تشریح مسایل نظریه اساسی مدارها و شبکه ها

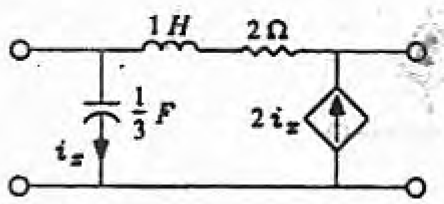
۱۷

دو قطبی ها

۱۷

دو قطبی ها

۱-پارامترهای Z دوقطبی شکل (مسالهٔ ۱۷-۱) را تعیین کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۷-۱)

حل:

براساس تجزیه و تحلیل گره داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}\ s+\frac{1}{s+2} & -\frac{1}{s+2} \\ -\frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2+2I_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2I_x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2\times V_1 \times \frac{1}{3}\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2}{3}\ s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{s}{3}+\frac{1}{s+2} & -\frac{1}{s+2} \\ -\frac{1}{s+2}-\frac{2}{3}\ s & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{3}+\frac{1}{s+2} & -\frac{1}{s+2} \\ -\frac{1}{s+2}-\frac{2}{3}s & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

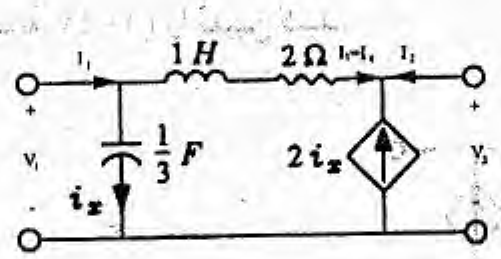
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{1}{(s+2)^2}+\frac{s}{3(s+2)}-\frac{1}{(s+2)^2}-\frac{3s}{3(s+2)}} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{2}{3}s+\frac{1}{s+2} & \frac{s}{3}+\frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

پس از ساده کردن خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{s} & -\frac{3}{s} \\ -2s-4-\frac{3}{s} & -s-2-\frac{3}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} -\frac{3}{s} & -\frac{3}{s} \\ -\frac{2s^2+4s+3}{s} & -\frac{s^2+2s+3}{s} \end{bmatrix}$$

حل به روش دیگر :



$$V_1 = I_x \times \frac{3}{s}$$

$$kcl:\ I_1 - I_x + I_2 + 2I_x = 0 \ \Rightarrow\ I_x = -I_1 - I_2$$

$$V_1 = \frac{3}{s}\,(-I_1 - I_2) = -\frac{3}{s}\,I_1 - \frac{3}{s}\,I_2 \qquad (a)$$

$$kvl:\ (I_1 - I_x)(s+2) + v_2 - I_x \times \frac{3}{s} = 0$$

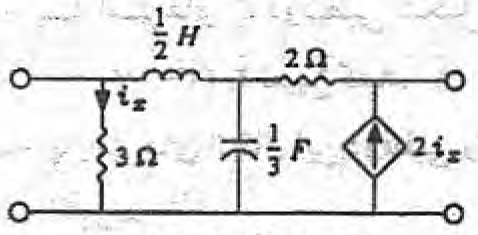
$$(I_1 + I_1 + I_2)(s+2) + (I_1 + I_2)\,\frac{3}{s} + v_2 = 0$$

پس از ساده‌سازی عبارت فوق خواهیم داشت:

$$V_2 = -\frac{2s^2+4s+3}{s}\,I_1 - \frac{s^2+2s+3}{s}\,I_2 \qquad (b)$$

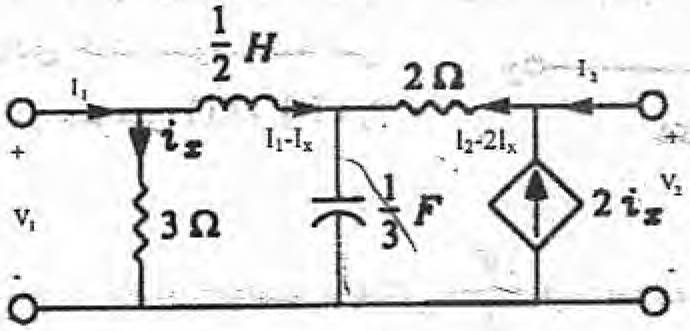
$$(a),(b)\ \Rightarrow\ Z = \begin{bmatrix} -\frac{3}{s} & -\frac{3}{s} \\ -\frac{2s^2+4s+3}{s} & -\frac{s^2+2s+3}{s} \end{bmatrix}$$

۲-پارامترهای y دوقطبی نشان داده شده در شکل (مسالهٔ ۱۷-۲) را تعیین کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۷-۲)

حل:



$$kvl:\ V_1=\frac{s}{2}I_1-\frac{s}{2}I_x-2I_2-4I_x+V_2 \ \Rightarrow\ V_1=\frac{s}{2}I_1-2I_2+V_2-\frac{s+8}{2}I_x \qquad (a)$$

$$kvl:\ V_1=3I_x \ \Rightarrow\ I_x=\frac{V_1}{3} \qquad (b)$$

$$(a),(b)\Rightarrow V_1=\frac{s}{2}I_1-2I_2+V_2+\left(\frac{-s-8}{2}\right)\left(\frac{V_1}{3}\right)\Rightarrow (14+s)V_1=3sI_1-12I_2+6V_2 \quad (c)$$

$$kvl:\ V_2=2I_2+4I_x+\frac{3}{s}I_1+\frac{3}{s}I_2+\frac{3}{s}I_x \ \Rightarrow\ V_2=\frac{2s+3}{2}I_2+\frac{3}{s}I_1+\frac{4s+3}{6}V_1 \qquad (d)$$

پس از ساده کردن روابط (c) و (d) خواهیم داشت:

$$I_1=\frac{6s^2+97s+129}{3(6s^2+9s+36)}V_1-\frac{6}{2s^2+3s+12}V_2$$

$$I_2=\frac{-4s^2-6s-42}{6s^2+9s+36}V_1+\frac{6s^2+36}{6s^2+9s+36}V_2$$

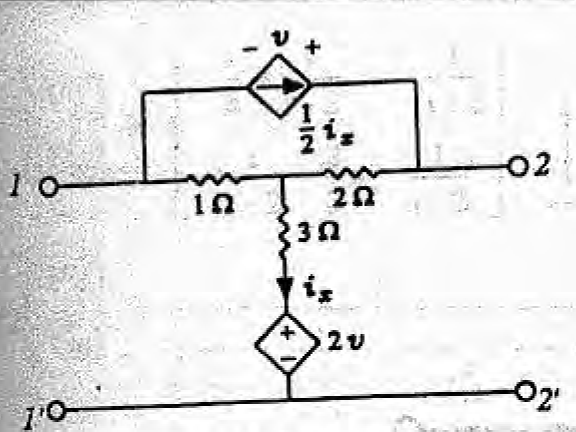
با معلوم بودن I_1 و I_2 برحسب V_1 و V_2 و رابطهٔ $I=YV$ خواهیم داشت:

$$y=\begin{bmatrix}\frac{6s^2+97s+129}{3(6s^2+9s+36)} & -\frac{6}{2s^2+3s+12}\\ -\frac{4s^2+6s+42}{6s^2+9s+36} & \frac{6s^2+36}{6s^2+9s+36}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\frac{2}{3}s^2+5s+10}{2s^2+3s+12} & \frac{-6}{2s^2+3s+12}\\ \frac{-\frac{4}{3}s^2-2s-14}{2s^2+3s+12} & \frac{2s^2+12}{2s^2+3s+12}\end{bmatrix}$$

۳-الف- پارامترهای Z دوقطبی شکل (مسألهٔ ۱۷-۳) را تعیین کنید.

ب- پارامترهای انتقال این دوقطبی را به دست آورید.

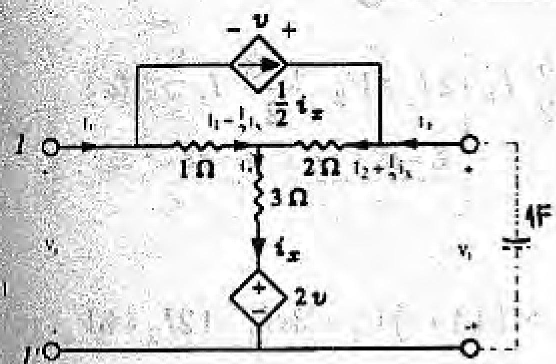
پ- اگر این دوقطبی در سرهای (2) و ('2) به خازن 1 فارادی ختم شود، امپدانس دیده شده در سرهای (1) و ('1) را تعیین کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۷-۳)

حل:

الف:



$$kvl\ :\ V=V_2-V_1$$

$$kcl\ : I_x=I_1-\frac{1}{2}\ I_x+I_2+\frac{1}{2}\ I_x$$

$$I_x=I_1+I_2$$

$$kvl\ :\ V_1=I_1-\frac{1}{2}\ I_x+3I_x+2V$$

$$\Rightarrow\ V_1=I_1+\frac{5}{2}\ i_x+2V\ \Rightarrow$$

$$V_1=I_1+\frac{5}{2}\ (I_1+I_2)+2(V_2-V_1)\ \Rightarrow\ V_1=\frac{7}{6}\ I_1+\frac{5}{6}\ I_2+\frac{2}{3}\ V_2 \qquad (a)$$

$$kvl\ :\ V_2=2I_2+i_x+3i_x+2V=2I_2+4i_x+2V=2I_2+4\ (I_1+I_2)+2(V_2-V_1)$$

$$V_2=2V_1-6I_2-4I_1 \qquad (b)$$

$$(a),(b)\ \Rightarrow\ V_1=\ \frac{7}{6}\ I_1+\frac{5}{6}\ I_2+\frac{2}{3}\ (2V_1-6I_2-4I_1)=\frac{9}{2}\ I_1+\frac{19}{2}\ I_2$$

$$V_1=\frac{9}{2}\ I_1+\frac{19}{2}\ I_2 \qquad (c)$$

$$(b),(c)\ \Rightarrow\ V_2=2\left(\frac{9}{2}\ I_1+\frac{19}{2}\ I_2\right)-6I_2-4I_1=5I_1+13I_2$$

$$V_2=5I_1+13I_2 \qquad (d)$$

$$(c),(d)\ \Rightarrow\ Z=\begin{bmatrix}\frac{9}{2} & \frac{19}{2}\\ 5 & 13\end{bmatrix}$$

ب- $$(d)\ \Rightarrow\ I_1=\frac{1}{5}\ V_2-\frac{13}{5}\ I_2 \qquad (e)$$

$$(c),(e) \Rightarrow V_1=\frac{9}{2}\left(\frac{1}{5}V_2-\frac{13}{5}I_2\right)+\frac{19}{2}I_2=\frac{9}{10}V_2-\frac{117}{10}I_2+\frac{19}{2}I_2$$

$$V_1=\frac{9}{10}V_2-\frac{22}{10}I_2 \qquad (f)$$

با توجه به تعریف ماتریس انتقال و روابط (e) و (f) می‌توان نتیجه گرفت که :

$$T=\begin{bmatrix}\frac{9}{20} & \frac{22}{10}\\ \frac{1}{5} & \frac{13}{5}\end{bmatrix}$$

پ – در این قسمت از مسئله هدف محاسبه $\frac{V_1}{I_1}$ می‌باشد با استفاده از نتیجه (c) بدست آمده از قسمت الف خواهیم داشت:

$$(c) \Rightarrow V_1=\frac{9}{2}I_1+\frac{19}{2}I_2$$

$$kvl: V_2=-\frac{I_2}{s} \qquad (g)$$

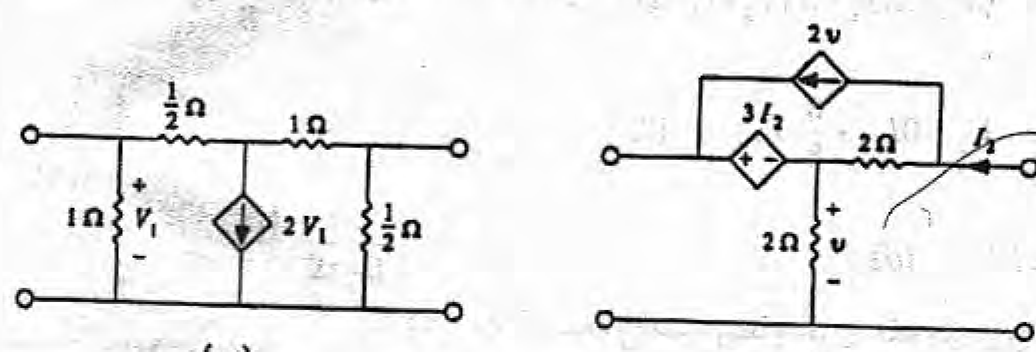
$$(d),(g) \Rightarrow -\frac{I_2}{s}=5I_1+13I_2 \Rightarrow \left(13+\frac{1}{s}\right)I_2=-5I_1 \Rightarrow I_2=-\frac{5s}{13s+1}I_1 \qquad (h)$$

$$(c),(h) \Rightarrow V_1=\frac{9}{2}I_1+\frac{19}{2}\left(\frac{-5s}{13s+1}\right)I_1=\left(\frac{9}{2}-\frac{95s}{26s+2}\right)I_1$$

$$V_1=\frac{117s+9-95s}{26s+2}I_1=\frac{22s+9}{26s+2}I_1 \Rightarrow \frac{V_1}{I_1}=\frac{22s+9}{26s+2}$$

بنابراین امپدانس دیده شده در سرهای (1) و (1') برابر $\frac{22s+9}{26s+2}$ می‌باشد.

۴– پارامترهای z و y دوقطبی‌های مقاومتی داده شده در شکل (مسالهٔ ۱۷-۴) را به دست آورید.



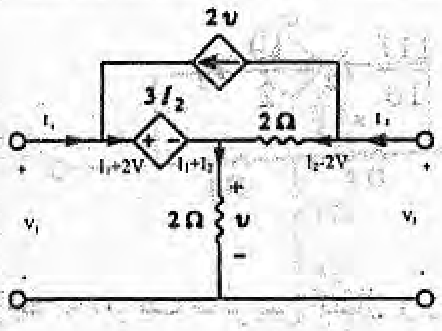
(ب) (الف)

شکل (مسالهٔ ۱۷-٤)

حل:

الف:

$$kvl: V_1=3I_2+2(I_1+I_2)$$



$$V_1=2I_1+5I_2 \qquad (a)$$

$$kvl\ :\ V_2=2I_2-4V+V=2I_2-3V$$

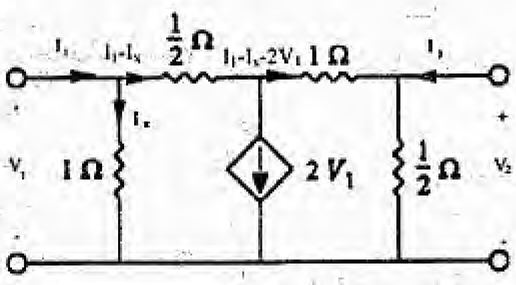
$$V_2=2I_2-3\left(2(I_1+I_2)\right)$$

$$V_2=-6I_1-4I_2 \qquad (b)$$

$$(a),(b) \Rightarrow Z=\begin{bmatrix}2 & 5\\ -6 & -4\end{bmatrix} \quad , \quad Y=Z^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 5\\ -6 & -4\end{bmatrix}^{-1}$$

$$Y=\frac{1}{-8+30}\begin{bmatrix}-4 & -5\\ 6 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow Y=\frac{1}{22}\begin{bmatrix}-4 & -5\\ 6 & 2\end{bmatrix}$$

ب:



$$kvl\ :\ V_1=\frac{1}{2}I_1-\frac{1}{2}I_x+I_1-I_x-2V_1+V_2 \Rightarrow 6V_1=3I_1-3I_x+2V_2 \qquad (a)$$

$$kvl\ :\ V_2=\frac{1}{2}(I_1-I_x-2V_1+I_2) \Rightarrow 2V_2=I_1-I_x-2V_1+I_2 \Rightarrow$$

$$I_x=I_2+I_1-2V_1-2V_2 \qquad (b)$$

$$(a),(b) \Rightarrow 6V_1=3I_1-3(I_2+I_1-2V_1-2V_2)+2V_2 \Rightarrow V_2=\frac{3}{8}I_2$$

$$V_2=0I_1+\frac{3}{8}I_2 \qquad (c)$$

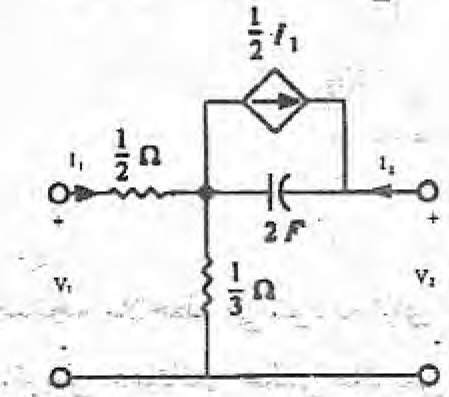
$$kvl\ :\ V_1=I_x \qquad (d)$$

$$(b),(d) \Rightarrow V_1=I_2+I_1-2V_1-2V_2 \Rightarrow 3V_1=I_2+I_1-2\left(\frac{3}{8}I_2\right)$$

$$3V_1=I_1+\left(1-\frac{3}{4}\right)I_2 \Rightarrow V_1=\frac{1}{3}I_1+\frac{1}{12}I_2 \qquad (e)$$

$$(c),(e) \quad \Rightarrow \quad Z=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{12}\\ 0 & \frac{3}{8}\end{bmatrix} \Rightarrow Y=Z^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{12}\\ 0 & \frac{3}{8}\end{bmatrix}$$

$$y=\frac{1}{\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}-0\times\frac{1}{12}}\begin{bmatrix}\frac{3}{8} & -\frac{1}{12}\\ 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix} \Rightarrow Y=\begin{bmatrix}3 & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{8}{3}\end{bmatrix}$$



۵-پارامترهای h دوقطبی شکل (مسالهٔ ۱۷-۵) را به دست آورید.

حل:

$$kvl:\ V_1=\frac{1}{2}I_1+\frac{1}{3}\left(I_1+I_2+\frac{1}{2}I_1\right)$$

$$V_1=\frac{1}{2}I_1+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}I_1+I_2\right)$$

$$V_1=I_1+\frac{1}{3}I_2 \qquad (a)$$

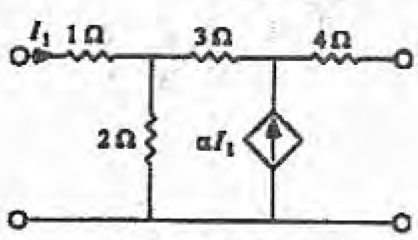
$$kvl:\ V_2=\frac{1}{2s}\left(I_2+\frac{1}{2}I_1\right)+\frac{1}{3}\left(I_1+I_2+\frac{1}{2}I_1\right)=\frac{I_2}{2s}+\frac{1}{3}I_2+\frac{I_1}{4s}+\frac{1}{2}I_1$$

$$V_2-\frac{1+2s}{4s}I_1=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2s}\right)I_2 \Rightarrow I_2=\frac{6s}{2s+3}V_2-\frac{3(1+2s)}{2}I_1 \qquad (b)$$

$$(a),(b) \quad \Rightarrow \quad V_1=I_1+\frac{1}{3}\left[\frac{6s}{2s+3}V_2-\frac{3(1+2s)}{2}I_1\right]=\left(1-\frac{1+2s}{2}\right)I_1+\frac{2s}{2s+3}V_2$$

$$V_1=\frac{1-2s}{2}I_1+\frac{2s}{2s+3}V_2 \qquad (c)$$

$$(b),(c) \quad \Rightarrow \quad H=\begin{bmatrix}\frac{1-2s}{2} & \frac{2s}{2s+3}\\ \frac{-3(1+2s)}{2} & \frac{6s}{2s+3}\end{bmatrix}$$

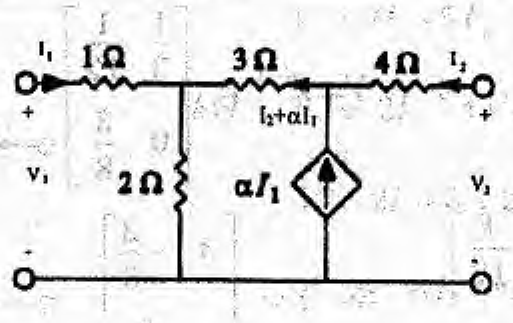


شکل (مسألهٔ ۱۷-۶)

۶-الف- به ازای چه مقدار α دوقطبی شکل (مسالهٔ ۱۷-۶) دارای پارامترهای ادمیتانس نمی‌باشد؟

ب- به ازای چه مقدار α دوقطبی دارای پارامترهای امپدانس نمی‌باشد؟

حل:



$$kvl\ :\ V_1=I_1+2I_1+2I_2+2\alpha I_1=(3+2\alpha)I_1+2I_2 \qquad (a)$$

$$kvl\ :\ V_2=4I_2+3I_2+3\alpha I_1+2(I_1+I_2+\alpha I_1)=(2+5\alpha)I_1+9I_2 \qquad (b)$$

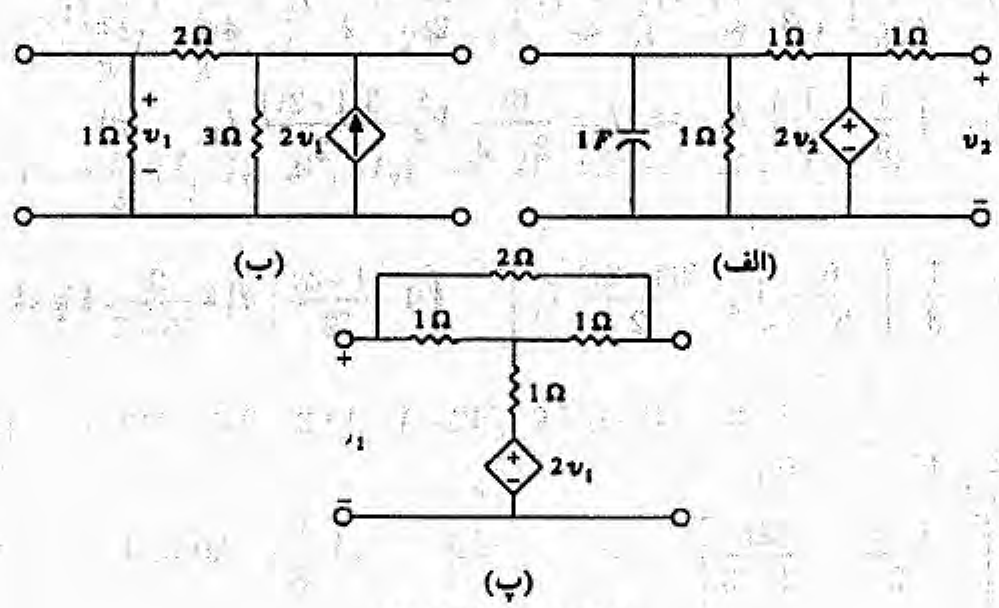
$$(a),(b)\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2\alpha & 2 \\ 2+5\alpha & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

چنانچه ملاحظه می‌شود به ازای تمام مقادیر α ماتریس Z موجود می‌باشد و با توجه به اینکه می‌دانیم ماتریس ادمیتانس عکس ماتریس امپدانس می‌باشد لذا برای اینکه ماتریس ادمیتانس وجود نداشته باشد باید $\det Z=0$ باشد پس داریم:

$$9(3+2\alpha)-2(2+5\alpha)=0 \quad \Rightarrow \quad 27+18\alpha-4-10\alpha=0$$

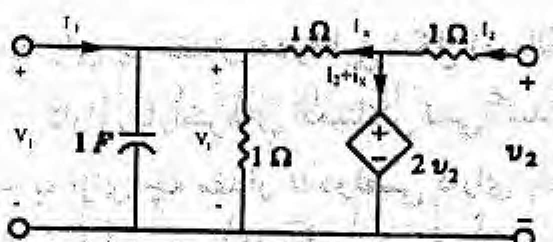
$$\Rightarrow\ 8\alpha=-23 \quad \Rightarrow \quad \alpha=-\frac{23}{8}$$

۷- پارامترهای h دوقطبی های شکل (مسالهٔ ۱۷-۷) را به دست آورید.



