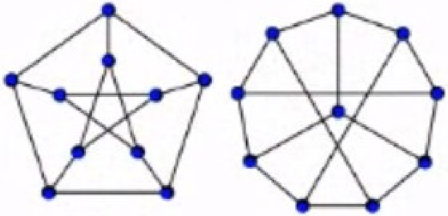
۱. ثابت کنید دو گراف زیر یکریخت هستند.



حل. هر دو این گراف‌ها گراف پترسن هستند که با شماره‌گذاری رئوس از ۱ تا ۱۰ که موجب می‌شود یال‌های دو گراف یکی شوند می‌توان اثبات کرد.

۲. نشان دهید هر گراف همبند G حداقل دو راس غیر برشی دارد.

حل. گراف همبند است پس یک درخت فراگیر آن را در نظر می‌گیریم. برگ‌های آن که حداقل دوتا هم هستند غیربرشی هستند. $\triangleright$

۳. فرض کنید G یک گراف n راسی بدون راس تنها و زیرگراف القایی با دقیقا دو یال باشد. ثابت کنید G گراف K_n است.

حل. با استقرا ثابت می‌کنیم. پایه استقرا برای $n = ۱$ درست است. گام استقرا: فرض کنیم حکم برای $n - ۱$ درست است درستی آن را برای n اثبات می‌کنیم. یک راس غیر برشی v را حذف می‌کنیم. $n - ۱$ راس دیگر گراف کامل تشکیل می‌دهند. راس v حداقل به یک راس وصل است u و اگر به راس دیگری وصل نباشد مثل w با گرفتن سه تایی u, v, w به تناقض می‌رسیم. پس به همه رئوس قبلی یال دارد و گام استقرا ثابت شد. $\triangleright$

۴. فرض کنید G یک گراف باشد، در این صورت ثابت کنید زیر گرافی فراگیر و دو بخشی از G مانند H وجود دارد به طوری که به ازای هر راس مثل v داریم: $d_H(v) \geqslant \frac{1}{2} d_G(v)$

حل. در میان همه زیر گراف های دو بخشی و فراگیر G، زیر گرافی که بیش‌ترین تعداد یال را دارد H بنامید. ثابت می‌شود که H خاصیت خواسته شده در سوال را دارد. اثبات به این صورت است که با استفاده از برهان خلف، فرض می‌کنیم راسی در H وجود دارد مانند u که $d_H(u) < \frac{1}{2} d_G(u)$ در این صورت به وضوح اگر u را به بخش مقابلش در H منتقل کنیم، به زیر گرافی دو بخشی از G میرسیم که از H تعداد یال بیشتری دارد و لذا این‌گونه به تناقض می‌رسیم. ▷

۵. فرض کنید می‌خواهیم یال‌های یک گراف همبند را به گیلاس افراز کنیم. (یا همان $P_۳$) ثابت کنید شرط لازم و کافی برای چنین کاری این است که تعداد یال‌های گراف زوج باشد.

حل. چون هر گیلاس دو یال دارد برای افراز به گیلاس‌ها لازم است تعداد یال‌ها زوج باشد. حال اینکه شرط کافی هم هست را ثابت می‌کنیم. می‌توان به مسئله به این شکل نگاه کرد که می‌خواهیم یال‌ها را جهت‌دهی

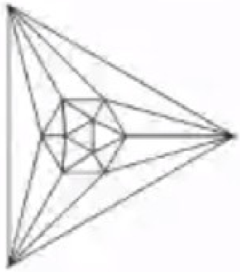
کنیم به طوری که درجه ورودی هر راسی زوج باشد چرا که اگر چنین جهت بندی‌ای کنیم یال‌های ورودی هر راس را دوبه‌دو با هم به گیلاس جفت می‌کنیم. در ابتدا یک جهت‌دهی تصادفی انجام می‌دهیم. بعد از آن تعدادی از رئوس درجه ورودی فرد دارند که تعدادشان زوج است چون زوج یال داریم. هر بار دو تا از این راس‌ها را انتخاب می‌کنیم و جهت یال‌های یک مسیر بین آن‌ها را برعکس می‌کنیم. با اینکار زوجیت درجه ورودی راس‌های وسط مسیر چون دو یال مجاورشان برعکس شده عوض نمی‌شود اما زوجیت دو سر مسیر عوض می‌شود. ▷

