# تشریح مسایل نظریه اساسی مدارها و شبکه ها

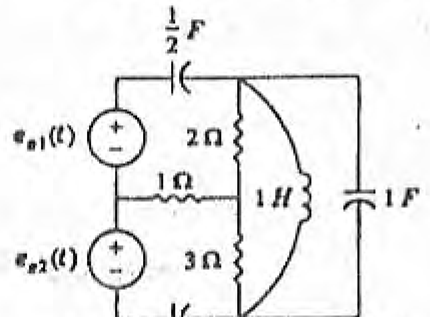
# ۱۲

## معادلات حالت

**۱۲**

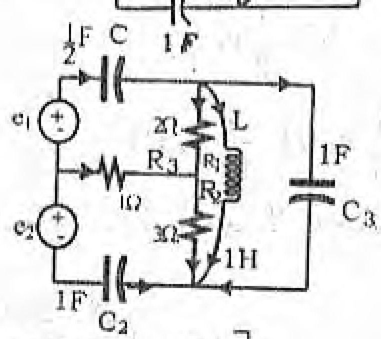
# معادلات حالت

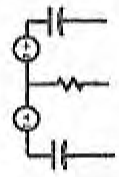
۱- معادلات حالت را برای مدار شکل (مسالهٔ ۱۲-۱) بنویسید. جریان گذرنده از مقاومت یک اهمی را برحسب متغیرهای حالت ورودی ها بیان کنید.




حل:

درخت زیر را انتخاب می‌کنیم چون $C_1$ و $C_2$ و $C_3$ به همراه منابع ولتاژ $e_1$ و $e_2$ تشکیل کات حلقه خازنی ست می‌دهند پس $v_{C_3}$ بعنوان متغیر حالت در نظر گرفته نمی‌شود.



$$\left[v_{C_3}=e_{s_1}+e_{s_2}-v_{C_1}+v_{C_2}\right]$$

$KVL$ در حلقهٔ مربوط به سلف : $L\dot{i}_L=-v_{C_1}+v_{C_2}+e_{s_1}(t)+e_{s_2}(t)$ $\qquad (I)$

$KCL$ در کات ست مربوط به خازن $C_1$ : $C_1\dot{v}_{C_1}=i_{R_1}+i_L+i_{C_3}$ $\qquad (II)$

$KCL$ در کات ست مربوط به خازن $C_2$ : $C_2\dot{v}_{C_2}=-i_{R_2}-i_L-i_{C_3}$ $\qquad (III)$

حال باید در معادلات فوق $i_{C_3}$ ، $i_{R_1}$ و $i_{R_2}$ را برحسب متغیرهای حالت نوشت. اگر خازن $C_1$ و $C_2$ و مقاومت $R_3$ را به عنوان یک کات ست در نظر بگیریم و $KCL$ را در آن بنویسیم داریم:

$$v_{R_3}=-i_{C_1}-i_{C_2} \Rightarrow v_{R_3}=-R_3 \Rightarrow \left(i_{C_1}+i_{C_2}\right)$$

از $KVL$ در حلقه‌های مربوط به مقاومتهای $R_1$ و $R_2$ در درخت فوق داریم:

$$v_{R_1}=-v_{C_1}+v_{R_3}+e_1 \quad \Rightarrow \quad i_{R_1}=\frac{-v_{C_1}}{R_1}-\frac{R_3}{R_1}\left(i_{C_1}+i_{C_2}\right)+\frac{e_1}{R_1}$$

$$v_{R_2}=v_{C_2}-v_{R_3}+e_2 \quad \Rightarrow \quad i_{R2}=\frac{v_{C_2}}{R_2}+\frac{R_3}{R_2}\left(i_{C_1}+i_{C_2}\right)+\frac{e_2}{R_2}$$

حال با جایگزین کردن مقادیر داریم:

$$i_{R_1}=-\frac{v_{C_1}}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\dot{v}_{C_1}+\dot{v}_{C_2}\right)+\frac{e_1}{2}$$

$$i_{R_2}=\frac{v_{C_2}}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{v}_{C_1}+\dot{v}_{C_2}\right)+\frac{e_2}{3}$$

حال دو معادله اخیر به دست آمده را در معادلات $II$ و $III$ قرار می‌دهیم سپس از حل دو معادله دو مجهولی بدست آمده عبارات $\dot{V}_{C1}$ و $\dot{V}_{C2}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} \frac{7}{4}\dot{v}_{C_1}-\frac{1}{2}\dot{v}_{C_2}=-\frac{v_{C_1}}{2}+i_L+\frac{e_{s_1}(t)}{2}+\dot{e}_{s_1}(t)+\dot{e}_{s_2}(t) \\ -\frac{5}{6}\dot{v}_{C_1}+\frac{7}{3}\dot{v}_{C_2}=-\frac{v_{C_2}}{3}-i_L-\frac{e_{s_2}(t)}{3}-\dot{e}_{s_1}(t)-\dot{e}_{s_2}(t) \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق داریم:

$$\begin{cases} \dot{v}_{C_1}=-\frac{7}{22}v_{C_1}-\frac{1}{22}v_{C_2}+\frac{1}{2}i_L+\frac{7}{22}e_{s_1}(t)-\frac{1}{22}e_{s_2}(t)+\frac{1}{2}\dot{e}_{s_1}(t)+\frac{1}{2}\dot{e}_{s_2}(t) \\ \dot{v}_{C_2}=-\frac{5}{44}v_{C_1}-\frac{7}{44}v_{C_2}-\frac{1}{4}i_L+\frac{5}{44}e_{s_1}(t)-\frac{7}{44}e_{s_2}(t)-\frac{4}{11}\dot{e}_{s_1}(t)-\frac{4}{11}\dot{e}_{s_2}(t) \\ i_L=-v_{C_1}+v_{C_2}+e_{s_1}(t)+e_{s_2}(t) \end{cases}$$

بدین ترتیب معادلات فوق معادلات حالت مدار می‌باشند.

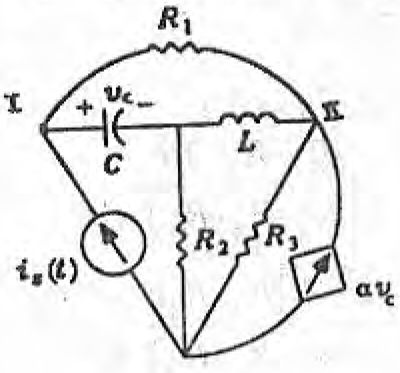
همانطوری که می‌دانیم:

$$i_{R_3}=-i_{C_1}-i_{C_2} \quad \Rightarrow \quad i_{R_3}=-\frac{1}{2}\dot{v}_{C_1}-\dot{v}_{C_2}$$

از روابط فوق عبارات $\dot{V}_{C_1}$ و $\dot{V}_{C_2}$ را جایگزین می‌کنیم و داریم:

$$i_{R_3}=\frac{3}{11}v_{C_1}+\frac{2}{11}v_{C_2}-\frac{3}{11}e_{s_1}(t)+\frac{2}{11}e_{s_2}(t)-\frac{7}{44}\dot{e}_{s_1}(t)-\frac{7}{44}\dot{e}_{s_2}(t)$$

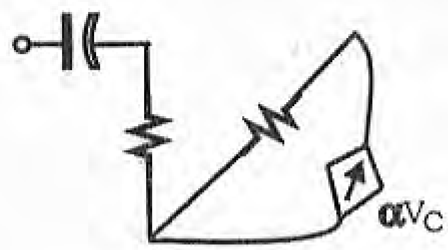
۳- معادلات حالت مدار شکل (مسالهٔ ۱۲-۳) را بنویسید. جریان گذرنده از مقاومت $R_3$ را برحسب متغیرهای حالت و ورودی بیان کنید.




شکل (مسألهٔ ۱۲-۳)

حل:

درخت زیر را انتخاب می‌کنیم.




$KCL: \ i_C = i_s(t) - i_{R_1}$

$KVL: \ v_L = v_{R_2} - v_{R_3}$

حال باید $i_{R_1}$ و $v_{R_2}$ و $v_{R_3}$ را برحسب متغیرهای حالت یعنی $v_C$ و $i_L$ نوشت.

$KVL: \ -v_{R_2} - v_C + v_{R_1} + v_{R_3} = 0 \qquad (I) \quad \Rightarrow \quad v_{R_1} - v_{R_2} + v_{R_3} = v_C$

در کات ست $KCL: i_{R_2} = i_s(t) - i_{R_1} - i_L \quad \Rightarrow \quad v_{R_2} = R_2 i_s(t) - R_2 i_{R_1} - R_2\, i_L \quad (II)$

در گره $(II)$ $KCL: i_{R_1} - i_{R_3} + i_L + \alpha v_C = 0 \qquad (III)$

حال رابطه $II$ را در رابطه $I$ قرار می‌دهیم تارابطه حاصل با رابطه $(III)$ یک دستگاه دو معادله دو مجهولی تشکیل دهند.

$$\begin{cases} (R_1+R_2)\ i_{R_1} + R_3 i_{R_3} = v_C + R_2 i_s(t) \\ i_{R_1} - i_{R_3} = -i_L - \alpha v_C \end{cases}$$

از حل دو معادله دو مجهولی فوق داریم:

$$i_{R_1} = \frac{(1-\alpha R_3)}{R_1+R_2+R_3} v_C - \frac{R_3}{R_1+R_2+R_3} i_s(t)$$

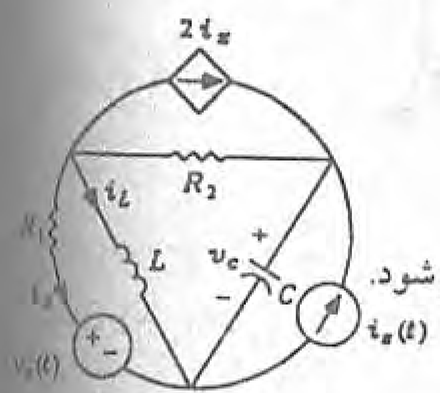
$$i_{R_3} = \frac{1+\alpha\ (R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3} v_C + i_L - \frac{R_3}{R_1+R_2+R_3}\, i_s(t)$$

حال با جایگزینی روابط معادلات حالت بوجود می‌آیند:

$$\dot{v}_C = \frac{\alpha R_3 - 1}{(R_1+R_2+R_3)\ C} v_C + \frac{R_1+R_2+2R_3}{(R_1+R_2+R_3)\ C} i_s(t)$$

$$\dot{i}_L=\frac{R_3-R_2+\alpha\ (R_1R_3+2R_2R_3)}{(R_1+R_2+R_3)\ L}v_C+\frac{(R_3-R_2)}{L}i_L+\frac{R_2^2-R_3^2+R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{(R_1+R_2+R_3)\ L}\ i_s(t)$$

$$\begin{bmatrix}\dot{v}_C\\ \dot{i}_L\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\alpha R_3-1}{(R_1+R_2+R_3)\ L} & 0\\ \dfrac{R_3-R_2+\alpha\ (R_1R_3+2R_2R_3)}{L\ (R_1+R_2+R_3)} & \dfrac{R_3-R_2}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_C\\ i_L\end{bmatrix}+i_s(t)\begin{bmatrix}\dfrac{R_1+R_2+2R_3}{(R_1+R_2+R_3)\ C}\\ \dfrac{R_2^2-R_3^2+R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{(R_1+R_2+R_3)\ L}\end{bmatrix}$$



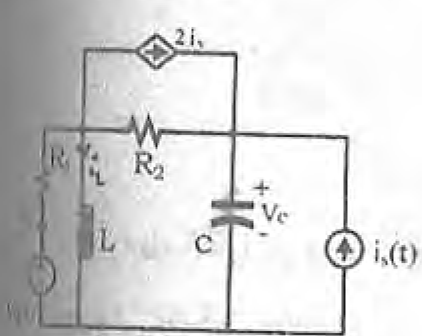

۴- معادلات حالت مدار نشان داده شده در شکل (مسالهٔ ۱۲-۴) را بنویسید و خروجی $i_x$ را برحسب متغیرهای حالت بیان کنید.