شکل (مسالهٔ ۱۷-۷)

حل:

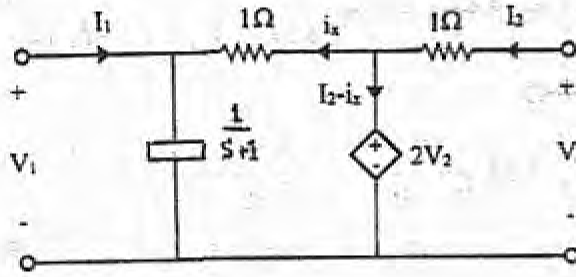


$$kvl:\ V_2=I_2+2V_2 \quad \Rightarrow \quad V_2=-I_2 \qquad (a)$$

$$kvl:\ I_x+V_1-2V_2=0 \quad \Rightarrow \quad I_x=2V_2-V_1$$

اگر خازن 1F را که با مقاومت یک اهمی بطور موازی قرار گرفته‌اند را یک المان در نظر بگیریم و امپدانس معادل آنها را محاسبه کنیم مدار بصورت زیر ساده می‌گردد.

$$\left(\frac{1}{5}\ \|\ 1\right)=\frac{\frac{1}{s}}{\frac{1}{s}+1}=\frac{1}{s+1}$$

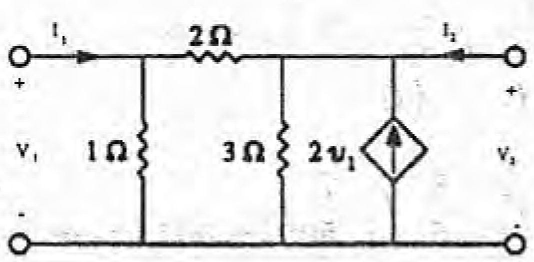


$$kvl:\ V_1=\left(\frac{1}{s+1}\right)(I_1-i_x)=\frac{I_1}{s+1}+\frac{i_x}{s+1}=\frac{I_1}{s+1}+\frac{2V_2-V_1}{s+1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{s+2}{s+1}\ V_1=\frac{I_1}{s+1}+\frac{2}{s+1}\ V_2 \quad \Rightarrow \quad V_1=\frac{1}{s+2}\,I_1+\frac{2}{s+2}\ V_2 \qquad (b)$$

$$(a),(b) \quad \Rightarrow \quad H=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+2} & \frac{2}{s+2}\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

ب. برای محاسبه ماتریس H از تجزیه و تحلیل گره استفاده می‌کنیم.

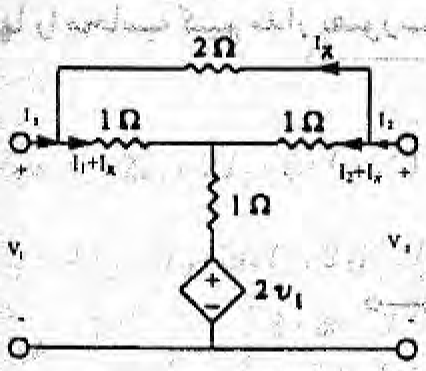


$$\begin{bmatrix}I_1\\ I_2+2V_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}I_1\\ I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}I_1=\frac{3}{2}\ V_1-\frac{1}{2}\,V_2 \ \Rightarrow\ V_1=\frac{2}{3}\ I_1+\frac{1}{3}\ V_2 \qquad (a)\\ I_2=-\frac{5}{2}\ V_1+\frac{5}{6}\ V_2 \ \Rightarrow\ I_2=-\frac{5}{2}\left(\frac{2}{3}\,I_1+\frac{1}{3}\,V_2\right)+\frac{5}{6}\ V_2\end{cases}$$

$$=-\frac{5}{3}\,I_1+0\ v_2 \qquad (b)$$

$$(a),(b) \Rightarrow \quad H=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix}$$



پ:

$$kvl \;:\; 2I_x+I_1+I_x-I_2+I_x=0$$

$$4I_x=I_2-I_1 \Rightarrow I_x=\frac{1}{4}\;I_2-\frac{1}{4}\;I_1$$

$$kvl \;:\; V_1=I_1+I_x+I_1+I_2+2V_1$$

$$V_1=2I_1+I_2+\frac{1}{4}\;I_2-\frac{1}{4}\;I_1+2V_1$$

$$V_1=-\frac{7}{4}\;I_1-\frac{5}{4}\;I_2 \qquad (a)$$

$$kvl \;:\; V_2=I_2-I_x+I_1+I_2+2V_1=I_2-\frac{1}{4}\;I_2+\frac{1}{4}\;I_1+I_1+I_2+2V_1$$

$$V_2=\frac{7}{4}\;I_2+\frac{5}{4}\;I_1+2V_1 \;\Rightarrow\; V_1=\frac{V_2}{2}-\frac{7}{8}\;I_2-\frac{5}{8}\;I_1 \qquad (b)$$

$$(a) \;\Rightarrow\; I_2=-\frac{4}{5}\;V_1-\frac{7}{5}\;I_1 \qquad (c)$$

$$(b),(c) \;\Rightarrow\; V_1=\frac{V_2}{2}-\frac{7}{8}\left(-\frac{4}{5}V_1-\frac{7}{5}I_1\right)-\frac{5}{8}\;I_1$$

$$V_1=\frac{V_2}{2}+\frac{7}{10}+\frac{49}{4}\;I_1-\frac{5}{8}\;I_1 \;\Rightarrow\; V_1=\frac{5}{3}\;V_2+2\,I_1 \qquad (d)$$

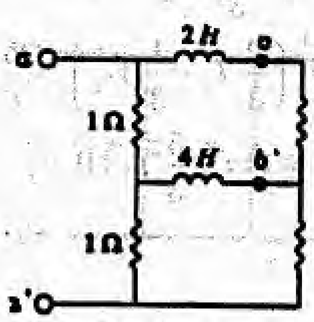
$$(c),(d) \;\Rightarrow\; I_2=-\frac{4}{5}\;\left(\frac{5}{3}\;V_2+2I_1\right)-\frac{7}{5}\;I_1=-\frac{4}{3}\;V_2-\frac{8}{5}\;I_1-\frac{7}{5}\;I_1$$

$$I_2=-\frac{4}{3}\;V_2-3I_1 \qquad (e)$$

$$(d),(e) \;\Rightarrow\; H=\begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{3} \\ -3 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

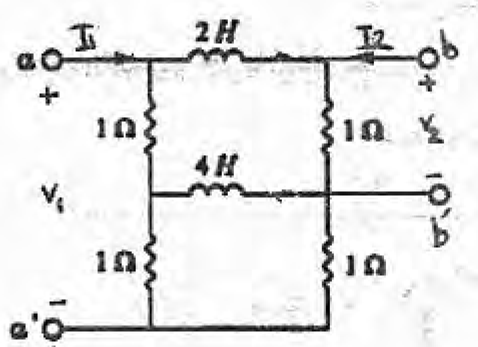
۸- پارامتر های‌برید دوقطبی شکل (مسالهٔ ۱۷-۸) را نسبت به سرهای $(\alpha'،\alpha)$ و $(b'،b)$ به دست آورید.

حل:

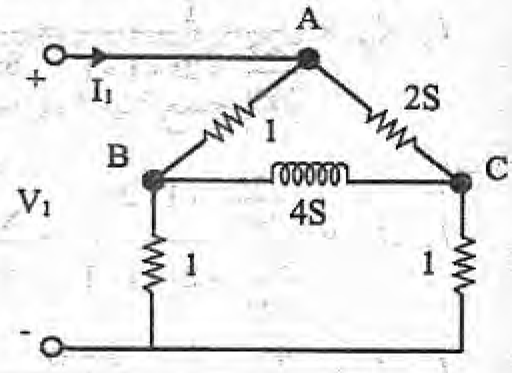


شکل (مسألهٔ ۱۷-۸)

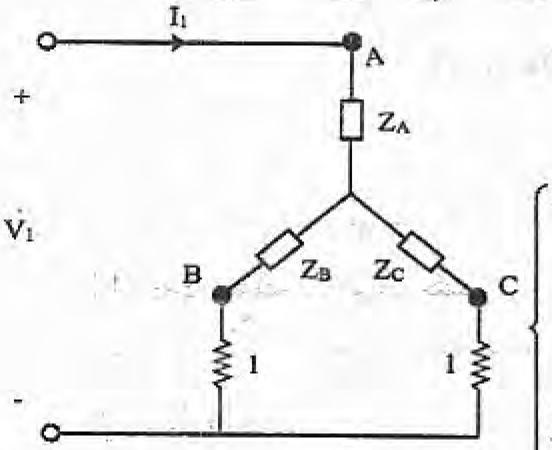
پارامترهای های‌برید با توجه به شکل عبارتند از:



$$h_{11}=\frac{V_1}{I_1}\Big|_{V_2=0} \rightarrow$$

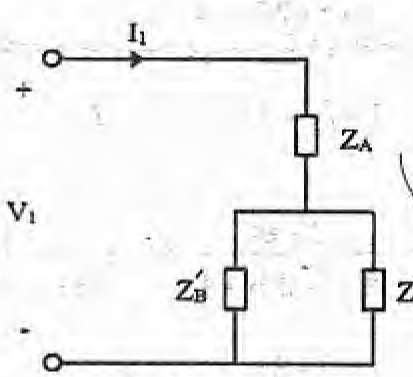


با توجه به تبدیلات مثلث به ستاره و بر عکس داریم:



$$\begin{cases} Z_A=\dfrac{1\times 2s}{1+2s+4s}=\dfrac{2s}{6s+1} \\ Z_B=\dfrac{1\times 4s}{1+2s+4s}=\dfrac{4s}{6s+1} \\ Z_c=\dfrac{2s\times 4s}{1+2s+4s}=\dfrac{8s^2}{6s+1} \end{cases}$$

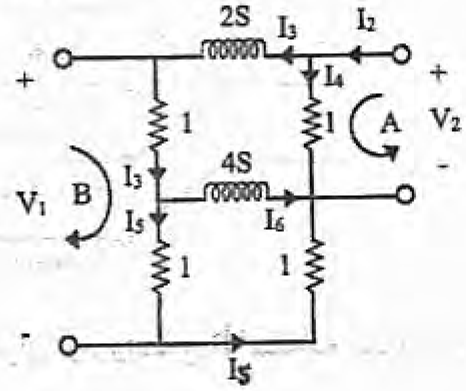
$$\begin{cases} Z_B'=Z_B+1=\dfrac{10s+1}{6s+1} \\ Z_c'=Z_c+1=\dfrac{8s^2+6s+1}{6s+1} \end{cases}$$



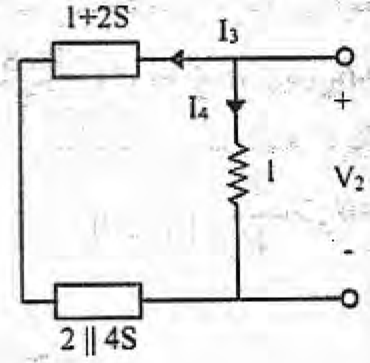
$$\frac{V_1}{I_1}\Big|_{V_2=0}=Z_A+Z_B'\parallel Z_C'=\frac{2s}{6s+1}+\frac{\dfrac{1+10s}{1+6s}\times\dfrac{8s^2+6s+1}{6s+1}}{\dfrac{1+10s+8s^2+6s+1}{6s+1}}$$

$$h_{11}=\frac{96s^3+100s^2+20s+1}{(6s+1)(8s^2+16s+2)}=\frac{16s^2+14s+1}{8s^2+16s+2}$$

$$h_{12}=\frac{V_1}{V_2}\Big|_{I_1=0}$$



$\longrightarrow$



با توجه به تقسیم جریان داریم:

$$I_3=I_2\times\frac{1}{\frac{8s}{2+4s}+2s+1+1}=\frac{2+4s}{8s^2+20s+4}\times I_2 \qquad (I)$$

$$I_4=I_2\times\frac{\frac{8s}{2+4s}+1+2s}{\frac{8s}{2+4s}+2s+1+1}=\frac{8s^2+16s+2}{8s^2+20s+4}\times I_2 \qquad (II)$$

$$I_5=I_3\times\frac{4s}{2+4s}\overset{(I)}{=}\frac{2+4s}{8s^2+20s+4}\times I_2\times\frac{4s}{2+4s}$$

$$I_5=\frac{4s}{8s^2+20s+4}\times I_2 \qquad (III)$$

kvl را در حلقه A می‌نویسیم:

$$V_2=1\times I_4=I_4$$

از رابطهٔ II دایم:

$$V_2=\frac{8s^2+16s+2}{8s^2+20s+4}\times I_2 \qquad (IV)$$

kvl را در حلقه B می‌نویسیم:

$$V_1=1\times I_3+1\times I_5=I_3+I_5$$

بنابه روابط (I) و (III) داریم:

$$V_1=\frac{2+4s}{8s^2+20s+4}\times I_2+\frac{4s}{8s^2+20s+4}\times I_2$$

$$V_1=\frac{2+8s}{8s^2+20s+4}\times I_2 \qquad (V)$$

با تقسیم رابطه (V) به (IV) داریم:

$$h_{12}=\frac{V_1}{V_2}=\frac{2+8s}{8s^2+16s+2}$$

چون مدار از سلف و مقاومت تشکیل شده است پس دوقطبی متقابل است بنابراین :

$$h_{21}=-h_{12}=-\frac{2+8s}{8s^2+16s+2}$$

برای محاسبهٔ h_{22} داریم:

$$h_{22}=\frac{I_2}{V_2}\Bigg|_{I_1=0}$$

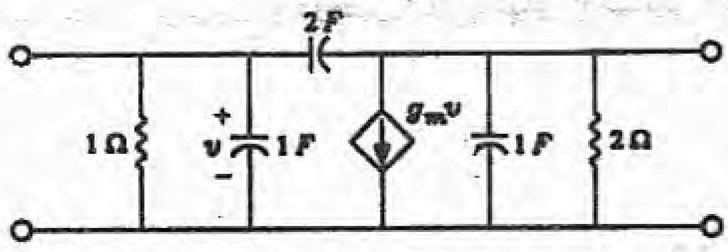
چون $I_1=0$ می‌باشد باز میتوان از روابط h_{12} استفاده نمود. از رابطهٔ (IV) داریم:

$$h_{22}=\frac{I_2}{V_2}=\frac{8s^2+20s+4}{8s^2+16s+2}$$

۹-الف- پارامترهای ادمیتانس دوقطبی شکل (مسالهٔ ۱۷-۹) را تعیین کنید.

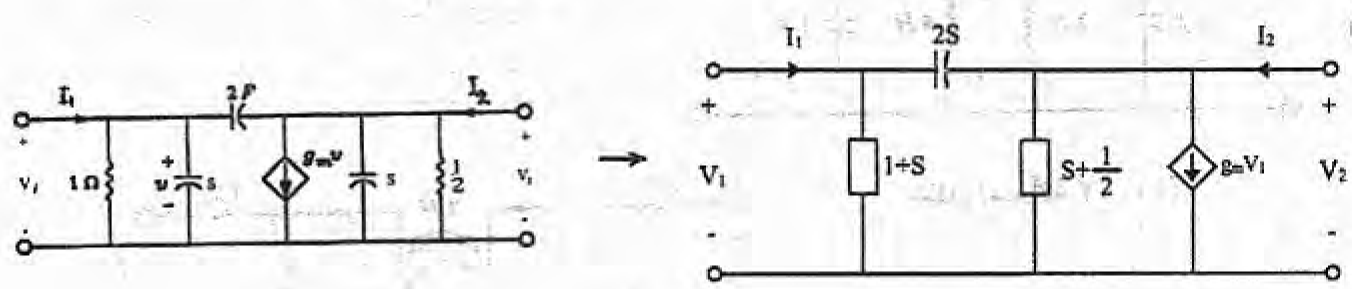
ب- آیا می‌توانید این دوقطبی را به صورت اتصال موازی دو دوقطبی درآورده و پارامترهای آنها را باهم جمع کنید؟ در صورت مثبت بودن این کار را انجام دهید؟

حل:



شکل (مسالهٔ ۱۷-۹)

الف)



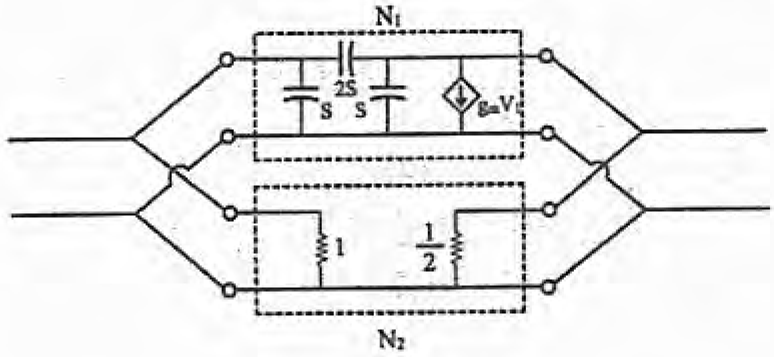
با توجه به روش نظری تجزیه و تحلیل گره داریم:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 - g_m V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+s+2s & -2s \\ -2s & s+\frac{1}{2}+2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3s & -2s \\ -2s+g_m & 3s+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \Rightarrow Y = \begin{bmatrix} 3s+1 & -2s \\ -2s+g_m & 3s+\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ب) میتوان دوقطبی را بصورت اتصال موازی دوقطبی بصورت زیر نشان داد:

با توجه به تست برونی میتوان از اتصال موازی این دو دوقطبی برای محاسبهٔ ماتریس ادمیتانس دوقطبی اولیه استفاده کرد. ماتریس ادمیتانس دوقطبی N_1 عبارتست از:



$$Y_1 = \begin{bmatrix} s+2s & -2s \\ -2s+g_m & s+2s \end{bmatrix}$$

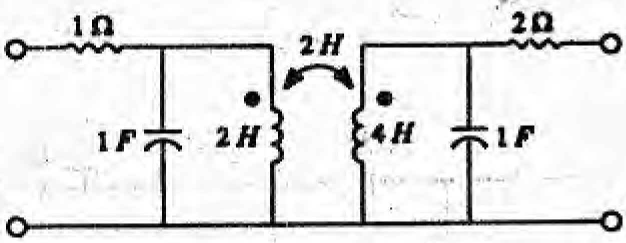
ماتریس ادمیتانس دوقطبی N_2 عبارتست از :

$$Y_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

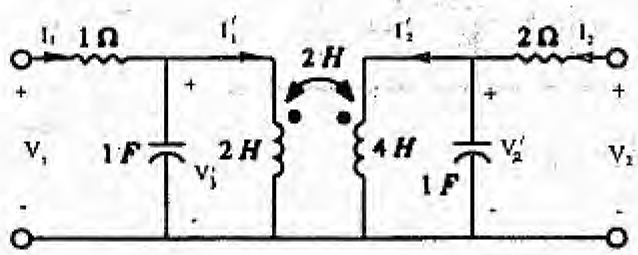
در حالت اتصال موازی دو دوقطبی ماتریسهای ادمیتانس آنها باهم جمع می‌گردد بنابراین داریم:

$$Y=Y_1+Y_2=\begin{bmatrix}3s+1 & -2s\\ -2s+g_m & 3s+\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

۱۰ - پارامترهای انتقال دوقطبی شکل (مسالهٔ ۱۷-۱۰) را به دست آورید.



