ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۹۸ـ۹۹

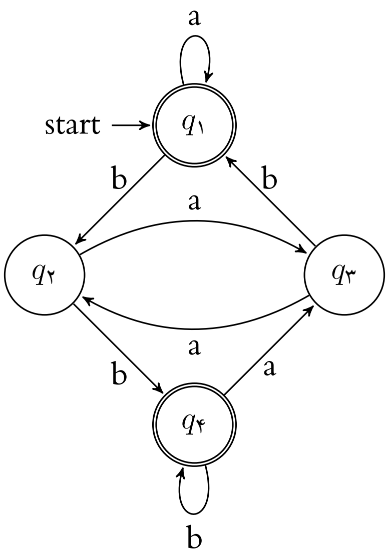
مدرس: حمید ضرابی‌زاده

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری دهم | **مدل‌سازی محاسبات** | زمان آزمون: مبحث آزمون پایانی

---

۱. برای ماشین زیر، توصیف رسمی بنویسید (توصیف رسمی شامل اطلاعاتی نظیر مجموعه‌ی حالت‌ها، حروف زبان، حالات تایید و شروع و نیز جدول انتقال می‌باشد).



$M۱$

حل.

$$M_۱ = (\{q_۱, q_۲, q_۳\}, \{a, b\}, \delta_۱, q_۱, \{q_۴\})$$

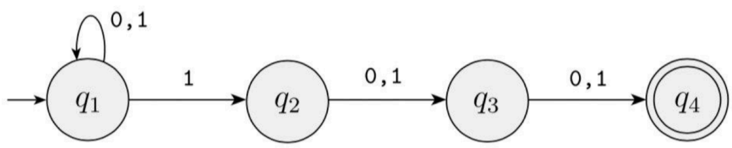
δ	a	b
q_1	q_1	q_2
q_2	q_3	q_4
q_3	q_2	q_1
q_4	q_3	q_4

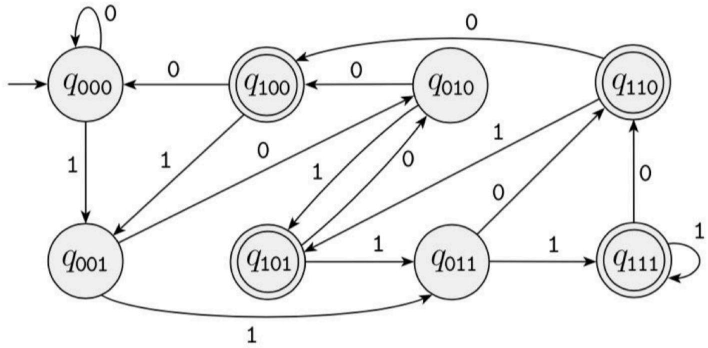
▷

۲. زبان L با الفبای $\{۰, ۱\}$ شامل رشته‌هایی است که سومین حرف از آخرشان ۱ باشد. برای مثال ۰۰۰۱۰۰ عضو L است اما ۰۰۱۱ عضو L نمی‌باشد.برای زبان L:

- یک ماشین حالت متناهی غیر قطعی ارائه دهید.
- یک ماشین حالت متناهی قطعی ارائه دهید.

حل.





▷

۳. فرض کنید A زبان تک‌رشته‌ای متشکل از رشته‌ی S باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$s = \begin{cases} 1 & \text{اگر روزی در مریخ موجود زنده پیدا شود} \\ 0 & \text{اگر هیچگاه در مریخ موجود زنده‌ای پیدا نشود} \end{cases} \qquad (1)$$

آیا این زبان تصمیم‌پذیر است؟ چرا؟

حل.
زبان A بالاخره یک از دو حالت $\{0\}$ و یا $\{1\}$ است. در هر صورت متناهی است و در نتیجه تصمیم‌پذیر است. هرچند ما جوابش را نمی‌دانیم (احتمالا!) و نمی‌توانیم برای آن یک ماشین تصمیم‌گیرنده توصیف کنیم. ولی می‌توانیم دو ماشین تورینگ ارائه دهیم که حتما یکی از آنها برای این زبان تصمیم‌گیرنده باشد.