۶. در یک گراف ساده ۲۰۰۰ راسی ، راس درجه ۰ وجود ندارد و دقیقا دو راس با درجه برابر یافت می شود . درجه این دو راس چند است؟

حل. پاسخ برابر ۱۰۰۰ است ، درجه هر راس این گراف عددی بین ۱ تا ۱۹۹۹ است . از فرض نتیجه می‌گیریم به ازای هر ۱۹۹۹ $\geqslant i \geqslant$ ۱ ، راسی از درجه i وجود دارد، این راس را با v_i نشان می‌دهیم. یک راس باقی می‌ماند که آن را با $v_{۲۰۰۰}$ نشان می‌دهیم . شروع به رسم گراف می‌کنیم . ابتدا $v_{۱۹۹۹}$ را باید به همه رئوس وصل کنیم ، سپس $v_{۱۹۹۸}$ را باید به همه رئوس غیر از $v_۱$ وصل کنیم، سپس $v_{۱۹۹۷}$ را باید به همه رئوس غیر از $v_۱$ و $v_۲$ وصل کنیم ... و در نهایت $v_{۱۰۰۰}$ را باید به همه راس‌ها به غیر از $v_۱$ و ... و $v_{۹۹۹}$ وصل کنیم و به این صورت گراف به طور یکتا ساخته می‌شود. نتیجه می‌شود $v_{۲۰۰۰}$ با راس های $v_{۱۹۹۹}, \ldots, v_{۱۰۰۰}$ مجاور است ، پس درجه این راس برابر ۱۰۰۰ است . $\triangleright$

۷. برای گراف‌های مسطح می‌دانیم همیشه راسی وجود دارد که درجه آن حداکثر ۵ باشد. آیا می‌توانید گراف مسطحی بسازید که درجه همه رئوس آن دقیقا ۵ باشد؟

حل. مثال‌های زیاد و متنوعی وجود دارند. یکی از آن‌ها:



۸. فرض کنید G گرافی ساده باشد و $m > \frac{۱}{۲}n\sqrt{n+۱}$ به طوری که m تعداد یال‌ها و n تعداد راس‌های G باشند. ثابت کنید G دوری به طول ۳ یا ۴ دارد.

حل. فرض کنید حکم درست نباشد ، x را راسی از G بگیرید و فرض کنید

$$N(x) = y_۱, \ldots, y_k$$

ثابت کنید:

$$n \geqslant ۱ + k + \sum_{i=۱}^{k}(d(y_i) - ۱) = ۱ + \sum_{i=۱}^{k} d(y_i)$$

و نتیجه بگیرید که

$$n^۲ \geqslant n + \sum_{x \in V}(d(x)^۲)$$

و سپس به تناقض برسید. ▷

۹. فرض کنید G یک گراف است که مکمل آن ناهمبند است. ثابت کنید در این صورت داریم:

$$|E(G)| \leqslant \Delta(G)^{2}$$

حل. می‌دانیم که $|E(G)| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_{v_i} \leqslant \frac{1}{2}n\Delta(G)$ لذا برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم که : $\frac{1}{2}n \leqslant \delta(G)$ برای اثبات این موضوع ، ابتدا توجه می‌کنیم که چون مکمل G ناهمبند است ، پس حداقل ۲ مولفه همبندی دارد . یکی از مولفه‌های همبندی $\overline{G}$ را که کمترین تعداد راس را دارد G_1 می‌نامیم و تعریف می‌کنیم: $\overline{G} - G_1 = G_2$ حال راسی از G_1 را در نظر بگیرید وآن را v بنامید. اولا توجه کنید که با توجه به انتخاب G_1 داریم: $|G_1| \leqslant \frac{n}{2}$. حال توجه کنید که v در G به همه راس های G_2 متصل است و می‌دانیم که $|G_2| \geqslant \frac{n}{2}$ لذا داریم : $\Delta(G) \geqslant d(v) \geqslant |G_2| \geqslant \frac{n}{2}$ و لذا آنچه که می‌خواستیم ثابت شد.