شکل (مسالهٔ ۱۷-۱۰)



$$kvl:\ V_1'=2\frac{dI_1'}{dt}+2\frac{dI_2'}{dt}=2sI_1'+2sI_2' \qquad (a)$$

$$kvl:\ V_2'=4\frac{dI_2'}{dt}+2\frac{dI_1'}{dt}=2sI_1'+4sI_2' \qquad (b)$$

$$(a),(b)\ \Rightarrow\ I_1'=\frac{\begin{vmatrix}V_1' & 2s\\ V_2' & 4s\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2s & 2s\\ 2s & 4s\end{vmatrix}}=\frac{2V_1'-V_2'}{2s}\ ,\qquad I_2'=\frac{\begin{vmatrix}2s & V_1'\\ 2s & V_2'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2s & 2s\\ 2s & 4s\end{vmatrix}}=\frac{V_2'-V_1'}{2s}$$

$$kvl:\ V_1=I_1+(I_1+I_1')\ \frac{1}{s}=\frac{s+1}{s}\ I_1-\frac{1}{s}\ I_1'$$

$$V_1=\frac{s+1}{s}\ I_1-\frac{1}{s}\left(\frac{2V_1'-V_2'}{2s}\right)=\frac{s+1}{s}\ I_1+\frac{V_2'-2V_1'}{2s^2} \qquad (a)$$

$$kvl:\ V_1=I_1+V_1' \quad\Rightarrow\quad V_1'=V_1-I_1 \qquad (b)$$

$$kvl:\ V_2=2I_2+V_2' \quad\Rightarrow\quad V_2'=V_2-2I_2 \qquad (c)$$

$$(a),(b),(c) \Rightarrow v_1=\frac{s+1}{s}\,I_1+\frac{V_2-2I_2-2V_1+2I_1}{2s^2}=\left(\frac{s+1}{s}+\frac{1}{s^2}\right)I_1+\frac{1}{2s^2}\,V_2-\frac{1}{s^2}\,V_1-\frac{2I_2}{2s^2}$$

$$\left(1+\frac{1}{s^2}\right)V_1=\frac{s^2+s+1}{s^2}\,I_1+\frac{V_2-2I_2}{2s^2}\;\Rightarrow V_1=\frac{s^2+s+1}{s^2+1}\,I_1+\frac{V_2-2I_2}{2(s^2+1)}\qquad(d)$$

$$kvl\ :\ V_2=2I_2+(I_2-I_2')\,\frac{1}{s}=\frac{2s+1}{s}\,I_2-\frac{1}{s}\,I_2'=\frac{2s+1}{s}\,I_2-\frac{1}{s}\left(\frac{V_2'-V_1'}{2s}\right)\qquad(e)$$

$$(b),(c),(e)\;\Rightarrow V_2=\frac{2s+1}{s}\,I_2+\frac{V_1-I_1-V_2+2I_2}{2s^2}=\left(\frac{2s+1}{s}+\frac{2}{2s^2}\right)I_2+\frac{V_1-I_1}{2s^2}-\frac{V_2}{2s^2}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{2s^2+1}{2s^2}\right)V_2=\left(\frac{2s(2s+1)+2}{2s^2}\right)I_2+\frac{V_1-I_1}{2s^2}\;\Rightarrow V_2=\frac{4s^2+2s+2}{2s^2+1}\,I_2+\frac{V_1-I_1}{2s^2+1}\qquad(f)$$

$$\Rightarrow\frac{I_1}{2s^2+1}=\frac{4s^2+2s+2}{2s^2+1}\,I_2+\frac{V_1}{2s^2+1}-V_2\;\Rightarrow I_1=(4s^2+2s+2)I_2+V_1-(2s^2+1)\,V_2\qquad(g)$$

$$(d),(g)\;\Rightarrow\; I_1=(4s^2+2s+2)I_2+\frac{s^2+s+1}{s^2+1}\,I_1+\frac{V_2-2I_2}{2(s^2+1)}$$

$$\left(\frac{s^2+1-s^2-s-1}{s^2+1}\right)I_1=\left[4s^2+2s+2-\frac{2}{2(s^2+1)}\right]I_2+\frac{V_2}{2(s^2+1)}$$

$$\frac{-s}{s^2+1}\,I_1=\left[\frac{(4s^2+2s+2)(2s^2+2)-2}{2(s^2+1)}\right]I_2+\frac{V_2}{2(s^2+1)}$$

$$I_1=-\left(\frac{8s^4+4s^3+10s^2+4s+3}{2s}\right)I_2-\frac{1}{2s}\,V_2\qquad(h)$$

$$(g),(h)\;\Rightarrow V_1=\frac{s^2+s+1}{s^2+1}\left(-\frac{8s^4+4s^3+10s^2+4s+3}{2s}\,I_2-\frac{V_2}{2s}\right)+\frac{V_2-2I_2}{2(s^2+1)}$$

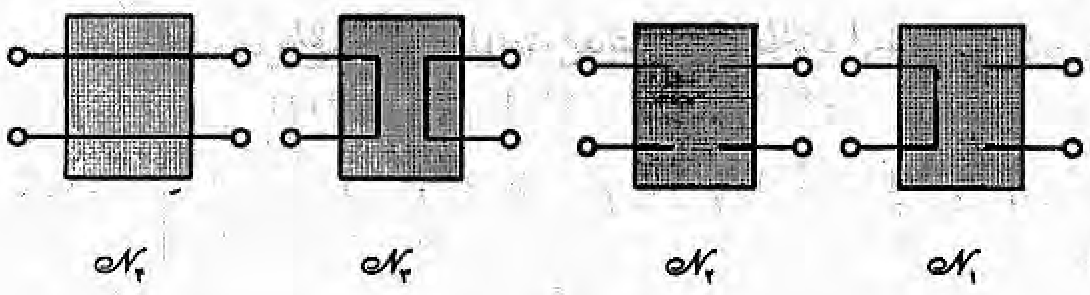
$$V_1=\left[-\frac{(s^2+s+1)(8s^4+4s^3+10s^2+4s+3)}{2s(s^2+1)}-\frac{2}{2(s^2+1)}\right]I_2+\left[-\frac{(s^2+s+1)}{2s(s^2+1)}+\frac{1}{2(s^2+1)}\right]V_2$$

$$V_1=\frac{-(s^2+s+1)(8s^4+4s^3+10s^2+4s+3)-2s}{2s(s^2+1)}\,I_2+\frac{-s^2-s-1+s}{2s(s^2+1)}\,V_2$$

$$V_1=\frac{-(s^2+s+1)(8s^4+4s^3+10s^2+4s+3)-2s}{2s(s^2+1)}\,I_2-\frac{1}{2s(s^2+1)}\,V_2\qquad(i)$$

حال با توجه به روابط (i) و (h) می‌توان ماتریس انتقال را نوشت.

۱۱- تعیین کنید از دوقطبی شکل (مسالهٔ ۱۷-۱۱) کدامیک دارای توصیفهای پارامترهای z، y، h، g، T یا T′ هستند. در صورت وجود، این پارامترها را حساب کنید.



حل:

شکل (مسالهٔ ۱۷-۱۱)

الف: شبکه N_1:

$$\begin{matrix} V_1=0 \\ I_2=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \Rightarrow H= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H=0$$

بقیه ماتریسها را با توجه به جدول تبدیل ماتریسهای دوقطبی که در صفحه 478 کتاب موجود است بدست می‌آوریم. با توجه به اینکه تمامی درایه‌های ماتریسی H و $\Delta H=\det H$ که صفر هستند هیچ یک از ماتریسهای Z، Y، T، T′، G برای این دوقطبی موجود نمی‌باشد.

ب: شبکه N_2:

$$\begin{matrix} I_1=0 \\ I_2=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \Rightarrow Y= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \det Y=0$$

با توجه به اینکه تمامی درایه‌های ماتریسی Y و $\Delta Y=\det Y$ که صفر هستند هیچ یک از ماتریسهای Z، T، T′، H، G برای این دوقطبی وجود ندارند.

ج: شبکه N_3:

$$\begin{matrix} V_1=0 \\ V_2=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \Rightarrow Z= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det Z=0$$

با توجه به اینکه تمامی درایه‌های ماتریسی Z و $\Delta Z=\det Z$ که صفر هستند هیچ یک از ماتریسهای Y، T، T′، H، G برای این دوقطبی موجود نمی‌باشند.

د: شبکه N_4:

$$\begin{matrix} V_1=V_2 \\ I_1=-I_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \Rightarrow H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H=1$$

با توجه به رابطهٔ ماتریسی H و Z که در مقابل نشان داده شده و با توجه به اینکه $h_{22}=0$ است لذا ماتریس Z برای این دوقطبی وجود ندارد.

$$Z=\begin{pmatrix} \frac{\Delta H}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ -\frac{h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{pmatrix}$$

بنابه رابطهٔ ماتریسی H و Y و صفر بودن h_{11} ماتریسی Y نیز برای این دوقطبی وجود ندارد.

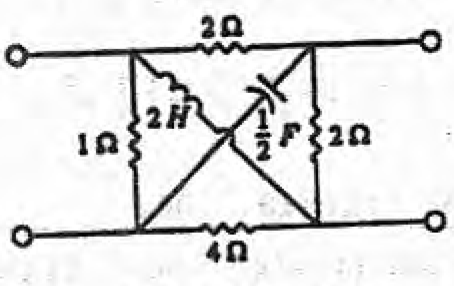
$$Y=\begin{pmatrix} \frac{1}{h_{11}} & -\frac{h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta H}{h_{11}} \end{pmatrix}$$

$$T=\begin{pmatrix} -\frac{\Delta H}{h_{21}} & \frac{h_{11}}{h_{21}} \\ -\frac{h_{22}}{h_{21}} & -\frac{1}{h_{21}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T'=\begin{pmatrix} \frac{1}{h_{12}} & \frac{h_{11}}{h_{12}} \\ \frac{h_{22}}{h_{12}} & \frac{\Delta H}{h_{12}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G=\begin{pmatrix} \frac{h_{22}}{\Delta H} & -\frac{h_{12}}{\Delta H} \\ -\frac{h_{21}}{\Delta H} & \frac{h_{11}}{\Delta H} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

۱۲- پارامترهای y دوقطبی داده شده در شکل (مسالهٔ ۱۷-۱۲) را تعیین کنید.



شکل (مسالهٔ ۱۷-۱۲)

حل:

محاسبه y_{11}: طبق تعریف $y_{11}=\frac{I_1}{V_1}\Big|_{v_2=0}$ است که در این صورت مقاومت 4Ω با خازن $\frac{1}{2}$F و مقاومت 2Ω با سلف 2H موازی می‌شوند بنابراین داریم:

$$(4)\ \|\ \left(\frac{2}{s}\right)=\frac{4}{2s+1}$$

$$(2)\ \|\ (2s)=\frac{2s}{s+1}$$

$$Z_{eq}=(1)\ \|\ \left(\frac{4}{2s+1}+\frac{2s}{s+1}\right)=(1)\ \|\ \left(\frac{4s^2+6s+4}{2s^2+3s+1}\right)=\frac{4s^2+6s+4}{6s^2+9s+5}$$

$$V_1=I_1 Z_{eq} \Rightarrow \frac{I_1}{V_1}=\frac{1}{Z_{eq}} \Rightarrow y_{11}=\frac{6s^2+9s+5}{4s^2+6s+4}$$

محاسبهٔ y_{22}: طبق تعریف $y_{22}=\frac{I_2}{V_2}\Big|_{V_1=0}$ است که در این صورت سلف $2H$ و مقاومت 4Ω و خازن $\frac{1}{2}F$ و مقاومت 2Ω باهم موازی می‌شوند بنابراین داریم:

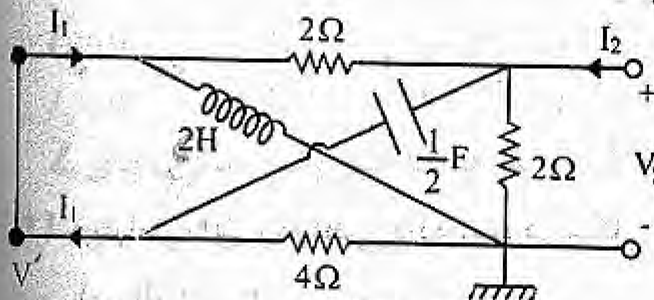
$$(2s) \parallel (4)=\frac{4s}{s+2}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right) \parallel (2)=\frac{2}{s+1}$$

$$Z_{eq}=(2) \parallel \left(\frac{4s}{s+2}+\frac{2}{s+1}\right)=(2) \parallel \left(\frac{4s^2+6s+4}{s^2+3s+2}\right)=\frac{4s^2+6s+4}{3s^2+6s+4}$$

$$V_2=I_2 Z_{eq} \Rightarrow \frac{I_2}{V_2}=\frac{1}{Z_{eq}} \Rightarrow y_{22}=\frac{3s^2+6s+4}{4s^2+6s+4}$$

محاسبه y_{12}، y_{21}: چون دوقطبی از عناصر ذخیره کننده انرژی است (سلف و خازن) و مقاومت تشکیل شده و هیچ منبع وابسته‌ای نداریم بنابراین $y_{12}=y_{21}$ است.



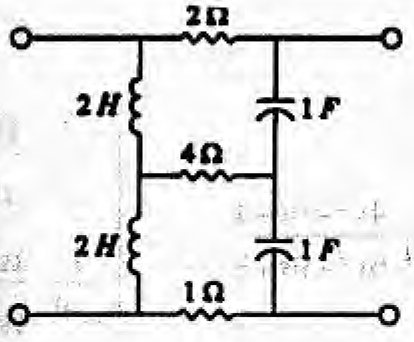
$$V'=\frac{(4) \parallel (2s)}{(4) \parallel (2s)+(2) \parallel \left(\frac{2}{s}\right)} \qquad (a)$$

$$(kcl): I_1=-\left(\frac{V'-V_2}{\frac{2}{s}}+\frac{V'}{4}\right) \qquad (b)$$

$$(a),(b) \Rightarrow I_1=\frac{s}{4s^2+6s+4} V_2 \Rightarrow y_{12}=y_{21}=\frac{s}{4s^2+6s+4}$$

$$y=\frac{1}{4s^2+6s+4}\begin{bmatrix} 6s^2+9s+5 & s \\ s & 3s^2+6s+4 \end{bmatrix}$$

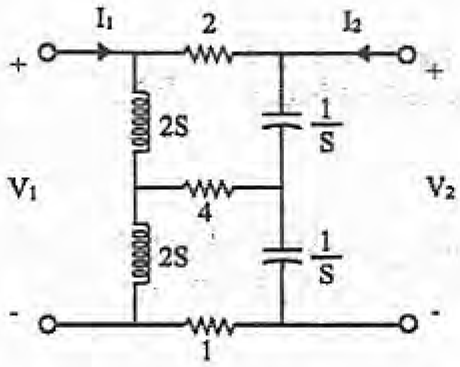
۱۳- می‌خواهیم پارامترهای هایبرید دوقطبی شکل (مسالهٔ ۱۷-۱۳) را حساب کنیم. یک بار به طور مستقیم حساب کنید. بار دیگر پارامترهای z را محاسبه کنید و پارامترهای h را از روی پارامترهای z به دست آورید.



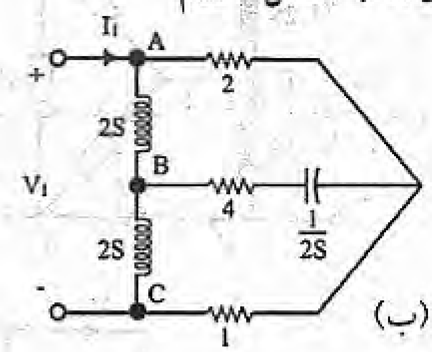
شکل (مسالهٔ ۱۷-۱۳)

حل:

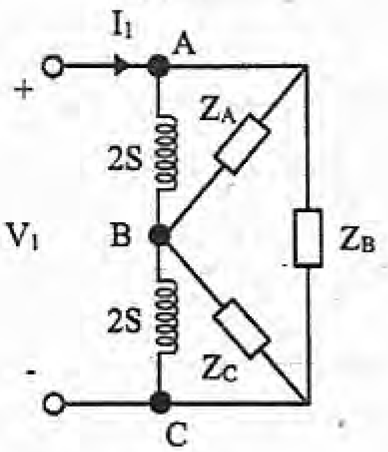
با توجه به شکل داریم:



$$h_{11}=\frac{V_1}{I_1}\Big|_{V_2=0} \rightarrow$$



اتصال ستاره بین نقاط A و B و C را به اتصال مثلث تبدیل می‌کنیم:



$$Z_A=\frac{2\times1+2\times\left(4+\frac{1}{2s}\right)+1\times\left(4+\frac{1}{2s}\right)}{1}$$

$$Z_B=\frac{2\times1+2\times\left(4+\frac{1}{2s}\right)+1\times\left(4+\frac{1}{2s}\right)}{4+\frac{1}{2s}}$$

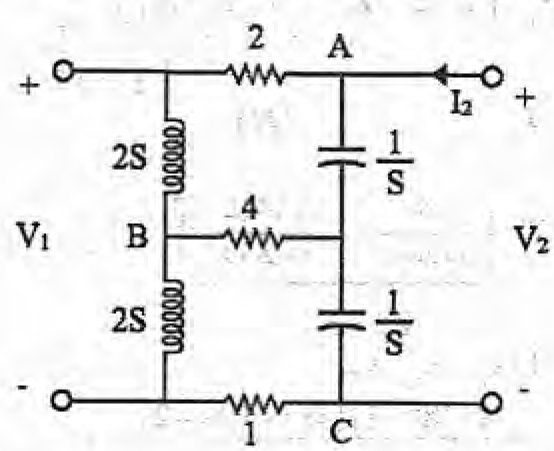
$$Z_C=\frac{2\times1+2\times\left(4+\frac{1}{2s}\right)+1\times\left(4+\frac{1}{2s}\right)}{2}$$

$$Z_A=\frac{28s+3}{2s}\quad,\quad Z_B=\frac{28s+3}{8s+1}\quad,\quad Z_C=\frac{28s+3}{4s}$$

$$h_{11}=\frac{V_1}{I_1}\Big|_{V_2=0}=Z_B\ \|\ (2s\ \|\ Z_A+2s\ \|\ Z_C)=\left(\frac{28s+3}{8s+1}\right)\ \|\ \left(\frac{(56s^2+6s)(12s^2+56s+6)}{(4s^2+28s+3)(8s^2+28s+3)}\right)$$

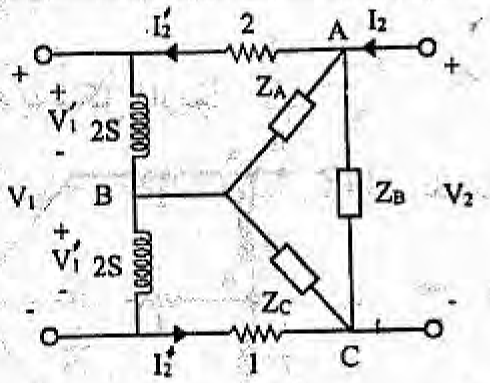
$$h_{11}=\frac{(56s^2+6s)(12s^2+56s+6)(28s+3)}{(56s^2+6s)(12s^2+56s+6)(8s+1)+(28s+3)(4s^2+28s+3)(8s^2+28s+3)}$$

اتصال ستاره بین نقاط A و B و C را به مثلث تبدیل می‌کنیم:



$$h_{12}=\frac{V_1}{V_2}\Big|_{I_1=0}$$

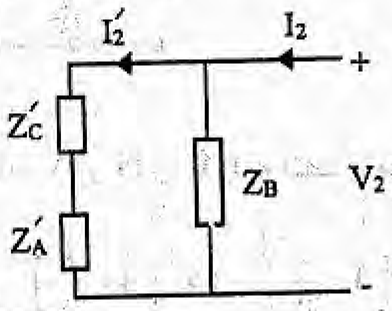
$$Z_A=\frac{4\times\frac{1}{s}+4\times\frac{1}{s}+\frac{1}{s}\times\frac{1}{s}}{\frac{1}{s}}=\frac{8S+1}{S}$$



$$Z_B=\frac{4\times\frac{1}{s}+4\times\frac{1}{s}+\frac{1}{s}\times\frac{1}{s}}{4}=\frac{8S+1}{4S^2}$$

$$Z_C=\frac{4\times\frac{1}{s}+4\times\frac{1}{s}+\frac{1}{s}\times\frac{1}{s}}{\frac{1}{s}}=\frac{8S+1}{S}$$

$$Z'_C=Z_C \parallel (2+2s)=\frac{16s^2+18s+2}{2s^2+10s+1}$$



$$Z'_A=Z_A \parallel (1+2s)=\frac{16s^2+10s+1}{2s^2+9s+1}$$

$$I'_2=I_2\frac{Z_B}{Z_B+Z'_C+Z'_A}$$

$$I''_2=I'_2\frac{Z_C}{2+2s+Z_C}=I_2\frac{Z_BZ_C}{(Z_B+Z'_C+Z'_A)(2+2s+Z_C)}$$

$$V'_1=I_2\frac{Z_BZ_C}{(Z_B+Z'_C+Z'_A)(2+2s+Z_C)}\times 2s$$

$$I'''_2=I'_2\frac{Z_A}{1+2s+Z_A}=I_2\frac{Z_AA_B}{(Z_B+Z'_C+Z'_A)(1+2s+Z_A)}$$

$$V''_1=I_2\frac{Z_AZ_B}{(Z_B+Z'_C+Z'_A)(1+2s+Z_A)}\times 2s$$

$$V_1=V'_1+V''_1=\frac{2s\times Z_B}{Z_B+Z'_C+Z'_A}\left(\frac{Z_C}{2+2s+Z_C}+\frac{Z_A}{1+2s+Z_A}\right)I_2 \qquad (I)$$

$$V_2=\left[Z_B \parallel (Z'_C+Z'_A)\right] I_2 \qquad (II)$$

$$(I),(II)\rightarrow h_{12}=\frac{V_1}{V_2}=\frac{2s\left(\frac{Z_C}{2+2s+Z_C}+\frac{Z_A}{1+2s+Z_A}\right)}{Z'_C+Z'_A}$$

$$-h_{21}=h_{12}=\frac{2s(8s+1)(4s^2+19s+2)}{(16s^2+18s+2)(2s^2+9s+1)+(16s^2+10s+1)(2s^2+10s+1)}$$

