دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۹۹-۹۸

مدرس: حمید ضرابی‌زاده

تمرین سری ششم | نظریه‌ی اعداد | مبحث آزمون ۲

۱. با استفاده از الگوریتم اقلیدس تعمیم‌یافته، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک ۲۳ و ۵۷ را به صورت ترکیب خطی این دو عدد به دست آورید.

۲. نشان دهید اگر $۲^p - ۱$ اول باشد، آنگاه $۲^{p-۱}(۲^p - ۱)$ یک عدد کامل است.

۳. تمام اعداد طبیعی n را بیابید که $n + ۲^n \mid n + ۸^n$.

۴. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی a، بی‌نهایت عدد طبیعی b وجود دارد طوری که

$$a \mid b, a + ۱ \mid b + ۱, a + ۲ \mid b + ۲, ..., a + ۱۳۹۹ \mid b + ۱۳۹۹$$

۵. (قضیه‌ی ویلسون) ثابت کنید به ازای هر عدد اول p داریم: $(p-۱)! \overset{p}{\equiv} -۱$.

۶. ثابت کنید بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد که $n! - ۱$ مرکب باشد.

۷. ثابت کنید به ازای هر عدد فرد اول p، بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد که $n۲^n + ۱$ بر p بخش‌پذیر باشد.

۸. تمام اعداد طبیعی فرد n را پیدا کنید که برای آن‌ها عدد $(n-۱)!$ بر $n^۲$ بخش‌پذیر نباشد.

۹. ثابت کنید در دنباله‌ی $۱, ۳۱, ۳۳۱, ۳۳۳۱, ...$ بی‌نهایت عدد مرکب وجود دارد.

۱۰. تمام اعداد طبیعی n را بیابید که $n^۴ + n^۲ + ۱ = p^k$ و p عددی اول است.

۱۱. تمام اعداد اول p و q را بیابید که داشته باشیم $۲^m p^۲ + ۱ = q^۵$.

۱۲. اگر a و b دو عدد اول متمایز باشند، نشان دهید:

$$a^{b-۱} + b^{a-۱} \overset{ab}{\equiv} ۱$$

۱۳. فرض کنید a, b, c, d اعدادی طبیعی هستند طوری که $ab = cd$. ثابت کنید اعداد زیر اعدادی مرکب هستند.

$$T = a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲, ۲^T - ۱$$

۱۴. تمام زوج‌های p, q از اعداد اول را بیابید که برای آن‌ها داشته باشیم:

$$p^۳ - q^۵ = (p+q)^۲$$

۱۵. همه اعداد طبیعی a و b را بیابید که داشته باشیم:

$$a + b \mid ۴ab + ۱, (۲a - ۱, ۲b + ۱) = ۱$$

۱۶. معادله‌ی $x^y - y^x = xy^۲ - ۱۱$ را در مجموعه‌ی اعداد اول حل کنید.

۱۷. تمام اعداد طبیعی n را بیابید که $n^n + ۱$ و $(۲n)^{۲n} + ۱$ هر دو اول باشند.

۱۸. تمام اعداد طبیعی m و n را بیابید که

$$m^۲ + n^۲ \mid m^۳ + n$$
$$m^۲ + n^۲ \mid n^۳ + m$$

۱۹. اگر p و q دو عدد فرد متوالی باشند، نشان دهید $p + q \mid p^q + q^p$.

۲۰. فرض کنید به ازای دو عدد صحیح a و b داشته باشیم $۲۰۰۵ \mid a^۳ + b^۳$ و $۲۰۰۵ \mid a^۴ + b^۴$. نشان دهید $۲۰۰۵^۵ \mid a^۵ + b^۵$.

۲۱. تمامی زوج اعداد $p, x \in \mathbb{N}$ را بیابید طوری که p اول و $p^x - ۱$ مکعب کامل باشد.

۲۲. تمام اعداد اول p و q و r را بیابید که $pqr = ۵(p + q + r)$.

۲۳. مقادیر n, p, q را در $\mathbb{N} \cup \{۰\}$ طوری بیابید که $۲^n + n^۲ = ۳^p \times ۷^q$.

۲۴. ثابت کنید اگر n عددی فرد باشد، آنگاه $۲^{n!} - ۱$ بر n قابل قسمت است.

۲۵. نشان دهید اگر $۲۱۰ \mid a + b + c$ آنگاه $۲۱۰ \mid a^{۴۹} + b^{۴۹} + c^{۴۹}$. [راهنمایی: نشان دهید $a^{۴۹} \overset{۲۱۰}{\equiv} a$]

۲۶. الف) فرض کنید باقی مانده عدد اول p بر ۴ برابر ۳ باشد. ثابت کنید اگر $p \mid x^۲ + y^۲$ آنگاه $p \mid x$ و $p \mid y$.

ب) نشان دهید بی‌نهایت عدد اول p وجود دارد که برای هر عدد طبیعی زوج x، هیچ‌یک از جمله‌های دنباله‌ی

$$x^x + ۱, x^{x^x} + ۱, x^{x^{x^x}} + ۱, \ldots$$

بر p قابل قسمت نیست.

۲۷. می‌دانیم عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $n^۵ = ۲۷^۵ + ۸۴^۵ + ۱۱۰^۵ + ۱۳۳^۵$. عدد n را بیابید.

۲۸. عدد صحیح $n > ۱$ را در نظر بگیرید. نشان دهید اگر به ازای هر $۱ < a < n$ رابطه‌ی $a^{n-۱} \overset{n}{\equiv} ۱$ برقرار باشد n عددی اول است. [راهنمایی: نشان دهید اگر رابطه‌ی $a^{n-۱} \overset{n}{\equiv} ۱$ برقرار باشد، آنگاه $(a, n) = ۱$.]