حل:

اول توپولوژی مدار را به صورت زیر عوض می‌کنیم تا محاسبات راحت‌تر شود.

$$(II)\ \text{در گره}\ KCL: C\dot{v}_C=i_s(t)+2i_x+i_{R_2}$$

$$KVL:\ L\dot{I}_L=R_1i_x+v_s(t)$$




حال باید در معادلات فوق $i_{R_2}$ و $i_x$ را برحسب متغیرهای حالت بنویسیم:

$$(I)\ \text{در گره}\ KCL:\ 3i_x+i_L+i_{R_2}=0 \qquad (I)$$

حال خود $i_x$ را نیز محاسبه می‌کنیم.

$$i_x=\frac{v_L-v_s(t)}{R_1} \qquad v_L=v_C+R_2i_{R_2}$$

$$i_x=-\frac{v_s(t)}{R_1}+\frac{v_C}{R_1}+\frac{R_2}{R_1}\ i_{R_2} \qquad (II)$$

روابط $(I)$ و $(II)$ دو معادله دو مجهولی هستند که می‌توان با حل آنها $i_x$ و $i_{R_2}$ را برحسب متغیرهای حالت و ورودی ها نوشت.

$$\begin{cases}3i_x+i_{R_2}=-i_L\\ i_x-\dfrac{R_2}{R_1}\ i_{R_2}=\dfrac{v_C-v_s(t)}{R_1}\end{cases}$$

از حل دستگاه دو معادله دو مجهولی فوق داریم:

$$\begin{cases} i_{R_2} = \dfrac{-3v_C + 3v_s(t) - R_1 i_L}{R_1 + 3R_2} \\ i_x = \dfrac{-v_s(t) + v_C - R_2 i_L}{R_1 + 3R_2} \end{cases}$$

$$C\dot{v}_C = i_s(t) + \frac{2}{R_1+3R_2}\, v_C - \frac{2}{R_1+3R_2}\, v_s(t) - \frac{2R_2}{R_1+3R_2}\, i_L + \frac{3v_s(t)}{R_1+3R_2} - \frac{3v_C}{R_1+3R_2} - \frac{R_1}{R_1+3R_2}\, i_L$$

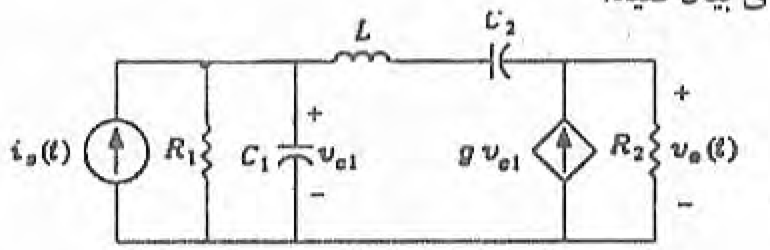
$$L\dot{i}_L = \frac{R_1}{R_1-3R_2}\, v_C - \frac{R_1}{R_1-3R_2}\, v_s(t) - \frac{R_1R_2}{R_1-3R_2}\, i_L + v_s(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{C\ (R_1+3R_2)} & -\dfrac{2R_2+R_1}{C\ (R_1+3R_2)} \\ \dfrac{R_1}{L\ (R_1+3R_2)} & \dfrac{-R_1R_2}{L\ (R_1+3R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C\ (R_1+3R_2)} & 1 \\ \dfrac{-3R_2}{L\ (R_1+3R_2)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s(t) \\ i_s(t) \end{bmatrix}$$

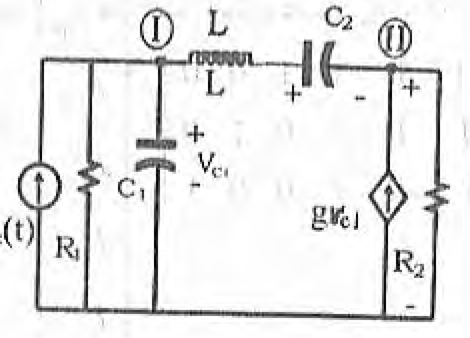
$$i_x = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1+3R_2} & \dfrac{-R_2}{R_1+3R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \frac{-1}{R_1+3R_2}\, v_s(t)$$

۵- معادلات حالت مدار شکل (مسالهٔ ۱۲-۵) را به صورت ماتریسی بنویسید و ولتاژ خروجی $v_o$ را به صورت ترکیب خطی متغیرهای حالت ورودی بیان کنید.

حل:




شکل (مسالهٔ ۱۲-۵)




$$KCL: \frac{v_{C_1}}{R_1} + C_1\dot{v}_1 + i_L = i_s(t)$$

$$C_2\dot{v}_2 = i_L$$

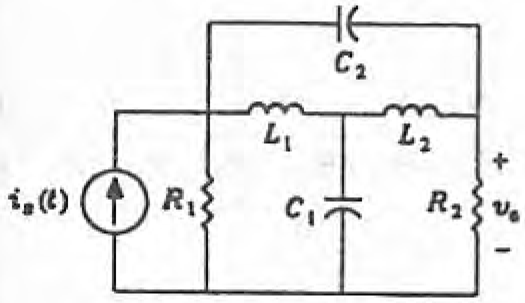
$$KVL: v_{R_2} + v_{C_2} + v_L = v_{C_1} \qquad v_{R_2} = \left(i_L + g v_{C_1}\right) R_2$$

$$R_2 g v_{C_1} + R_2 I_L + v_{C_2} + L\dot{i}_L - v_{C_1} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{C_1} \\ \dot{v}_{C_2} \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1C_1} & 0 & \dfrac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{C_2} \\ R_2 g - 1 & 1 & \dfrac{R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ i_L \end{bmatrix} + i_s(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

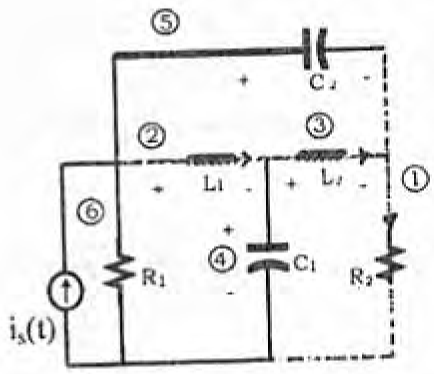
$$v_{R_2}=\begin{bmatrix} R_2 g & 0 & i_L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ i_L \end{bmatrix}$$

۶- معادلات حالت را در مدار شکل (مسألهٔ ۱۲-۶) بنویسید (بااستفاده از روش منظم). ولتاژ خروجی $v_o$ را برحسب متغیرهای حالت ورودی بیان کنید.




شکل (مسألهٔ ۱۲-۶)

حل:




$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{R_2} \\ v_{L_1} \\ v_{L_2} \\ v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ v_{G_1} \end{bmatrix} \qquad -F^T=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{F}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j_{R_2} \\ j_{L_1} \\ j_{L_2} \\ j_{C_1} \\ j_{C_2} \\ j_{G_1} \end{bmatrix}=0$$

معادلات شاخه را می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{lll} v_{R_2}=R_2 j_{R_2} & v_{L_1}=L_1\dfrac{d}{dt}j_{L_1} & v_{L_2}=L_2\dfrac{d}{dt}j_{L_2} \\ j_{C_1}=C_1\dfrac{d}{dt}V_{C_1} & j_{C_2}=C_2\dfrac{d}{dt}V_{C_2} & j_{G_1}=G_1 v_{G_1}+i_s(t) \end{array}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} v_{R_2} \\ v_{L_1} \\ v_{L_2} \end{bmatrix} = -F \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ v_{G_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ v_{G_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} j_{C_1} \\ j_{C_2} \\ j_{G_1} \end{bmatrix} = F^T \begin{bmatrix} j_{R_2} \\ j_{L_1} \\ j_{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{R_2} \\ j_{L_1} \\ jL_2 \end{bmatrix}$$

حال روابط فوق را به طور زیر مرتب می‌کنیم یعنی روابط $BV=0$ و $QJ=0$ را با روابط شاخه ترکیب می‌کنیم.

$$\begin{cases} j_{R_2}R_2 = -v_{C_2} + v_{G_1} \\ L_1 \dfrac{d}{dt} j_{L_1} = -v_{C_1} + v_{G_1} \\ L_2 \dfrac{d}{dt} j_{L_2} = v_{C_1} + v_{C_2} - v_{G_1} \\ C_1 \dfrac{d}{dt} v_{C_1} = j_{L_1} - j_{L_2} \\ C_2 \dfrac{d}{dt} v_{C_2} = j_{R_2} - j_{L_2} \\ G_1 v_{G_1} = -j_{R_2} - jL_1 + j_{L_2} - i_s(t) \qquad (VI) \end{cases}$$

$v_{G_1}$ و $j_{R_2}$ در روابط فوق باید حذف شوند.

از روابط 5 و 6 برای حذف آنها استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} v_{G_1} - j_{R_2}R_2 = v_{C_2} \\ G_1 v_{G_1} + j_{R_2} = -j_{L_1} + j_{L_2} - i_s(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{G_1} - j_{R_2}R_2 = v_{C_2} \\ R_2G_1 v_{G_1} + R_2 j_{R_2} = -R_2 j_{L_1} + R_2 j_{L_2} - R_2 i_s(t) \end{cases}$$

$$(1 + R_2G_1)\ v_{G_1} = v_{C_2} - R_2 j_{L_1} + R_2 j_{L_2} - R_2 i_s(t)$$

$$v_{G_1} = \frac{1}{1+R_2G_1} v_{C_2} - \frac{R_2}{1+R_2G_1} j_{L_1} + \frac{R_2}{1+R_2G_1} j_{L_2} - \frac{R_2}{1+R_2G_1}\ i_s(t)$$

$$j_{R_2} = \frac{v_{G_1}}{R_2} - \frac{v_{C_2}}{R_2}$$

$$j_{R_2}=\frac{G_2}{1+R_2G_1}v_{C_2}-\frac{1}{1+R_2G_1}j_{L_1}+\frac{1}{1+R_2G_1}j_{L_2}-\frac{1}{1+R_2G_1}i_s(t)-\frac{v_{C_2}}{R_2}$$

حال معادلات را بصورت زیر بصورت ماتریسی می‌نویسیم.

$$L_1\dot{j}_{L_1}=-v_{C_1}+\frac{1}{R_2G_1+1}v_{C_2}-\frac{R_2}{1+R_2G_1}j_{L_1}+\frac{R_2}{1+R_2G_1}j_{L_2}-\frac{R_2}{1+R_2G_1}i_s(t)$$

$$L_2\dot{j}_{L_2}=v_{C_1}+v_{C_2}-\frac{1}{1+R_2G_1}v_{C_2}+\frac{R_2}{1+R_2G_1}j_{L_1}-\frac{R_2}{1+R_2G_1}i_S(t)$$

$$C_1\dot{v}_{C_1}=j_{L_1}-j_{L_2}$$

$$C_2\dot{v}_{C_2}=-\frac{1}{R_2\left(1+R_2G_1\right)}v_{C_2}+\frac{1}{1+R_2G_1}j_{L_1}-\frac{1}{1+R_2G_1}j_{L_2}+\frac{1}{1+R_2G_1}i_s(t)+\frac{v_{C_2}}{R_2}-j_{L_1}+j_{L_2}-i_s(t)$$

$$\begin{bmatrix}\dot{j}_{L_1}\\ \dot{j}_{L_2}\\ \dot{v}_{C_1}\\ \dot{v}_{C_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-R_2}{L_1(1+R_2G_1)} & \frac{R_2}{L_1(1+R_2G_1)} & -\frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_1(1+R_2G_1)}\\ \frac{R_2}{L_2(1+R_2G_1)} & \frac{-R_2}{L_2(1+R_2G_1)} & \frac{1}{L_2} & \frac{R_2G_1}{L_2(1+R_2G_1)}\\ \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_1} & 0 & 0\\ \frac{-R_2G_1}{C_2(1+R_2G_1)} & \frac{R_2G_1}{C_2(1+R_2G_1)} & 0 & \frac{1}{R_2C_2}-\frac{1}{R_2C_2(1+R_2G_1)}\end{bmatrix}$$

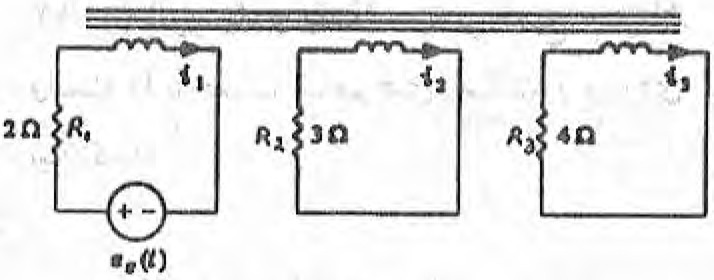
$$\begin{bmatrix}j_{L_1}\\ j_{L_2}\\ v_{C_1}\\ v_{C_2}\end{bmatrix}+i_s(t)\begin{bmatrix}\frac{-R_2}{1+R_2G_1}\\ \frac{R_2}{1+R_2G_1}\\ 0\\ \frac{R_2G_1}{1+R_2G_1}\end{bmatrix}$$

$$v_o=R_2\left(j_{L_2}+j_{C_2}\right)\qquad j_{C_2}=i_s(t)-j_{R_1}-j_{L_1}\qquad j_{R_1}=\frac{v_{C_1}}{R_1}$$

$$v_o=R_2j_{L_2}-R_2j_{L_1}-\frac{R_2}{R_1}v_{C_1}+R_2i_s(t)$$

$$v_o = \left[ -R_2 \;\; R_2 \;\; -\frac{R_2}{R_1} \;\; 0 \right] \begin{bmatrix} j_{L_1} \\ j_{L_2} \\ v_{C_1} \\ v_{C_2} \end{bmatrix} + i_s(t) \left[ R_2 \right]$$

۷- معادلات حالت را برای مدار شکل (مسالهٔ ۱۲-۷) بنویسید و آن را به صورت ماتریسی درآورید.