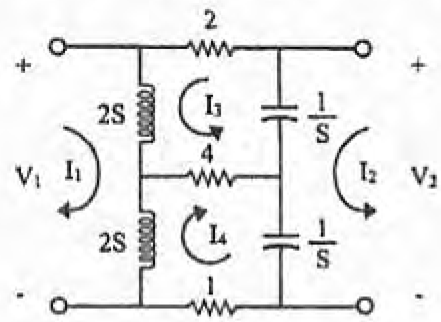
حال برای h_{22} می‌توان نوشت:

$$h_{22}=\frac{I_2}{V_2}\Bigg|_{I_1=0}$$

چون در h_{22} از $I_1=0$ استفاده می‌کنیم بنابراین از روابط h_{12} می‌توان استفاده نمود.

$$(II)\ \rightarrow\ h_{22}=\frac{I_2}{V_2}=\frac{1}{Z_B \parallel (Z_C^{'}+Z_A^{'})}$$

$$h_{22}=\frac{\frac{8s+1}{4s^2}+\frac{16s^2+18s+2}{2s^2+10s+1}+\frac{16s^2+10s+1}{2s^2+9s+1}}{\frac{8s+1}{4s^2}\left(\frac{16s^2+18s+2}{2s^2+10s+1}+\frac{16s^2+10s+1}{2s^2+9s+1}\right)}$$



ب) با توجه به شکل مقابل معادلات مش بصورت زیر است:

$$V_1=2s\ (I_1+I_3)+2s\,(I_1-I_4) \qquad (I)$$

$$V_2=\frac{1}{s}\ (I_2-I_3)+\frac{1}{s}\ (I_2+I_4) \qquad (II)$$

$$2(I_3)+2s(I_3+I_1)+4(I_3+I_4)+\frac{1}{s}\ (I_3-I_2)=0 \qquad (III)$$

$$4\ (I_4+I_3)+\frac{1}{s}\ (I_4+I_2)+1\,(I_4)+2s\,(I_4-I_1)=0 \qquad (IV)$$

از روابط (III) و (IV)، I_3 و I_4 را برحسب I_1 و I_2 پیدا نموده و در معادلات (I) و (II) قرار می‌دهیم:

$$I_3=\frac{(2s^2+9s+1)(I_2-2s^2I_1)}{4s^4+22s^3+18s^2+11s+1}$$

$$I_4=\frac{1}{4}\left(1-\frac{(2s^2+9s+1)(2s^2+6s+1)}{4s^4+22s^3+18s^2+11s+1}\right)\left(\frac{1}{s}\ I_2-2sI_1\right)$$

$$I_4=-\left(\frac{2s^2+10s+1}{4s^4+22s^3+18s^2+11s+1}\right)(I_2-2s^2I_1)$$

I_3 و I_4 را در معادلات (I) د (II) قرار می‌دهیم:

$$V_1=4sI_1+(4s^2+19s+2)\frac{(I_2-2s^2I_1)}{4s^4+22s^3+18s^2+11s+1}\times 2s$$

$$V_2=\frac{2}{s}\ I_2-(4s^2+19s+2)\frac{(I_2-2s^2I_1)}{4s^4+22s^3+18s^2+11s+1}\times\frac{1}{s}$$

حال پارامترهای Z عبارتند از:

$$Z_{11}=\frac{V_1}{I_1}\ \Big|\ I_2=0\ =4s-\frac{4s^3(4s^2+19s+2)}{4s^4+22s^3+18s^2+11s+1}$$

$$Z_{11}=\frac{12s^4+64s^3+44s^2+4s}{4s^4+22s^3+18s^2+11s+1}$$

$$Z_{22}=\frac{V_2}{I_2}\ \Big|\ I_1=0\ =\frac{8s^3+44s^2+32s+3}{4s^4+22s^3+18s^2+11s+1}$$

$$Z_{12}=\frac{V_1}{I_1}\ \Big|\ I_1=0\ =\frac{8s^3+38s^2+4s}{4s^4+22s^3+18s^2+11s+1}$$

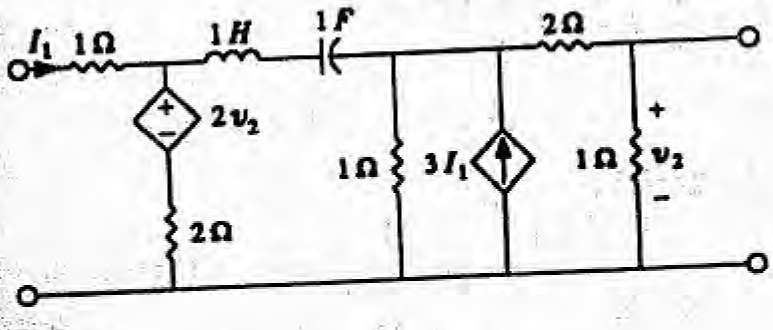
$$Z_{21}=\frac{V_2}{I_1}\ \Big|\ I_2=0\ =\frac{8s^3+38s^2+4s}{4s^4+22s^3+18s^2+11s+1}$$

حال از روی پارامترهای Z پارامترهای h را بصورت زیر بدست می‌آوریم:

$$h_{11}=\frac{\Delta Z}{Z_{22}}\qquad h_{12}=\frac{Z_{12}}{Z_{22}}\qquad h_{21}=-\frac{Z_{21}}{Z_{22}}\qquad h_{22}=\frac{1}{Z_{22}}$$

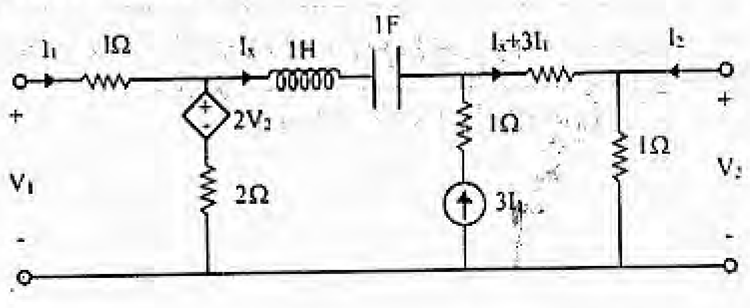
با جایگذاری مقادیر Z پارامترهای h با مقادیر قسمت اول بدست می‌آید.

۱۴ - پارامترهای z و h دوقطبی شکل (مساله ۱۷-۱۴) را به دست آورید.



حل:

شکل (مسألة ۱۷-۱٤)



$$kvl\ :\ V_1=I_1+2V_2+2(I_1-I_x)\ =3I_1+2V_2-2I_x \qquad (a)$$

$$kvl\ :\ V_1=I_1+\left(s+\frac{1}{s}\right)\ I_x+2I_x+6I_1+V_2$$

$$\Rightarrow\quad V_1=7I_1+\left(\frac{s^2+2s+1}{s}\right)\ I_x+V_2$$

$$\Rightarrow\ I_x=\frac{s}{s^2+2s+1}\ V_1-\frac{7s}{s^2+2s+1}\ I_1-\frac{s}{s^2+2s+1}\ V_2 \qquad (b)$$

$$(a),(b)\ \Rightarrow V_1=3I_1+2V_2-\frac{2s}{s^2+2s+1}\ V_1+\frac{14s}{s^2+2s+1}\ I_1+\frac{2s}{s^2+2s+1}\ V_2$$

$$\Rightarrow\quad V_1=\frac{3s^2+8s+3}{s^2+4s+1}\ I_1+\frac{2s^2+2s+2}{s^2+4s+1}\ V_2 \qquad (c)$$

$$kvl:\quad V_2=I_2+3I_1+I_x\quad \Rightarrow\ I_2=V_2-3I_1-I_x \qquad (d)$$

$$(b),(d)\quad \Rightarrow\ I_2=V_2-3I_1+\frac{7s}{s^2+2s+1}\ I_1+\frac{s}{s^2+2s+1}\ V_2-\frac{s}{s^2+2s+1}\ V_1$$

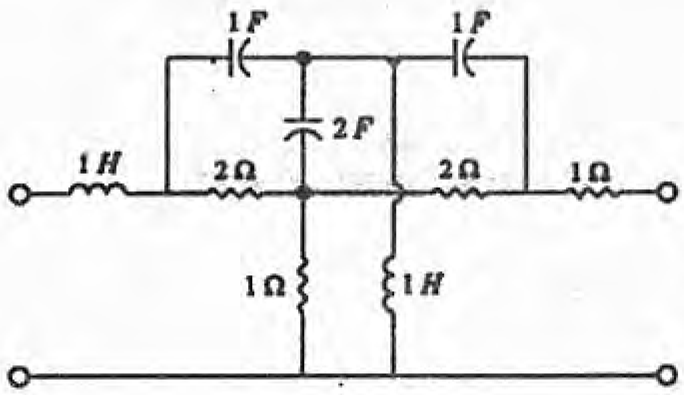
$$\Rightarrow\quad I_2=\frac{s^2+3s+1}{s^2+2s+1}\ V_2+\frac{s-3s^2-3}{s^2+2s+1}\ I_1-\frac{s}{s^2+2s+1}\ V_1 \qquad (e)$$

$$\Rightarrow I_2=-\frac{3s^3+8s^2+3s+(3s^2-s+3)(s^2+4s+1)}{(s^2+2s+1)(s^2+4s+1)}\ I_1+\frac{(s^2+4s+1)(s^2+3s+1)-(2s^3+2s^2+2s)}{(s^2+2s+1)(s^2+4s+1)}\ V_2 \qquad (f)$$

با توجه به روابط (c) و (f) ماتریس H مشخص می‌شود و با معلوم بودن ماتریس H و جدول صفحه 478 کتاب می‌توان ماتریس Z را از روی ماتریس H بصورت زیر محاسبه کرد.

$$Z=\begin{pmatrix} \dfrac{\det H}{h_{22}} & \dfrac{h_{12}}{h_{22}} \\ -\dfrac{h_{21}}{h_{22}} & \dfrac{1}{h_{22}} \end{pmatrix}$$

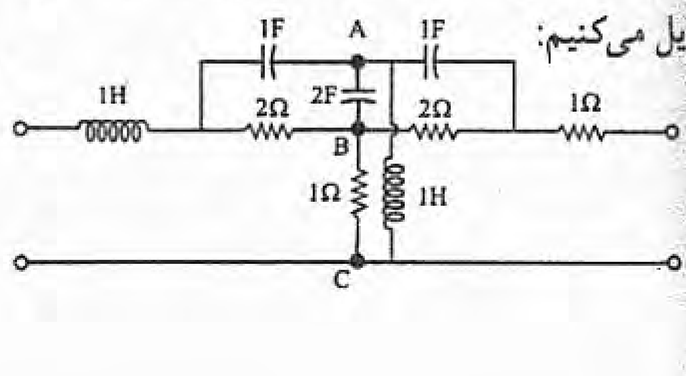
۱۵- پارامترهای z دوقطبی شکل (مسألهٔ ۱۷-۱۵) را به دست آورید.

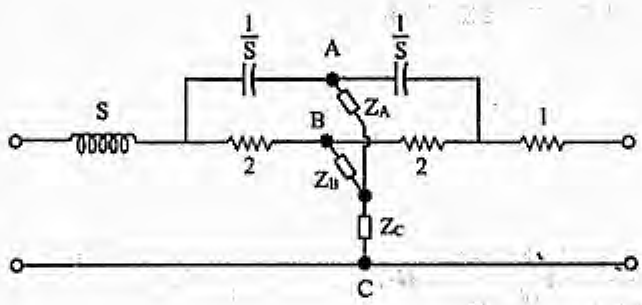


شکل (مسألهٔ ۱۷-۱۵)

حل:

اتصال مثلث بین نقاط A و B و C رابه اتصال ستاره تبدیل می‌کنیم:



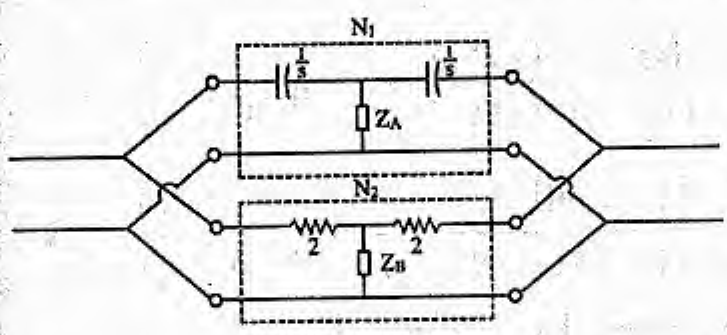


$$Z_A=\frac{\frac{1}{2s}\times S}{1+\frac{1}{2S}+S}=\frac{S}{2S^2+2S+1}$$

$$Z_B=\frac{\frac{1}{2S}+1}{1+\frac{1}{2S}+S}=\frac{1}{2S^2+2S+1}$$

$$Z_C=\frac{1\times S}{1+\frac{1}{2S}+S}=\frac{2S^2}{2S^2+2S+1}$$

ابتدا از طرفین مقاومت 1Ω و سلف $1H$ و امپدانس Z_C راکنار می‌گذاریم، شکل باقیمانده متشکل از دو اتصال T موازی شده بصورت شکل زیر است :



اکنون ماتریس ادمیتانس را برای شبکهٔ N_1 و N_2 پیدا نموده و چون دو شبکه موازیند ماتریسهای ادمیتانس بدست آمده را با همدیگر جمع می‌کنیم جهت محاسبهٔ ماتریس ادمیتانس از ماتریس امپدانس استفاده می‌کنیم:

شبکهٔ N_1:

$$Z_{12}=Z_{21}=Z_A$$

$$Z_{11}-Z_{12}=\frac{1}{s} \rightarrow Z_{11}=\frac{1}{s}+Z_A$$

$$Z_{22}-Z_{12}=\frac{1}{s} \rightarrow Z_{22}=\frac{1}{s}+Z_A$$

$$Z_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{s}+Z_A & Z_A\\ Z_A & \frac{1}{s}+Z_A\end{bmatrix} \rightarrow \Delta_{Z_1}=\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}Z_A$$

$$Y_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{s}+Z_A & Z_A\\ Z_A & \frac{1}{s}+Z_A\end{bmatrix}\times\frac{1}{\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}Z_A}$$

$$Z_{12}=Z_{21}=Z_B$$

$$Z_{11}-Z_{12}=2 \rightarrow Z_{11}=2+Z_B$$

$$Z_{22}-Z_{12}=2 \rightarrow Z_{22}=2+Z_B$$

$$Y_2=\begin{bmatrix} 2+Z_B & +Z_B \\ +Z_B & 2+Z_B \end{bmatrix} \times \frac{1}{4+4\,Z_B}$$

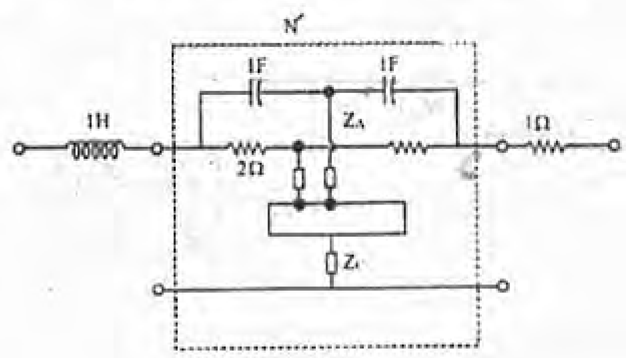
$$Y=Y_1+Y_2=\begin{bmatrix} \frac{(3s^2+2s+1)s}{4s^2+2s+1} & \frac{s^3}{4s^2+2s+1} \\ \frac{s^3}{4s^2+2s+1} & \frac{(3s^2+2s+1)s}{4s^2+2s+1} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{4s^2+4s+3}{8s^2+8s+8} & \frac{1}{8s^2+8s+8} \\ \frac{1}{8s^2+8s+8} & \frac{4s^2+4s+3}{8s^2+8s+8} \end{bmatrix}$$

فرض می‌کنیم:

$$Y=\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad Z=\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

امپدانس Z_C بصورت سری با شبکه فوق قرار دارد بنابراین مطابق شکل زیر ماتریس امپدانس Z با ماتریس امپدانس Z_C جمع می‌گردد داریم:

$$Z'=\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} Z_C & Z_C \\ Z_C & Z_C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Z_{11}+Z_C & Z_{12}+Z_C \\ Z_{21}+Z_C & Z_{22}+Z_C \end{bmatrix}$$



$$Z_{eq}=\begin{bmatrix} Z_{11}+Z_C+s & Z_{12}+Z_C \\ Z_{21}+Z_C & Z_{22}+Z_C+1 \end{bmatrix}$$

اکنون با توجه به روابط فوق داریم:

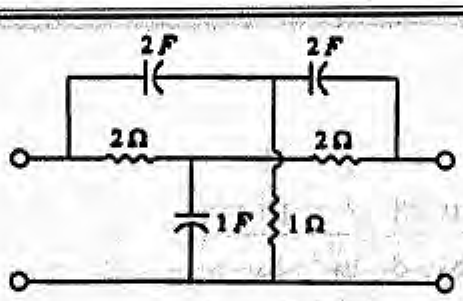
$$Y_{11}=Y_{22}=\frac{24s^5+56s^4+72s^3+48s^2+18s+3}{8(4s^2+2s+1)(s^2+s+1)}$$

$$Y_{12}=Y_{21}=\frac{8s^5+8s^4+8s^3+4s^2+2s+1}{8(4s^2+2s+1)(s^2+s+1)}$$

$$Z_{11}=Z_{22}=\frac{(24s^5+56s^4+72s^3+48s^2+18s+3)\,8(4s^2+2s+1)(s^2+s+1)}{512s^{10}+2560s^9+6400s^8+10176s^7+11264s^6+8960s^5+5168s^4+128s^3+600s^2+104s+8}$$

$$Z_{12}=Z_{21}=-\frac{(8s^5+8s^4+8s^3+4s^2+2s+1)8(4s^2+2s+1)(s^2+s+1)}{512s^{10}+2560s^9+6400s^8+10176s^7+11264s^6+8960s^5+5168s^4+128s^3+600s^2+104s+8}$$

۱۶- پارامترهای y دوقطبی شکل (مسالهٔ ۱۷-۱۶) را تعیین کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۷-۱۶)

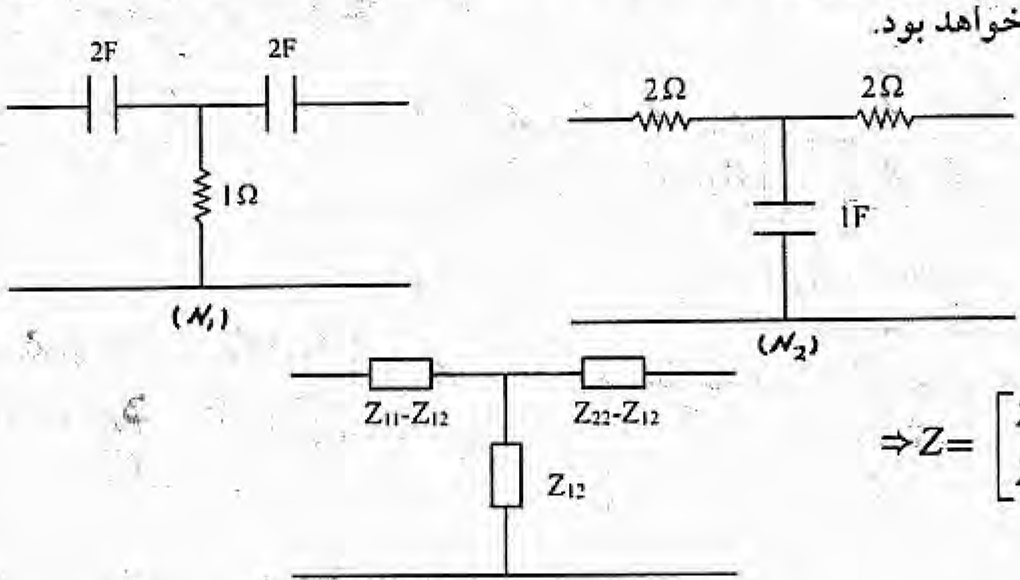
حل:

نوشتن معادلات kvl و kcl برای شبکه دوقطبی و بدست آوردن مدار معادل کار بسیار پیچیده و وقت گیر است. با دقت در ساختار مدار می‌توان دو شبکه دوقطبی T شکل را تشخیص داد که بطور موازی به هم وصل شده‌اند بنابراین برای حل این مسئله مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

(۱) برای هر یک از شبکه‌های T جداگانه طبق شکل زیر ماتریس امپدانس معادل را بدست می‌آوریم.

