Solving Recurrences

Tuesday, April 14, 2020 1:30 PM

حل روابط بازگشتی

- جایگذاری و تکرار
- حدس و استقرا
- معادله مشخصه
- روابط همگن
- روابط ناهمگن

به نام خدا

حل روابط بازگشتی

۱) روش تلسکوپی

مثال: حداکثر تعداد ناحیه‌های ایجاد شده توسط n خط در صفحه

$$\begin{cases} T_n = T_{n-1} + n \\ T_0 = 1 \end{cases}$$

حل

$$T_n - \cancel{T_{n-1}} = n$$
$$\cancel{T_{n-1}} - T_{n-2} = n-1$$
$$\cancel{T_2} - \cancel{T_1} = 2$$
$$\cancel{T_1} - T_0 = 1$$

$$T_n - T_0 = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow T_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1 \qquad \square$$

۲) جایگذاری و تکرار

مناسب برای روابط درجه ۱

مثال: برج هانوی

$$\begin{cases} T_n = 2T_{n-1} + 1 \\ T_0 = 0 \end{cases}$$

حل

$$T_n = 2T_{n-1} + 1$$
$$= 2(2T_{n-2} + 1) + 1$$
$$= 2^2 T_{n-2} + 2 + 1$$
$$= 2^2(2T_{n-3} + 1) + 2 + 1$$

$$= 2^3 T_{n-3} + 2^2 + 2^1 + 1$$

$$\vdots$$

$$= 2^k T_{n-k} + 2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2^1 + 1$$

$$= 2^n \cancel{T_0} + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^1 + 1$$

$$= 2^n - 1 \qquad \square$$

۳) تغییر متغیر

مثال

$$\begin{cases} T_n = 2T_{n-1} + 1 \\ T_1 = 1 \end{cases}$$

حل

$$Q_n = T_n + 1$$

$$\Rightarrow T_n + 1 = 2T_{n-1} + 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_n = 2Q_{n-1} \\ Q_1 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q_n = 2^n \Rightarrow T_n = 2^n - 1 \qquad \square$$

۴) حدس و استقرا

مثال برج هانوی: حدس می‌زنیم $T_n = 2^n - 1$

اثبات با استقرا: پایه: $T_1 = 1$ ✓

$$T_n = 2T_{n-1} + 1$$

$$= 2(2^{n-1} - 1) + 1$$

$$= 2^n - 1 \qquad \square$$

۵) استفاده از معادله‌ی مشخصه

تعریف رابطه‌ی $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$

یک رابطه‌ی خطی همگن درجه‌ی k را پیدا می‌کنیم.

مثال دنباله‌ی فیبوناچی

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

حل حدس می‌زنیم

$$F_n = x^n$$

$$\Rightarrow x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$$

$$\Rightarrow x^2 = x + 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow F_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \text{یا} \quad F_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

قضیه (اصل برهم‌نهی)

اگر $f(n)$ و $g(n)$ دو جواب برای رابطه‌ی خطی همگن

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

باشند، آنگاه $h(n) = sf(n) + tg(n)$

برای هر $s,t \in \mathbb{R}$ نیز یک جواب برای رابطه است.

اثبات

$$\begin{aligned} h(n) &= s f(n) + t g(n) \\ &= s\left(c_1 f(n-1) + \cdots + c_k f(n-k)\right) \\ &\quad + t\left(c_1 g(n-1) + \cdots c_k g(n-k)\right) \\ &= c_1\left(sf(n-1) + tg(n-1)\right) + \cdots + c_k\left(sf(n-k) + tg(n-k)\right) \\ &= c_1 h(n-1) + \cdots + c_k h(n-k) \quad \square \end{aligned}$$

حل دنباله‌ی فیبوناچی

جواب

$$F_n = s\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + t\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$F_0 = 0 \Rightarrow s + t = 0$$

$$F_1 = 1 \Rightarrow s\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + t\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow s = \frac{1}{\sqrt{5}} \,,\quad t = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \square$$

حل روابط خطی همگن

به ازای رابطه‌ی خطی همگن

$$(1) \quad a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

معادله‌ی زیر که با قرار دادن $f(n) = x^n$ به دست آید

$$x^n = c_1 x^{n-1} + \cdots + c_k x^{n-k}$$

را معادله‌ی مشخصه‌ی رابطه‌ی بازگشتی می‌نامیم.

نکته: اگر r_i ریشه‌ی معادله‌ی مشخصه باشد آنگاه $a_n = r_i^n$ یک جواب رابطه‌ی (1) است و در نتیجه هر ترکیب خطی از r_i^n ها یک جواب برای رابطه است.

نکته: اگر r_i ریشه‌ی مضاعف (درجه‌ی ۲) معادله‌ی مشخصه باشد آنگاه $a_n = n r_i^n$ نیز یک جواب رابطه است.
[زیرا r_i ریشه‌ی مشتق معادله‌ی مشخصه است]

مثال

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \\ a_0 = 1 \,,\quad a_1 = 6 \end{cases}$$

حل

$$r^n = 4r^{n-1} - 4r^{n-2}$$

$$\Rightarrow r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$(r-2)^2=0$$

$$\Rightarrow a_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n$$

$$\text{پس} \begin{cases} a_1 = 2c_1 + 2c_2 = 6 \\ a_0 = c_1 = 1 \end{cases}$$

$$c_2 = 2$$

$$\Rightarrow a_n = 2^n + 2n2^n$$

$$\boxed{a_n = (1+2n)2^n}$$

حالت کلی

اگر معادله‌ی مشخصه دارای k ریشه‌ی r_1 تا r_k

با تکرارهای m_1 تا m_k به شرط ≥ 1، جواب رابطه‌ی بازگشتی

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} \text{Poly}^{m_i-1}(n)\, r_i^n$$

چندجمله‌ای درجه‌ی m_i-1

خواهد بود.

حل رابطه‌ی خطی ناهمگن

رابطه‌ی $a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k} + f(n)$

جواب عمومی: $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$

جواب همگن — جواب خاص

قضیه: اگر $f(n) = \text{Poly}^t(n)\, r^n$ باشد

جواب خاص به صورت $\text{Poly}^t(n)\, n^m r^n$ خواهد بود

که m تعداد تکرار ریشه‌ی r در معادله‌ی مشخصه است.

مثال

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + f(n)$$

معادله مشخصه : $r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r-2)^2 = 0$

$$a_n^{(h)} = (c_1 + c_2 n)\, 2^n$$

$f(n) = 3^n$: $a_n^{(p)} = c\,3^n$

$f(n) = 2^n$: $a_n^{(p)} = c n^2 \underline{2}^n$

$f(n) = 4n2^n$: $a_n^{(p)} = (c + c'n)\, n^2\, 2^n$

مراحل حل رابطه

- تعیین $a_n^{(h)}$ و $a_n^{(p)}$
- تعیین ضرایب $a_n^{(p)}$ با قرار دادن در رابطه بازگشتی
- تعیین ضرایب $a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = a_n$ با شروط اولیه

مثال

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 1 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

حل

مشخصه $r - 2 = 0 \Rightarrow r = 2$

$$a_n^{(h)} = c_1 2^n$$

$$a_n^{(p)} = c\, 1^n = c$$

رابطه بازگشتی $c = 2c + 1 \Rightarrow c = -1$

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

$$\Rightarrow a_n = c_1 2^n - 1$$

اولیه $a_0 = c_1 - 1 = 0 \Rightarrow c_1 = 1$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = 2^n - 1} \quad \square$$