شکل (مسالهٔ ۱۲-۷)

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

حل:

$$KVL\ 1 \Rightarrow v_{L_1} = e_s(t) - v_{R_1} \Rightarrow L_{11}\dot{i}_1 + L_{12}\dot{i}_2 + L_{13}\dot{i}_3 = e_s(t) - R_1 i_1$$

$$KVL\ 2 \Rightarrow v_{L_2} = -v_{R_2} \Rightarrow L_{21}\dot{i}_1 + L_{22}\dot{i}_2 + L_{23}\dot{i}0_3 = -R_2 i_2$$

$$KVL\ 3 \Rightarrow v_{L_3} = -v_{R_3} \Rightarrow L_{31}\dot{i}_1 + L_{32}\dot{i}_2 + L_{33}\dot{i}_3 = -R_3 i_3$$

با مرتب کردن بصورت ماتریسی داریم.

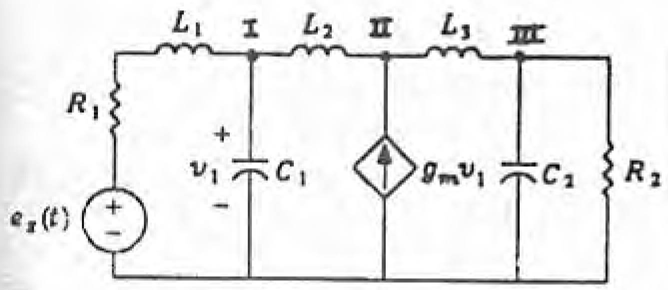
$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \\ \dot{i}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_s(t) - R_1 i_1 \\ -R_2 i_2 \\ -R_3 i_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \\ \dot{i}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_s(t) - R_1 i_1 \\ -R_2 i_2 \\ -R_3 i_3 \end{bmatrix} \qquad \Gamma = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \\ \dot{i}_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_s(t) - 2i_1 \\ -3i_2 \\ -9i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6e_s(t) - 12i_1 - 3i_2 + 27i_3 \\ e_s(t) - 2i_1 - 3i_2 \\ -3e_s(t) + 6i_1 - 18i_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\dot{i}_1\\ \dot{i}_2\\ \dot{i}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12 & -3 & 21\\ -2 & -3 & 0\\ 6 & 0 & -18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_1\\ i_2\\ i_3\end{pmatrix} + e_s(t)\begin{pmatrix}6\\ 1\\ -3\end{pmatrix}$$

۸- معادلات حالت را برای مدار شکل (مسالهٔ ۱۲-۸) بنویسید و ولتاژ دوسر منبع جریان وابسته را برحسب متغیرهای حالت و ورودی بیان کنید.




شکل (مسالهٔ ۱۲-۸)

حل:

اول تعداد متغیرهای حالت مدار را بدست می‌آوریم.

طبق $KCL$ در گره 2 داریم. $I_{L_3}=I_{L_2}+g_m V_1$

چون جریان سلف $L_3$ بوسیله دو متغیر $I_{L_2}$ و $V_1$ کنترل می‌شود در نتیجه $I_{L_3}$ نمی‌تواند بعنوان متغیر حالت در نظر گرفته شود پس مدار دارای چهار متغیر حالت $v_{C_1}$ و $v_{C_2}$ و $I_{L_1}$ و $I_{L_2}$ می‌باشد.

$$KCL\ I\ :\ C_1\dot{V}_{C_1}=I_{L_1}-I_{L_2}\ \Rightarrow\ \left[\dot{V}_{C_1}=\frac{1}{C_1}I_{L_1}-\frac{1}{C_1}I_{L_2}\right]\ (1)$$

$$KCL\ III\ :\ C_2\dot{V}_{C_2}=I_{L_3}-I_{R_2}=I_{L_2}+g_m V_{C_1}-\frac{V_{C_2}}{R_2}$$

$$\left[\dot{V}_{C_2}=\frac{1}{C_2}I_{L_2}+\frac{g_m}{C_2}V_{C_1}-\frac{1}{R_2C_2}V_{C_2}\right]\ (2)$$

حال از $KVL$ استفاده می‌کنیم.

$$KVL\ :\ V_{L_1}=e_s(t)-R_1-V_{C_1}=e_s(t)-R_1I_1-V_{C_1}L_1\dot{I}_{L_1}=e_s(t)-R_1I_{L_1}-V_{C_1}$$

$$\left[\dot{I}_{L_1}=\frac{1}{L_1}e_s(t)-\frac{R_1}{L_1}I_{L_1}-\frac{1}{L_1}V_{C_1}\right]\ (3)$$

$$KVL:\ V_{L_2}=V_{C_1}-V_{C_2}-V_{L_3}$$

حال باید $V_{L_3}$ را برحسب متغیرهای حالت بدست آوریم.

$$V_{L_3}=L_3\dot{I}_{L_3}=L_3\left(I_{L_2}+g_m V_{C_1}\right)'=L_3\dot{I}_{L_2}+L_3g_m\dot{V}_{C_1}$$

از رابطه 1 عبارت $\dot{V}_{C_1}$ را جایگزین می‌کنیم.

$$V_{L_3}=L_3\dot{I}_{L_2}+L_3g_m\left(\frac{1}{C_1}I_{L_1}-\frac{1}{C_2}I_{L_2}\right)=L_3\dot{I}_2+\frac{L_3g_m}{C_1}I_{L_1}-\frac{L_3g_m}{C_1}I_{L_2}$$

حال روابط را در $KVL$ بدست آمده جایگزین می‌کنیم.

$$L_2\dot{I}_{L_2}=V_{C_1}-V_{C_2}-L_3\dot{I}_2-\frac{L_3g_m}{C_1}I_{L_1}+\frac{L_3g_m}{C_1}I_{L_2}$$

$$(L_2+L_3)\,\dot{I}_{L_2}=V_C-V_{C_2}-\frac{L_3g_m}{C_1}I_{L_1}+\frac{L_3g_m}{C_1}I_{L_2}$$

$$\left[\dot{I}_{L_2}=\frac{1}{L_2+L_3}V_{C_1}-\frac{1}{L_2+L_3}V_{C_2}-\frac{L_3g_m}{C_1\,(L_2+L_3)}I_{L_1}+\frac{L_3g_m}{C_1\,(L_2+L_3)}I_{L_2}\right]\quad(4)$$

حال برای پیدا کردن ولتاژ مطلوب داریم.

$$V_{out}=V_{C_2}+V_{L_3}$$

$$I_3=g_mV_{C_1}+I_{L_2}\qquad L_3\dot{I}_{L_3}=g_m\dot{V}_{C_1}+L_3\dot{I}_{L_2}\quad\Rightarrow\quad V_{L_3}=L_3g_m\dot{V}_{C_1}+L_3\dot{I}_{L_2}$$

حال $\dot{V}_{C_1}$ و $\dot{I}_{L_2}$ را از روابط 1 و 4 جایگزین می‌کنیم.

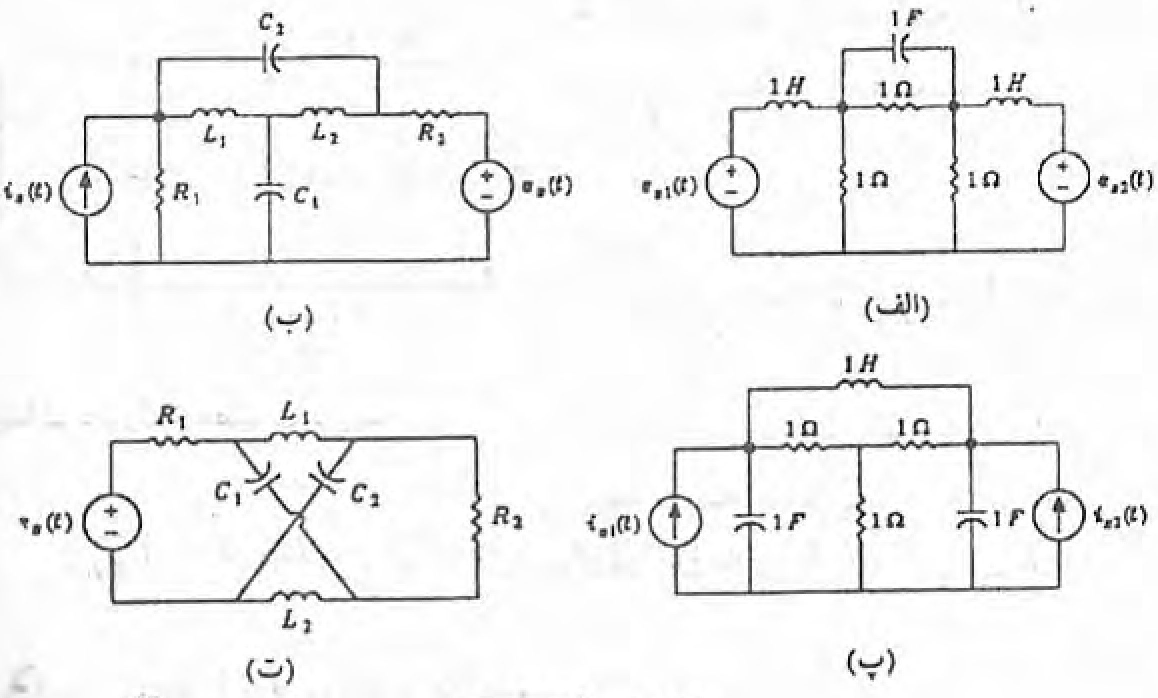
$$V_{L_3}=\frac{L_3g_m}{C_1}I_{L_1}-\frac{L_3g_m}{C_2}I_{L_2}+\frac{L_3}{L_2+L_3}V_{C_1}-\frac{L_3}{L_2+L_3}V_{C_2}-\frac{L_3^2g_m}{C_1\,(L_2+L_3)}I_{L_1}+\frac{L_3^2g_m}{C_1\,(L_2+L_3)}I_{L_2}$$

$$V_{out}=\frac{L_3}{L_2+L_3}V_{C_1}+\frac{L_2}{L_2+L_3}V_{C_2}+\left(\frac{L_3g_m}{C_1}-\frac{L_3^2g_m}{C_1\,(L_2+L_3)}\right)I_{L_1}+\left(\frac{L_3^2g_m}{C_1\,(L_2+L_3)}-\frac{L_3g_m}{C_2}\right)I_{L_2}$$

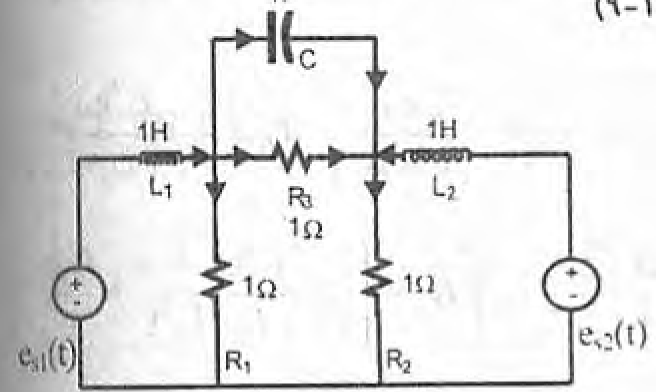
$$\begin{pmatrix}\dot{V}_{C_1}\\ \dot{V}_{C_2}\\ \dot{I}_{L_1}\\ \dot{I}_{L_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{C} & -\frac{1}{C}\\ \frac{g_m}{C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} & 0 & \frac{1}{C_2}\\ -\frac{1}{L_1} & 0 & -\frac{R_1}{L_1} & 0\\ \frac{1}{L_2+L_3} & \frac{-1}{L_2+L_3} & \frac{-L_3g_m}{C_1\,(L_2+L_3)} & \frac{L_3g_m}{C_1\,(L_2+L_3)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_{C_1}\\ V_{C_2}\\ I_{L_1}\\ I_{L_2}\end{pmatrix}+e_s(t)\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{L_1}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$V_{out} = \left[ \frac{L_3}{L_2+L_3} \quad \frac{L_2}{L_2+L_3} \quad \frac{L_3 g_m}{C_1} - \frac{L_3^2 g_m}{C_1\,(L_2+L_3)} \quad \frac{L_3^2 g_m}{C_1\,(L_2+L_3)} - \frac{L_3 g_m}{C_2} \right] \begin{bmatrix} V_{C_1} \\ V_{C_2} \\ I_{L_1} \\ I_{L_2} \end{bmatrix}$$

۹- معادلات حالت مدار نشان داده شده در شکل (مسالهٔ ۱۲-۹) را بنویسید.