(۲) ماتریس ادمیتانس رااز معکوس ماتریس امپدانس محاسبه می‌کنیم.

(۳) چون دو شبکه T شکل بطور موازی به هم متصل شده‌اند ماتریس شبکه معادل برابر با مجموع ماتریس ادمیتانسهای دو شبکه خواهد بود.



$$\Rightarrow Z=\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

$$N_1 : \ Z_{12}=Z_{21}=1 \quad , \quad Z_{11}=Z_{22}=1+\frac{1}{2s}=\frac{2s+1}{2s}$$

$$N_2 : \ Z_{12}=Z_{21}=\frac{1}{s} \quad , \quad Z_{11}=Z_{22}=2+\frac{1}{s}=\frac{2s+1}{s}$$

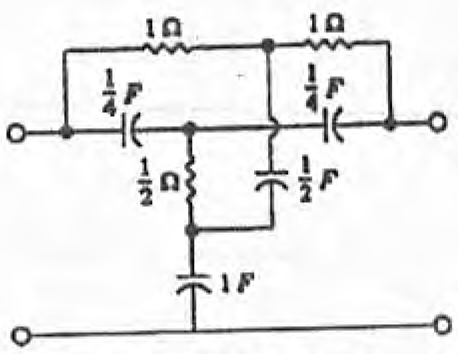
$$Z_1=\begin{bmatrix} \frac{2s+1}{2s} & 1 \\ 1 & \frac{2s+1}{2s} \end{bmatrix} \quad , \quad Z_2=\begin{bmatrix} \frac{2s+1}{s} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & \frac{2s+1}{s} \end{bmatrix}$$

$$det \ Z_1=\frac{4s+1}{4s^2} \quad , \quad det \ Z_2=\frac{4s+4}{s}$$

$$Y_1=\begin{bmatrix}\frac{4s^2+2s}{4s+1} & -\frac{4s^2}{4s+1}\\ -\frac{4s^2}{4s+1} & \frac{4s^2+2s}{4s+1}\end{bmatrix}\quad , \quad Y_2=\begin{bmatrix}\frac{2s+1}{4s+4} & -\frac{1}{4s+4}\\ -\frac{1}{4s+4} & \frac{2s+1}{2s+4}\end{bmatrix}$$

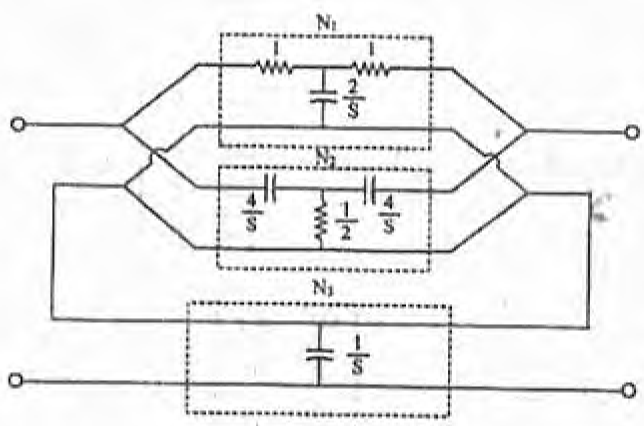
$$Y_{eq}=Y_1+Y_2$$

۱۷- می‌خواهیم پارامترهای Z دوقطبی نشان داده شده در شکل (مسالهٔ ۱۷-۱۷) و همچنین تابع شبکهٔ $H(s)=\frac{V_2(s)}{V_1(s)}$ را محاسبه کنیم. با استفاده از ایدهٔ به هم پیوستن دوقطبی‌ها، راه حل ساده‌ای وجود دارد. با استفاده از این راه حل یا هر راه حل دیگر، مساله را حل کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۷-۱۷)

حل:



دوقطبی را بصورت زیر تفکیک می‌کنیم:
شبکه N_1 و N_2 موازیند و حاصل با N_3 سری است، بنابراین داریم:

شبکه N_3:

$$Z_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s}\\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s}\end{bmatrix}$$

شبکه N_1:

$$Z_{12}=Z_{21}=\frac{2}{s}$$

$$Z_{11}-\frac{2}{s}=1 \quad \rightarrow \quad Z_{11}=1+\frac{2}{s} \qquad \rightarrow \quad Z_1=\begin{bmatrix}1+\frac{2}{s} & \frac{2}{s}\\ \frac{2}{s} & 1+\frac{2}{s}\end{bmatrix}$$

$$Z_{22}-\frac{2}{s}=1\rightarrow \quad Z_{22}=1+\frac{2}{s}$$

$$\Delta_{Z_1}=1+\frac{4}{s} \quad \rightarrow \quad Y_1=\begin{bmatrix}\frac{s+2}{s+4} & -\frac{2}{s+4}\\ -\frac{2}{s+4} & \frac{s+2}{s+4}\end{bmatrix}$$

شبکه N_2:

$$Z_{12}=Z_{21}=\frac{1}{2}$$

$$Z_{11}-\frac{1}{2}=\frac{4}{s} \quad \rightarrow \quad Z_{11}=\frac{4}{s}+\frac{1}{2}$$
$$Z_{22}-\frac{1}{2}=\frac{4}{s} \quad \rightarrow \quad Z_{22}=\frac{4}{s}+\frac{1}{2}$$
$$\rightarrow \quad Z_2=\begin{bmatrix} \frac{4}{s}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{s}+\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{Z_2}=\frac{16}{s^2}+\frac{4}{s} \quad \rightarrow \quad Y_2=\begin{bmatrix} \frac{s(8+s)}{8(4+s)} & -\frac{s^2}{8(4+s)} \\ -\frac{s^2}{8(4+s)} & \frac{s(8+s)}{8(4+s)} \end{bmatrix}$$

$$Y'=Y_1+Y_2=\begin{bmatrix} \frac{s^2+16s+16}{8(s+4)} & -\frac{s^2+16}{8(s+4)} \\ -\frac{s^2+16}{8(s+4)} & \frac{s^2+16s+16}{8(s+4)} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \Delta Y'=\frac{s}{2}$$

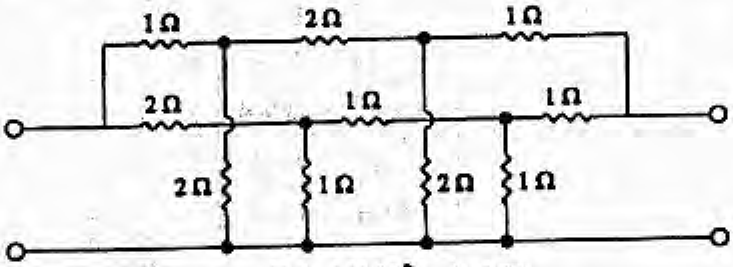
$$Z'=\begin{bmatrix} \frac{s^2+16s+16}{4s\cdot(s+4)} & \frac{s^2+16}{4s(s+4)} \\ \frac{s^2+16}{4s(s+4)} & \frac{s^2+16s+16}{4s(s+4)} \end{bmatrix}$$

$$Z=Z'+Z_3=\begin{bmatrix} \frac{s^2+20s+32}{4s(s+4)} & \frac{s^2+4s+32}{4s(s+4)} \\ \frac{s^2+4s+32}{4s(s+4)} & \frac{s^2+20s+32}{4s(s+4)} \end{bmatrix}$$

تابع شبکه عبارتند از :

$$\frac{V_2}{V_1}=g_{21}\ \Big|_{I_2=0}=\frac{Z_{21}}{Z_{11}}=\frac{s^2+4s+32}{s^2+20s+32}$$

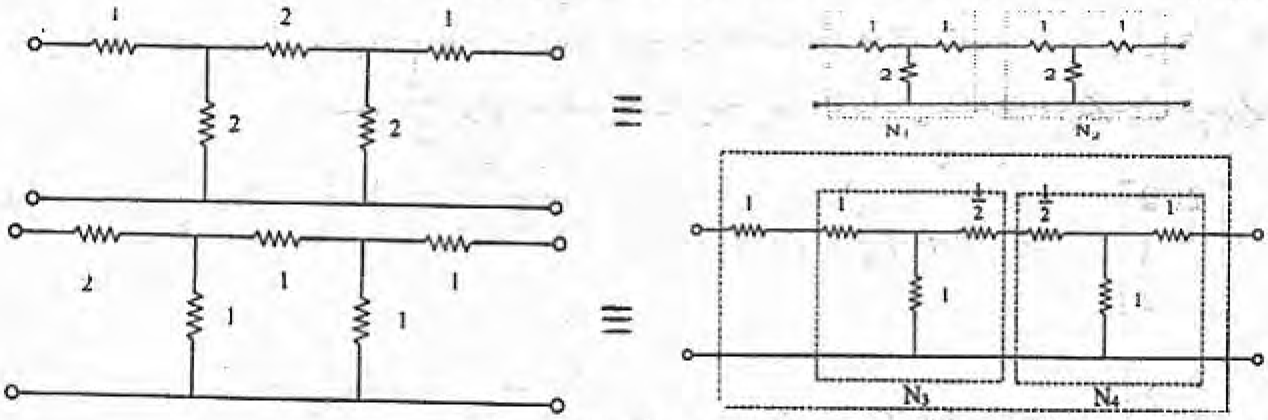
۱۸- پارامترهای y دوقطبی نشان داده شده در شکل (مسالهٔ ۱۷-۱۸) را به دست آورید.



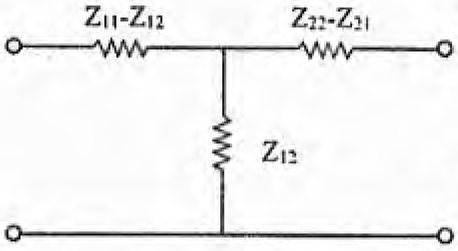
شکل (مسالهٔ ۱۷-۱۸)

حل:

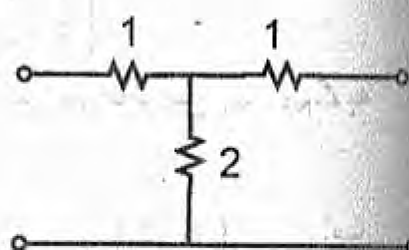
این دوقطبی ترکیب موازی دو شبکه نشان داده شده در شکلهای زیر است.



با توجه به مدار معادل T که بصورت مقابل است مسئله راحل می‌کنیم.



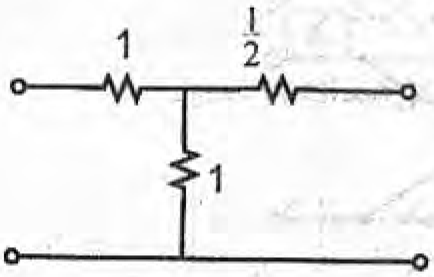
$$Z_{12}=Z_{21}=2 \qquad \Rightarrow \quad Z=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Delta Z=5$$
$$Z_{11}=Z_{22}=3$$



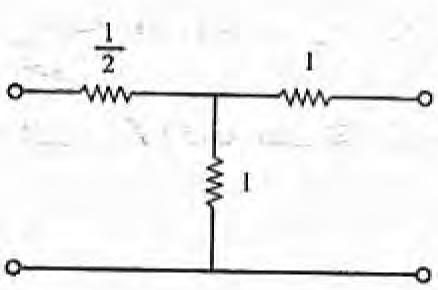
$$T=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{5}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T_{N_1,N_2}=T_{N_1}\times T_{N_2}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{5}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{5}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

$$T_{N_1,N_2}=\begin{pmatrix}\frac{14}{4} & \frac{30}{4}\\ \frac{6}{4} & \frac{14}{4}\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det T_{N_1,N_2}=\Delta T_{N_1,N_2}=1$$

$$\Rightarrow \quad Y_{N_1,N_2}=\begin{pmatrix}\frac{7}{15} & -\frac{2}{15}\\ -\frac{2}{15} & \frac{7}{15}\end{pmatrix}$$



$$Z_{12}=Z_{21}=1$$
$$Z_{11}-1=1 \quad \Rightarrow \quad Z_{11}=2 \qquad \Rightarrow \quad Z_{N_3}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$$
$$Z_{22}-\frac{1}{2}=1 \quad \Rightarrow \quad Z_{22}=\frac{3}{2}$$



$$Z_{12}=Z_{21}=1$$
$$Z_{11}-\frac{1}{2}=1 \quad \Rightarrow \quad Z_{11}=\frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \quad Z_{N_4}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$
$$Z_{22}-1=1 \quad \Rightarrow \quad Z_{22}=2$$

$$\det Z_{N_3} = \Delta Z_{N_3} = 2$$

$$\det Z_{N_4} = \Delta Z_{N_4} = 2$$

$$T_{N_3} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \det T_{N_3} = \Delta T_{N_3} = 1$$

$$T_{N_4} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det T_{N_4} = \Delta T_{N_4} = 1$$

$$T_{N_3,N_4} = T_{N_3} \times T_{N_4} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det T_{N_3,N_4} = \Delta T_{N_3,N_4} = 1$$

$$\Rightarrow \quad Z_{N_3,N_4} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

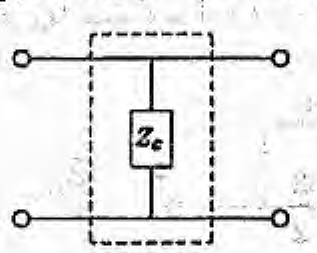
حال با توجه به اینکه یک مقاومت 1Ω بصورت سری به شبکه N_3 وصل شده پس در ماتریس $Z_{N3,N4}$ به Z_{11} یک واحد اضافه می‌کنیم.

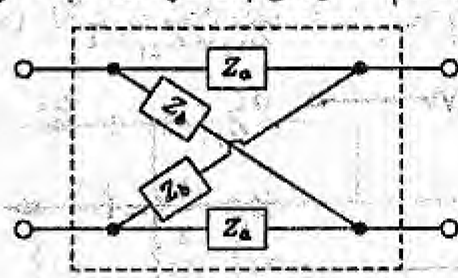
$$Z_{N_5} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow Y_{N_5} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} \\ -\frac{1}{13} & \frac{8}{13} \end{pmatrix} \Rightarrow Y_{eq} = Y_{N_1,N_2} + Y_{N_5} = \frac{1}{195} \begin{pmatrix} 166 & -41 \\ -41 & 211 \end{pmatrix}$$

۱۹ –الف– دوقطبی N_1 به صورت لتیس متقارن در شکل (مسالهٔ ۱۷-۱۹ الف) نشان داده شده است. پارامترهای z این دوقطبی را تعیین کنید.

ب– دوقطبی N_2 به صورت داده شده در شکل (مسالهٔ ۱۷-۱۹ ب) است. پارامترهای z این دوقطبی را تعیین کنید.

پ– برای $Z_a=4\ \Omega$ ، $Z_b=6\ \Omega$ و $Z_c=3\Omega$ می‌خواهیم این دوقطبی را به طور سری به همدیگر وصل کنیم. ماتریس پارامترهای امپدانس مدار-باز اتصال سری را تعیین کنید.





شکل (مسألهٔ ۱۷-۱۹)

حل:

الف: Z_{11} (که به علت تقارن دوقطبی با Z_{22} برابر است) امپدانس ورودی هنگام باز بودن خروجی است:

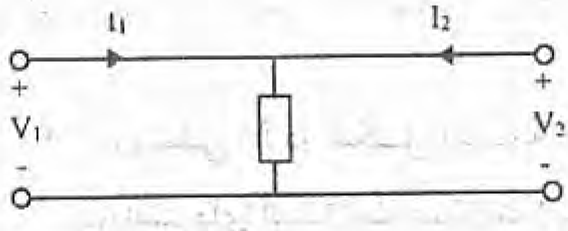
$$Z_{22}=Z_{11}=(Z_a+Z_b) \parallel (Z_a+Z_b)=\frac{1}{2}(Z_a+Z_b) \qquad (a)$$

Z_{12} که با Z_{21} برابر است نسبت v_1 به I_2 هنگام باز بودن ورودی است جریان I_2 بین دو امپدانس موازی تقسیم می‌شود و چون دو امپدانس برابرند پس جریان هر شاخه برابر $\frac{I_2}{2}$ است.

$$kvl:\ v_1=\frac{I_2}{2}Z_b-\frac{I_2}{2}Z_a=\left(\frac{Z_b-Z_a}{2}\right)I_2 \Rightarrow Z_{12}=Z_{21}=\frac{Z_b-Z_a}{2} \qquad (b)$$

$$(a),(b) \Rightarrow Z_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} Z_a+Z_b & Z_b-Z_a \\ Z_b-Z_a & Z_a+Z_b \end{bmatrix}$$

ب:



$$kvl:\ v_1=I_1Z_C+I_2Z_C \qquad (c)$$

$$kvl:\ v_2=I_1Z_C+I_2Z_C \qquad (d)$$

$$(c),(d) \Rightarrow Z_2=\begin{bmatrix} Z_C & Z_C \\ Z_C & Z_C \end{bmatrix}$$

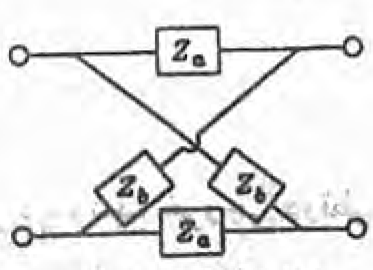
پ:

$$\begin{matrix} Z_a=4 \\ Z_b=6 \end{matrix} \Rightarrow Z_1=\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad Z_2=\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

چون این دو، دوقطبی بصورت سری بهم متصل شده‌اند پس ماتریس امپدانس آنها باهم جمع می‌شود و داریم:

$$Z_{eq}=Z_1+Z_2=\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

۲۰- اگر دوقطبی شکل (مسالهٔ ۱۷-۲۰) با لتیس متقارن دیگری که در آن امپدانس‌های Z_a و Z_b باهم تعویض شده باشند. به طور سری وصل شود، پارامترهای امپدانس مدار-باز دوقطبی را تعیین کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۷-۲۰)

حل

با توجه به نتیجه قسمت الف مسئله 19 داریم:

$$Z_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} Z_a+Z_b & Z_b-Z_a \\ Z_b-Z_a & Z_a+Z_b \end{bmatrix}$$

چون دوقطبی متقارن است پس با عوض کردن جای Z_a و Z_b در ماتریس امپدانس نیز جای آنها عوض می‌شود، لذا داریم:

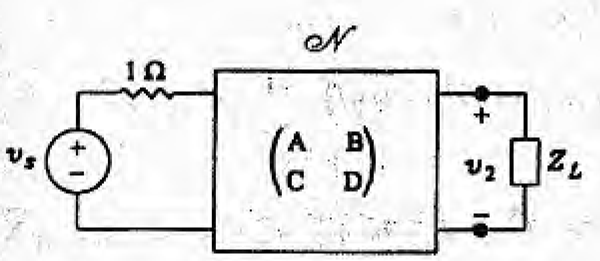
$$Z_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} Z_a+Z_b & Z_a-Z_b \\ Z_a-Z_b & Z_a+Z_b \end{bmatrix}$$

حال با توجه به اینکه این دو، دوقطبی بصورت سری بهم متصل شده‌اند پس ماتریس امپدانس آنها جمع می‌شود.

$$Z_{eq}=Z_1+Z_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2Z_a+2Z_b & 0 \\ 0 & 2Z_a+2Z_b \end{bmatrix}$$

$$Z_{eq}=\begin{bmatrix} Z_a+Z_b & 0 \\ 0 & Z_a+Z_b \end{bmatrix}$$

۲۱- دوقطبی N در شکل (مسالهٔ ۱۷-۲۱) با پارامترهای انتقال به صورت زیر توصیف می‌شود. $A=1+j1$ ، $B=-1+j4$ ، $C=\frac{1}{3}$ ، $D=1+j\frac{1}{3}$ امپدانس بار Z_L چنان تنظیم می‌شود که حداکثر توان متوسط به آن انتقال یابد. برای $V_s=15.6\angle 0°$ فازور ولتاژ V_2 را تعیین کنید.



