکس نقیض $\neg q \to \neg p$

نکته

$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

ترکیب دوشرطی (biconditional)

$P \leftrightarrow q$ به معنی «p اگر و فقط اگر q» است

درست است اگر p و q مقادیر درستی یکسانی داشته باشند.

قضیه

$$P \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$$
$$\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

اثبات جدول درستی.

مثال دروغگو و راستگو [دروغگو همیشه دروغ می‌گوید]

A می‌گوید: فقط من و B راستگوییم $\qquad A \leftrightarrow A \wedge B \wedge \neg C$

B می‌گوید: یا C راست می‌گوید یا A دروغ می‌گوید $\qquad B \leftrightarrow C \oplus \neg A$

C می‌گوید: B دروغ می‌گوید $\qquad C \leftrightarrow \neg B$

حل

A	B	C	$A \leftrightarrow A \wedge B \wedge \neg C$	$B \leftrightarrow C \oplus \neg A$	$C \leftrightarrow \neg B$
T	T	T	F	T	F
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	F	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	F	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	F
F	F	F	T	F	F

$\Leftarrow$ B راستگو و بقیه دروغگو هستند

تاتولوژی (راستگو): یک گزاره‌ی مرکب که مستقل از درستی گزاره‌های به کار رفته در آن همیشه درست است.

تناقض ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ نادرست ~ .

صدق‌پذیر گزاره‌ای که امکان درستی دارد (یعنی تناقض نیست)

مثال $p \vee \neg p$ یک تاتولوژی و $p \wedge \neg p$ یک تناقض است.

تعریف دیگر هم‌ارزی

دو گزاره p و q هم‌ارزند اگر $p \leftrightarrow q$ یک تاتولوژی باشد.

معمولاً با $p \equiv q$ یا $p \Leftrightarrow q$ نمایش می‌دهیم

(نکته: $\equiv$ و $\Leftrightarrow$ عملگر منطقی نیستند)

قوانین هم‌ارزی

TABLE 6 **Logical Equivalences.**

Equivalence	*Name*	
$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$	Identity laws	همانی
$p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	Domination laws	غلبه
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Idempotent laws	خودتوانی
$\neg(\neg p) \equiv p$	Double negation law	نقیض مضاعف
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Commutative laws	جابجایی
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Associative laws	شرکت‌پذیری
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributive laws	توزیع‌پذیری
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	De Morgan's laws	دمورگان
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Absorption laws	جذب
$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$	Negation laws	نقیض

مثال عبارت زیر را ساده کنید.

$(p\vee q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$

$\equiv p\vee(q\vee(\neg p\wedge\neg q))$ شرکت‌پذیری

$\equiv p\vee((q\vee\neg p)\wedge\underbrace{(q\vee\neg q)}_{T})$ توزیع‌پذیری

$\equiv p\vee(q\vee\neg p)$ همانی

$\equiv q\vee T \quad \equiv T \quad \Rightarrow$ راستگو

گزاره‌نما جمله‌ای خبری که شامل یک یا چند متغیر است و بسته به مقدار متغیرها می‌تواند درست یا نادرست باشد.

مثال - n یک عدد زوج است $\quad P(n)$

- $n>5 \quad Q(n)$

سور گزاره‌نما را به گزاره تبدیل می‌کند.

انواع سور

- سور عمومی $\forall n\, P(n) \quad P(1)\wedge P(2)\wedge P(3)\wedge\cdots$
- سور وجودی $\exists n\, P(n) \quad P(1)\vee P(2)\vee P(3)\vee\cdots$

مثال

- به ازای هر n، n یک عدد زوج است $\times$
- وجود دارد یک n طوری که $n>5$ $\checkmark$

نقیض سور

$\neg\forall n\, P(n)\equiv\exists n\,\neg P(n)$

$\neg\exists n\, P(n)\equiv\forall n\,\neg P(n)$