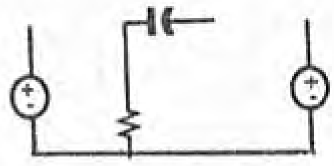



شکل (مسألهٔ ۱۲-۹)




حل:

الف- درخت زیر را اختیار می‌کنیم.



$$\begin{cases} i_C = i_{L_1} - i_{R_1} - i_{R_3} \quad (I) \qquad i_{R_3} = \dfrac{v_C}{R_3} \qquad i_{R_3} = v_C \\ v_{L_1} + v_{R_1} = e_{s_1}(t) \quad (II) \\ v_{L_2} - v_C + v_{R_1} = e_{s_2}(t) \quad (III) \end{cases}$$

حال باید $i_{R_1}$ که همان برابر $v_{R_1}$ می‌باشد را برحسب متغیرهای حالت نوشت. خازن $C$ و مقاومت $R_1$ را به عنوان یک ابر گره در نظر گرفته و یک $KCL$ در آن می‌نویسیم.

$$i_{L_1} + i_{L_2} = i_{R_1} + i_{R_2}$$

با نوشتن $KVL$ در حلقه وسط داریم.

$$v_{R_1}-v_{R_2}=v_C$$

$$\begin{cases} i_{R_1}+i_{R_2}=i_{L_1}+i_{L_2} \\ i_{R_1}-i_{R_2}=v_C \end{cases} \quad , \quad i_{R_1}=v_{R_1} \qquad i_{R_2}=v_{R_2}$$

با حل کردن دستگاه دو معادله دو مجهولی فوق داریم:

$$i_{R_1}=\frac{1}{2}v_C+\frac{1}{2}i_{L_1}+\frac{1}{2}i_{L_2} \qquad i_{R_2}=-\frac{1}{2}v_C+\frac{1}{2}i_{L_1}+\frac{1}{2}i_{L_2}$$

با جایگزین کردن روابط فوق در معادلات $(I)$ و $(II)$ و $(III)$ داریم:

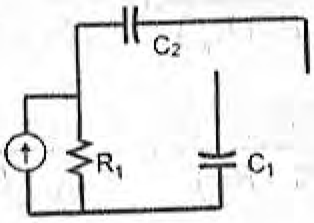
$$\dot{v}_C=-\frac{3}{2}v_C+\frac{1}{2}i_{L_1}-\frac{1}{2}i_{L_2}$$

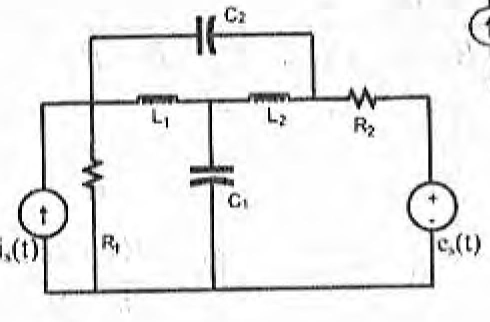
$$\dot{i}_{C_1}=-\frac{1}{2}v_C-\frac{1}{2}i_{L_1}-\frac{1}{2}i_{L_2}+e_{s_1}(t)$$

$$\dot{i}_{L_2}=\frac{1}{2}v_C-\frac{1}{2}i_{L_1}-\frac{1}{2}i_{L_2}+e_{s_2}(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_{L_1} \\ \dot{i}_{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e_{s_1}(t) \\ e_{s_2}(t) \end{bmatrix}$$

قسمت ب: درخت روبرو را اختیار می‌کنیم.




$$KCL: i_{C_1}=i_{L_1}-i_{L_2} \qquad KCL: i_{C_2}=i_s(t)-i_{L_1}-i_{R_1}$$

$$KVL: v_{L_1}=v_{R_1}-v_{C_1} \qquad KVL: v_{L_2}-v_{C_2}+v_{R_1}-v_{C_1}=0$$

حال باید $v_{R_1}$ و به تبع آن $i_{R_1}$ را برحسب متغیرهای حالت نوشت:

$$v_{R_1}=v_{C_2}+v_{R_2}+e_s(t) \qquad v_{R_2}=\left(i_{L_2}+i_{C_2}\right)R_2$$

$$i_{C_2}=i_s(t)-i_{L_1}-i_{R_1} \quad \Rightarrow \quad v_{R_2}=R_2 i_s(t)-R_2 i_{L_1}-R_2 i_{R_1}+R_2 i_{L_2}$$

با مرتب کردن رابطه فوق داریم:

$$\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right) v_{R_1}=v_{C_2}-R_2 i_{L_1}+R_2 i_{L_2}+R_2\, i_s(t)$$

$$v_{R_1}=\frac{R_1}{R_2+R_2} v_{C_2}-\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\, i_{L_1}+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\, i_{L_2}+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\, i_s(t)$$

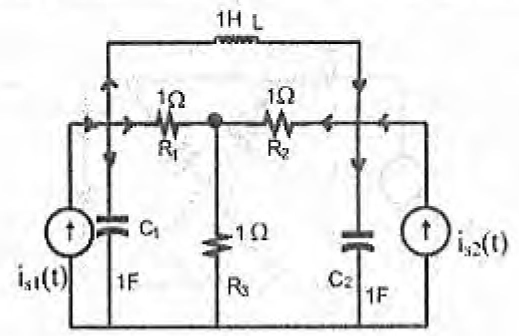
$$i_{R_1}=\frac{1}{R_1+R_2}\, v_{C_2}-\frac{R_2}{R_1+R_2}\, i_{L_1}+\frac{R_2}{R_1+R_2}\, i_{L_2}+\frac{R_2}{R_1+R_2}\, i_s(t)$$

حال این عبارات را در 4 معادله بدست آمده از قوانین $KVL$ و $KCL$ قرار می‌دهیم و پس از مرتب کردن، معادلات حالت بصورت زیر بدست می‌آید.

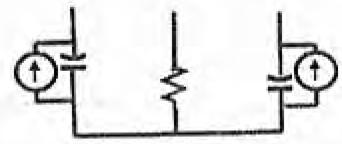
$$\begin{cases} \dot{v}_{C_1}=\dfrac{1}{C_1}\, i_{L_1}-\dfrac{1}{C_1}\, i_{L_2} \\[2ex] \dot{v}_{C_2}=-\dfrac{1}{R_1+R_2}\, v_{C_2}-\dfrac{R_1}{R_1+R_2}\, i_{L_1}-\dfrac{R_2}{R_1+R_2}\, i_{L_2}-\dfrac{R_1+2R_2}{R_1+R_2}\, i_s(t) \\[2ex] \dot{i}_{L_1}=-\dfrac{1}{L_1}\, v_{C_1}+\dfrac{R_1}{L_1\,(R_1+R_2)}\, v_{C_2}-\dfrac{R_1R_2}{L_1\,(R_1+R_2)}\, i_{L_1}+\dfrac{R_1R_2}{L_1\,(R_1+R_2)}\, i_{L_2}+\dfrac{R_1R_2}{L_1\,(R_1+R_2)}\, i_s(t) \\[2ex] \dot{i}_{L_2}=\dfrac{1}{L_2}\, v_{C_1}+\dfrac{R_1+R_2+1}{L_2\,(R_1+R_2)}\, v_{C_2}+\dfrac{R_1R_2}{L_2\,(R_1+R_2)}\, i_{L_1}-\dfrac{R_1R_2}{L_2\,(R_1+R_2)\, i_{L_2}}-\dfrac{R_1R_2}{L_2\,(R_1+R_2)}\, i_s(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{C_1} \\ \dot{v}_{C_2} \\ \dot{i}_{L_1} \\ \dot{i}_{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{1}{C_1} & -\dfrac{1}{C_1} \\[2ex] 0 & \dfrac{-1}{R_1+R_2} & \dfrac{-R_1}{R_1+R_2} & \dfrac{-R_2}{R_1+R_2} \\[2ex] -\dfrac{1}{L_1} & \dfrac{R_1}{L_1\,(R_1+R_2)} & \dfrac{-R_1R_2}{L_1\,(R_1+R_2)} & \dfrac{R_1R_2}{L_1\,(R_1+R_2)} \\[2ex] \dfrac{1}{L_2} & \dfrac{R_1+R_2+1}{R_1+R_2} & \dfrac{R_1R_2}{L_2\,(R_1+R_2)} & \dfrac{-R_1R_2}{L_2\,(R_1+R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix} + i_s(t) \begin{bmatrix} 0 \\[1ex] -\dfrac{R_1+2R_2}{R_1+R_2} \\[2ex] \dfrac{R_1R_2}{L_1\,(R_1+R_2)} \\[2ex] \dfrac{-R_1R_2}{L_2\,(R_1+R_2)} \end{bmatrix}$$

**قسمت (پ)**




درخت زیر را انتخاب می‌کنیم.



$$\begin{cases} i_{C_1}=i_{s_1}-i_L-i_{R_1} & (I) \\ i_{C_2}=i_{s_2}+i_L-i_{R_2} & (II) \\ v_L=v_{C_1}-v_{C_2} & (III) \end{cases}$$

حال باید $i_{R_1}$ و $i_{R_2}$ را برحسب متغیرهای حالت بنویسیم.

طبق روابط :

$$\begin{cases} i_{R_1}=v_{R_1} \qquad i_{R_2}=v_{R_2} \\ i_{R_3}=i_{R_1}+i_{R_2} \end{cases}$$

$$KVL: v_{R_1}+v_{R_3}=v_{C_1} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2i_{R_1}+i_{R_2}=v_{C_1} \\ i_{R_1}+2i_{R_2}=v_{C_2} \end{cases}$$
$$KVL: v_{R_2}+v_{R_3}=v_{C_2} \quad \Rightarrow$$

از حل دو معادله دو مجهولی فوق داریم.

$$i_{R_1}=\frac{2v_{C_1}-v_{C_2}}{3} \qquad i_{R_2}=\frac{2v_{C_2}-v_{C_1}}{3}$$

حال در روابط سه‌گانه $I$ و $II$ و $III$ جایگزین می‌کنیم.

$$C_1\dot{v}_{C_1}=-\frac{2}{3}v_{C_1}+\frac{1}{3}v_{C_2}-i_L+i_{s_1}(t)$$

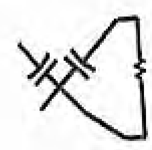
$$C_2\dot{v}_{C_2}=\frac{1}{3}v_{C_1}-\frac{2}{3}v_{C_2}+i_L+i_{s_2}(t)$$

$$L\dot{i}_L=v_{C_1}-V_{C_2}$$

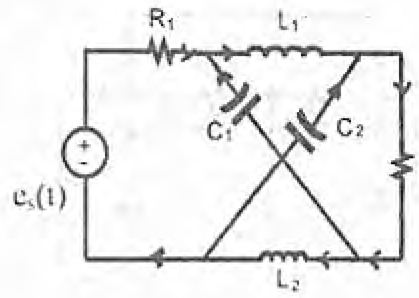
$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{C_1} \\ \dot{v}_{C_2} \\ \dot{i}_L \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ i_L \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_{s_1} \\ i_{s_2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

ت)
درخت زیر را انتخاب می‌کنیم.

$$v_{L_1}+v_{C_1}+v_{R_2}=0$$



$$v_{L_2}+v_{C_2}+v_{R_2}=0$$




$$\begin{cases} i_{C_1}=i_{R_2}-i_{L_2} \\ i_{C_2}=i_{L_2}-i_{R_1} \end{cases}$$

از طرف دیگر
$$\begin{cases} i_{C_1}=i_{L_1}-i_{R_1} \\ i_{C_2}=i_{R_2}-i_{L_1} \end{cases}$$

با مساوی قرار دادن روابط فوق نتیجه می‌شود $\quad i_{R_1}+i_{R_2}=i_{L_1}+i_{L_2} \qquad (I)$

از $KVL$ در شاخه‌های مقاومت $R_1$ و $R_3$ و خازن های $C_1$ و $C_2$ و منبع ولتاژ داریم:

$$v_{R_1}-v_{R_3}=v_{C_1}+v_{C_2}+e_s(t) \qquad (II)$$

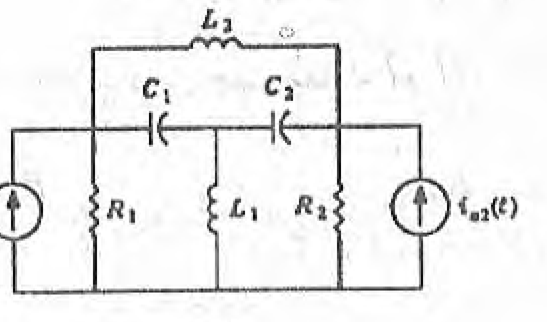
دو رابطه $I$ و $II$ تشکیل یک دستگاه دو معادله دو مجهولی می‌دهند که از حل آنها داریم:

$$\begin{cases} i_{R_1}=\dfrac{v_{C_1}}{R_1+R_3}+\dfrac{v_{C_2}}{R_1+R_3}+\dfrac{R_3}{R_1+R_3}\,i_{L_1}+\dfrac{R_3}{R_1+R_3}\,i_{L_2}-\dfrac{e_s(t)}{R_1+R_3} \\ i_{R_2}=\dfrac{-v_{C_1}}{R_1+R_3}-\dfrac{v_{C_2}}{R_1+R_3}+\dfrac{R_1}{R_1+R_3}\,i_{L_1}+\dfrac{R_1}{R_1+R_3}\,i_{L_2}+\dfrac{e_s(t)}{R_1+R_3} \end{cases}$$