▷

۱۰. فرض کنید G یک گراف جهت‌دار است که درجه خروجی هر راس آن حداکثر k است. ثابت کنید رئوس G را می‌توان به $۲k + ۱$ بخش مستقل افراز کرد. (منظور از بخش مستقل مجموعه ای از راس هاست که هیچ دو تای آن ها به هم یالی ندارند.)

حل. روی تعداد رئوس گراف استقرا بزنید. پایه ساده است . فرض کنید تعداد رئوس n است و ما درستی حکم به ازای $n - ۱$ را می‌دانیم . فرض کنید رئوس گراف $v_n, \ldots, v_۱$ باشند. در نتیجه می‌دانیم که

$$|E(G)| = \sum d^{+}_{v_i} \leqslant nk$$

و در نتیجه $\sum d^{-}_{v_i} \leqslant nk$ و لذا طبق اصل لانه کبوتری راسی مانند v_i وجود دارد که $d^{-}_{v_i} \leqslant k$ حال مجموعه رئوسی که v_i به آن ها یال خروجی دارد را A و مجموعه رئوسی که به v_i یال ورودی دارند را B بگیرید، لذا داریم : $|A| + |B| \leqslant ۲k$ حال v_i را حذف کنید، طبق فرض استقرا گراف باقی مانده را می‌توان به $۲k + ۱$ بخش مستقل افراز کرد که چون $|A| + |B| \leqslant ۲k$ پس بخشی هست که هیچ یک از اعضای A و B در آن نیستند که در این صورت v_i را به آن اضافه می‌کنیم. $\triangleright$

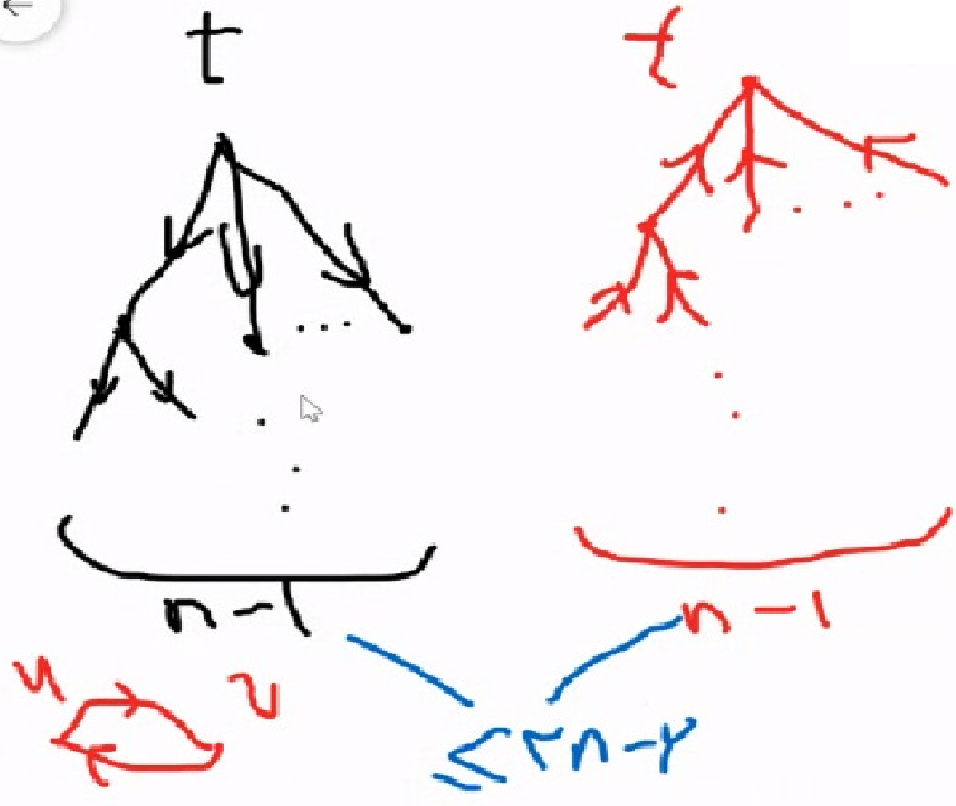
۱۱. ثابت کنید رئوس یک گراف جهت‌دار و بدون دور را می‌توان طوری روی یک خط چید، که جهت یال‌ها فقط از چپ به راست باشند.

