دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۹۹–۹۸

مدرس: حمید ضرابی‌زاده

تمرین سری سوم | **استقرای ریاضی** | مبحث آزمون ۱

۱. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n می‌توان ۷^n دایره به شعاع واحد را درون یک دایره به شعاع ۳^n جا داد، به طوری که هر دو دایره به شعاع واحد حداکثر یک نقطه‌ی مشترک داشته باشند.

۲. n خط بر روی صفحه رسم می‌کنیم به طوری که هیچ دوتایی با یک‌دیگر موازی و بر یک‌دیگر منطبق نباشند و همچنین هیچ سه خطی در یک نقطه همدیگر را قطع نکنند. در این صورت صفحه به چند ناحیه تقسیم می‌شود؟ ثابت کنید.

۳. ورقه‌های شکلات معمولا به شکل مستطیل‌هایی هستند که روی آن‌ها مربع‌های کوچکی حک شده است. به سادگی می‌توان یک مستطیل شکلاتی را با استفاده از خطوط افقی یا عمودی بین مربع‌ها، به مستطیل‌های کوچک‌تری تقسیم کرد. فرض کنید یک ورقه‌ی شکلاتی با k مربع داریم و می‌خواهیم آن را به مربع‌های تکی تقسیم کنیم. ثابت کنید برای این کار، مستقل از این که به چه ترتیبی ورقه را برش دهیم، باید دقیقاً $k - ۱$ برش انجام دهیم.

۴. به ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید که معادله‌ی $x^۲ + y^۲ = z^n$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی جواب دارد.

۵. یک دسته شامل n سنگریزه در اختیار داریم، $(n \geqslant ۲)$. در هر گام یکی از دسته‌ها را که بیش از یک سنگریزه دارد انتخاب و آن را به دو دسته‌ی غیر تهی تقسیم می‌کنیم و حاصل‌ضرب تعداد سنگریزه‌ها در این دو دسته را روی تخته می‌نویسیم. این کار را آنقدر ادامه می‌دهیم تا سنگریزه‌ها به n دسته، هر دسته شامل یک سنگریزه تقسیم شوند. ثابت کنید این عمل به هر نحو که انجام شود، مجموع اعداد نوشته شده روی تخته برابر $\binom{n}{۲}$ است.

۶. $۲n$ شکلات در n قوطی گذاشته شده است. علی و رضا به نوبت و هربار یک شکلات برمی‌دارند (علی شروع‌کننده‌ی بازی است). ثابت کنید رضا می‌تواند طوری شکلات انتخاب کند که دو شکلات آخر متعلق به یک قوطی باشند.

۷. همه‌ی عددهای طبیعی مانند n را بیابید که به ازای آن‌ها بتوان مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ را به سه زیرمجموعه مانند A و B و C طوری افراز کرد که مجموع اعضای هر یک از A و B و C با دیگری برابر باشد.

۸. یک زبان با n حرف الفبا داده شده است. ثابت کنید دنباله‌ای متناهی از حروف این زبان وجود دارد به طوری که هیچ دو بلوک مجاور از آن یکسان نباشند ولی هر حرفی به ابتدا یا انتهای آن اضافه کنیم دیگر این ویژگی برقرار نباشد (یک بلوک از یک یا چند حرف پشت سر هم تشکیل شده است).

۹. $n + ۱$ دختر و n پسر دور یک میز نشسته‌اند. ثابت کنید دختری وجود دارد که با شروع شمارش از او در جهت ساعتگرد تا هر نقطه از میز تعداد دخترها از پسرها بیش‌تر است. در ضمن ثابت کنید فقط یک دختر با این ویژگی وجود دارد.

۱۰. n مگس در فضای یک اتاق در حال تردد هستند. هر مگس در هر لحظه نزدیک‌ترین مگس را تماشا می‌کند. ثابت کنید در هر لحظه مگسی هست که هیچ مگسی او را تماشا نمی‌کند. فرض کنید فاصله‌ی مگس‌ها دو به دو متمایز است.