از قرار دادن روابط بدست آمده در معادلات بدست آمده از $KVL$ و $KCL$ در بالا و مرتب کردن آنها بصورت ماتریسی داریم:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{C_1} \\ \dot{v}_{C_2} \\ \dot{i}_{L_1} \\ \dot{i}_{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{(R_1+R_3)\ C_1} & \dfrac{-1}{(R_1+R_3)\ C_1} & \dfrac{R_1}{(R_1+R_3)\ C_1} & \dfrac{-R_3}{(R_1+R_3)\ C_1} \\ \dfrac{-1}{(R_1+R_3)\ C_2} & \dfrac{-1}{(R_1+R_3)\ C_2} & \dfrac{-R_3}{(R_1+R_3)\ C_2} & \dfrac{R_3}{(R_1+R_3)\ C_2} \\ \dfrac{R_2-R_1-R_3}{L_1\ (R_1+R_3)} & \dfrac{R_2}{L_1\ (R_1+R_3)} & \dfrac{-R_2R_1}{L_1\ (R_1+R_3)} & \dfrac{-R_2R_1}{L_1\ (R_1+R_3)} \\ \dfrac{R_2}{L_2\ (R_1+R_3)} & \dfrac{R_2-R_1-R_3}{L_2\ (R_1+R_3)} & \dfrac{-R_2R_1}{L_2\ (R_1+R_3)} & \dfrac{-R_2R_1}{L_2\ (R_1+R_3)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix} + e_s(t) \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(R_1+R_3)C_1} \\ \dfrac{1}{(R_1+R_3)C_2} \\ \dfrac{-R_2}{(R_1+R_3)L_1} \\ \dfrac{-R_2}{(R_1+R_3)L_2} \end{bmatrix}$$

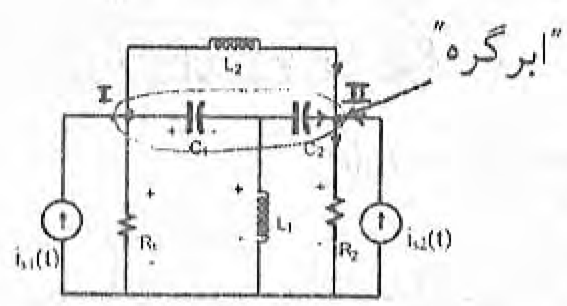


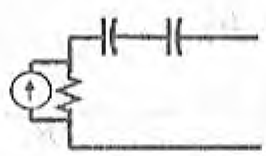

(ث)

(ادامه) شکل (مسألهٔ ۱۲-۹)

## قسمت (ث)

درخت زیر را انتخاب می‌کنیم.



$$KCL\,(I):\ i_{C_1}=i_{s_1}(t)-i_{L_2}-i_{R_1} \quad (I)$$

$$KCL\,(II):\ i_{C_2}=-i_{s_2}(t)-i_{L_2}+i_{R_2} \quad (II)$$

$$KVL:\ v_{L_1}=v_{R_1}-v_{C_1} \quad (III)$$

$$KVL:\ v_{L_2}=v_{C_1}+v_{C_2} \quad (IV)$$

حال باید $i_{R_1}$ و $i_{R_2}$ و $v_{R_1}$ را برحسب متغیرهای حالت نوشت.

از $KVL$ در حلقه شامل خازن های $C_1$ و $C_2$ و مقاومتهای $R_1$ و $R_2$ داریم:

$$v_{R_1}-v_{R_2}=v_{C_1}+v_{C_2} \quad \Rightarrow \quad R_1 i_{R_1}-R_2 i_{R_2}=v_{C_1}+v_{C_2}$$

از $KCL$ در ابرگره نشان داده شده داریم:

$$i_{R_1}+i_{R_2}=-i_{L_1}+i_{s_1}(t)+i_{s_2}(t)$$

دو معادله اخیر بدست آمده از $KVL$ و $KCL$ تشکیل یک دستگاه دو معادله دو مجهولی می‌دهند که با

حل آنها داریم:

$$\begin{cases} R_1 i_{R_1} - R_2 i_{R_2} = + v_{C_1} v_{C_2} \\ i_{R_1} + i_{R_2} = - i_{L_1} + i_{s_1}(t) + i_{s_2}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_{R1} = \dfrac{1}{R_1+R_2} V_{C1} + \dfrac{1}{R_1+R_2} V_{C2} - \dfrac{R_2}{R_1+R_2} i_{L1} + \dfrac{R_2}{R_1+R_2} i_{s1}(t) + \dfrac{R_2}{R_1+R_2} i_{s2}(t) \\ i_{R2} = -\dfrac{1}{R_1+R_2} V_{C1} - \dfrac{1}{R_1+R_2} V_{C2} - \dfrac{R_1}{R_1+R_2} i_{L1} + \dfrac{R_1}{R_1+R_2} i_{s1}(t) + \dfrac{R_1}{R_1+R_2} i_{s2}(t) \end{cases}$$

حال این معادلات را در چهار معادله $I$ و $II$ و $III$ و $IV$ قرار می‌دهیم.

$$\dot{v}_{C_1} = \frac{-1}{(R_1+R_2)\ C_1} v_{C_1} - \frac{1}{(R_1+R_2)\ C_1} v_{C_2} + \frac{R_2}{(R_1+R_2)\ C_1} i_{L_1} - \frac{1}{C_1} i_{L_2} + \frac{R_1}{(R_1+R_2)\ C_1} i_{s_1}(t)$$

$$\frac{-R_2}{(R_1+R_2)\ C_1} i_{s_2}(t)$$

$$\dot{v}_{C_2} = \frac{-1}{(R_1+R_2)\ C_2} v_{C_1} - \frac{1}{(R_1+R_2)\ C_2} v_{C_2} - \frac{R_1}{(R_1+R_2)\ C_2} i_{L_1} - \frac{1}{C_2} i_{L_2} - \frac{R_2}{(R_1+R_2)\ C_2} i_{s_1}(t)$$

$$+ \frac{R_1}{(R_1+R_2)\ C_2} i_{s_2}(t)$$

$$\dot{i}_{L_1} = \frac{-R_2}{L_1\ (R_1+R_2)} v_{C_1} + \frac{R_1}{L_1\ (R_1+R_2)} v_{C_2} - \frac{R_1 R_2}{L_1\ (R_1+R_2)} i_{L_1} + \frac{R_1 R_2}{L_1\ (R_1+R_2)} i_{s_1}(t) +$$

$$\frac{R_1 R_2}{L_1\ (R_1+R_2)} i_{s_2}(t)$$

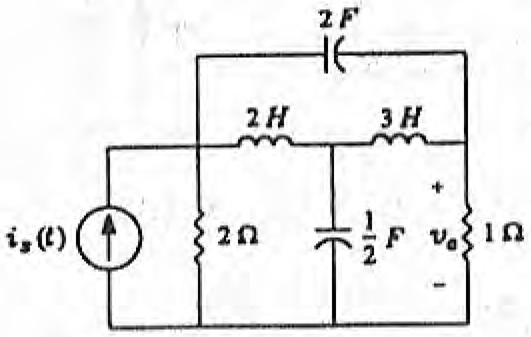
$$\dot{i}_{L_2} = \frac{1}{L_2} v_{C_1} + \frac{1}{L_2} v_{C_2}$$

می‌توان معادلات فوق را بصورت ماتریسی درآورد.

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{C_1} \\ \dot{v}_{C_2} \\ \dot{i}_{L_1} \\ \dot{i}_{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{(R_1+R_2)C_1} & \dfrac{-1}{(R_1+R_2)C_1} & \dfrac{R_2}{(R_1+R_2)C_1} & \dfrac{-1}{C_1} \\ \dfrac{-1}{(R_1+R_2)C_2} & \dfrac{-1}{(R_1+R_2)C_1} & \dfrac{-R_1}{(R_1+R_2)C_2} & \dfrac{-1}{C_2} \\ \dfrac{-R_2}{L_1(R_1+R_2)} & \dfrac{R_1}{L_1(R_1+R_2)} & \dfrac{-R_1 R_2}{L_1(R_1+R_2)} & 0 \\ \dfrac{1}{L_2} & \dfrac{1}{L_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix} +$$

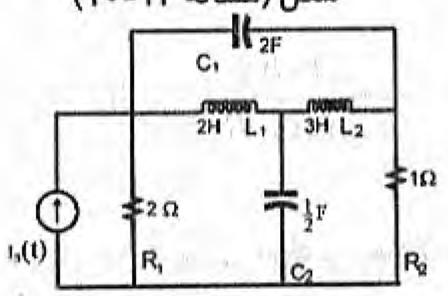
$$\begin{bmatrix} \frac{R_1}{(R_1+R_2)\ C_1} & \frac{-R_2}{(R_1+R_2)\ C_1} \\ \frac{-R_2}{(R_1+R_2)\ C_2} & \frac{R_1}{(R_1+R_2)\ C_2} \\ \frac{R_1R_2}{L_1\ (R_1+R_2)} & \frac{R_1R_2}{L_1\ (R_1+R_2)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s_1}(t) \\ i_{s_2}(t) \end{bmatrix}$$

۱۰- در مدار شکل (مسالهٔ ۱۲-۱۰) معادلات حالت را بنویسید و ولتاژ خروجی $v_o\ (t)$ را برحسب متغیرهای حالت و ورودی بیان کنید. اگر خازن $\frac{1}{2}$ فارادی با منبع جریان وابستهٔ $2v_C\ (t)$ جایگزین شود، که در آن $v_c\ (t)$ ولتاژ دو سر خازن 2 فارادی است، بار دیگر معادلات حالت را بنویسید.




شکل (مسالهٔ ۱۲-۱۰)

حل:




$$\begin{cases} KCL : i_{C_1}=i_s\,(t)-i_{L_1}-i_{R_1} \\ KCL\ : i_{C_2}=i_{L_1}-i_{L_2} \\ KVL : v_{L_1}=-v_C+v_{C_2}+v_{R_2} \\ KVL:\ v_{L_2}=v_{C_1}-v_{R_2} \end{cases}$$

حال در معادلات فوق باید عبارات $v_{R_2}$ و $i_{R_1}$ برحسب متغیرهای حالت نوشته شوند.

$$v_{R_1}+v_{R_2}=v_{C_1} \quad \Rightarrow \quad v_{R_1}=v_{C_1}-v_{R_2} \quad \Rightarrow \quad \left[i_{R_1}=\frac{1}{R_1}\ v_{C_1}-\frac{1}{R_1}\ v_{R_2}\right]$$

$$i_{R_2}=i_{L_2}+i_{C_1}=i_{L_2}+C_1\dot{v}_{C_1} \quad \Rightarrow \quad \left[v_{R_2}=R_2i_{L_2}+R_2C_1\dot{v}_{C_1}\right]$$

حال عبارات بدست آمده در معادلات فوق را قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} C_1\dot{v}_{C_1}=i_s(t)-i_{L_1}-\frac{v_{C_1}}{R_1}+\frac{1}{R_1}\left(R_2i_{L_2}+R_2C_1\dot{v}_{C_1}\right) \quad (I) \\ C_2\dot{v}_{C_2}=i_{L_1}-i_{L_2} \qquad (II) \\ L_1\dot{i}_{L_1}=-v_C+v_{C_2}+R_2i_{L_2}+R_2C_1\dot{v}_{C_1} \quad (III) \\ L_2\dot{i}_{L_2}=v_{C_1}-R_2i_{L_2}-R_2C_1\dot{v}_{C_1} \qquad (IV) \end{cases}$$

حال از رابطه $(I)$ عبارت $C_1\dot{v}_{C_1}$ را محاسبه کرده و در رابطه $III$ و $IV$ قرار می‌دهیم:

$$\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right) C_1\dot{v}_{C_1}=-\frac{v_{C_1}}{R_1} -i_{L_1}+\frac{R_2}{R_1} i_{L_2} +i_s(t)$$

$$C_1\dot{v}_{C_1}=\frac{v_{C_1}}{R_2-R_1} +\frac{R_1}{R_2-R_1} i_{L_1}+\frac{R_2}{R_1-R_2} i_{L_2}+\frac{R_1}{R_1-R_2} i_s(t)$$

بعد از مرتب کردن داریم:

$$\dot{v}_{C_1}=\frac{v_{C_1}}{C_1\ (R_2-R_1)} +\frac{R_1}{C_1\ (R_2-R_1)} i_{L_1}+\frac{R_2}{C_1\ (R_1-R_2)} i_{L_2}+\frac{R_1}{C_1\ (R_1-R_2)} i_s(t)$$

$$\dot{v}_{C_2}=\frac{1}{C_2} i_{L_1}-\frac{1}{C_2} i_{L_2}$$

$$\dot{i}_{L_1}=\frac{R_1}{L_1\ (R_2-R_1)} v_{C_1}+\frac{1}{L_1} v_{C_2}+\frac{R_1R_2}{L_1\ (R_2-R_1)} i_{L_1}+\frac{R_1R_2}{L_1\ (R_1-R_2)} i_{L_2}+\frac{R_1R_2}{L_1\ (R_1-R_2)} i_s(t)$$

$$\dot{i}_{L_2}=\frac{R_1}{L_2\ (R_1-R_2)} v_{C_1}+\frac{R_1R_2}{L_2\ (R_1-R_2)} i_{L_1}+\frac{R_1R_2}{L_2\ (R_2-R_1)} i_{L_2}+\frac{R_1R_2}{L_2\ (R_2-R_1)} i_s(t)$$