حل. با استقرا ثابت می‌کنیم.
پایه استقرا برای $n = ۱$ درست است.
گام استقرا: فرض کنیم حکم برای $n - ۱$ درست است درستی آن را برای n اثبات می‌کنیم.

حتما راسی وجود دارد که درجه خروجی‌اش صفر باشد وگرنه می‌توانیم روی گراف حرکت کنیم و بعد از مدتی یک گشت بسته جهت دار و در نتیجه دور جهت‌دار داریم. این راس را در راست‌ترین جای ممکن می‌گذاریم و از فرض استقرا برای $n - ۱$ راس باقی‌مانده استفاده می‌کنیم. ▷

۱۲. فرض کنید T گرافی جهت‌دار و قویا همبند n راسی و $2n - 1$ یالی است. ثابت کنید یالی در T وجود دارد که اگر این یال را از T حذف کنیم، باز هم T قویا همبند باقی می‌ماند.

حل. گراف T را از یکی از راس‌هایش (مثلا راس t) یکبار در جهت یال‌های خروجی از t (همه یال‌ها رو به پایین) و بار دیگر در جهت یال‌های ورودی به t (همه یال ها رو به بالا) آویزان می‌کنیم. در این صورت از آن جا که T قویا همبند است، به ترتیب به دو زیر درخت T_1 و T_2 می‌رسیم. (به این صورت که طبق توضیحات داده شده همه یال های T_1 رو به پایین و همه یال های T_2 رو به بالا هستند.) از آن جا که T_1 و T_2 هر دو درخت هستند لذا هر یک $n - 1$ یال دارند. از آن جا که تعداد یال‌های کل گراف برابر $2n - 1$ است و تعداد یال‌های T_1 و T_2 روی هم حداکثر $2n - 2 = 2(n - 1)$ است، لذا یالی مانند e در T وجود دارد که نه در T_1 است و نه در T_2. لذا حذف e خاصیت قویا همبند بودن T را از بین نمی‌برد و لذا حکم ثابت می‌شود. (چون T_1 و T_2 هر دو زیر درخت فراگیر و جهت‌دار هستند که جهت یال‌هایشان مخالف هم است، همچنان بین هر دو راسی دو مسیر جهت دار باقی خواهد ماند.)



۱۳. فرض کنید گرافی n راسی با حداقل $\frac{(n-۱)(n-۲)}{۲} + ۲$ یال داریم. ثابت کنید این گراف دوری همیلتونی دارد.

