



## ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۹۹-۹۸

مدرس: حمید ضرابی‌زاده

تمرین سری دوم

منطقی و روش‌های اثبات

مبحث آزمون ۱

۱. فرض کنید  $x_1, x_2, \dots, x_n$  و  $y_1, y_2, \dots, y_n$  ترتیبی از قرار گرفتن دو دنباله‌ی  $n$  عضوی  $x$  و  $y$  از اعداد حقیقی مثبت هستند و  $S = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ .

(الف) نشان دهید مقدار  $S$  زمانی بیشینه می‌شود که دو دنباله مرتب باشند (به ترتیب صعودی قرار بگیرند).  
(ب) نشان دهید مقدار  $S$  زمانی کمینه می‌شود که اعضای یکی از دنباله‌ها به ترتیب صعودی و دیگری به ترتیب نزولی قرار بگیرند.

۲. ثابت کنید اگر  $n$  مربع کامل باشد،  $n + 2$  مربع کامل نیست.

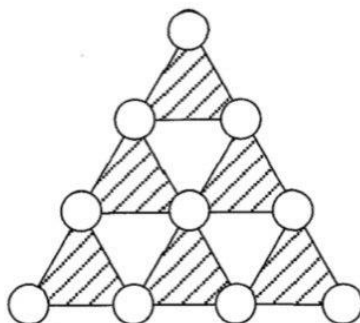
۳. کدام گزینه از لیست زیر پاسخ صحیح این سوال است، چرا؟

- (الف) همه‌ی گزینه‌های زیر
- (ب) هیچ‌یک از گزینه‌های زیر
- (پ) همه‌ی گزینه‌های بالا
- (ت) یکی از گزینه‌های بالا
- (ث) هیچ‌یک از گزینه‌های بالا
- (ج) هیچ‌یک از گزینه‌های بالا

۴. ساکنان یک جزیره دو دسته‌اند، یا «نجیب‌زاده»‌اند، کسانی که همیشه راست می‌گویند، یا «متقلب»‌اند، کسانی که همیشه دروغ می‌گویند.

- (الف) شخص  $A$  گفت: «من دروغگو هستم». آیا او یکی از ساکنان جزیره‌ی مورد نظر است؟
- (ب) فقط با پرسیدن یک سوال از جزیره‌نشین می‌توانیم بفهمیم که جاده‌ای به شهر نجیب‌زادگان منتهی می‌شود یا به شهر متقلب‌ها. با چه سوالی؟
- (ج) جزیره‌نشین  $A$  در حضور جزیره‌نشین  $B$  گفت: «در میان ما دست‌کم یکی متقلب است».  $A$  نجیب‌زاده است یا متقلب؟  $B$  چطور؟

۵. آیا می‌توان عددهای ۰ تا ۹ را در دایره‌های شکل زیر بدون تکرار به گونه‌ای قرار داد که همه‌ی مجموع‌های اعداد در راس‌های مثلث‌های سایه‌دار با هم برابر باشند؟



۶. طبق قوانین کشور، فروش اسلحه به اشرار توسط یک شهروند ممنوع است. اصغر یک شرور است و تعدادی اسلحه در اختیار دارد. همه‌ی اسلحه‌های اصغر از اکبر که یک شهروند است، خریداری شده است. تمام فرض‌های موجود را با عبارات منطقی بیان کنید و با استفاده از قواعد استنتاج نشان دهید اکبر مجرم است.

۷. فرض کنید  $p, q, r$  و  $s$  به ترتیب معرف گزاره‌های زیر باشند:

الف) امروز تمرین جدید گسسته آپلود می‌شود.

ب) امروز تمرین جدید مدارهای منطقی آپلود می‌شود.

پ) امروز تمرین جدید برنامه‌سازی پیشرفته آپلود می‌شود.

ت) پارسا خوشحال است.

با استفاده از موارد بالا گزاره‌های زیر را به صورت نمادین بنویسید.

الف) اگر امروز تمرین جدید مدارهای منطقی آپلود شود، تمرین جدید گسسته نیز آپلود می‌شود.