پس از جایگذاری مقادیر معادلات فوق را به شکل ماتریسی می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix}\dot{v}_{C_1}\\ \dot{v}_{C_2}\\ \dot{i}_{L_1}\\ \dot{i}_{L_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 0 & 2 & 2\\ -1 & \frac{1}{2} & -1 & 1\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{C_1}\\ v_{C_2}\\ i_{L_1}\\ i_{L_2}\end{bmatrix}+i_s(t)\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\\ -\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

حال خروجی $v_{R_1}$ را محاسبه می‌کنیم:

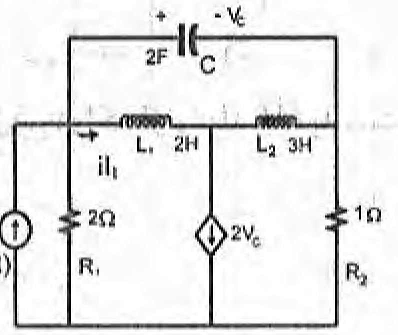
$$v_{R_1}=v_{C_1}-v_{R_2} \qquad v_{R_2}=R_2i_{L_2}+R_2C_1\dot{v}_{C_1}$$

عبارت $C_1\dot{v}_{C_1}$ جایگزین می‌کنیم:

$$v_{R_1}=v_{C_1}-R_2i_{L_2}+\frac{R_2}{R_1-R_2} v_{C_1}+\frac{R_1R_2}{R_1-R_2} i_{L_1}+\frac{R_2^2}{R_2-R_1} i_{L_2}+\frac{R_1R_2}{R_2-R_1} i_s(t)$$

$$v_{R_1}=\begin{bmatrix}\frac{R_1}{R_1-R_2} & 0 & \frac{R_1R_2}{R_1-R_2} & \frac{R_1R_2}{R_2-R_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{C_1}\\ v_{C_2}\\ i_{L_1}\\ i_{L_2}\end{bmatrix}+\frac{R_1R_2}{R_2-R_1} i_s(t)$$

$$v_{R_1}=[\,2\quad 0\quad 2\quad -2\,]\begin{bmatrix} v_{C_1}\\ v_{C_2}\\ i_{L_1}\\ i_{L_2}\end{bmatrix}-2\dot{i}_s(t)$$




طبق رابطه $i_{L_2}=i_{L_1}-2v_C$ چون جریان $i_{L_2}$ بوسیلهٔ جریان $i_{L_1}$ و ولتاژ خازن $v_C$ تعیین می‌شود پس $i_{L_2}$ یک متغیر حالت محسوب نمی‌شود.

$$\begin{cases} I_C=i_s(t)-i_{L_1}-i_{R_1}\\ v_{L_1}=v_C-v_{L_2}\end{cases}$$

$$C\dot{v}_C=i_s(t)-i_{L_1}-i_{R_1}\qquad (I)$$

$$L_1\dot{I}_{L_1}=v_C-v_{L_2}\qquad (II)$$

حال باید $v_{L_2}$ و $i_{R_1}$ را برحسب متغیرهای حالت بدست آوریم:

$$v_{L_2}=L_2\frac{di_{L_2}}{dt}=L_2\dot{i}_{L_1}-2L_2\dot{v}_C$$

$$v_{R_1}=v_C-v_{R_2}\qquad i_{R_2}=i_{L_2}+i_C=i_{L_1}-2v_C+C\dot{v}_C$$

$$v_{R_2}=R_2 i_{L_1}-2R_2v_C+R_2C\dot{v}_C$$

$$v_{R_1}=(1+2R_2)\,v_C-R_2C\dot{v}_C-R_2 i_{L_1}$$

$$i_{R_1}=\frac{1+2R_2}{R_1}v_C-\frac{R_2}{R_1}C\dot{v}_C-\frac{R_2}{R_1}i_{L_1}$$

حال عبارات بدست آمده را در روابط $I$ و $II$ جایگزین می‌کنیم و مرتب می‌کنیم:

$$\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right)C\dot{v}_C=-\frac{1+2R_2}{R_1}v_C+\frac{R_2-R_1}{R_1}i_{L_1}+i_s(t)\qquad (III)$$

$$(L_1+L_2)\,\dot{i}_{L_1}=v_C+2L_2\dot{v}_C\qquad (IV)$$

حال عبارات $\dot{v}_C$ را از رابطه $III$ بدست آورده و در رابطه $IV$ قرار می‌دهیم تا معادلات حالت بدست آیند.

$$\dot{v}_C=\frac{1+2R_2}{R_2-R_1}v_C-i_{L_1}+\frac{R_1}{R_1-R_2}i_s(t)$$

بعد از جایگذاری عبارت بدست آمده در رابطه $IV$ داریم:

$$(L_1+L_2)\,\dot{i}_{L_1}=\left(1+\frac{2L_2\,(1+2R_2)}{R_2-R_1}\right)v_C-2L_2 i_{L_1}+\frac{2L_2R_1}{R_1-R_2}i_s(t)$$

بعد از جایگذاری مقادیر، معادلات را به شکل ماتریسی می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_{L_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{17}{3} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_{L_1} \end{bmatrix} + i_s(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

حال $i_{R_2}$ را که همان $v_{R_2}$ است برحسب متغیرهای حالت می‌نویسیم:

$$i_{R_2} = i_{L_1} - 2v_C + C\dot{v}_C$$

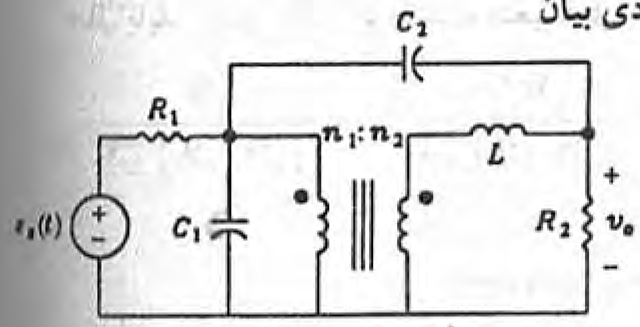
حال $\dot{v}_C$ را که از رابطه $III$ بدست آمده در رابطه فوق قرار می‌دهیم:

$$i_{R_2} = v_{R_2} = i_{L_1} - 2v_C + \frac{C\ (1+2R_2)}{R_2 - R_1} v_C - Ci_{L_1} + \frac{R_1 C}{R_1 - R_2}\ i_s(t)$$

$$v_{R_2} = -8v_C - i_{L_1} + 4i_s(t)$$

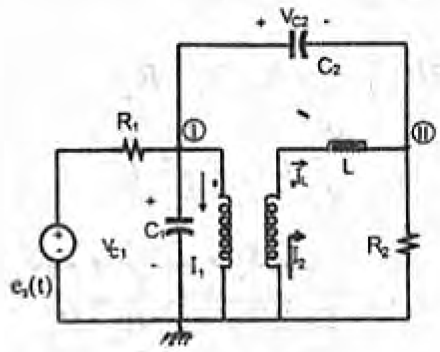
$$v_{R_2} = [\ -8 \quad -1]\ \begin{bmatrix} v_C \\ i_{L_1} \end{bmatrix} + 4i_s(t)$$

۱۱- معادلات حالت مدار شکل (مسالهٔ ۱۲-۱۱) رابنویسید و ولتاژ خروجی $v_o$ را برحسب متغیرهای حالت و ورودی بیان کنید.




شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۱)

حل:




$$\frac{e_s(t) - v_C}{R_1} = i_{C_1} + i_1 + i_{R_2} - i_L$$

$$i_{R_2} = \frac{v_C - v_{C_2}}{R_2}$$

$$KCL\ I \ \Rightarrow\ \frac{e_s(t) - v_{C_1}}{R_1} = C_1\dot{v}_1 + \frac{n_2}{n_1}\ i_L + \frac{v_{C_1} - v_{C_2}}{R_2}\ - i_L$$

$$KCL\ II\ = i_{C_2} = i_{R_2} - i_L$$

$$KCL\ II \ \Rightarrow\ C_2\dot{v}_2 = \frac{v_{C_1} - v_{C_2}}{R_2}\ - i_L$$

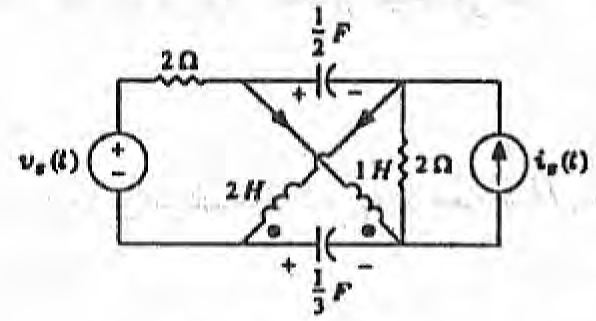
$$KVL : v_2 + v_L = v_{R_2} \qquad v_2 = \frac{n_2}{n_1}\ v_{C_1} \qquad v_{R_2} = v_{C_1} - v_{C_2}$$

$$\frac{n_2}{n_1} v_{C_1}+L\dot{i}_L=v_{C_1}-v_{C_2}$$

با مرتب کردن سه معادله فوق بصورت ماتریسی داریم.

$$\begin{bmatrix}\dot{v}_{C_1}\\ \dot{v}_{C_2}\\ \dot{i}_{L_1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{G_1+G_2}{C_1} & \frac{G_2}{C_1} & \frac{\left(1-\frac{n_2}{n_1}\right)}{C_1}\\ G_2 & -G_2 & -1\\ \frac{1-\frac{n_2}{n_1}}{L} & \frac{-1}{L} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{C_1}\\ v_{C_2}\\ i_L\end{bmatrix}+e_s(t)\begin{bmatrix}\frac{G_2}{C_1}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$v_o=v_{C_1}-v_{C_2} \qquad v_o=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{C_1}\\ v_{C_2}\\ i_L\end{bmatrix}$$



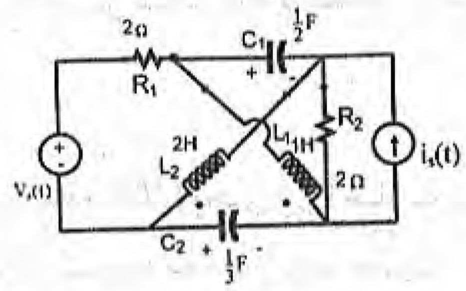

شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۲)

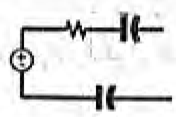
۱۲-الف- معادلات حالت را برای مدار شکل (مسالهٔ ۱۲-۱۲) نوشته و آن را به صورت ماتریسی درآورید. اگر خروجی مدار، ولتاژ دوسر منبع جریان $i_s(t)$ باشد، آن را برحسب متغیرهای حالت و ورودی بیان کنید.