حل. حکم سوال را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم . از فرض سوال نتیجه می‌گیریم که :

$$\sum_{i=۱}^{n} d_{v_i} \geqslant ۲(\frac{(n-۱)(n-۲)}{۲} + ۲) = n^۲ - ۳n + ۶$$

لذا طبق اصل لانه کبوتری راسی با حداقل $\lceil \frac{n(n-۳)+۶}{n} \rceil = n - ۲$ یال وجود دارد .(مثلا راس v) اگر درجه v برابر $n - ۲$ باشد، $n - ۱$ راس دیگر حداقل دارای

$$\frac{(n-۱)(n-۲)}{۲} + ۲ - n + ۲ = \frac{(n-۲)(n-۳)}{۲} + ۲$$

یال هستند و لذا طبق فرض استقرا دور همیلتونی در میان آن‌ها وجود دارد و v قطعا به دو راس مجاور آن وصل است. اما اگر درجه v برابر $n - ۱$ باشد، آن‌گاه گراف $n - ۱$ راسی باقی مانده (بعد از حذف v) یک یال برای استفاده از فرض استقرا کم می‌آورد . ما این یال را خودمان (به صورت یال مجازی) اضافه می‌کنیم و به راحتی باز هم مشابها وجود دور همیلتونی در گراف اصلی نیز ثابت می‌شود.

▷

۱۴. ثابت کنید یک یال e در گراف G برشی است اگر و تنها اگر در تمام زیردرخت‌های فراگیر G وجود داشته باشد.

حل. با حذف e گراف ناهمبند می‌شود پس درخت فراگیری ندارد و e در تمامی درخت‌های فراگیر وجود دارد. از طرفی اگر e در تمام درخت‌های فراگیر باشد و برشی نباشد آن را حذف می‌کنیم. چون گراف همبند باقی می‌ماند و درخت فراگیری دارد که e را ندارد به تناقض می‌رسیم. $\triangleright$

۱۵. فرض کنید d_n، ...، d_2، d_1 اعداد طبیعی با جمع $2n-2$ باشند. ثابت کنید درخت n راسی وجود دارد که دنباله درجات آن این اعداد هستند.

حل. با استقرا ثابت می‌کنیم. پایه استقرا برای $n=1$ درست است. گام استقرا: فرض کنیم حکم برای $n-1$ درست است درستی آن را برای n اثبات می‌کنیم. حتما یکی از این اعداد ۱ است (وگرنه جمع آن‌ها $2n$ می‌شود) با حذف آن و کم کردن یکی دیگر از اعداد باقی مانده که حداقل ۲ باشد طبق فرض استقرا برای $n-1$ یک درخت درست می‌کنیم. با اضافه کردن این برگ به راسی که درجه آن را کم کردیم درخت دلخواه n راسی ساخته می‌شود. ▷

۱۶. تعداد روش‌های رنگ آمیزی یک درخت n راسی T را با k رنگ حساب کنید. آیا این تعداد به شکل T هم بستگی دارد؟

حل. خیر بستگی ندارد. درخت را از یک راس v دلخواه ریشه‌دار می‌کنیم و از طبقه بالا شروع به رنگ آمیزی آن می‌کنیم. تعداد حالات رنگ آمیزی v برابر k است. بعد از آن به هر راسی می‌رسیم $k - ۱$ حالت برای رنگ آن داریم که همه رنگ‌ها به جز رنگ پدرش است. پس تعداد روش‌ها می‌شود: $k \times (k - ۱)^{n-۱}$ ▷

۱۷. ثابت کنید گرافی وجود ندارد که دقیقا ۲ زیردرخت فراگیر داشته باشد.

حل گرافی که بیشتر از یک درخت فراگیر داشته باشد حتما دور دارد. می‌توان مسیرهای روی این دور را به یک درخت فراگیر گسترش داد و چون طول این دور حداقل ۳ است پس حداقل باید ۳ درخت فراگیر داشته باشد.

۱۸. ثابت کنید هر درخت T دارای لااقل $\Delta(T)$ برگ است .

حل. فرض کنید تعداد برگ‌ها برابر k باشد و $V(T) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ چون $n-k$ راس دیگر دارای درجه حداقل ۲ هستند، داریم:

$$۲(n-۱) = \sum_{i=1}^{n} d_{v_i} \geqslant ۱ + \cdots + ۱ + \Delta(T) + ۲(n-k-۱)$$

که از این رابطه نتیجه می‌شود که $k \geqslant \Delta(G)$. ▷

۱۹. فرض کنید T یک درخت ریشه دار و n راسی با ریشه v باشد که هر راس غیر برگ آن حداقل ۲ فرزند دارد. برای هر راس v، d_v را فاصله آن تا نزدیک‌ترین برگ تعریف می‌کنیم. ثابت کنید $\sum_{v=1}^{n} d_v \leqslant n\log(n)$ است.

