پاسخ تمرین ۵

۱) معادله دیفرانسیل چند مدار در ادامه ارائه شده است. x ورودی مدار و y خروجی آن است. پاسخ‌ضربه و پاسخ‌پله هریک را بدون استفاده از تبدیل لاپلاس بدست آورید. (۳۰ نمره)

الف) $d^2y/dt^2 + 2dy/dt + y = d^2x/dt^2$

$s^2+2s+1=0 \Rightarrow s=-1$ تکراری

پاسخ ضربه $h(t)=(K_1+K_2t)e^{-t}u(t)+A\delta(t) \longrightarrow h'(t)=(K_2-K_1-K_2t)e^{-t}u(t)+K_1\delta(t)+A\delta'(t)$

$\rightarrow h''(t)=(-K_2-K_2+K_1+K_2t)e^{-t}u(t)+(K_2-K_1)\delta(t)+K_1\delta'(t)+A\delta''(t)$

$\Rightarrow h''(t)+2h'(t)+h(t)=\delta''(t) \Rightarrow \begin{cases}A+2K_1+K_2-K_1=0\\2A+K_1=0\\A=1\end{cases} \Rightarrow K_1=-2 \Rightarrow K_2=1$

$\Rightarrow h(t)=(t-2)e^{-t}u(t)+\delta(t) \Rightarrow S(t)=(\alpha+\beta t)e^{-t}u(t)$ پاسخ پله

$s'(t)=(\beta-\alpha-\beta t)e^{-t}u(t)+\alpha\delta(t) \Rightarrow \begin{cases}\alpha=1\\\beta=-1\end{cases} \Rightarrow S(t)=(1-t)e^{-t}u(t)$

ب) $3d^2y/dt^2 + 4dy/dt + y = dx/dt + 2x$

$3s^2+4s+1=0 \Rightarrow s_1=-1,\ s_2=-1/3$

$h(t)=(K_1e^{-t}+K_2e^{-t/3})u(t) \longrightarrow h'(t)=(-K_1e^{-t}-K_2/3\, e^{-t/3})u(t)+(K_1+K_2)\delta(t)$

$\rightarrow h''(t)=(K_1e^{-t}+K_2/9\, e^{-t/3})u(t)+(-K_1-K_2/3)\delta(t)+(K_1+K_2)\delta'(t)$

$\Rightarrow 3h''(t)+4h'(t)+h(t)=\delta'(t)+2\delta(t) \Rightarrow \begin{cases}3(-K_1-K_2/3)+4(K_1+K_2)=2\\3(K_1+K_2)=1\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}K_1=-1/2\\K_2=5/6\end{cases} \Rightarrow h(t)=\left(-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{5}{6}e^{-t/3}\right)u(t) \Rightarrow S(t)=(\alpha+\beta e^{-t}+\gamma e^{-t/3})u(t)$

$\Rightarrow s'(t)=\left(-\beta e^{-t}-\frac{\gamma}{3}e^{-t/3}\right)u(t)+(\alpha+\beta+\gamma)\delta(t) \Rightarrow \begin{cases}\alpha=2\\\beta=1/2\\\gamma=-5/2\end{cases}$

$\Rightarrow s(t)=\left(2+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{5}{2}e^{-t/3}\right)u(t)$

پ) $d^2y/dt^2 + 5dy/dt + 6y = d^2x/dt^2 + dx/dt + x$

$s^2+5s+6=0 \Rightarrow s=-2,\ s=-3$

$h(t)=(K_1e^{-2t}+K_2e^{-3t})u(t)+A\delta(t) \longrightarrow h'(t)=(-2K_1e^{-2t}-3K_2e^{-3t})u(t)+(K_1+K_2)\delta(t)+A\delta'(t)$

$\rightarrow h''(t)=(4K_1e^{-2t}+9K_2e^{-3t})u(t)+(-2K_1-3K_2)\delta(t)+(K_1+K_2)\delta'(t)+A\delta''(t)$

$\Rightarrow h''(t)+5h'(t)+6h''(t)=\delta''(t)+\delta'(t)+\delta(t) \Rightarrow \begin{cases}A=1\\K_1+K_2+5A=1\\-2K_1-3K_2+5K_1+5K_2+6A=1\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}K_1=3\\K_2=-7\end{cases} \Rightarrow h(t)=(3e^{-2t}-7e^{-3t})u(t)+\delta(t)$

$\rightarrow S(t)=(\alpha+\beta e^{-2t}+\gamma e^{-3t})u(t) \Rightarrow s'(t)=(-2\beta e^{-2t}-3\gamma e^{-3t})u(t)+(\alpha+\beta+\gamma)\delta(t)$

$\Rightarrow \begin{cases}\alpha=1/6\\\beta=-3/2\\\gamma=7/3\end{cases} \Rightarrow S(t)=\left(1/6-\frac{3}{2}e^{-2t}+7/3\, e^{-3t}\right)u(t)$