▷

۴. نشان‌دهید مجموعه‌ی زبان‌های تصمیم‌پذیر نسبت به عمل اجتماع گیری بسته‌است.

حل.
برای زبان‌های تصمیم‌پذیر L_1, L_2 فرض کنید M_1, M_2 ماشین‌های تورینگی باشند که آنها را تصمیم می‌گیرند. اکنون ماشین تورینگ M' را به گونه‌ای می‌سازیم که اجتماع آنها را تصمیم بگیرد. برای هر رشته‌ی ورودی مانند w:

(آ) ماشین M_1 را روی این رشته اجرا کن. اگر تایید کرد، تایید کن.
(ب) همین کار را با ماشین M_2 انجام بده. اگر تایید کرد تایید کن. وگرنه رد کن.

▷

۵. اگر زبان A منظم باشد، نشان‌دهید که زبان زیر نیز منظم است:

$$\{w \in A | w \text{ is not the proper prefix of any string in A}\}$$

که منظور از زیررشته‌ی سالم [۱] زیررشته‌ای است که برابر خود رشته نباشد. مثلا برای رشته‌ی $abcd$ رشته‌ی abc یک زیررشته‌ی سالم است ولی $abcd$ نیست.

حل.
برای زبان A یک ماشین حالت متناهی غیرقطعی در نظر بگیرید. حال آن را به گونه‌ای تغییر می‌دهیم که به زبان جدید برسیم. برای هر حالت تایید فعلی مانند S یک حالت تایید جدید اضافه کنیم و S را به یال ϵ به آن ببریم. همچنین S را به حالت عادی تبدیل کنیم. به این صورت هر بار که به یک حالت تایید می‌رسیم، ممکن نیست که در طول مسیر از حالت تایید دیگری رد شده باشیم و در نتیجه هیچ رشته‌ی دیگری در زبان نیست که زیررشته‌ی سالم رشته‌ی ما باشد.

$\triangleright$

۶. با استفاده از لم پمپاژ نشان دهید که زبان زیر منظم نیست:

(آ) $\{a^{۲^n} | n \geqslant ۰\}$

حل.
مقدار p را به عنوان طول پمپاژ در نظر بگیرید. اکنون با استفاده از رشته‌ی $a^{۲^p}$ سوال را حل می‌کنیم. آن را به فرم xyz می‌توان نوشت به طوری که xy^iz عضو زبان باشد. همچنین لم پمپاژ به ما می‌گوید که $|xy| \leqslant p$. و از آنجا که $p < ۲^p$ است، نتیجه می‌گیریم $|y| < ۲^p$. همچنین می‌دانیم که $|y| > ۱$ و در نتیجه $۲^p < |xyyz| < ۲^{p+۱}$ که تناقض است.

$\triangleright$

۷. با استفاده از لم پمپاژ [۲] نشان دهید که زبان زیر منظم نیست:

(آ) $\{۰^n ۱^n ۲^n | n \geqslant ۰\}$

حل.
از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید که زبان داده شده منظم باشد. همچنین فرض کنید که طولی که لم پمپاژ به ما می‌دهد برابر P باشد. اکنون رشته‌ی $۰^p۱^p۲^p$ را در نظر بگیرید. چون این رشته عضو زبان است، و همچنین از آنجایی که طولش از p بیشتر است، لم پمپاژ ضمانت می‌کند که آن را می‌توان به سه قسمت مانند xyz تقسیم کرد به طوری که برای هر $i \geqslant ۰$ رشته‌ی xy^iz عضو زبان باشد. اکنون حالات مختلف ممکن برای y را در نظر بگیرید و با استفاده از آن حکم را اثبات کنید.