۱۱. در یک مدرسه n دبیر تدریس می‌کنند. این دبیرها را با شماره ۱ تا n شماره گذاری می‌کنیم. می‌دانیم که دبیرِ iام $i+1$ نفر از دانش‌آموزان را می‌شناسد. هر دانش‌آموز می‌تواند توسط بیش از یک دبیر شناخته شود. هر یک از این دبیرها می‌خواهد یکی از دانش‌آموزانی را که می‌شناسد به عنوان نماینده خود انتخاب کند، به شرط آن که هیچ دانش‌آموزی به عنوان نماینده‌ی بیش از یک دبیر انتخاب نشود. ثابت کنید انتخاب نماینده‌ها حداقل به 2^n حالت مختلف امکان‌پذیر است.

۱۲. n ماشین یکسان روی یک جاده‌ی دایره‌ای شکل قرار دارند. مقدار بنزین ماشین‌ها روی هم به اندازه‌ای است که یک خودرو یک دور کامل را طی کند. با استقرا ثابت کنید ماشینی وجود دارد که می‌تواند یک دور را با جمع‌آوری بنزین بقیه‌ی ماشین‌ها در طول مسیر کامل کند.

۱۳. ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$، جایگشتی از اعداد ۱ تا n وجود دارد که میانگین هر دو عددی از آن در میان آن دو عدد نباشد. در این‌جا منظور از میانگین، میانگین دقیق دو عدد است و نه میانگین صحیح آن‌ها. برای مثال میانگین اعداد ۲ و ۴ برابر با ۳ است و میانگین اعداد ۱ و ۲ برابر با ۱/۵ است.

۱۴. n نفر در یک صف ایستاده‌اند و در ابتدا هر کدام یا به سمت چپ نگاه می‌کنند یا به سمت راست. در هر ثانیه اگر دو نفر به یک‌دیگر نگاه کنند، هر دو روی خود را برمی‌گردانند و به طرف دیگر نگاه می‌کنند. ثابت کنید پس از مدتی دیگر کسی جهت نگاه خود را عوض نمی‌کند (n متناهی است).

۱۵. ثابت کنید هر عدد طبیعی n با شرط $n > 32$ را می‌توان به صورت مجموع چند عدد طبیعی نوشت به طوری که مجموع معکوس‌های این اعداد برابر واحد باشد. با این فرض که می‌دانیم این حکم برای اعداد $n = 33, 34, \ldots, 73$ برقرار است.

۱۶. به ازای $n > 3$ ثابت کنید زیرمجموعه‌ای n عضوی از مجموعه $\{1, 2, \ldots, 2^{n-1} - 1\}$ وجود دارد به طوری که مجموع اعضای هیچ دو زیرمجموعه‌ای از آن با هم برابر نباشند.

۱۷. ثابت کنید می‌توان 2^{n+1} عدد 2^n بیتی ساخت که هر دوتایی حداقل در 2^{n-1} رقم متفاوت باشند.

۱۸. $2n$ جعبه در یک ردیف به ترتیب با شماره‌های ۱ تا $2n$ قرار داده شده‌اند. در هر یک از جعبه‌های $2n - 1$ و $2n$ یک مهره قرار دارد. دو نفر به نوبت به این صورت بازی می‌کنند که هر فرد در نوبت خود یکی از مهره‌ها را از داخل یک جعبه برمی‌دارد و آن را داخل جعبه‌ای خالی با شماره‌ی کوچک‌تر قرار می‌دهد. فردی که در نوبت خود نتواند حرکتی انجام دهد بازنده‌ی بازی است. ثابت کنید نفر دوم می‌تواند طوری بازی کند که برنده‌ی بازی شود.

۱۹. علی در یک پیتزافروشی کار می‌کند. او همیشه ستونی از خمیر پیتزاهای پخته‌نشده را که آماده پخت هستند، نگهداری می‌کند. برای زیبایی محیط کار، علی همیشه دوست دارد که خمیرها در این ستون، به ترتیب ابعادشان مرتب شده باشند، به طوری که بزرگ‌ترین پیتزا کف ستون قرار بگیرد. هم‌چنین، او می‌تواند کف‌گیر مخصوصش را زیر یکی از پیتزاهای موجود در ستون قرار دهد و با یک حرکت نمایشی، تمامی پیتزاهای بالای کف‌گیر را برگرداند، که با این کار در واقع ترتیب آن‌ها برعکس می‌شود. این تنها حرکتی است که علی برای عوض کردن ترتیب پیتزاها بلد است، اما حاضر است این کار را تا جایی که نیاز است انجام دهد تا به ترتیب مورد علاقه خود برسد. آیا علی می‌تواند همیشه به ترتیب مورد علاقه‌اش برسد؟ ثابت کنید.