ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۹۹-۹۸

مدرس: حمید ضرابی‌زاده

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری چهارم — **مجموعه‌ها و توابع** — مبحث آزمون ۲

۱. در یک کلاس ۴۰ نفره، هر کس حداقل یکی از بازی‌های فوتبال، بسکتبال و والیبال را بازی می‌کند. ۱۸ نفر فوتبال، ۲۰ نفر بسکتبال و ۲۷ نفر والیبال بازی می‌کنند. ۷ نفر هم فوتبال بازی می‌کنند و هم بسکتبال. ۱۲ نفر هم بسکتبال بازی می‌کنند و هم والیبال. ۴ نفر هم هر ۳ را بازی می‌کنند. بیابید:

الف) تعداد دانش‌آموزانی که هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند.

ب) تعداد دانش‌آموزانی که هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند ولی بسکتبال بازی نمی‌کنند.

۲. عبارات جبری زیر را به ساده‌ترین شکل ممکن بنویسید.

الف) $((C\cap B)\cup(B-C))\cap((\overline{A}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}-\overline{C}))$

ب) $\overline{(A\cup B)}\cup(\overline{A}\cap B)$

ج) $(A\cup B\cup C)\cap\overline{(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})}\cap\overline{C}$

۳. نشان دهید اصل خوش‌ترتیبی هم‌ارز اصل استقرا است؛ یعنی با فرض یکی می‌توان دیگری را اثبات کرد.

۴. در این سؤال می‌توانید بدون حل یک قسمت از نتیجه‌ی آن در قسمت‌های بعدی استفاده کنید. منظور از تناظر در عبارات زیر تناظر یک به یک است.

الف) ثابت کنید تعداد راه‌های رنگ‌آمیزی یک جدول یک‌بعدی از یک طرف نامتناهی با دو رنگ سیاه و سفید ناشمارا است.

ب) ثابت کنید تعداد راه‌های رنگ‌آمیزی یک جدول یک‌بعدی از دو طرف نامتناهی با دو رنگ سیاه و سفید ناشمارا است.

ج) تناظری بین بازه‌ی (۰ , ۱) و بازه‌ی [۰ , ۱] ارائه کنید.

د) تناظری بین بازه‌ی (۰ , ۱) و نقاط نیم‌دایره‌ی باز با قطر واحد (نیم‌دایره‌ای که نقاط ابتدا و انتهای کمان عضو آن نباشند) ارائه کنید.

ه) تناظری بین نیم‌دایره‌ی باز واحد و اعداد حقیقی ارائه کنید.

و) تناظری بین [۰ , ۱] و اعداد حقیقی ارائه کنید.

۵. نشان دهید در مجموعه‌ی اعداد حقیقی بین هر دو عدد گویا ناشمارا عدد گنگ وجود دارد.

۶. اگر f تابعی صعودی با دامنه و برد اعداد حقیقی باشد، ثابت کنید تعداد نقاط ناپیوسته‌ی آن شمارا است.

۷. الف) نشان دهید اجتماع شمارا تا مجموعه‌ی شمارا، یک مجموعه‌ی شمارا است.

ب) عدد طبیعی n مفروض است. نشان دهید مجموعه‌ی تمام ریشه‌های تمام چند جمله‌ای‌های درجه n با ضرایب گویا، یک مجموعه‌ی شمارا است.

ج) به اعدادی که ریشه‌ی یک چندجمله‌ای دل‌خواه با ضرایب گویا باشند، اعداد جبری می‌گویند. با استفاده از نتیجه‌های دو قسمت بالا نشان دهید مجموعه‌ی اعداد جبری شمارا هستند.

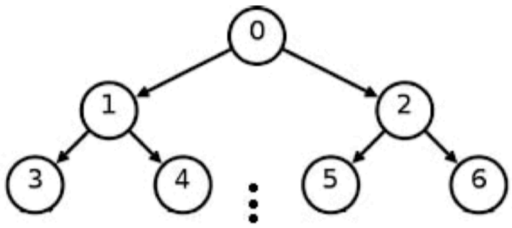
۸. ثابت کنید: $\{12a+4b : a,b\in Z\}=\{4c : c\in Z\}$.

۹. نشان دهید مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های متناهی از هر مجموعه‌ی نامتناهی شمارا، شمارا است.

۱۰. چهار مجموعه‌ی نامتناهی X, Y, Z, T داده شده‌اند، طوری که $|N| = |Z| = |Y| = |X|$ و $|R| = |T|$. همچنین مجموعه‌ی متناهی Q مفروض است. برای هر یک از حالات زیر، چهار مجموعه‌ی فوق را (در صورت امکان) طوری تعریف کنید که در شرط‌های آمده صدق کنند. در غیر این صورت ثابت کنید ممکن نیست.

- $X - T = Y, X \cap T = Z$
- $P(Q) - X = Y$
- $|T| = |Q|^{|X|}$

۱۱. در زمان تولد زمین، یک باکتری به نام کدینگ پلاسم در زمین وجود داشت. این باکتری در هر ثانیه، به دو قسمت تقسیم می‌شد و قسمت‌های ایجادشده هم به همین ترتیب تقسیم سلولی می‌شدند. منظور از یک شجره‌نامه شروع از کدینگ پلاسم تا رسیدن به یکی از نوادگان او و نوشتن همه‌ی فرزندان این بین است. مثلا شکل زیر را در نظر بگیرید:



در این شکل ۴, ۱, ۰ یک شجره‌نامه با طول متناهی است. فرض کنید کره‌ی زمین هیچگاه نابود نمی‌شود! تعداد شجره‌نامه‌های با طول نامتناهی شمارا است یا ناشمارا؟

۱۲. فرض کنید C مجموعه‌ای از بازه‌ی $(\text{۰}, \text{۱})$ باشد که در آن برای هر $x \in C$ می‌دانیم که نمایش x در مبنای ۱۰ شامل حداقل یک رقم ۷ است.

الف) نشان دهید $|C| = |(\text{۰}, \text{۱})|$.

ب) نشان دهید اگر $\text{۰} \leqslant a \leqslant b \leqslant \text{۱}$ آنگاه (a, b) شامل زیربازه‌ای نظیر $(c, d) \subseteq (a, b)$ است که $(c, d) \subseteq C$.

ج) ثابت کنید $(\text{۰}, \text{۱}) - C$ شمارا است.

۱۳. فرض کنید مجموعه‌ی S برابر مجموعه‌ی تمام مجموعه‌هایی باشد که عضو خودشان نیستند. آیا S عضو خودش است؟

۱۴. تمام توابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید به طوری که داشته باشیم:

$$f(f(x) + y) = \text{۲}x + f(f(y) - x)$$

۱۵. تمام توابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید به طوری که برای هر x, y حقیقی داشته باشیم:

$$f(x) + f(y) + f(xy) = (f(x) - f(y))^{\text{۲}}$$

۱۶. توابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x,A)=\begin{cases}۱ & x\in A\\ ۰ & x\notin A\end{cases} \tag{۱}$$

$$g(x)=\begin{cases}x(۱-x) & x\geqslant ۱\\ x(۱+x) & x<۱\end{cases} \tag{۲}$$

$$h(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x^{۲}} & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases} \tag{۳}$$

الف) با فرض این که دامنه‌ی x اعداد حقیقی است، برد توابع $g(x)$، $g(f(x,A))$ و $g(h(f(x,A)))$ را مشخص کنید.

ب) ثابت کنید $f(x,A)\times f(x,\overline{B})+f(x,\overline{A})=f(x,\overline{A\cap B})$.