ب- اگر تزویج $M=\frac{1}{2}\ H$ بین دو سلف وجود داشته باشد، معادلات حالت به چه صورت در می‌آیند؟

حل:

درخت زیر را اختیار می‌کنیم:



4 معادله زیر از اعمال $KCL$ در کات ست های متناظر با شاخه‌های خازنی و از اعمال $KVL$ برای حلقه‌های متناظر با لینک های سلفی نتیجه می‌شود. دقت شود هیچ تزویجی میان سلفها در قسمت اول مسأله وجود ندارد.

$$\begin{cases}C_1\dot{v}_{C_1}=i_{L_2}+i_{R_2}-i_s(t) & (I)\\ C_2\dot{v}_{C_2}=-i_{L_1}-i_{R_2}+i_s(t) & (II)\\ L_1\dot{i}_{L_1}=-v_{R_1}+v_{C_2}+v_s(t) & (III)\\ L_2\dot{i}_{L_2}=-v_{R_1}-v_{C_1}+v_s(t) & (IV)\end{cases}$$

حال باید $i_{R_2}$ و $v_{R_1}$ را در معادلات فوق برحسب متغیرهای حالت نوشت.

$$i_{R_1}=i_{C_1}+i_{L_1} \quad\Rightarrow\quad v_{R_1}=R_1C_1\dot{v}_{C_1}+R_1i_{L_1}$$

$$KVL: v_{R_2} = -v_{R_1} - v_{C_1} + v_{C_2} + v_s(t) \quad \Rightarrow$$

$$i_{R_2} = -\frac{R_1}{R_2} C_1 \dot{v}_{C_1} - \frac{v_{C_1}}{R_2} + \frac{v_{C_2}}{R_2} - \frac{R_1 i_{L_1}}{R_2} + \frac{v_s(t)}{R_2}$$

از جایگزین کردن $i_{R_2}$ در معادله $(I)$ داریم:

$$\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) C_1 \dot{v}_{C_1} = -\frac{1}{R_2} v_{C_1} + \frac{1}{R_2} v_{C_2} - \frac{R_1}{R_2} i_{L_1} + i_{L_2} + \frac{v_s(t)}{R_2} - i_s(t)$$

که با جایگزین کردن مقادیر نتیجه می‌شود:

$$\dot{v}_{C_1} = -\frac{1}{2} v_{C_1} + \frac{1}{2} v_{C_2} - i_{L_1} + i_{L_2} + \frac{v_s(t)}{2} - i_s(t)$$

با جایگزین کردن عبارت $i_{R_2}$ در معادله $II$ و همچنین جایگزین کردن عبارت $\dot{V}_{C_1}$ از معادله فوق نتیجه می‌شود:

$$C_2 \dot{v}_{C_2} = -i_{L_1} + \frac{R_1}{R_2} C_1 \dot{v}_{C_1} + \frac{v_{C_1}}{R_2} - \frac{v_{C_2}}{R_2} + \frac{R_1}{R_2} i_{L_1} + \frac{v_s(t)}{R_2} + i_s(t)$$

که با جایگزین کردن مقادیر نتیجه می‌شود:

$$\dot{v}_{C_2} = \frac{3}{4} v_{C_1} - \frac{3}{4} v_{C_2} - \frac{3}{2} i_{L_1} + \frac{3}{2} i_{L_2} + \frac{9}{4} v_s(t) + \frac{3}{2} i_s(t)$$

اگر در رابطه $(III)$ بجای $V_{R_1}$ عبارت محاسبه شده و در عبارت $v_{R_1}$ عبارت $\dot{v}_{C_1}$ را قرار داده و مقادیر را جایگزین کنیم به معادله زیر می‌رسیم:

$$\dot{i}_{L_1} = \frac{1}{2} v_{C_1} + \frac{1}{2} v_{C_2} - i_{L_1} - i_{L_2} + \frac{v_s(t)}{2} + i_s(t)$$

همچنین برای $\dot{i}_{L_2}$ به معادله زیر می‌رسیم:

$$\dot{i}_{L_2} = -\frac{1}{4} v_{C_1} - \frac{1}{4} v_{C_2} - \frac{1}{2} i_{L_1} - \frac{1}{2} i_{L_2} - \frac{1}{4} V_s(t) + \frac{1}{2} \dot{i}_s(t)$$

در مورد ولتاژ دوسر منبع جریان $i_s(t)$، ولتاژ دوسر مقاومت $R_2$ را محاسبه می‌کنیم که از قبل می‌دانیم.

$$v_{R_2} = -v_{R_1} - v_{C_1} + v_{C_2} + v_s(t) \qquad v_{R_1} = R_1 C_1 \dot{v}_{C_1} + R_1 i_{L_1}$$

$$v_{R_1} = \dot{v}_{C_1} + 2 i_{L_1} \qquad v_{R_2} = v_{i_s(t)}$$

با جایگزین کردن عبارت $\dot{v}_{C_1}$ و مقادیر نتیجه می‌شود:

$$v_{i_s(t)}=-\frac{1}{2}\,v_C+\frac{1}{2}\,v_{C_2}-i_{L_1}-i_{L_2}+\frac{1}{2}\,v_s(t)+i_s(t)$$

حال معادلات را به شکل ماتریسی در می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix}\dot v_{C_1}\\ \dot v_{C_2}\\ \dot i_{L_1}\\ \dot i_{L_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 1\\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & -1\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{C_1}\\ v_{C_2}\\ i_{L_1}\\ i_{L_2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1\\ \frac{9}{4} & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_s(t)\\ i_s(t)\end{bmatrix}$$

$$v_{i_s(t)}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{C_1}\\ v_{C_2}\\ i_{L_1}\\ i_{L_2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_s(t)\\ i_s(t)\end{bmatrix}$$

### قسمت (ب)

اگر تزویج $M=\frac{1}{2}\,\mu$ مابین سلفها فرض شود در عبارات مربوط به $\dot v_{C_1}$ و $\dot v_{C_2}$ بدست آمده در قسمت (الف) مسأله هیچ تغییری حاصل نمی‌شود، فقط عبارات مربوط به $\dot i_{L_1}$ و $\dot i_{L_2}$ تغییر خواهند یافت، پس فقط آنها را دوباره محاسبه می‌کنیم.

از $KVL$ در حلقه‌های متناظر با $Link$های سلفی داریم:

$$\begin{cases}v_{L_1}=-v_{R_1}+v_{C_2}+v_s(t)\\ v_{L_2}=-v_{R_1}-v_{C_1}+v_s(t)\end{cases}$$

طبق قرار داد نقطه علامت اندوکتانس در این مسأله مثبت است.

$$v_{L_1}=L_1\dot i_{L_1}+M\dot i_{L_2} \quad \text{و} \quad v_{L_2}=M\dot i_{L_1}+L_2\dot i_{L_2}$$

از جایگزین کردن عبارت $V_{R_1}$ در معادله فوق نتیجه می‌شود:

$$L_1\dot i_{L_1}+M\dot i_{L_2}=-R_1C_1\dot v_{C_1}-R_1 i_{L_1}+v_{C_2}+v_s(t)$$

$$M\dot i_{L_1}+L_2\dot i_{L_2}=-R_1C_1\dot v_{C_1}-R_1 i_{L_1}-v_{C_1}+v_s(t)$$

با جایگزین کردن عبارت $\dot{v}_{C_1}$ از معادلات حالت در قسمت (الف) و همچنین با جایگزین کردن مقادیر به دو معادله دو مجهولی زیر می‌رسیم که با حل آنها عبارات $\dot{i}_{L_1}$ و $\dot{i}_{L_2}$ محاسبه می‌شود.

$$\dot{i}_{L_1}+\frac{1}{2}\,\dot{i}_{L_2}=\frac{1}{2}v_{C_1}+\frac{1}{2}v_{C_2}-i_{L_1}-i_{L_2}+\frac{1}{2}v_s(t)+i_s(t)$$

$$\frac{1}{2}\dot{i}_{L_1}+2\dot{i}_{L_2}=-\frac{1}{2}v_{C_1}-\frac{1}{2}v_{C_2}-i_{L_1}-i_{L_2}+\frac{1}{2}v_s(t)+i_s(t)$$

با حل دو معادله دو مجهولی فوق نتیجه می‌شود.

$$\dot{i}_{L_1}=\frac{5}{7}v_{C_1}+\frac{5}{7}v_{C_2}-\frac{6}{7}i_{L_1}-\frac{6}{7}i_{L_2}+\frac{3}{7}v_s(t)+\frac{6}{7}i_s(t)$$

$$\dot{i}_{L_2}=-\frac{3}{7}v_{C_1}-\frac{3}{7}v_{C_2}-\frac{2}{7}i_{L_1}-\frac{2}{7}i_{L_2}+\frac{1}{7}v_s(t)+\frac{2}{7}i_s(t)$$

این دو معادله با دو معادله قبلی $\dot{v}_{C_1}$ و $\dot{v}_{C_2}$ معادلات حالت مدار را نشان می‌دهند. که بصورت ماتریسی در زیر نوشته شده‌اند. همچنین عبارت مربوط به ولتاژ دوسر منبع جریان هیچ تغییری نخواهد داشت.

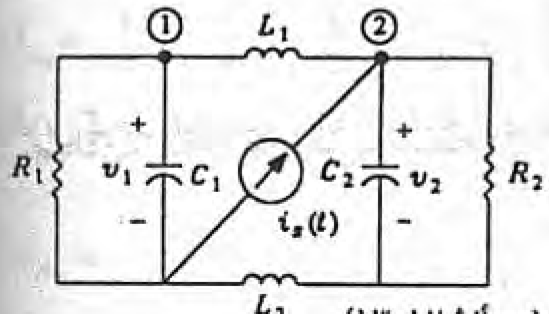
$$\begin{bmatrix}\dot{v}_{C_1}\\ \dot{v}_{C_2}\\ \dot{i}_{L_1}\\ \dot{i}_{L_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 1\\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{5}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{6}{7}\\ -\frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{2}{7}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{C_1}\\ v_{C_2}\\ i_{L_1}\\ i_{L_2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1\\ \frac{9}{4} & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7}\\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_s(t)\\ i_s(t)\end{bmatrix}$$

$$v_{i_s(t)}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{C_1}\\ v_{C_2}\\ i_{L_1}\\ i_{L_2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_s(t)\\ i_s(t)\end{bmatrix}$$

۱۳-الف- معادلات حالت را برای مدار شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۳) بنویسید.

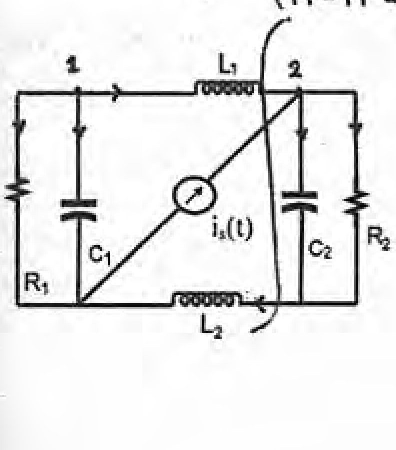
ب- اگر منبع جریان نابستهٔ $i_s(t)$ به منبع جریان وابستهٔ $g_m v_1$ تبدیل شود، معادلات حالت به چه صورت در می‌آیند؟

پ- اگر خازن $C_3$ میان گره‌های (1) و (2) وصل شود، معادلات حالت به چه صورت درمی‌آیند؟



شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۳)

حل:




الف) مطابق کات ست فوق داریم. $i_{L_2}=i_{L_1}+i_s(t)$

طبق رابطه فوق $i_{L_2}$ نمی‌تواند بعنوان متغیر حالت در نظر گرفته شود.

$KCL$ در گره $I$ : $i_{C_1}+i_{R_1}+i_{L_1}=0$

$KCL$ در گره $II$ : $i_{C_2}+i_{R_2}-i_{L_1}-i_s(t)=0$

$KVL : v_{L_1}+v_{C_2}+v_{L_2}-v_{C_1}=0$

حال باید $v_{L_2}$ را برحسب متغیرهای حالت نوشت.

$$v_{L_2}=L_2\dot{i}_{L_2}=L_2\left(i_{L_1}+i_s(t)\right)'=L_2\dot{i}_{L_1}+L_2\dot{i}_s(t)$$

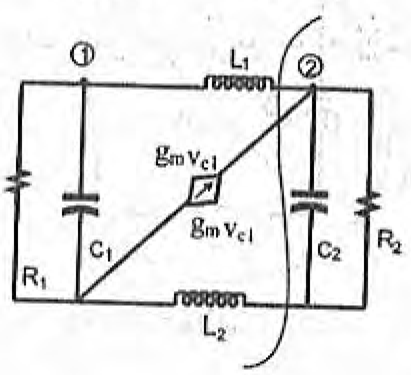
حال آن را جایگزین می‌کنیم.

$$\begin{cases} C_1\dot{v}_{C_1}=-\dfrac{1}{R}v_{C_1}-i_{L_1} \\ C_2\dot{v}_{C_2}=-\dfrac{1}{R_2}v_{C_2}+i_{L_1}+i_s(t) \\ (L_1+L_2)\,\dot{i}_{L_1}=v_{C_1}-v_{C_2}-L_2\dot{i}_s(t) \end{cases}$$

حال آنها را مرتب می‌کنیم.

$$\begin{cases} \dot{v}_{C_1}=-\dfrac{1}{R_1C_1}v_{C_1}-\dfrac{1}{C_1}i_{L_1} \\ \dot{v}_{C_2}=-\dfrac{1}{R_2C_2}v_{C_2}+\dfrac{1}{C_2}i_{L_2}+\dfrac{1}{C_2}i_s(t) \\ \dot{i}_{L_1}=\dfrac{1}{L_1+L_2}v_{C_1}-\dfrac{1}{L_1+L_2}v_{C_2}-\dfrac{L_2}{L_1+L_2}\dot{i}_s(t) \end{cases}$$

قسمت (ب):




مطابق کات ست نشان داده شده داریم.

$$i_{L_2}=i_{L_1}+g_mv_1$$

و طبق رابطه فوق $i_{L_2}$ نمی‌تواند بعنوان متغیر حالت فرض شود.