ب) برای این که امروز تمرین جدید گسسته آپلود نشود، یا باید تمرین جدید مدارمنطقی آپلود شود و یا تمرین جدید برنامه‌سازی پیشرفته آپلود شود.

پ) پارسا در صورتی که امروز تمرین جدیدی آپلود شود خوشحال می‌شود.

۸. صد نفر داریم که به هر کدام قرار است در جشن فارغ التحصیلی کلاهی رنگی داده شود. هر فرد تنها رنگ کلاه سایر افراد را می‌بیند و باید رنگ کلاه خودش را تنها از روی مشاهداتش و قراری که پیش از گرفتن کلاها با بقیه گذاشته است حدس بزند و همچنین از حدس سایرین مطلع نخواهد شد.

الف) اگر رنگ کلاها قرمز یا آبی باشد، آیا این افراد می‌توانند قبل از گرفتن کلاها طوری با هم هماهنگ کنند که حداقل ۵۰ نفر رنگ کلاشان را درست حدس بزنند؟

ب) اگر رنگ کلاها ۱۰۰ حالت ممکن داشته باشد، آیا این افراد می‌توانند قبل از گرفتن کلاها طوری با هم هماهنگ کنند که حتماً یک نفر رنگ کلاهش را درست حدس بزند؟

۹. گزاره‌ی زیر را با نمادگذاری مناسب برای عبارات‌های منطقی آن به صورت نمادین بنویسید، نقیض آن را بیابید و سپس نقیض را به شکل زبانی بیان کنید.

«هر خیابان شهر حداقل یک خانه دارد که می‌توان در آن یک شخص پیدا کرد که پولدار و زیباست یا مهربان و باسواد است»

۱۰. دو نفر در یک جزیره روبه‌روی هم ایستاده‌اند و رنگ چشم یکی از آن‌ها آبی و رنگ چشم دیگری سبز است. هر شب یک فرشته به جزیره می‌آید و هرکسی که رنگ چشم خودش را بداند را از جزیره می‌برد. شما می‌توانید در صبح روز اول یک جمله را به هردوی این افراد بگویید.

الف) جمله را طوری انتخاب کنید که فرشته هردوی آن‌ها را در شب دوم از جزیره ببرد.

ب) به ازای هر  $n$  طبیعی، جمله را طوری انتخاب کنید که فرشته آدم‌ها را دقیقاً در شب  $n$ ام از جزیره ببرد.

۱۱. نشان دهید عبارات‌های  $(\forall x : P(x)) \vee (\forall x : Q(x))$  و  $(\forall x \forall y : (P(x) \vee Q(y)))$  از نظر منطقی هم‌ارز هستند.

۱۲. فرض کنید ۵ عدد یک و ۴ عدد صفر دور یک دایره قرار گرفته‌اند. در هر مرحله بین هر دو عدد کنار هم اگر یکسان باشند صفر و اگر متفاوت باشند یک می‌گذاریم و سپس عددهای قبلی را پاک می‌کنیم. ثابت کنید هیچ‌گاه به وضعیتی نمی‌رسیم که همه‌ی اعداد دور دایره صفر شوند.

۱۳. آلیس مدت  $n$  روز را در سرزمین عجایب گذرانده بود. پس از بازگشت برای دوستانش بدین صورت تعریف می‌کرد:

«در مدت هفت روز، هر روز نصف روز باران می‌آمد. هرگاه صبح می‌بارید عصر هوا آفتابی بود. ۵ روز صبح‌ها و ۶ روز عصرها آفتابی بود.»  
 $n$  را بیابید.