حل. می‌توان نشان داد برای هر راس d_v کمتر از $\log(n)$ است. برای اینکه بیشتر از این باشد فرزندان آن تا $\log(n)$ لایه نباید برگ باشند که چون هر راس دو فرزند دارد تعداد رئوس بعد از $\log(n)$ لایه از n بیشتر می‌شود و به تناقض می‌رسیم. ▷

۲۰. تعداد کلاس‌های یک‌ریختی درخت‌هایی که قطر آن‌ها برابر ۳ است را برای درخت‌های n راسی پیدا کنید. (قطر گراف به طول بلندترین کوتاه‌ترین مسیر بین جفت راس‌های آن گفته می‌شود.)

حل. شکل چنین درخت‌هایی دو ستاره که مرکز آن‌ها به هم یال دارند است. و تعداد آن ها یک مسئله شمارشی ساده است. برای کمتر از ۴ راس که وجود ندارد. برای بیش از ۴ راس معادل تعداد روش‌های نوشتن $n - ۲$ به صورت جمع دو عدد طبیعی است که می‌شود $\left\lfloor \frac{n-۲}{۲} \right\rfloor$.

▷

۲۱. یال‌های گراف کامل n راسی را با دو رنگ آبی و قرمز رنگ کرده‌ایم ، ثابت کنید این گراف زیر درخت فراگیری دارد که همه یال‌های آن همرنگ هستند. (یعنی یا همه قرمز اند یا همه آبی)

حل. اگر تنها یال‌های آبی را در نظر بگیریم و این زیر گراف فراگیر را $G_۱$ بنامیم ، در این صورت مکمل $G_۱$ همان زیرگراف گراف کامل با در نظر گرفتن یال‌های قرمز است. (این زیرگراف را نیز $G_۲$ بنامید.) حال می‌دانیم که از بین یک گراف و مکمل‌اش، حتما یکی همبند است (چرا؟). لذا نتیجه می‌شود از بین $G_۱$ و $G_۲$ حتما یکی همبند است. بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید $G_۱$ همبند است. حال می‌دانیم که هر گراف همبند زیر درختی فراگیر دارد. پس زیر درختی فراگیر از $G_۱$ مانند $T_۱$ وجود دارد. $T_۱$ همان زیر گراف جواب مسئله است. ▷

۲۲. هر یک از یال های گراف کامل $K_{۲n+۱}$ را با یکی از سه رنگ آبی و قرمز و سبز رنگ کرده‌ایم . ثابت کنید زیرگرافی همبند از این گراف با $n+۱$ راس وجود دارد که همه یال های آن همرنگ‌اند .

حل. از استقرا روی n استفاده کنید. به ازای $n=۱$ حکم درست است. فرض کنید حکم به ازای $n-۱$ درست باشد. اکنون گراف $K_{۲n+۱}$ را در نظر بگیرید. چون حکم به ازای $n-۱$ درست است، زیر مجموعه‌ای n عضوی مانند A از راس‌های گراف وجود دارد که زیر گراف با راس‌های A و یال‌های به رنگ آبی (مثلا) همبند است . دو راس از A را کنار بگذارید . دوباره، بنابر درستی حکم به ازای $n-۱$، زیرمجموعه‌ای n عضوی مانند B از راس‌های گراف وجود دارد که زیر گراف با راس های B و یال های از یک رنگ همبند است . اگر رنگ این یال ها آبی باشد به راحتی حکم نتیجه میشود . فرض کنید رنگ یال های این زیرگراف قرمز باشد و C مجموعه راس‌هایی باشد که در هیچ یک از A و B نیستند. اگر حکم درست نباشد، آن‌گاه کلیه یال‌های بین C و $A\cap B$ به رنگ سبز هستند و کلیه یال‌های بین $A-B$ و $B-A$ نیز به رنگ سبز هستند. یکی از دو مجموعه $C\cup(A\cap B)$ و $(B-A)\cup(A-B)$ حداقل $n+۱$ راس دارد.