$\triangleright$

۸. در نظر بگیرید که $\Sigma = \{a, b\}$ می‌باشد. حال اثبات کنید که زبان زیر منظم نمی‌باشد.

$$L = \{w \in \Sigma^* : n_a(w) < n_b(w)\}$$

حل. فرض کنید که طول پمپاژ را m در نظر بگیریم. با توجه به آزادی کامل، $w = a^m b^{m+۱}$ در نظر می‌گیریم . در این صورت باید $۱ \leqslant k \leqslant m$: $y = a^k$ باشد .حال کافیست $i = ۲$ را در نظر بگیریم تا $w_۲ = a^{m+k} b^{m+۱}$ که در L موجود نمی‌باشد.
$\triangleright$

[۱] proper-prefix
[۲] pumping-lemma

۹. نشان دهید زبان زیر منظم نمی‌باشد.

$$L = \{(ab)^n a^k : n > k, k \geqslant 0\}$$

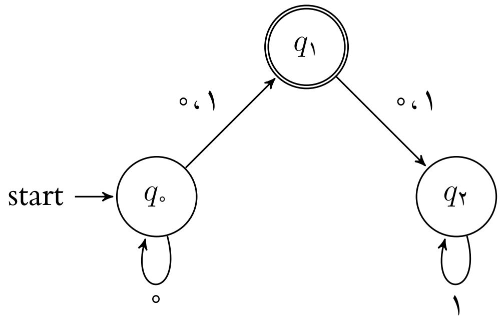
حل. فرض کنید که طول پمپاژ را m در نظر بگیریم. با توجه به آزادی کامل، $w = (ab)^{m+1} a^m$ در نظر می‌گیریم. با توجه به شرط $|xy| \leqslant m$ باید x و y هر دو بخشی از قسمت شامل ab باشند. حال هر y انتخاب شود به صورت $a^l b^k$ خواهد بود که $0 \leqslant l, 0 \leqslant k$. به سادگی می‌توان فهمید برای هر l و k کافیست $i = 0$ در نظر گرفته شود تا نشان دهیم در L موجود نیستند. ▷

۱۰. ثابت کنید که هر ماشین حالت متناهی غیرقطعی دلخواه قابل تبدیل به یک ماشین حالت متناهی غیرقطعی معادل با یک حالت تایید است.

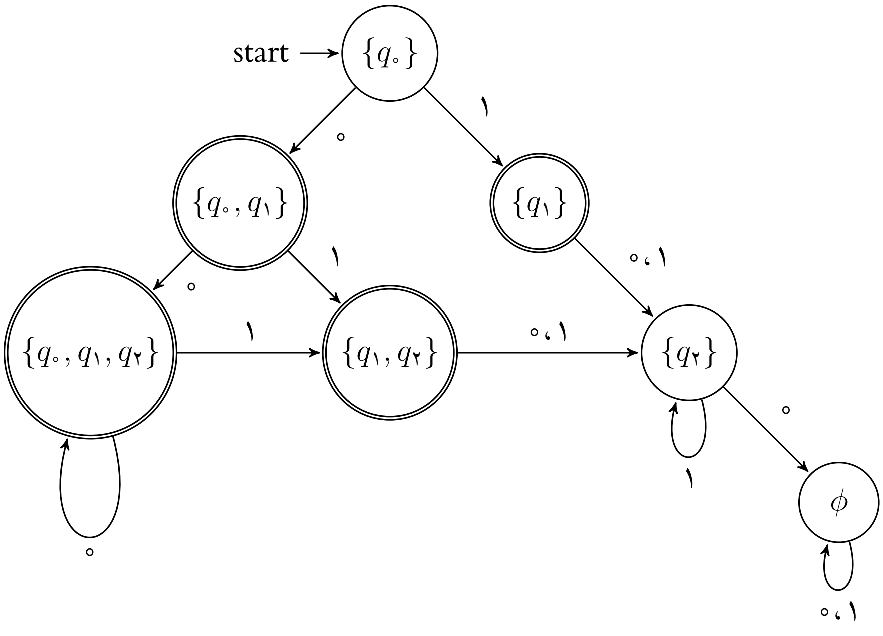
حل.
به این صورت ماشین حالت متناهی غیرقطعی جدید را می‌سازیم که ابتدا یک حالت تایید جدید اضافه می‌کنیم. سپس تمام حالات تایید قبلی را به حالت عادی تبدیل کرده و آنها را با یال ϵ به حالت تایید جدیدی که اضافه کرده‌ایم می‌بریم.

▷

۱۱. ماشین حالت متناهی غیرقطعی زیر را به یک ماشین حالت متناهی قطعی متناظر تبدیل کنید.



حل.



