



ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۹۹-۹۸

مدرس: حمید ضرابی‌زاده

تمرین سری اول

شمارشی

زمان آزمون: ۲۲ اسفند

۱. چند مکعب متفاوت که شش وجه هر یک از آن‌ها با اعداد ۱ تا ۶ شماره‌گذاری شده‌اند، می‌توان ساخت طوری که مجموع اعداد روی هر جفت از وجوه مقابل برابر ۷ باشد؟ دو مکعب متفاوت‌اند اگر نتوان با چرخش آن‌ها را به یک‌دیگر تبدیل کرد.

۲. یک ربات پرنده ساخته‌ایم که در ابتدا در مختصات $(0, 0, 0)$ قرار دارد و می‌خواهد به مختصات (a, b, c) برود و در هر حرکت می‌تواند در جهت مثبت یکی از جهت‌های مختصات یک واحد حرکت کند. ربات به چند طریق مختلف می‌تواند به مقصد برود؟

۳. تعداد اعداد صحیح مثبت هفت‌رقمی را که مجموع ارقام آن‌ها برابر ۱۹ است بیابید.

۴. تعداد توزیع‌های پنج شیء متمایز در سه جعبه‌ی متمایز به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نماند را پیدا کنید.

۵. ۱۲ کتاب در قفسه‌ای چیده شده‌اند. به چند طریق می‌توان پنج عدد از این کتاب‌ها را طوری انتخاب کرد که از کتاب‌های انتخاب شده هیچ دو تایی در قفسه کنار هم نبوده باشند؟

۶. مجموعه‌ی $A = \{1, 2, \dots, k\}$ را در نظر بگیرید. دنباله‌ی (T_1, \dots, T_n) از زیرمجموعه‌های A را زنجیره‌ای به طول n می‌نامیم، اگر $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \dots \subseteq T_n$. تعداد زنجیره‌های به طول n از زیرمجموعه‌های A را بیابید.

۷. تعداد ماتریس‌های $m \times n$ با درایه‌های ۱ و -۱ را پیدا کنید به طوری که حاصل ضرب درایه‌های هر سطر و حاصل ضرب درایه‌های هر ستون برابر با -۱ شود.

۸. در یک جدول $n \times n$ تعدادی بمب چیده شده است. در هر خانه‌ای که بمب در آن نیست، عددی نوشته شده که تعداد خانه‌های مجاور دارای بمب آن را نشان می‌دهد. حال جدولی را در نظر بگیرید که برعکس جدول اول پر شده، یعنی در یک خانه‌ی آن بمب است اگر و تنها اگر در جدول اول در آن خانه بمبی وجود نداشته باشد. اعداد خانه‌های بدون بمب این جدول نیز مشابه جدول اول بر حسب تعداد بمب‌های مجاور هر خانه نوشته شده‌اند. آیا ممکن است مجموع اعداد جدول دوم بیشتر از مجموع اعداد جدول اول شود؟

۹. اگر n, l و k اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ باشند طوری که $l, k < n$ ، ثابت کنید $\binom{n}{k}$ و $\binom{n}{l}$ مقسوم‌علیه مشترک دارند.

۱۰. خانه‌های یک صفحه‌ی شطرنجی به طور متناوب سیاه و سفید شده‌اند. روی این صفحه یک چندضلعی رسم کرده‌ایم طوری که اضلاع آن روی خطوط صفحه‌ی شطرنجی قرار دارند. یک پاره‌خط واحد روی محیط چندضلعی را سیاه یا سفید می‌کنیم بسته به اینکه این پاره‌خط ضلع یک مربع سیاه یا سفیدی باشد که درون چندضلعی قرار دارد. فرض کنید A, B, a, b به ترتیب تعداد پاره‌خط‌های سیاه، پاره‌خط‌های سفید، مربع‌های سیاه درون چندضلعی و مربع‌های سفید درون چندضلعی باشند. ثابت کنید $A - B = 4(a - b)$.

۱۱. در یک تورنمنت با ۱۰ تیم هر دو تیم یک بار با هم مسابقه داده‌اند. در این تورنمنت برد، باخت و مساوی به ترتیب ۱، ۰ و نیم امتیاز دارد. فرض کنید امتیاز تیم‌ها به ترتیب x_1, x_2, \dots, x_{10} باشد. ثابت کنید:

$$x_1 + 2x_2 + \dots + 10x_{10} \geq 165$$

۱۲. حاصل جمع زیر را بیابید:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{\binom{n}{i} \binom{n}{j}}{\binom{n}{i+j}}$$

۱۳. فرض کنید $A = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$. تعداد جایگشت‌هایی از این مجموعه مثل a_1, a_2, \dots, a_{12} را بیابید که به ازای هر $1 \leq i \leq 12$ عدد $a_i - i$ بر ۳ بخش پذیر نباشد.

۱۴. فرض کنید $n \geq 4$. به چند طریق می‌توان یک n ضلعی محدب را توسط $n - 3$ قطر غیر متقاطع مثلث‌بندی کرد به طوری که هر مثلث حداقل یک ضلع مشترک با n ضلعی داشته باشد؟

۱۵. حداکثر چند زیرمجموعه‌ی ناتهی از یک مجموعه‌ی 2^0 عضوی می‌توان انتخاب کرد به طوری که هر دو تا زیرمجموعه حداکثر ۲ عضو مشترک داشته باشند؟

۱۶. به چند طریق می‌توان خانه‌های یک صفحه‌ی شطرنجی 2008×2008 را با چهار رنگ، رنگ آمیزی کرد به طوری که در هر مربع 2×2 هیچ دو خانه‌ای هم‌رنگ نباشند؟

۱۷. ثابت کنید تعداد توابع $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1, \dots, 2k\}$ به طوری که برای هر i و j رابطه‌ی $|f(i) - f(j)| \leq k$ برقرار باشد، برابر است با $k^{n+1} - (k+1)^{n+1}$.