شکل (مسالهٔ ۱۷-۲۱)

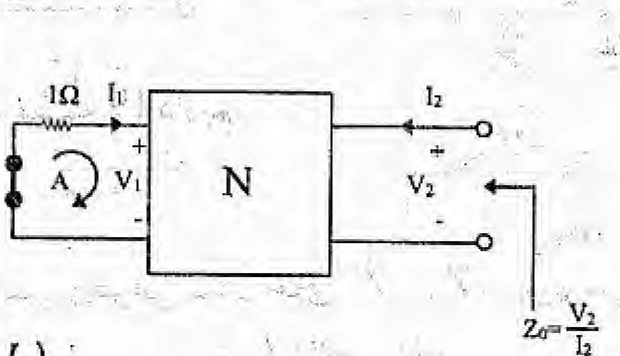
حل:

با توجه به پارامترهای انتقال داریم:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+j & -1+j4 \\ \frac{1}{3} & 1+j\frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} V_1=(1+j)\,V_2-(-1+j4)\,I_2 \\ I_1=\left(\frac{1}{3}\right)V_2-\left(1+j\frac{1}{3}\right)I_2 \end{cases} \quad (I)$$

امپدانس دیده شده خروجی دوقطبی N بصورت زیر به دست می‌آید.(منابع ولتاژ نابسته را جهت محاسبه امپدانس صفر فرض می‌کنیم.)



$$kvl\ (A):\ V_1=1\times(-I_1)$$

V_1 را برحسب I_1 در روابط (I) قرار می‌دهیم، داریم:

$$\begin{cases} -I_1 = (1+j)\,V_2 - (-1+j4)\,I_2 \\ I_1 = \left(\frac{1}{3}\right) V_2 - \left(1+j\frac{1}{3}\right) I_2 \end{cases} +$$

$$0 = \left(\frac{4}{3}+j\right) V_2 - \left(j\frac{13}{3}\right) I_2$$

$$Z_0 = \frac{V_2}{I_2} = \frac{j\,\frac{13}{3}}{\frac{4}{3}+j} = \frac{39}{25}\left(1+j\frac{4}{3}\right)$$

جهت انتقال حداکثر توان باید $Z_L = Z_0^*$ باشد بنابراین $Z_L = \frac{39}{25}\left(1-j\frac{4}{3}\right)$ ماتریس انتقال را به ماتریس هایبرید تبدیل می‌کنیم:

$$T = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\ \angle 45^\circ & 4.123\angle 104.04 \\ \frac{1}{3} & 1.054\angle 19.43 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \Delta T = \sqrt{2}\ \angle -45^\circ$$

$$H = \begin{bmatrix} 3.91\angle 85.61 & 1.342\angle -63.43 \\ -0.949\angle -18.43 & 0.316\angle -18.43 \end{bmatrix}$$

اکنون می‌توانیم مقاومت 1 اهمی و Z_L را به پارامترهای هایبرید بصورت زیر اضافه نماییم:

$$H_{new} = \begin{bmatrix} h_{11}+1 & h_{12} \\ h_{21} & h_{22}+\frac{1}{Z_L} \end{bmatrix}$$

بنابراین داریم:

$$H_{new} = \begin{bmatrix} 1.3+j\,3.9 & 0.6-j1.2 \\ -0.9+j0.3 & 0.531+j0.208 \end{bmatrix}$$

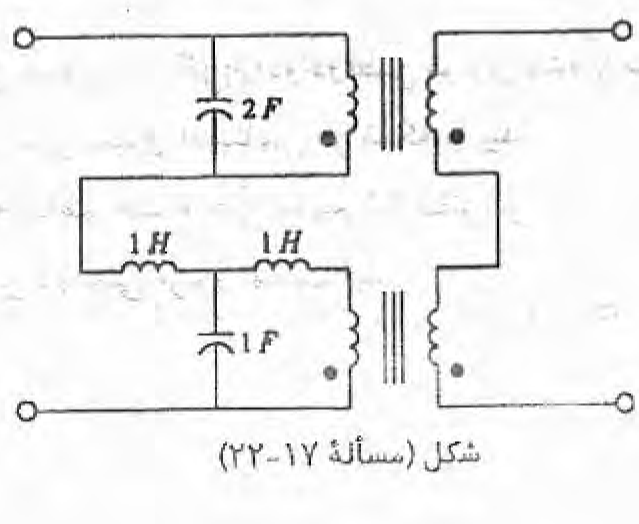
$$\Delta H_{new} = 0.059 + j1.081$$

$$\frac{V_2}{V_1}\Big|_{I_2=0} = g_{21} = -\frac{h_{21}}{\Delta H_{new}} = -\frac{0.9+j0.3}{0.059+j1.081} = 0.876\angle 111.55$$

$$V_2 = V_1 \times 0.876\angle 111.55 \quad , \quad V_1 = 15.6\angle 0 \rightarrow \quad V_2 \simeq 13.67\angle 111.55$$

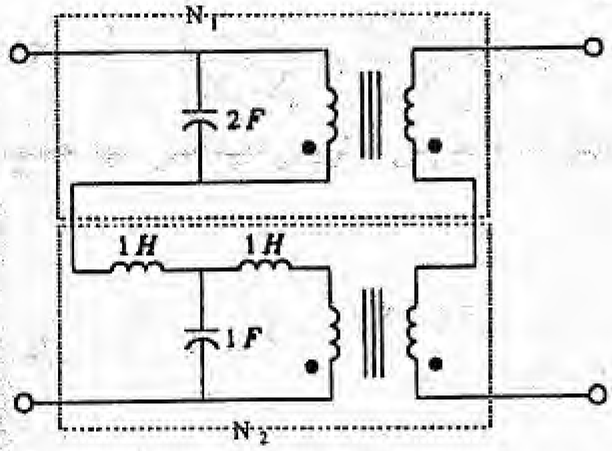
۲۲- پارامترهای Z دوقطبی شکل (مسالهٔ ۱۷-۲۲) را به دست آورید. (ترانسفورماتورها دارای نسبت 1:1 هستند. نقش ترانسفورماتورها در این مدار چیست؟

حل:



شکل (مسالهٔ ۱۷-۲۲)

دوقطبی موجود متشکل از دو دوقطبی بصورت شکل زیر است:



برای شبکه N_1:

$$Z_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{2s} & \frac{1}{2s}\\ \frac{1}{2s} & \frac{1}{2s}\end{bmatrix}$$

برای شبکه N_2: (اتصال T داریم)

$$Z_{12}=Z_{21}=\frac{1}{s}$$

$$Z_{11}-\frac{1}{s}=s \quad \rightarrow \quad Z_{11}=s+\frac{1}{s}$$

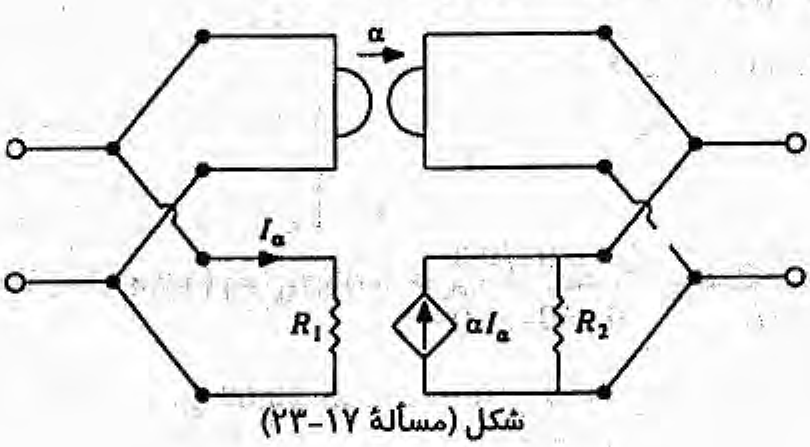
$$Z_{22}-\frac{1}{s}=s \quad \rightarrow \quad Z_{22}=s+\frac{1}{s}$$

$$\rightarrow \quad Z_2=\begin{bmatrix}s+\frac{1}{s} & \frac{1}{s}\\ \frac{1}{s} & s+\frac{1}{s}\end{bmatrix}$$

حال چون دو دوقطبی بصورت سری بهم متصل شده‌اند بنابراین امپدانسها را با یکدیگر جمع می‌کنیم داریم:

$$Z=Z_1+Z_2=\begin{bmatrix}s+\frac{1}{s}+\frac{1}{2s} & \frac{1}{s}+\frac{1}{2s}\\ \frac{1}{s}+\frac{1}{2s} & s+\frac{1}{s}+\frac{1}{2s}\end{bmatrix}$$

۲۳- پارامترهای y دوقطبی شکل (مسالهٔ ۱۷-۲۳) را به دست آورید.

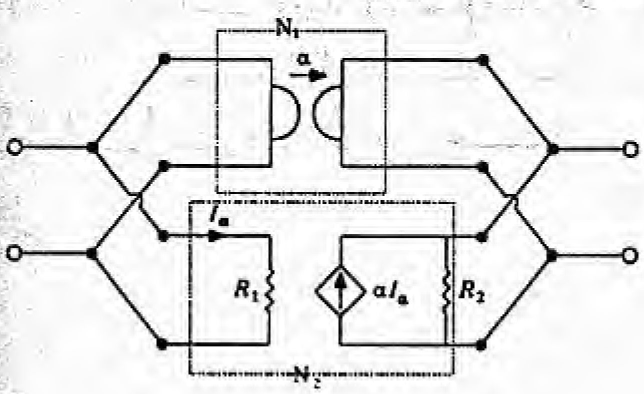


شکل (مسالهٔ ۱۷-۲۳)

حل:

دوقطبی موجود متشکل از دو دوقطبی موازی شده با همدیگر بصورت زیر است:

بنابراین ماتریسهای ادمیتانس هر شبکه را پیدا نموده و باهم جمع می‌نماییم تا ماتریس ادمیتانس دوقطبی مزبور بدست آید.



برای شبکه N_1: ماتریس امپدانس ژیراتور بصورت زیر است:

$$Z_1=\begin{bmatrix}0 & \alpha\\ -\alpha & 0\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad Y_1=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{\alpha}\\ \frac{1}{\alpha} & 0\end{bmatrix} \qquad (I)$$

برای شبکه N_2:

$$Y_{11}=\frac{I_1}{V_1}\Big|_{V_2=0}=\frac{1}{R_1} \qquad Y_2=\frac{I_1}{V_2}\Big|_{V_1=0}=0$$

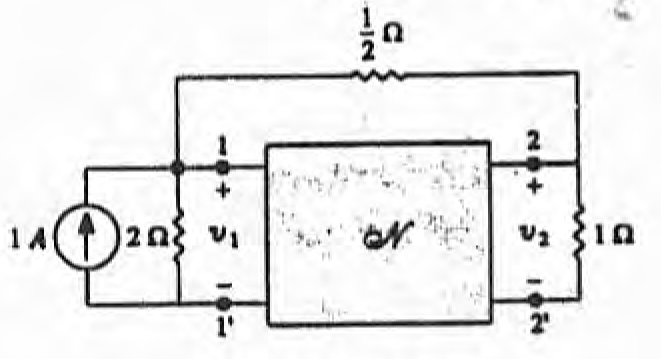
$$Y_{22}=\frac{I_2}{V_2}\Big|_{V_1=0}=\frac{1}{R_2} \qquad Y_{21}=\frac{I_2}{V_1}\Big|_{V_2=0}=\frac{-\alpha I_1}{R_1 I_1}=-\frac{\alpha}{R_1}$$

$$\rightarrow \quad Y_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{R_1} & 0\\ -\frac{\alpha}{R_1} & \frac{1}{R_2}\end{bmatrix} \qquad (II)$$

بنابر (I) و (II) داریم:

$$Y=Y_1+Y_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{\alpha}\\ -\frac{\alpha}{R_1}+\frac{1}{\alpha} & \frac{1}{R_2}\end{bmatrix}$$

۲۴- دوقطبی مقاومتی N نشان داده شده در شکل (مسالهٔ ۱۷-۲۴) با پارامترهای $y_{11}=y_{22}=2$ mho و $y_{12}=1$ mho و $y_{21}=2$ mho توصیف می‌شود. ولتاژهای v_1 و v_2 را به دست آورید.



شکل (مسألهٔ ۱۷-۲٤)

حل:

$$\text{kcl در گره ورودی}: 1=\frac{v_1}{2}+2(v_1-v_2)+i_1 \qquad (a)$$

$$\text{kcl در گره خروجی}: 0=\frac{v_2}{1}+2(v_2-v_1)+i_2 \qquad (b)$$

با توجه به پارامترهای y داریم:

$$i_1=2v_1+v_2 \qquad (c)$$

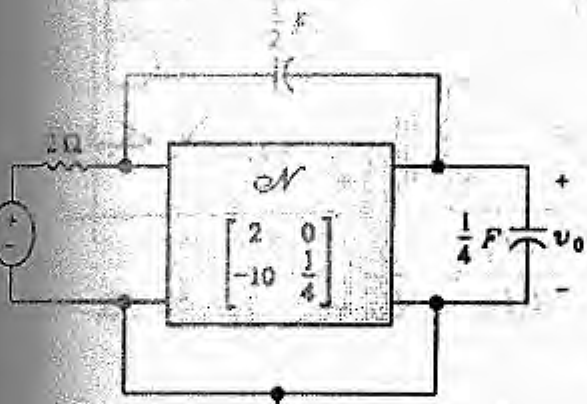
$$i_2=2v_1+2v_2 \qquad (d)$$

$$(a),(c) \;\Rightarrow\; 1=\frac{v_1}{2}+2v_1-2v_2+2v_1+v_2 \;\Rightarrow\; 1=\frac{9}{2}v_1-v_2 \qquad (e)$$

$$2v_2 - 2v_1 + 2v_1 + 2v_2 \Rightarrow v_2 = 0 \qquad (f)$$

۲۵-الف- با استفاده از منابع وابسته، مدار معادلی برای پارامترهای h تعیین کنید.

ب- دوقطبی N با پارامترهای h به صورت نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۱۷-۲۵) توصیف می‌شود. این دوقطبی به دو خازن، یک مقاومت و یک منبع ولتاژ v_{in} مطابق شکل وصل شده‌است. تابع شبکهٔ $H(s)=\frac{V_o}{V_{in}}$ را به دست آورید.

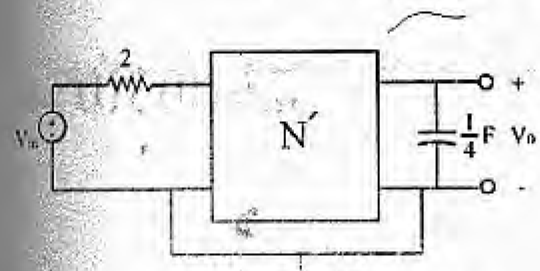


شکل (مسألهٔ ۱۷-۲۵)

حل:

الف) برای مدار معادل از شکل ۶-۱ صفحهٔ ۴۷۵ کتاب می‌توان استفاده نمود.

ب) 'N مدار معادل دوقطبی بزرگ شده (همانند تبصره صفحهٔ ۴۶۹ کتاب) که مقادیر $y_c=\frac{s}{2}$ و $y_a=0$ و $y_b=0$ می‌باشد. حال داریم:

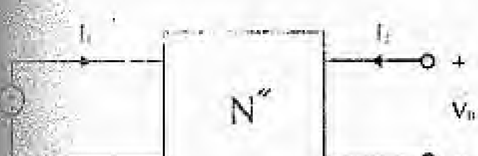


$$h = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -10 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \rightarrow Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -5 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

'Y دوقطبی بزرگ شده عبارتست از:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{s}{2} & -\frac{s}{2} \\ -5 - \frac{s}{2} & \frac{1}{4} + \frac{s}{2} \end{bmatrix}$$

با توجه به شکل مقابل "N شبکه دوقطبی بزرگ شده (طبق توضیحات تبصره صفحهٔ ۴۷۶ کتاب) با مقادیر $Z_a=2$ و $y_b=\frac{s}{4}$ می‌باشد.



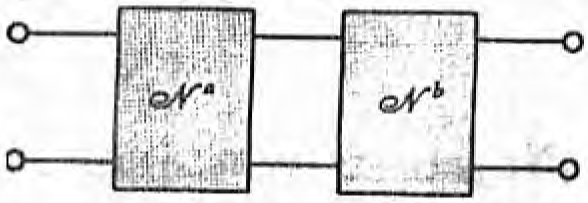
$$h' = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{2}{s+1} \times \frac{s}{2} \\ \frac{2}{s+1}\left(-5 - \frac{1}{2}s\right) & \frac{2}{s+1} \times \frac{-17s+1}{8} \end{bmatrix}$$

$$h''=\begin{bmatrix} \frac{2}{s+1}+2 & \frac{s}{s+1} \\ -\frac{10+s}{s+1} & \frac{1}{4}\,\frac{-17s+1}{s+1}+\frac{s}{4} \end{bmatrix}$$

می‌دانیم:

$$A=\frac{V_1}{V_2}\Big|_{I_2=0}=\frac{V_{in}}{V_0}\Big|_{I_2=0}=-\frac{\Delta H''}{h''_{21}}=\frac{\frac{1}{2}s^3-6s^2-\frac{11}{2}s+1}{(10+s)(s+1)}$$

$$\frac{V_{in}}{V_0}\Big|_{I_2=0}=\frac{1}{2}\,\frac{(s^2-13s+2)}{10+s}\Rightarrow H(s)=\frac{2(s+10)}{s^2-13s+2}$$



شکل (مسألهٔ ۱۷-۲۶)

۲۶- در شکل (مسالهٔ ۱۷-۲۶) دو دوقطبی N^a و N^b به طور متوالی وصل شده‌اند و به وسیلهٔ بالانویس‌های a و b از هم مشخص می‌شوند. نشان دهید که اتصال متوالی دارای خواص زیر است:

$$z_{12}=\frac{z^a_{12}z^b_{12}}{z^b_{11}+z^a_{22}}\quad \text{و}\quad y_{12}=\frac{-y^a_{12}y^b_{12}}{y^b_{11}+y^a_{12}}$$

حل:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A^a & B^a \\ C^a & D^a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^b & B^b \\ C^b & D^b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A^aA^b+B^aC^b & A^aB^b+B^aD^b \\ C^aA^b+D^aC^b & C^aB^b+D^aD^b \end{bmatrix}$$

$$Z_{12}=\frac{\Delta T}{C}=\frac{AD-BC}{C}\quad\rightarrow$$

$$Z_{12}=\left[\frac{A^aA^bB^bC^a+A^aA^bD^aD^b+B^aB^bC^aC^b+B^aC^bD^aD^b-A^aA^bB^bC^a-A^aB^bC^bD^a-A^bB^aC^aD^b-B^aC^bD^aD^b}{C^aA^b+D^aC^b}\right]$$

پارامترهای انتقالی را برحسب پارامترهای امپدانسی جایگذاری می‌کنیم:

$$Z_{12}=\frac{\frac{1}{(Z^a_{21}Z^b_{21})^2}\times(Z^a_{11}.Z^b_{11}.Z^a_{22}.Z^b_{22}+\Delta^a_Z.\Delta^b_Z\times1\times1-Z^a_{11}.\Delta^b_Z\times1\times Z^a_{22}-Z^b_{11}.\Delta^a_Z.1.Z^b_{22})}{\left(\frac{1}{Z^a_{21}.Z^b_{21}}\right)(1.Z^b_{11}+Z^a_{22}.1)}$$

می‌دانیم:

$$\Delta Z=Z_{11}Z_{22}-Z_{12}Z_{21}$$

با جایگذاری مقادیر Δ^a_Z و Δ^b_Z در عبارت Z_{12} داریم:

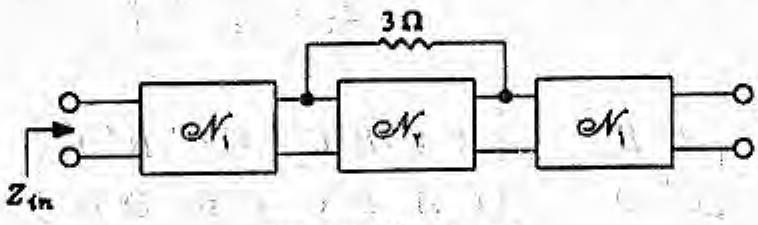
$$Z_{12}=\frac{1}{Z_{21}^{a}Z_{21}^{b}}\times\left[\frac{Z_{11}^{a}Z_{11}^{b}Z_{22}^{a}Z_{22}^{b}+(Z_{11}^{a}Z_{22}^{a}Z_{11}^{b}Z_{22}^{b}-Z_{11}^{a}Z_{22}^{a}Z_{12}^{b}Z_{21}^{b}-Z_{12}^{a}Z_{21}^{a}Z_{11}^{b}Z_{22}^{b}+Z_{12}^{a}Z_{21}^{a}Z_{12}^{b}Z_{21}^{b})-(Z_{11}^{a}Z_{22}^{a}Z_{11}^{b}Z_{22}^{b}-Z_{11}^{a}Z_{22}^{a}Z_{12}^{b}Z_{21}^{b})-(Z_{11}^{b}Z_{22}^{b}Z_{11}^{a}Z_{22}^{a}-Z_{11}^{b}Z_{22}^{b}Z_{12}^{a}Z_{21}^{a})}{Z_{11}^{a}+Z_{22}^{b}}\right]$$

$$\rightarrow\quad Z_{12}=\frac{1}{Z_{21}^{a}\times Z_{21}^{b}}\times\frac{Z_{12}^{a}Z_{21}^{a}Z_{12}^{b}Z_{21}^{b}}{Z_{11}^{a}+Z_{22}^{b}}$$

$$Z_{12}=\frac{Z_{12}^{a}Z_{12}^{b}}{Z_{11}^{a}+Z_{22}^{b}}$$

به روش مشابه می‌توان فرمول $y_{12}=\dfrac{-y_{12}^{a}y_{12}^{b}}{y_{11}^{b}+y_{22}^{b}}$ را نیز اثبات نمود.

۲۷- در شکل (مسالهٔ ۱۷-۲۷) دوقطبی N_1 با پارامترهای h به صورت $H=\begin{bmatrix}5 & \frac{1}{2}\\ 2 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$ و دوقطبی N_2 با پارامترهای z به صورت $Z=\begin{bmatrix}0 & 3\\ -3 & 0\end{bmatrix}$ توصیف می‌شوند. پارامترهای امپدانس مدار-باز و امپدانس ورودی مدار به هم پیوستهٔ نشان داده شده را تعیین کنید.