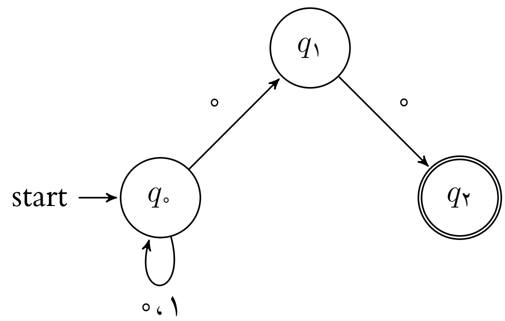
▷

۱۲. برای هریک از زبان‌های توصیف‌شده‌ی زیر یک ماشین حالت متناهی غیرقطعی با تعداد حالات خواسته شده رسم کنید:

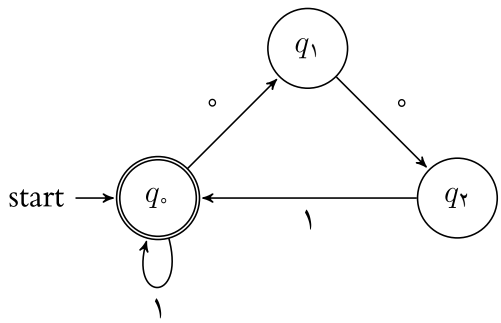
(آ) $\{w|\ w \text{ ends with } 00\}$ با ۳ حالت.

(ب) $1^*(001^+)^*$ با ۳ حالت.

حل.



(آ)

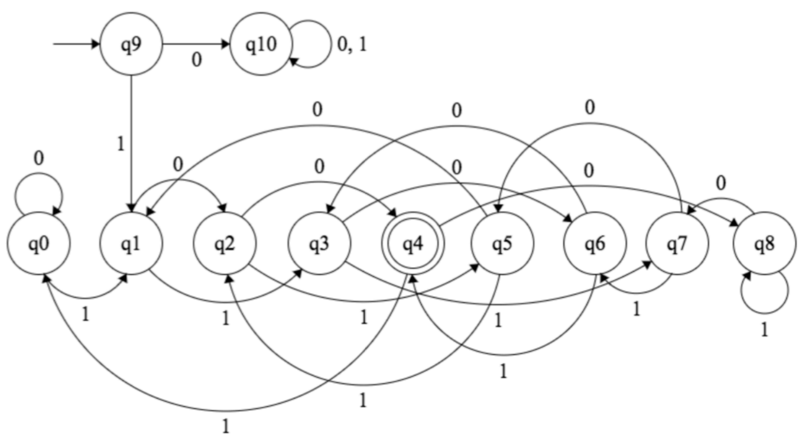


(ب)

▷

۱۳. یک ماشین حالت متناهی رسم کنید که تمام رشته‌های دودویی که باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد متناظر آنها به ۹ برابر ۴ است را بپذیرد. فرض کنید بیت‌های عدد به ترتیب از پرارزش به کم‌ارزش به ماشین داده می‌شوند. رشته‌هایی که با صفر شروع می‌شوند مورد قبول نیستند.

حل.



$\triangleright$

۱۴. ثابت کنید ماشین تورینگ از هر ماشین حالت متناهی قوی‌تر است. یعنی هر زبانی که با ماشین حالت متناهی قابل تشخیص است با ماشین تورینگ نیز قابل تشخیص است.

حل. باید ثابت کنیم که برای هر زبانی مانند A که ماشین حالت متناهی‌ای برای آن وجود دارد، ماشین تورینگ نیز وجود دارد. از روی ماشین حالت متناهی، ماشین تورینگ را به این صورت می‌سازیم که به ازای هر انتقال بین دو حالت در ماشین حالت متناهی، یک انتقال بین و حالت ماشین تورینگ داریم که در این انتقال نوار را تغییر نداده و سر نوار را یک خانه به راست منتقل می‌کنیم. به این ترتیب ماشین تورینگ ذکر شده دقیقا زبان ماشین حالت متناهی اولیه را قبول می‌کند. $\triangleright$

۱۵. فرض کنید یک ماشین تورینگ تک‌نویس، ماشین تورینگی باشد که هر خانه‌ی نوار را بتواند حداکثر یکبار تغییر دهد (شامل قسمت ورودی نوار). نشان‌دهید که این نوع از ماشین‌های تورینگ، از نظر قدرت با ماشین‌های تورینگ معمولی معادل‌اند.