▷

۲۳. برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید گرافی مانند G وجود دارد که زیرگرافی به صورت C_3 (دور به طول ۳) ندارد ولی عدد رنگی آن برابر n است.

حل. گراف را به صورت استقرایی می‌سازیم. فرض کنید G_n گرافی مطلوب برای حالت n است و می‌خواهیم برای $n+1$ بسازیم. فرض کنید G_n ، k راسی است. n کپی از G_n را کنار هم می‌گذاریم (این n کپی را $1, \ldots, n$ می‌نامیم) و به این n کپی، k^n راس دیگر نیز اضافه می‌کنیم (این رئوس را $v_1, \ldots, v_{k^n}$ بنامید). برای هر انتخاب n راس از این n دسته (از هر دسته ۱ راس)، همه اعضای آن انتخاب را (تعداد کل انتخاب ها k^n است.) به یکی از راس های v_i ها (متناظرا) وصل کنید. حال می‌خواهیم ثابت کنیم عدد رنگی گراف جدید ساخته شده $n+1$ است. برهان خلف: فرض کنید عدد رنگی این گراف هم n است. گراف را با همان n رنگ، رنگ کنید. می‌دانیم انتخابی هست که از دسته ۱ راس به رنگ ۱، از دسته ۲ راس به رنگ ۲، . . . و در نهایت از دسته n راس به رنگ n را انتخاب کند. در این صورت راسی در میان v_i ها هست که باید رنگ جدیدی داشته باشد و این تناقض است. $\triangleright$

۲۴. فرض کنید G گرافی بدون مثلث و n راسی است. (دور به طول ۳ ندارد) ثابت کنید:

$$\chi(G) \leqslant \frac{n+۴}{۳}$$

توجه کنید که منظور از $\chi(G)$ عدد رنگی گراف است.

حل. از استقرای قوی روی n کمک می‌گیریم. پایه استقرا ساده است. می‌خواهیم حکم را برای گرافی n راسی ثابت کنیم. یک راس مانند v را در نظر بگیرید که $u_۱, \ldots, u_n$ همسایه‌های آن هستند. طبق فرض سوال (گراف مثلث ندارد) نتیجه می‌گیریم که $u_۱, \ldots, u_n$ مجموعه مستقل می‌سازند و هیچ یک به هم متصل نیستند. لذا این d راس را می‌توان با یک رنگ (مثلا رنگ $c_۱$) رنگ کرد. حال توجه کنید که گراف $G - \{u_۱, \ldots, u_d, v\}$ نیز گرافی بدون مثلث است و لذا طبق فرض استقرا می‌توان رئوس آن را با $\frac{n-d-۱+۴}{۳} = \frac{n+۳-d}{۳}$ رنگ مختلف، رنگ کرد. حال بعد از اضافه کردن این $d+۱$ راس، v را با یکی از همین $\frac{n+۳-d}{۳}$ تا رنگ، رنگ می‌زنیم و ۱ رنگ جدید نیز برای همسایه‌های آن در نظر می‌گیریم و لذا توانستیم گراف را با

$$\frac{n+۳-d}{۳} + ۱ = \frac{n+۶-d}{۳}$$

رنگ متفاوت، رنگ کنیم. این عدد به ازای $d \geqslant ۲$ از $\frac{n+۴}{۳}$ کمتر است، لذا کافی است v را در ابتدا راسی با درجه حداقل ۲ بگیریم و این چنین اثبات کامل می‌شود.

$\triangleright$