شکل (مسالهٔ ۱۷-۲۷)

حل:

ابتدا ماتریس Y شبکه N_2 راپیدا می‌کنیم سپس ماتریس Y شبکه توسعه یافته N_2 را پیدا می‌کنیم و در نهایت ماتریس T هر سه شبکه را پیدا کرده و به هم ضرب می‌کنیم تا T_{eq} بدست آید از روی T_{eq} ، Z_{eq} را بدست می‌آوریم:

$$Z_2=\begin{bmatrix}0 & 3\\ -3 & 0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad det\,Z=\Delta Z=9$$

$$Y_2=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & 0\end{bmatrix}$$

ماتریس ادمیتانس شبکه N وقتی مقاومت 3Ω رامتصل می‌کنیم $Y_2=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{6}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

با توجه به رابطهٔ ماتریس T و Y چون $y_{21}=0$ است نمی‌توان ماتریس T را پیدا کرد بنابراین روی سئوال اشکال دارد. با تبدیل مقاومت 387 به مقاومت 1Ω در روی مسئله حل مسئله را ادامه می‌دهیم.

زمانی که مقاومت 1Ω به شبکه N_2 وصل می‌کنیم.
$$Y_2=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3}-1 \\ \frac{1}{3}-1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$det\ Y_2=\Delta y_2=1-\frac{8}{3}=-\frac{5}{3}$$

$$T_2=\begin{bmatrix} -\frac{y_{22}}{y_{21}} & -\frac{1}{y_{21}} \\ -\frac{\Delta y_2}{y_{21}} & -\frac{y_{11}}{y_{21}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$det\ \ H=\Delta H=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$$

$$T_H=\begin{bmatrix} -\frac{\Delta H}{h_{21}} & \frac{h_{11}}{h_{21}} \\ -\frac{h_{22}}{h_{21}} & -\frac{1}{h_{21}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$T_{eq}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

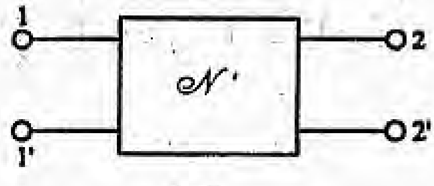
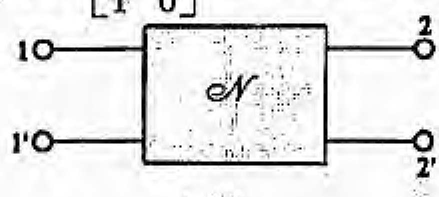
$$T_{eq}=\begin{bmatrix} \frac{41}{24} & 31 \\ \frac{5}{6} & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix} 1.71 & 31 \\ 0.83 & -4.5 \end{bmatrix}$$

$$det\ T_{eq}=\Delta\ T_{eq}=-33.425$$

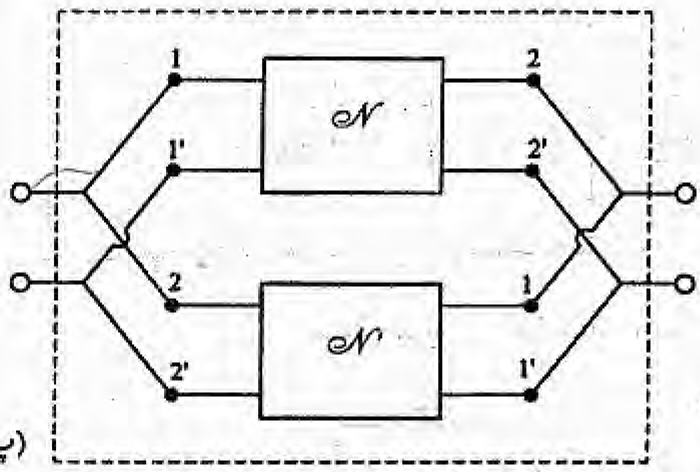
$$Z_{eq}=\begin{bmatrix} \frac{A}{C} & \frac{\Delta T_{eq}}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix} 2.06 & -40.27 \\ 1.2 & -5.42 \end{bmatrix}$$

۲۸ - دو شبکهٔ دوقطبی $\mathcal{N}$ و $\mathcal{N}'$ در شکل (مسالهٔ ۱۷-۲۸ الف و ب) به ترتیب دارای ماتریس های
امپدانس Z و 'Z هستند. این دو شبکه را نظیر شکل (مسالهٔ ۱۷-۲۸ پ) به هم وصل می‌کنیم (به نحوهٔ اتصال دقیقا" توجه کنید) تا شبکهٔ دوقطبی N_1 حاصل شود. فرض می‌کنیم اتصال فوق تغییری در روابط دو سر شبکه‌ها ایجاد نکند. ثابت کنید در شبکهٔ N_1 ماتریس امپدانس $\hat{Z}$ چنین است:

$\hat{Z} = \left(Z^{-1} + TZ^{-1}T\right)^{-1}$ که در آن $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ است.

(ب) (الف)



(پ) شبکهٔ $\mathcal{N}_1$

حل:

شبکه‌های N و 'N به ترتیب دارای ماتریسهای Z و 'Z به شکلهای زیر هستند:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad Z' = \begin{bmatrix} Z'_{11} & Z'_{12} \\ Z'_{21} & Z'_{22} \end{bmatrix}$$

با توجه به شکل متوجه می‌شویم که 'N از لحاظ ظاهری 180° چرخیده است به عبارت دیگر خروجی 'N باورودی N موازی شده و تشکیل ورودی دوقطبی را داده است و ورودی 'N با خروجی N موازی گردیده و تشکیل خروجی دوقطبی را داده است بنابراین برای 'N معکوس شده می‌توان جای Z'_{21} با Z'_{12} و جای Z'_{22} با Z'_{11} را تعویض نمود.

$$N'_{new} \quad \rightarrow \quad Z'_{new} = \begin{bmatrix} Z'_{22} & Z'_{21} \\ Z'_{12} & Z'_{11} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad Y'_{new} = \begin{bmatrix} \dfrac{Z'_{11}}{\Delta Z'} & -\dfrac{Z'_{21}}{\Delta Z'} \\ -\dfrac{Z'_{12}}{\Delta Z'} & \dfrac{Z'_{22}}{\Delta Z'} \end{bmatrix} \qquad (I)$$

و نیز برای شبکه N داریم: $Y=Z^{-1}$ (II)

از طرفی دیگر اگر $TZ'^{-1}T$ را محاسبه کنیم داریم:

$$TZ'^{-1}T=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{Z'_{22}}{\Delta Z'}&-\frac{Z'_{12}}{\Delta Z'}\\-\frac{Z'_{21}}{\Delta Z'}&\frac{Z'_{11}}{\Delta Z'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{Z'_{11}}{\Delta Z'}&-\frac{Z'_{21}}{\Delta Z'}\\-\frac{Z'_{12}}{\Delta Z'}&\frac{Z'_{22}}{\Delta Z'}\end{bmatrix}\qquad(III)$$

چون طرف دوم روابط (I) و (III) با همدیگر مساوی هستند بنابراین طرف اول آنها نیز با یکدیگر برابر است و داریم:

$$Y'_{new}=TZ'^{-1}T\qquad(IV)$$

حال برای دوقطبی N_1 داریم:

$$Y_1=Y+Y'_{new}$$

از رابطهٔ (II) و (IV) جایگذاری می‌کنیم:

$$Y_1=Z^{-1}+TZ'^{-1}T$$
$$Z_1=(Z^{-1}+TZ'^{-1}T)^{-1}$$

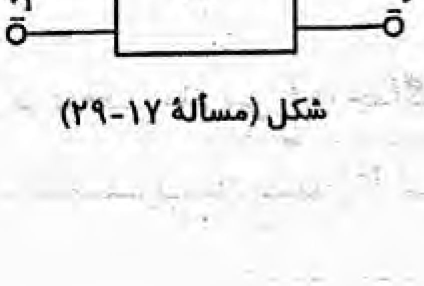
۲۹- دو مدار سه قطبی هر یک با پارامترهای تعریف شده مطابق شکل (مسالهٔ ۱۷-۲۹) و روابط زیر داده شده‌اند:

$$\begin{bmatrix}V_1\\I_2\\V_3\end{bmatrix}=\left[\text{دسته پارامترها}\right]\begin{bmatrix}I_1\\V_2\\I_3\end{bmatrix}$$

به هم‌پیوستنی از این سه قطبی‌ها چنان رسم کنید که برای به دست آوردن پارامترهای کلی شبکهٔ به هم پیوسته، پارامترهای آنها را باید نظیر به نظیر باهم جمع کرد.

حل:

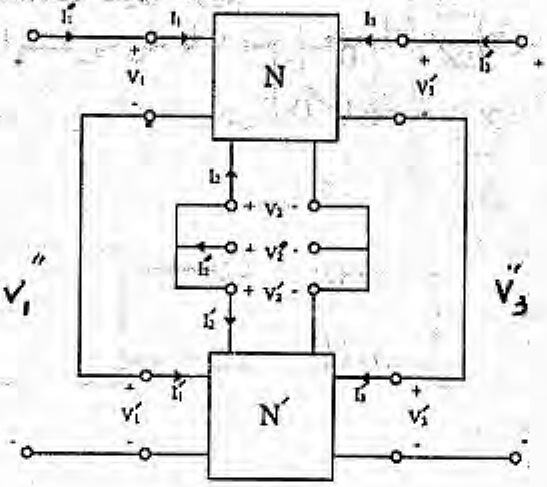
$\frac{V_1}{I_1}$ نشان دهندهٔ این است که ورودی‌های ۱ هر دو سه قطبی باید بصورت سری به همدیگر متصل شود تا $\frac{V_1}{I_1}$ ها که نشان دهندهٔ امپدانس‌های سه قطبی‌ها است با همدیگر جمع شود. با همین روش می‌توان $\frac{V_3}{I_3}$ را نیز تحلیل نمود. ولی برای سطر دوم $\frac{I_2}{V_2}$ نشان دهندهٔ این است که ورودی‌های سه قطبی‌ها باید بصورت موازی



شکل (مسالهٔ ۱۷-۲۹)

به یکدیگر متصل شود تا $\frac{I_2}{V_2}$ ها که نشان دهندهٔ ادمیتانسهای سه قطبی‌هاست با همدیگر جمع شوند.

به عنوان نمونه داریم:



$$a_{12}=\frac{V_1''}{V_2''}\ \Big|_{I_1''=I_3''=0}\quad (*)$$

با توجه به شکل داریم:

$$V_1''=V_1+V_1' \qquad (I)$$

$$V_2''=V_2=V_2' \qquad (II)$$

$$I_1''=I_1=I_1' \qquad (III)$$

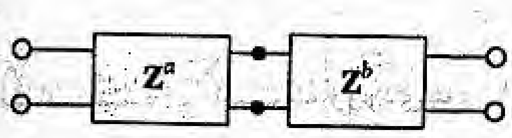
$$I_3''=I_3=I_3' \qquad (IV)$$

اکنون با جایگذاری روابط (I) تا (IV) در عبارت (*) داریم:

$$a_{12}=\frac{V_1+V_1'}{V_2}\ \Big|_{I_1''=I_3''=0}=\frac{V_1}{V_2}\ \Big|_{I_1=I_3=0}+\frac{V_1'}{V_2'}\ \Big|_{I_1'=I_3'=0}$$

همانطوریکه مشاهده می‌شود پارامترها در a_{12} با همدیگر جمع می‌شوند اگر همین کار را برای سایر a_{ij} ها انجام دهیم مشاهده می‌شود که پارامترها نظیر به نظیر با همدیگر جمع می‌شوند.

۳۰- دو دوقطبی با پارامترهای $Z^a=\begin{bmatrix}5&3\\4&6\end{bmatrix}$ و $Z^b=\begin{bmatrix}4&3\\2&4\end{bmatrix}$ داده شده‌اند. پارامترهای امپدانس اتصال متوالی آنها را به دست آورید.



شکل (مسألهٔ ۱۷-۳۰)

حل:

ابتدا برای هر دوقطبی ماتریس T را جداگانه حساب می‌کنیم و چون بصورت سری بسته شده‌اند ماتریس T کل برابر با حاصلضرب ماتریسهای T است و در نهایت با استفاده از T_{eq}، Z_{eq} را بدست می‌آوریم:

$$Z_a = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow det\ Z_a = \Delta Z_a = 18$$

$$Z_b = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow det\ Z_b = \Delta Z_b = 10$$

$$T_a = \begin{bmatrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{\Delta Z_a}{Z_{21}} \\ \frac{1}{Z_{21}} & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{9}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$T_b = \begin{bmatrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{\Delta Z_b}{Z_{21}} \\ \frac{1}{Z_{21}} & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

$$T_{eq} = T_a T_b = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{9}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{4} & \frac{61}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{17}{4} \end{bmatrix}$$

$$det\ T_{eq} = \Delta T_{eq} = \frac{9}{8}$$

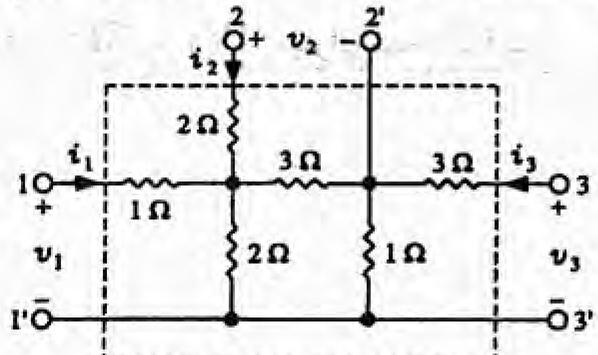
$$Z_{eq} = \begin{bmatrix} \frac{A}{C} & \frac{\Delta T_{eq}}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{4} & \frac{9}{10} \\ \frac{4}{5} & \frac{17}{5} \end{bmatrix}$$

۳۱- شبکهٔ سه قطبی نشان داده شده در شکل (مسالهٔ ۱۷-۳۱) را در نظر بگیرید.

الف- پارامترهای امپدانس مدار باز این شبکه را تعیین کنید.

ب- توصیف این سه قطبی را به صورت $\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = [\ ?\ ] \begin{bmatrix} I_1 \\ V_3 \\ I_3 \end{bmatrix}$ بنویسید.

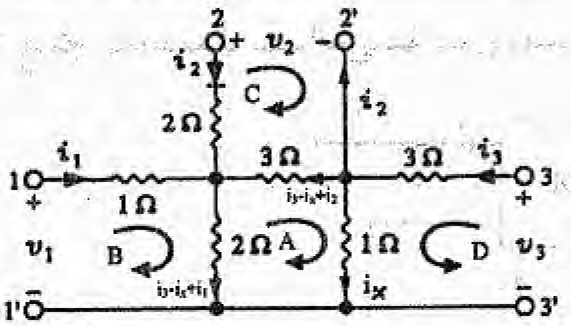
پ- اگر مقاومت 2 اهمی پایینی حذف شود، سؤال قسمت (ب) را بار دیگر جواب دهید.



شکل (مسالهٔ ۱۷-۳۱)

حل:

الف) اگر جریان شاخهٔ ۱ اهمی سمت راست را i_x در نظر بگیریم می‌توان نوشت:



$$kvl\ (A):\ -3\left(i_3-i_x-i_2\right)+i_x-2\left(i_3-i_x+i_1\right)=0$$

$$-5i_3+6i_x+3i_2-2i_1=0 \quad \rightarrow \quad i_x=\frac{2i_1-3i_2+5i_3}{6} \qquad (I)$$

$$kvl\ (B):\ v_1=i_1+2\left(i_3-i_x+i_1\right)$$

با جایگذاری رابطهٔ (I) در رابطهٔ فوق داریم:

$$v_1=i_1+2\left(i_3-\frac{2i_1--3i_2+5i_3}{6}+i_1\right)$$

$$v_1=\frac{7}{3}\ i_1+i_2+\frac{1}{3}\ i_3 \qquad (II)$$

$$kvl\ (c):\ v_2=2i_2-3\left(i_3-i_x-i_2\right)$$

$$v_2=5i_2-3i_3+3i_x$$

با جایگذاری رابطهٔ (I) در رابطهٔ فوق داریم:

$$v_2=5i_2-3i_3+\frac{2i_1-3i_2+5i_3}{2}$$

$$v_2=i_1+\frac{7}{2}\ i_2-\frac{1}{2}\ i_3 \qquad (III)$$

$$kvl\ (D):\ v_3=3i_3+i_x$$

$$v_3=3i_3+\frac{2i_1-3i_2+5i_3}{6}$$

$$v_3=\frac{1}{3}\ i_1-\frac{1}{2}\ i_2+\frac{23}{6}\ i_3 \qquad (IV)$$

حال با توجه به روابط (II) و (III) و (IV) میتوان نتیجه گرفت :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{23}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

ب) از رابطهٔ (IV) داریم:

$$i_2 = \frac{2}{3}\, i_1 - 2v_3 + \frac{23}{3}\, i_3 \qquad (V)$$

حال رابطهٔ (V) را در رابطهٔ (II) قرار می‌دهیم:

$$v_1 = \frac{7}{3}\, i_1 + \left(\frac{2}{3}\, i_1 - 2v_3 + \frac{23}{3}\, i_3 \right) + \frac{1}{3}\, i_3$$

$$\rightarrow \quad v_1 = 3i_1 - 2v_3 + 8i_3 \qquad (VI)$$

با جایگذاری رابطهٔ (V) در رابطهٔ (III) داریم:

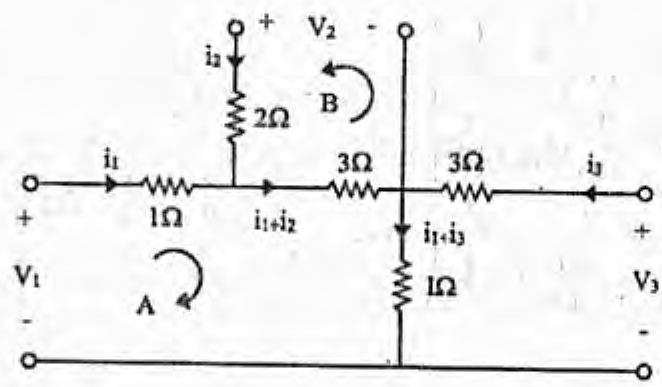
$$v_2 = i_1 + \frac{7}{2} \left(\frac{2}{3} i_1 - 2v_3 + \frac{23}{3}\, i_3 \right) - \frac{1}{2}\, i_3$$

$$\rightarrow \quad v_2 = \frac{10}{3}\, i_1 - 7v_3 + \frac{79}{3}\, i_3 \qquad (VII)$$

بنابه روابط (VI) و (VII) و (V) داریم:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 8 \\ \frac{10}{3} & -7 & \frac{79}{3} \\ \frac{2}{3} & -2 & \frac{23}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_3 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

پ)



$$kvl\,(A) : v_1 = i_1 + 3(i_1+i_2) + (i_1+i_3) = 5i_1 + 3i_2 + i_3$$

$$kvl\,(B) : v_2 = 2i_2 + 3(i_1+i_2) = 3i_1 + 5i_2$$

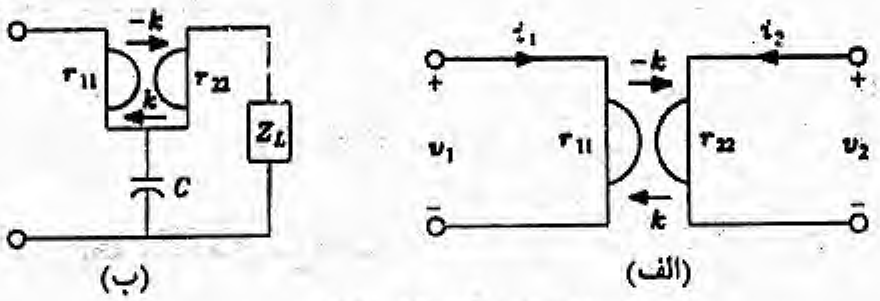
$$kvl\,(C) : v_3 = 3i_3 + (i_1+i_3) = i_1 + 4i_3 + 0 \times i_2$$

i_2 را برحسب i_1 و v_3 و i_3 نمی‌توان نوشت زیرا که ضریب i_2 در رابطهٔ بالا صفر می‌باشد بنابراین ماتریس خواسته شده وجود ندارد.

۳۲- ژیراتور غیر ایده‌آل را در حالت کلی با شکل (مسالهٔ ۱۷-۳۲) نشان داده و به صورت زیر توصیف می‌کنیم:

$$v_1 = r_{11} i_1 + k i_2$$
$$v_2 = -k i_1 + r_{22} i_2$$

امپدانس ورودی مدار نشان داده شده در شکل (مسالهٔ ۱۷-۳۲ ب) را تعیین کنید.