حل.
ابتدا با یک راهنمایی شروع می‌کنیم. اول سعی کنید حالتی را در نظر بگیرید که بتوان در هر خانه‌ی نوار، حداکثر دو بار نوشت (ماشین تورینگ دونویس). از تعداد زیادی نوار استفاده کنید. حال به حل سوال می‌پردازیم. ابتدا نشان می‌دهیم که ماشین تورینگ دونویس با ماشین تورینگ معمولی معادل است. به این صورت عمل می‌کنیم که در هر گام، تمام محتوای فعلی نوار را به یک قسمت دست نخورده در سمت راست نوار منتقل می‌کنیم. در حین انتقال اعمال لازم را انجام می‌دهیم و هر خانه را که منتقل می‌کنیم، علامتش می‌زنیم. پس هر خانه حداکثر دو بار تغییر کرده است. یک‌بار با کپی کردن مقادیر داخل آن و یک‌بار با علامت خوردنش. حال برای آن که نشان دهیم ماشین تورینگ دو نویس با ماشین تورینگ تک‌نویس معادل است، مانند سابق عمل می‌کنیم. با این تفاوت که برای هر خانه از نوار قبلی، اینجا دو خانه در نظر می‌گیریم. اولی برای نگه داشتن نمادی است که در نوار قبلی بوده است. دومی برای نگه داشتن این که آیا آن خانه علامت خورده است یا خیر.

$\triangleright$

۱۶. یک تورینگ ماشین طراحی کنید که زبان زیر را قبول کند.

$$L = \{a^n b^n : n \geqslant ۱\}$$

حل. این‌گونه عمل می‌کنیم که با شروع از چپ‌ترین a، آن را با یک نماد مانند x جایگزین می‌کنیم. سپس سر نوار را آن قدر به سمت راست می‌بریم تا به چپ‌ترین b برسیم. آن را هم با یک نماد مانند y جایگزین می‌کنیم. دوباره به چپ برگشته، چپ‌ترین a را با x جایگزین کرده و دوباره به راست می‌رویم. این‌کار را مرتبا تکرار می‌کنیم. در واقع با این کار داریم به ازای هر a یک b را پیدا می‌کنیم و بالعکس. اگر بعد از مدتی نه a باقی بماند و نه b، پس رشته مورد نظر در زبان L موجود می‌باشد:

$$Q = \{q_۰, q_۱, q_۲, q_۳, q_۴\}, F = \{q_۴\}, \Sigma = \{a, b\} \Gamma = \{a, b, x, y, \square\}$$

$$\delta(q_۰, a) = (q_۱, x, R), \delta(q_۱, a) = (q_۱, a, R), \delta(q_۱, y) = (q_۱, y, R), \delta(q_۱, b) = (q_۲, y, L)$$

$$\delta(q_۰, y) = (q_۳, y, R), \delta(q_۳, y) = (q_۳, y, R), \delta(q_۳, \square) = (q_۴, \square, R)$$

$$\delta(q_۲, y) = (q_۲, y, L), \delta(q_۲, a) = (q_۲, a, L), \delta(q_۲, x) = (q_۰, x, R)$$

$\triangleright$

۱۷. یک ماشین تورینگ طراحی کنید که رشته‌ای از یک‌ها را کنار خود کپی کند. برای مثال ۱۱ به ۱۱۱۱ تبدیل می‌شود.