۱۴. چوپان گله‌ای روزی متوجه می‌شود که گرگ‌هایی در لباس گوسفند وارد گله‌ی او شده‌اند. می‌دانیم گرگ‌ها همیشه دروغ گفته و گوسفندها همیشه راستگو هستند. چوپان مکالمه‌ی ۳ نفر (!) از اعضای گله را می‌شنود:  
 $A$  در گوش  $B$  یکی از دو عبارت «من یک گوسفندم» و یا «من یک گرگم» را زمزمه می‌کند.  $B$  به  $C$  می‌گوید که  $A$  ادعا می‌کند که گوسفند است. در انتها  $C$  می‌گوید که  $A$  گوسفند نیست و یک گرگ است. چند نفر از این سه نفر گوسفند هستند؟

۱۵. در یک خیابان ۵ خانه وجود دارد که با پنج رنگ متفاوت رنگ شده‌اند. در هر خانه یک نفر با ملیت متفاوت با خانه‌های دیگر زندگی می‌کند. هر کدام از صاحب‌خانه‌ها یک نوشیدنی متفاوت می‌نوشد، یک مارک سیگار متفاوت دوست دارند و یک حیوان خانگی متفاوت را نگهداری می‌کنند. اگر بدانیم گزاره‌های زیر برقرارند، مشخص کنید کدام صاحب کدما خانه از ماهی نگهداری می‌کند.

- مرد انگلیسی در خانه‌ی قرمز زندگی می‌کند.
- مرد سوئدی سگ دارد.
- نوشیدنی مورد علاقه‌ی مرد دانمارکی چای است.
- خانه‌ی سبز رنگ سمت چپ خانه‌ی سفید رنگ است.
- صاحب خانه‌ی سبز رنگ، قهوه می‌نوشد.
- مردی که سیگار پالمال می‌کشد، از پرنده نگهداری می‌کند.
- صاحب خانه‌ی زرد رنگ، سیگار دانهیل می‌کشد.
- مردی که در خانه‌ی وسطی زندگی می‌کند، نوشیدنی مورد علاقه‌اش شیر است.
- مرد نروژی در اولین خانه زندگی می‌کند.
- مردی که سیگار بلندز می‌کشد، همسایه‌ی مردی است که گربه دارد.
- مردی که اسب دارد، همسایه‌ی مردی است که سیگار دانهیل می‌کشد.
- مردی که سیگار بلومستر می‌کشد، آبجو می‌نوشد.
- مرد آلمانی سیگار پرنس می‌کشد.
- مرد نروژی در همسایگی کسی است که خانه‌اش آبی رنگ است.
- مردی که سیگار بلندز می‌کشد، همسایه‌ای دارد که نوشیدنی مورد علاقه‌اش آب است.

۱۶. آیا می‌توان جدول شطرنجی که یک گوشه‌ی آن حذف شده است را با قطعات به شکل زیر پوشاند؟



۱۷. دستگاه منطقی‌ای را در نظر بگیرید که در آن برای هر سه گزاره‌ی مثل  $A$ ،  $B$  و  $C$  داریم:

$$A \rightarrow (B \rightarrow A) \quad (۱)$$

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad (۲)$$

تنها روش استنتاج در این دستگاه قاعده‌ی  $p, p \rightarrow q \Rightarrow q$  است (برای مثال نمی‌توانید در روش اثبات خود از جدول درستی یا عبارات بدیهی مثل  $a \rightarrow a$  استفاده کنید).

الف) ثابت کنید در این دستگاه عبارت زیر به ازای هر  $a, b, c$  دلخواه یک راستگو است.

$$a \rightarrow b, b \rightarrow c \Rightarrow a \rightarrow c$$

ب) ثابت کنید در این دستگاه عبارت زیر به ازای هر  $a$  دلخواه یک راستگو است.

$$a \rightarrow a$$

۱۸. نقیض عبارت منطقی زیر را بیابید:

$$\exists x \left( P(x) \rightarrow \forall y (Q(y) \rightarrow R(y) \vee S(y)) \right)$$

۱۹. با ساده کردن عبارات منطقی زیر (بدون رسم جدول درستی) مشخص کنید هریک از این عبارات‌ها به ازای چه مقادیری از متغیرها صحیح هستند.

الف)

$$(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$$

ب)

$$(\neg p \vee q) \wedge (q \rightarrow (\neg r \wedge \neg p)) \wedge (p \vee r)$$