(ب) (الف)

شکل (مسألهٔ ۱۷-۳۲)

حل:

دوقطبی را بصورت شکل مقابل که سری دو دوقطبی و در خروجی موازی شده با امپدانس Z_L می‌باشد داریم:

برای شبکه N_1 می‌توان نوشت:

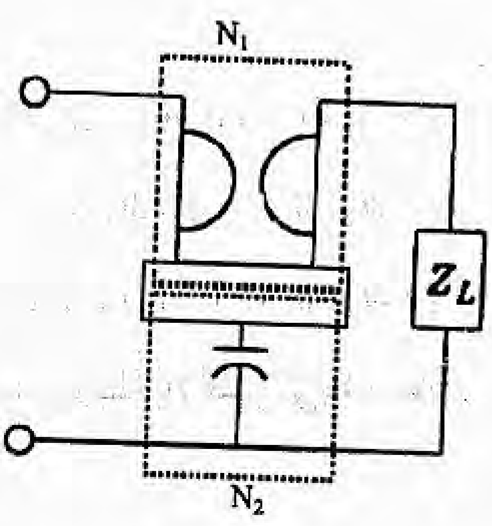
$$Z_1 = \begin{bmatrix} r_{11} & k \\ -k & r_{22} \end{bmatrix}$$

نیز برای شبکه N_2 داریم:

$$Z_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{cs} & \frac{1}{cs} \\ \frac{1}{cs} & \frac{1}{cs} \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} r_{11} + \frac{1}{cs} & k + \frac{1}{cs} \\ -k + \frac{1}{cs} & r_{22} + \frac{1}{cs} \end{bmatrix} \rightarrow Y = \begin{bmatrix} \frac{r_{22} + \frac{1}{cs}}{\Delta z} & \frac{-k - \frac{1}{cs}}{\Delta z} \\ \frac{k - \frac{1}{cs}}{\Delta z} & \frac{r_{11} + \frac{1}{cs}}{\Delta z} \end{bmatrix}$$

$$\Delta z = r_{11} r_{22} + \frac{1}{cs}\ r_{11} + \frac{1}{cs}\ r_{22} + k^2$$



$$Y_{eq} = \begin{bmatrix} \frac{r_{22} + \frac{1}{cs}}{\Delta z} & \frac{-k - \frac{1}{cs}}{\Delta z} \\ \frac{k - \frac{1}{cs}}{\Delta z} & \frac{r_{11} + \frac{1}{cs}}{\Delta z} + \frac{1}{Z_L} \end{bmatrix}$$

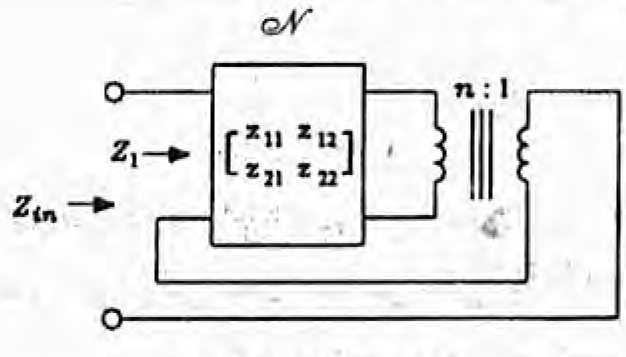
$$Z_{11eq} = \frac{\dfrac{r_{11} + \frac{1}{cs}}{r_{11} r_{22} + \frac{1}{cs}\ r_{11} + \frac{1}{cs}\ r_{22} + k^2} + \frac{1}{z_L}}{\Delta y_{eq}}$$

$$\Delta y_{eq}=\frac{1}{r_{11}r_{22}+\frac{1}{cs}\ r_{11}+\frac{1}{cs}r_{22}+k^2}\left(1+\frac{r_{22}}{z_L}+\frac{1}{z_L cs}\right)$$

$$Z_{11eq}=\frac{r_{11}z_L+\frac{z_L}{cs}+r_{11}r_{22}+\frac{1}{cs}\ r_{11}+\frac{1}{cs}\ r_{22}+k^2}{z_L+r_{22}+\frac{1}{cs}}$$

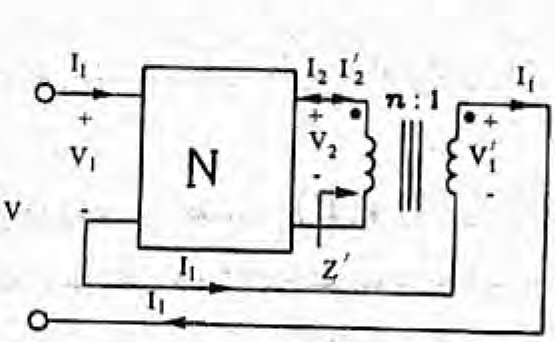
$$Z_{11eq}=\frac{cs\left(r_{11}z_L+r_{11}r_{22}+k^2\right)+\left(r_{11}+r_{22}+z_L\right)}{1+cs\left(z_L+r_{22}\right)}$$

۳۳-الف- دوقطبی N با پارامترهای z داده شده است. این دوقطبی را به کمک یک ترانسفورماتور ایده‌آل به صورت نشان داده شده در شکل (مسالهٔ ۱۷-۳۳) به یک یک قطبی تبدیل می‌کنیم.
امپدانس‌های ورودی Z_1 و Z_{in} را برحسب پارامترهای دوقطبی به دست آورید.
ب- امپدانس باری که به قطب دوم ورودی وصل است، چیست؟



شکل (مسألهٔ ۱۷-۳۳)

حل:
برای شبکه N داریم:



$$\begin{bmatrix}V_1\\V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z_{11}&z_{12}\\z_{21}&z_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix}\quad(I)$$

$$\frac{V_2}{V'_1}=n\quad(II)\qquad\frac{I_2}{I_1}=-\frac{1}{n}\quad(III)$$

از ماتریس (I) داریم:

$$V_1=z_{11}I_1+z_{12}I_2$$

با جایگذاری از (III) میتوان نوشت:

$$V_1=z_{11}I_1+z_{12}\left(\frac{-I_1}{n}\right)$$

$$V_1=\left(z_{11}-\frac{z_{12}}{n}\right)I_1\quad\rightarrow\quad\frac{V_1}{I_1}=z_{11}-\frac{z_{12}}{n}$$

بنابراین z_1 برابر است با:

$$\rightarrow\qquad z_1=z_{11}-\frac{z_{12}}{n}$$

از روابط (I) و (II) و رابطهٔ فوق داریم:

$$V=V_1-V_1'$$

$$V=(z_{11}I_1+z_{12}I_2)-\frac{1}{n}(z_{21}I_1+z_{22}I_2)$$

با جایگذاری رابطه (III) در رابطهٔ فوق داریم:

$$V=z_{11}I_1-z_{12}\frac{I_1}{n^2}-\frac{1}{n}\left(z_{21}I_1-z_{22}\frac{I_1}{n}\right)$$

$$\rightarrow\quad \frac{V}{I_1}=z_{11}+\frac{z_{22}}{n^2}-\frac{z_{12}+z_{21}}{n}$$

ب) Z' را امپدانس باری که به قطب دوم ورودی وصل است در نظر می‌گیریم:

$$Z'=\frac{V_2}{I_2'}\qquad\rightarrow\qquad Z'=\frac{V_2}{-I_2}\qquad(*)$$

ولی از رابطهٔ (I):

$$V_2=z_{21}I_1+z_{22}I_2$$

I_1 را برحسب I_2 می‌نویسیم و در رابطهٔ فوق قرار می‌دهیم:

$$V_2=z_{21}(-nI_2)+z_{22}I_2\qquad\rightarrow\qquad\frac{V_2}{I_2}=-nz_{21}+z_{22}$$

از رابطهٔ (*) و فوق داریم:

$$Z'=nz_{21}-z_{22}$$

۳۴- دوقطبی N را وقتی مبدل امپدانس منفی NIC (Negative Impedance Convertor) گویند که اگر امپدانس بار Z_L را در قطب دوم وصل کنیم، امپدانس دیده شده در قطب اول برابر $-Z_L$ باشد.

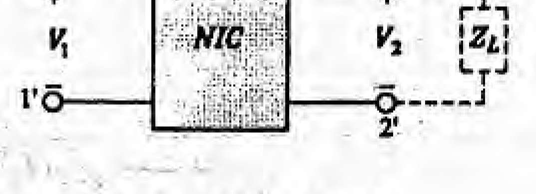
الف- فرض کنید دوقطبی N با پارامترهای h توصیف شود، یعنی

$$\begin{bmatrix}V_1\\I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h_{11}&h_{12}\\h_{21}&h_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\V_2\end{bmatrix}$$

امپدانس ورودی در قطب (1') و (1) را در حالت کلی وقتی که دوقطبی N به امپدانس بار Z_L مطابق شکل (مسالهٔ ۱۷-۳۴) ختم شود، برحسب پارامترهای h تعیین کنید. اکنون شرایطی را که N باید دارا باشد تا به صورت یک NIC عمل کند، برحسب پارامترهای h بیان کنید و از این رو نشان دهید که اگر N به صورت NIC باشد یک عنصر دوطرفه است، یعنی امپدانس بار Z_L را به هر قطب آن وصل کنیم، امپدانس دیده شده در قطب دیگر برابر $-Z_L$ خواهد بود.

ب- ماتریس انتقال یک NIC را برحسب پارامترهای h آن بنویسید.

پ- اکنون فرض کنید که شبکهٔ دوقطبی N با پارامترهای z توصیف شود. سپس شرایطی برحسب پارامترهای z به دست آورید که دوقطبی



شکل (مسألهٔ ۱۷-۳۴)

N به صورت NIC رفتار کند. از مقایسهٔ این نتایج بند (الف) توجیه کنید که چرا برای توصیف یک NIC پارامترهای h مناسب‌تر از پارامترهای z هستند.

حل:

از ماتریس H خواهیم داشت:

$$\begin{cases} V_1=h_{11}I_1+h_{12}V_2 \\ I_2=h_{21}I_1+h_{22}V_2 \end{cases} \quad (I)$$

مطابق شکل :

$$V_2=-I_2Z_L \qquad (II)$$

$$(I),(II) \rightarrow \begin{cases} V_1=h_{11}I_1+h_{12}(-I_2Z_L) \quad (II) \\ I_2=h_{21}I_1+h_{22}(-I_2Z_l) \rightarrow I_2=\dfrac{h_{21}}{1+h_{22}Z_L}\,I_1 \quad \overset{(III)}{\rightarrow} \end{cases}$$

$$V_1=h_{11}I_1-h_{12}Z_L\left(\frac{h_{21}}{1+h_{22}Z_L}\right)I_1$$

$$Z_{in}=\frac{V_1}{I_1}=\frac{h_{11}+(h_{11}h_{22}-h_{12}h_{21})Z_L}{1+h_{22}Z_L}$$

حال شرایطی که N باید دارا باشد تا بصورت یک NIC عمل نماید این است که $Z_{in}=-Z_L$ قرار دهیم:

$$Z_{in}=\frac{h_{11}+(h_{11}h_{22}-h_{12}h_{21})Z_L}{1+h_{22}Z_L}=-Z_L \rightarrow h_{11}+(h_{11}h_{22}-h_{12}h_{21}+1)Z_L+h_{22}Z_L^2\equiv 0$$

برای اینکه رابطهٔ بالا به ازای همهٔ Z_L ها برقرار باشد باید ضرایب چندجمله‌ایهای Z_L رامساوی صفر قرار دهیم:

$$h_{11}=0 \quad , \quad h_{11}h_{22}-h_{12}h_{21}+1=0 \quad , \quad h_{22}=0 \rightarrow h_{21}=\frac{1}{h_{12}}$$

حال ماتریس h عبارتست از :

$$H=\begin{bmatrix} 0 & h_{12} \\ \dfrac{1}{h_{12}} & 0 \end{bmatrix}$$

اگر $h_{12}=a$ فرض کنیم داریم: $H=\begin{bmatrix} 0 & a \\ \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}$ حال برای اثبات دوطرفه بودن میتوان نوشت:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & a \\ \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad \overset{\Delta H=-1}{\rightarrow} G=\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & a \\ \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \begin{bmatrix} V_2 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a} \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس هایبرید بدست آمده از طرف دوم به طرف اول نیز همان شرایط NIC را داراست و اگر به طرف اول نیز بار Z_L را متصل کنیم از طرف دوم امپدانس Z_L- دیده خواهد شد.

ب - ماتریس انتقال عبارتست از:

$$\Delta H = -1 \quad \rightarrow \quad T = \begin{bmatrix} h_{12} & 0 \\ 0 & -h_{12} \end{bmatrix}$$

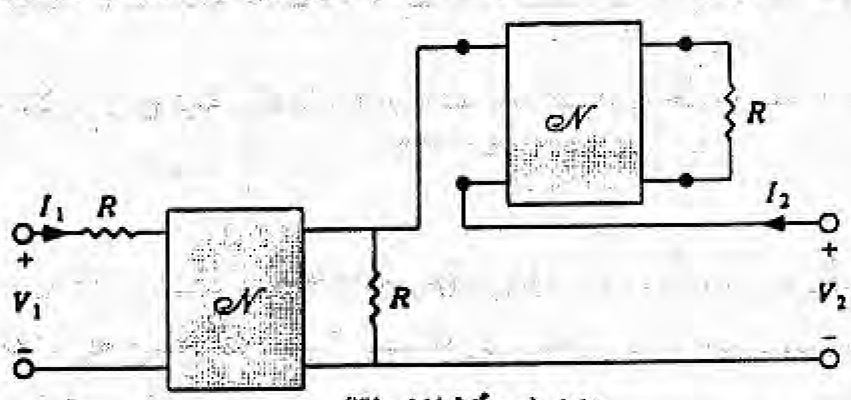
پ - از فرمول دوقطبی ختم شده خواهیم داشت :

$$\left. \begin{aligned} Z_{in} &= \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22}+Z} \\ Z_{in} &= -Z_L \end{aligned} \right\} \quad \rightarrow \quad -Z_L = \frac{Z_{11}Z_{22}+Z_{11}Z_L-Z_{12}Z_{21}}{Z_{22}+Z_L}$$

$$\rightarrow \quad Z_L^2 + (Z_{11}+Z_{22})Z_L + Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} = 0$$

با توجه به بند (الف) مساله پارامترهای هایبرید بدست آمده برای یک NIC مستقل از بار Z_L می‌باشد و به ازای هر بار Z_L صادق است در حالیکه برای بند (پ) مساله شرایط بدست آمده برای پارامترهای Z را نمی‌توان مستقل از Z_L بدست آورد.

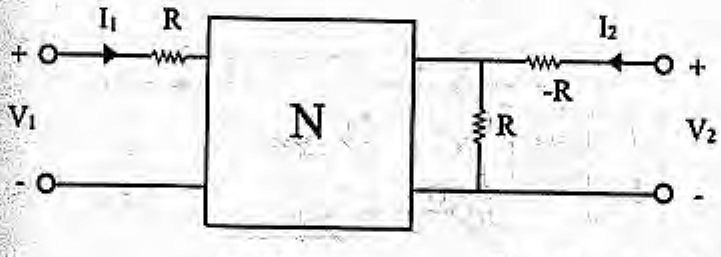
۳۵- فرض کنید دوقطبی N با پارامترهای h توصیف شده و به صورت NIC رفتار کند. تحت چه شرایطی دوقطبی نشان داده شده در شکل (مسالهٔ ۱۷-۳۵) مانند یک ژیراتور ایده‌آل رفتار خواهد کرد؟



حل:

شکل (مسألهٔ ۱۷-۳۵)

امپدانس دیده شده از دو سر دوقطبی دوم R- می‌باشد. بنابراین شکل بصورت زیر ساده می‌شود.



(الف)

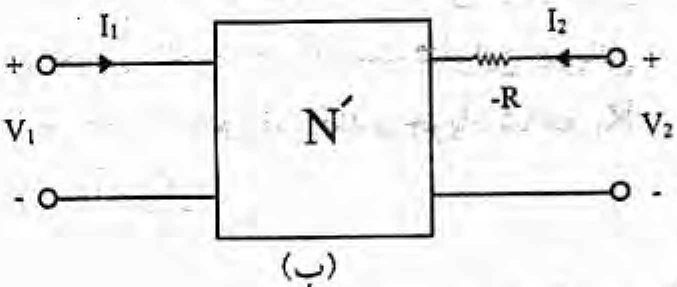
H دوقطبی عبارتست از :

$$H = \begin{bmatrix} 0 & h_{12} \\ \frac{1}{h_{12}} & 0 \end{bmatrix}$$

باتوجه به پارامترهای هایبرید بزرگ شده داریم:

$$H' = \begin{bmatrix} 0+R & h_{12} \\ \frac{1}{h_{12}} & 0+\frac{1}{R} \end{bmatrix}$$

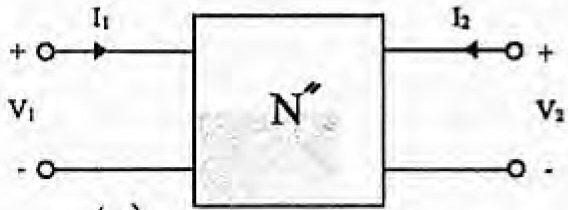
بنابراین شکل (الف) بصورت شکل (ب) ساده می‌گردد.



(ب)

$$\Delta H' = 0 \;\to\; Z' = \begin{bmatrix} 0 & R.h_{12} \\ -\dfrac{R}{h_{12}} & R-R \end{bmatrix}$$

با توجه به پارامترهای Z بزرگ شده داریم: (شکل (ج) حاصل می‌گردد.)



(ج)

$$Z'' = \begin{bmatrix} 0 & R.h_{12} \\ -\dfrac{R}{h_{12}} & R-R \end{bmatrix}$$

$$\to \qquad Z'' = \begin{bmatrix} 0 & R.h_{12} \\ -\dfrac{R}{h_{12}} & 0 \end{bmatrix}$$

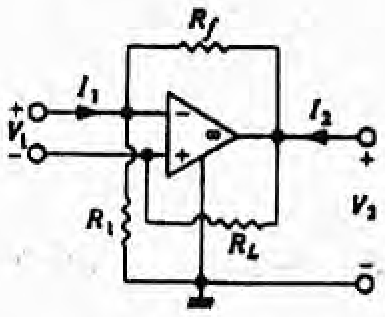
اما برای یک ژیراتور داریم:

$$Z'' = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

با مقایسه دو رابطه اخیر باید $Rh_{12} = \dfrac{R}{h_{12}}$ برقرار باشد تا کل دوقطبی مانند یک ژیراتور ایده‌آل رفتار کند یا به عبارتی دیگر:

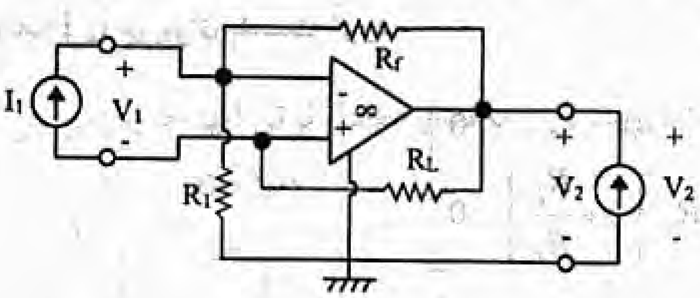
$$\frac{1}{h_{21}} = h_{12} = \pm 1 \qquad \to \qquad h_{12} = h_{21} = \pm 1$$

۳۶- در دوقطبی نشان داده شده در شکل (مسالهٔ ۱۷-۳۶) هر یک از 6 توصیف مشخص سازی دوقطبی را که وجود داشته باشد، به دست آورید.



شکل (مسألهٔ ۱۷-۳۶)

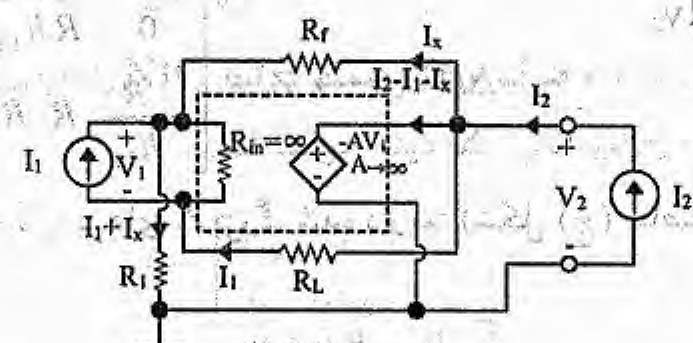
حل: برای پیدا نمودن ماتریس امپدانس منابع جریان I_1، و I_2 رامطابق شکل متصل می‌کنیم:



(الف)

از مدار معادل آپ‌امپ استفاده می‌کنیم بنابراین شکل (ب) حاصل می‌شود.

توجه شود که $R_{in}=\infty$ است بنابراین جریانی از شاخه R_{in} عبور نمی‌کند و جریان شاخه R_L برابر I_1 می‌گردد.



(ب)

$$V_2=-AV_1 \quad , \quad V_2=\text{محدود}, \qquad A=\infty \quad \Rightarrow \quad V_1\equiv 0$$

$$\rightarrow \qquad Z_{11}I_1+Z_{12}I_2=V_1\equiv 0 \qquad \rightarrow \qquad Z_{11}=Z_{12}=0$$

$$kvl\ : V_2=R_LI_1-V_1+R_1I_{R1} \xrightarrow{V_1=0} V_2=R_LI_1+R_1\,(I_1+I_x) \qquad (I)$$

$$kvl\ : V_2=R_fI_x+R_1\,(I_1+I_x)=(R_f+R_1)I_x+R_1I_1 \quad \rightarrow$$

$$I_x=\frac{V_2-R_1I_1}{R_f+R_1} \qquad (II)$$

$$(I),(II) \quad \rightarrow \quad V_2=R_LI_1+R_1I_1+R_1\frac{V_2-R_1I_1}{R_f+R_1}$$

$$\rightarrow \ V_2=\left[R_L+R_1\left(1+\frac{R_L}{R_f}\right)\right]I_1 \quad \rightarrow$$

بنابراین:
$$Z_{21}=R_L+R_1\left(1+\frac{R_L}{R_f}\right) \qquad Z_{22}=0$$

با توجه به جدول ۱۷-۱ صفحهٔ ۴۷۸ فقط T را می‌توان بدست آورد.

$$Z=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ R_L+R_1\left(1+\frac{R_L}{R_f}\right) & 0 \end{bmatrix} \qquad \Delta Z=0 \quad \rightarrow$$

$$T=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{R_L+R_1\left(1+\frac{R_L}{R_f}\right)} & 0 \end{bmatrix}$$