حل. کافی‌است مراحل زیر را انجام دهیم:

- هر یک را با x جایگزین کنید.
- سمت راست‌ترین x را پیدا کرده و با یک جایگزین کنید.
- به سمت راست آخرین خانه‌ی غیر خالی بروید و عدد یک را در آنجا وارد کنید.
- مرحله‌ی دو و سه را مرتبا تکرار کنید تا زمانی که دیگر x وجود نداشته باشد.

$$\delta(q_0, 1) = (q_0, x, R), \delta(q_0, \Box) = (q_1, \Box, L), \delta(q_1, x) = (q_2, 1, R), \delta(q_2, 1) = (q_2, 1, R)$$

$$\delta(q_2, \Box) = (q_1, 1, L), \delta(q_1, 1) = (q_1, 1, L), \delta(q_1, \Box) = (q_3, \Box, R)$$

برای مثال برای رشته‌ی ۱۱ خواهیم داشت:

$$q_0 11 \mapsto xq_0 1 \mapsto xxq_0\Box \mapsto xq_1 x$$

$$\mapsto x1q_2\Box \mapsto xq_1 11 \mapsto q_1 x11$$

$$\mapsto 1q_2 11 \mapsto 11q_2 1 \mapsto 111q_2\Box$$

$$\mapsto 11q_1 11 \mapsto 1q_1 111$$

$$\mapsto q_1 1111 \mapsto q_1\Box 1111 \mapsto q_3 1111$$

▷

۱۸. ثابت کنید مجموعه‌ی تمام ماشین‌های تورینگ شمارا است.

حل. می‌دانیم هر ماشین تورینگ را می‌توان با یک هفتایی به شکل زیر نشان داد:

$$(Q, \Sigma, \Gamma, \sigma, q_0, q_{accept}, q_{reject})$$

طبق تعریف ماشین تورینگ Σ, Γ, Q متناهی و در نتیجه شمارا هستند.همچنین q_{accept}، q_0 و q_{reject} تک‌عضوی هستند. تابع انتقال σ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma : Q * \Gamma \to Q * \Gamma * \{L, R\}$$

که زیرمجموعه‌ای از حاصل ضرب دکارتی تعداد متناهی مجموعه‌ی شمارا است و در نتیجه σ نیز شمارا است. بنابراین تمام اعضای هفتایی مرتب معرف یک ماشین تورینگ شمارا است و در نتیجه مجموعه‌ی تمام ماشین‌های تورینگ شمارا است. ▷

۱۹. برای زبان زیر توصیف یک ماشین تورینگ را بنویسید که این زبان را تصمیم بگیرد.

$$\{w | w \text{ contains an equal number of zeros and ones}\}$$

که زبان رشته‌هایی است که تعداد ۰ ها و ۱ هایشان برابر است.

حل.
برای رشته‌ی ورودی w مراحل زیر را انجام دهید:

- نوار را اسکن کن و اولین ۰ای را که علامت نخورده است علامت بزن. اگر هیچ ۰ای علامت‌نخورده‌ای نداشتیم، به مرحله‌ی آخر برو. وگرنه سر نوار را به جلوی نوار ببر.
- نوار را اسکن کن و اولین ۱ را علامت بزن. اگر هیچ ۱ علامت‌نخورده‌ای نمانده بود رشته را رد کن.
- حال سر نوار را به جلوی نوار برگردان و به مرحله‌ی اول برو.
- به اول نوار برو. ببین آیا ۱ علامت نخورده‌ای باقی مانده یا نه. اگر نبود تایید کن و اگر بود رد کن.

$\triangleright$

۲۰. با توجه به تعریف ماشین تورینگ به سوالات زیر پاسخ دهید:

(آ) آیا ممکن است یک ماشین تورین روی نوارش کاراکتر خالی [۳] بنویسد؟

(ب) آیا ممکن است الفبای نوار Γ با الفبای ورودی Σ یکسان باشند؟

(ج) آیا ممکن است سر نوار یک ماشین تورینگ در دو مرحله‌ی متوالی در محل یکسانی باشد؟

(د) آیا ممکن است یک ماشین تورینگ تنها یک حالت داشته باشد؟

حل.

(آ) بله. یک ماشین تورینگ می‌تواند هر کدام از حروف موجود در Γ را روی نوارش بنویسد که شامل کاراکتر خالی است.

(ب) خیر.الفبای ورودی هیچ‌گاه شامل کاراکتر خالی نمی‌باشد.

(ج) بله. اگر سر نوار ماشین تورینگ در چپ‌ترین خانه باشد و تلاش کند که به سمت چپ برود، در جای خودش می‌ماند.

(د) خیر. هر ماشین تورینگ حداقل شامل دو حالت متمایز تایید و رد است.

$\triangleright$

[۳] blank-symbol