$KCL$ در گره $I$ : $i_{C_1}+i_{R_1}+i_{L_1}=0 \qquad I$

$KCL$ در گره $II$ : $i_{C_2}+i_{R_2}-g_mv_{C_1}-i_{L_1}=0 \qquad II$

$$KVL: v_{L_1}+v_{C_2}+v_{L_2}-v_{C_1}=0 \qquad III$$

طبق قسمت (الف) داریم: $v_{L_2}=L_2\dot{i}_{L_1}+L_2 g_m \dot{v}_{C_1}$

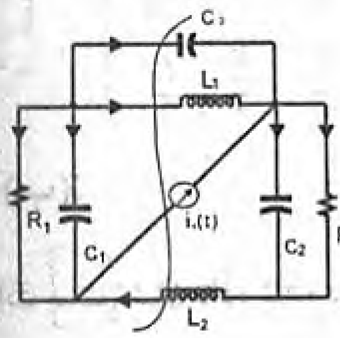
از رابطه $I$ داریم: $\dot{v}_{C_1}=-\dfrac{1}{R_1C_1}v_{C_1}-\dfrac{1}{C_1}i_{L_1}$

$$\begin{cases} C_1\dot{v}_{C_1}=-\dfrac{1}{R_1}v_{C_1}-i_{L_1} & (IV) \\ C_2\dot{v}_{C_2}=g_m v_{C_1}-\dfrac{1}{R_2}v_{C_2}+i_{L_1} & (V) \\ L_1\dot{i}_{L_1}=v_{C_1}-v_{C_2}-L_2\dot{i}_{L_1}-L_2 g_m \dot{v}_{C_1} & (VI) \end{cases}$$

از قرار دادن عبارت $\dot{V}_{C_1}$ محاسبه شده در رابطه $VI$ و مرتب کردن آن، معادلات بصورت زیر در می‌آیند.

$$\begin{cases} \dot{v}_{C_1}=-\dfrac{1}{R_1C_1}v_{C_1}-\dfrac{1}{C_1}i_{L_1} \\ \dot{v}_{C_2}=\dfrac{g_m}{C_2}v_{C_1}-\dfrac{1}{R_2C_2}v_{C_2}+\dfrac{1}{C_2}i_{L_1} \\ \dot{i}_{L_1}=\dfrac{1}{L_1+L_2}\left(1+\dfrac{L_2\,g_m}{R_1C_1}\right)v_{C_1}-\dfrac{1}{L_1+L_2}v_{C_2}+\dfrac{L_2g_m}{C_1\,(L_1+L_2)}i_{L_1} \end{cases}$$

قسمت (پ):




چون سلفهای $L_1$ و $L_2$ و منبع جریان $i_s(t)$ تشکیل یک کات ست نمی‌دهند پس $i_{L_2}$ می‌تواند بعنوان متغیر حالت در نظر گرفته شود.

$$KCL: i_{C_1}+i_{R_1}+i_{L_2}=0$$

$$KCL: i_{C_2}+i_{R_2}-i_{L_2}=0$$

در کات ست $KCL: i_{C_3}+i_{L_1}+i_s(t)-i_{L_2}=0$

$$KVL: v_{L_1}=v_{C_3}.$$

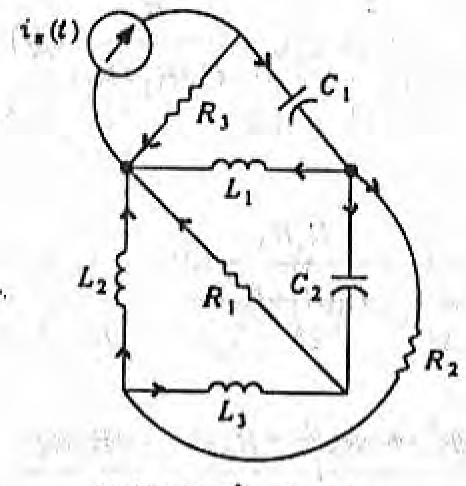
$$KVL: v_{L_2}=v_{C_1}-v_{C_2}-v_{C_3}$$

$$\begin{cases} C_1\dot{v}_{C_1}=-\dfrac{1}{R_1}v_{C_1}-i_{L_2} \\ C_2\dot{v}_{C_2}=-\dfrac{1}{R_2}v_{C_2}+i_{L_2} \\ C_3\dot{v}_{C_3}=-i_{L_1}+i_{L_2}-i_s(t) \\ L_1\dot{i}_{L_1}=v_{C_3} \\ L_2\dot{i}_{L_2}=V_{C_1}-V_{C_2}-V_{C_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{v}_{C_1}=-\dfrac{1}{R_1C_1}v_{C_1}-\dfrac{1}{C_1}i_{L_2} \\ \dot{v}_{C_2}=-\dfrac{1}{R_2C_2}v_{C_2}+\dfrac{1}{C_2}i_{L_2} \\ \dot{v}_{C_3}=-\dfrac{1}{C_3}i_{L_1}+\dfrac{1}{C_3}i_{L_2}-\dfrac{1}{C_3}i_s(t) \\ \dot{i}_{L_1}=\dfrac{1}{L_1}v_{C_3} \\ \dot{i}_{L_2}=\dfrac{1}{L_2}v_{C_1}-\dfrac{1}{L_2}v_{C_2}-\dfrac{1}{L_3}v_{C_3} \end{cases}$$

۱۴-الف-معادلات حالت را برای شکل (مسالهٔ ۱۲-۱۴) بنویسید.

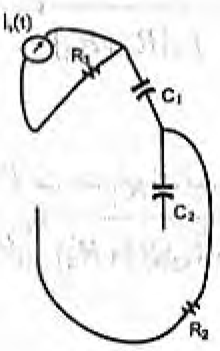
ب- اگر تزویجی میان سلف های $L_1$ و $L_2$ با ضریب تزویج $k$ وجود داشته باشد، معادلات حالت را بنویسید.



شکل (مسالهٔ ۱۲-۱٤)

حل:

قسمت الف)




$KVL: v_{L_1}-v_{R_3}+v_{C_1}=0 \qquad KCL: i_{C_2}=i_{R_1}-i_{L_3}$

$KVL: v_{L_2}-v_{R_3}+v_{C_1}+v_{R_2}=0 \qquad KCL: i_{C_1}=i_{L_1}+i_{C_2}+i_{R_2}$

$KVL: v_{L_3}-v_{C_2}+v_{R_2}=0$

$KVL: v_{L_3}-v_{C_2}+v_{R_2}=0$

حال باید عبارات مربوط به مقاومتهای $R_1$، $R_2$ و $R_3$ را برحسب متغیرهای حالت نوشت.

$$i_{R_2}=i_{L_2}+i_{L_3} \qquad v_{R_2}=R_2 i_{L_2}+R_2 i_{L_3}$$

$$\begin{matrix} KVL: \\ KCL: \end{matrix} \begin{cases} v_{R_1}-v_{R_3}+v_{C_1}+v_{C_2}=0 \\ i_{R_1}+i_{R_3}+i_{L_1}+i_{L_2}=i_s(t) \end{cases}$$

از حل دو معادله دو مجهولی فوق عبارات مربوط به مقاومتهای $R_1$ و $R_3$ نیز برحسب متغیرهای حالت و منابع ورودی نوشته می‌شوند.

$$\begin{cases} R_3 i_{R_3}-R_1 i_{R_1}=v_{C_1}+v_{C_2} \\ i_{R_3}+i_{R_1}=i_s(t)-i_{L_1}-i_{L_2} \end{cases}$$

که با حل دستگاه فوق نتیجه می‌شود.

$$i_{R_1}=\frac{-1}{(R_1+R_3)}v_{C_1}-\frac{1}{(R_1+R_3)}v_{C_2}-\frac{R_3}{R_1+R_3}i_{L_1}-\frac{R_3}{R_1+R_3}i_{L_2}+\frac{R_3}{R_1+R_3}i_s(t)$$

$$i_{R_3}=\frac{1}{R_1+R_3}v_{C_1}+\frac{1}{(R_1+R_3)}v_{C_2}-\frac{R_1}{(R_1+R_3)}i_{L_1}-\frac{R_1}{(R_1+R_3)}i_{L_2}+\frac{R_1}{R_1+R_3}i_s(t)$$

که با جایگذاری در معادلات $KVL$ و $KCL$ و مرتب سازی جملات داریم:

$$\dot{v}_{C_1}=\frac{-1}{C_1(R_1+R_3)}v_{C_1}-\frac{1}{C_1(R_1+R_3)}v_{C_2}+\frac{R_1}{C_1(R_1+R_3)}i_{L_1}-\frac{R_3}{C_1(R_1+R_3)}i_{L_3}+\frac{R_3}{C_1(R_1+R_3)}i_s(t)$$

$$\dot{v}_{C_2}=\frac{-1}{C_2(R_1+R_3)}v_{C_1}-\frac{1}{C_2(R_1+R_3)}v_{C_2}-\frac{R_3}{C_2(R_1+R_3)}i_{L_1}-\frac{R_3}{C_2(R_1+R_3)}i_{L_2}-\frac{1}{C_2}i_{L_3}+\frac{R_3}{C_2(R_1+R_3)}i_s(t)$$

$$\dot{i}_{L_1}=\frac{-R_1}{L_1(R_1+R_3)}v_{C_1}+\frac{R_3}{L_1(R_1+R_3)}v_{C_2}-\frac{R_1R_3}{L_1(R_1+R_3)}i_{L_1}-\frac{R_1R_3}{L_1(R_1+R_3)}i_{L_2}+\frac{R_1R_3}{L_1(R_1+R_3)}i_s(t)$$

$$\dot{i}_{L_2}=\frac{-R_1}{L_2(R_1+R_3)}v_{C_1}+\frac{R_3}{L_2(R_1+R_3)}v_{C_2}-\frac{R_1R_3}{L_2(R_1+R_3)}i_{L_1}-\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{L_2(R_1+R_3)}i_{L_2}-\frac{R_2}{L_2}i_{L_3}+\frac{R_1R_3}{L_2(R_1+R_3)}i_s(t)$$

$$\dot{i}_{L_2}=\frac{1}{L_3}v_{C_2}-\frac{R_2}{L_3}i_{L_2}-\frac{R_2}{L_3}i_{L_3}$$

قسمت (ب):

همان روابط موجود در قسمت (الف) را می‌نویسیم.

$$i_{C_1}=i_{L_1}+i_{C_2}+i_{R_2} \qquad (I)$$

$$i_{C_2}=i_{R_1}-i_{L_3} \qquad (II)$$

$$v_{L_1}=-v_{C_1}+v_{R_3} \qquad (III)$$

$$v_{L_2}=-v_{C_1}+v_{R_3}-v_{R_2} \qquad (IV)$$

$$v_{L_3}=v_{C_2}-v_{R_2} \qquad (V)$$

فقط عبارات مربوط به $v_{L_1}$ و $v_{L_2}$ فرق خواهند کرد. و دیگر عبارات همانند قسمت (الف) می‌باشند. پس عبارات مربوط به آنها را حساب می‌کنیم.

$$M=k\sqrt{L_1L_2}$$

$$(III) \quad \Rightarrow \quad L_1\dot{i}_{L_1}+M\dot{i}_{L_2}=-v_{C_1}+v_{R_3}$$

$$(IV) \quad \Rightarrow \quad M\dot{i}_{L_1}+L_2\dot{i}_{L_2}=-v_{C_1}+v_{R_3}-v_{R_2}$$

از حل دو معادله دو مجهولی فوق $\dot{i}_{L_1}$ و $\dot{i}_{L_2}$ جداگانه محاسبه می‌شوند. عبارات $v_{R_2}$ و $v_{R_3}$ نیز در قسمت (الف) محاسبه شده‌اند.

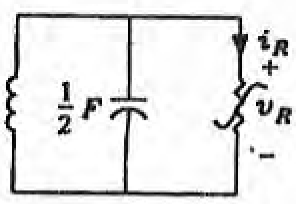
$$\dot{i}_{L_1}=\frac{M-L_2}{L_1L_2-M^2}v_{C_1}+\frac{L_2-M}{L_1L_2-M^2}v_{R_3}+\frac{M}{L_1L_2-M^2}v_{R_2}$$

$$M=k\sqrt{L_1L_2}$$

$$\dot{i}_{L_2}=\frac{M-L_1}{L_1L_2-M^2}+\frac{L_1-M}{L_1L_2-M^2}v_{R_3}-\frac{L_1}{L_1L_2-M^2}v_{R_2}$$

پس معادلات حالت همانند قسمت (الف) می‌باشند الا این که عبارات مربوط به $\dot{i}_{L_1}$ و $\dot{i}_{L_2}$ بصورت روابط فوق می‌باشد که از جایگزین کردن $v_{R_2}$ و $v_{R_3}$ که در قسمت (الف) محاسبه شده‌اند، معادلات بصورت کامل نوشته خواهد شد.

۱۵- در مدار غیرخطی شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۵) و با شروع از حالت اولیهٔ $I_o=2$ و $V_o=1$ و انتخاب $\Delta t=0.2$ ثانیه، مسیر فضای حالت را به طور تقریبی رسم کنید. $i=-2v_R+v_R^3$ شکل کلی مسیر را تعیین و اثر شرایط اولیه را در شکل کلی بررسی کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۵)

حل:

$$KCL : i_C = -i_R - i_L$$

$$KVL : v_L = v_C$$

$$i_R = -2v_C + v_C^3$$

$$C\dot{v}_C = 2v_C - v_C^3 - i_L \qquad \begin{cases} \dot{v}_C = 4v_C - 2v_C^3 - 2i_L \\ \dot{i}_L = v_C \end{cases}$$

$$L\dot{i}_L = v_C$$

برای مشتق $f(t)$ می‌توانیم عبارت $\frac{f((k+1)\Delta t) - f(\Delta t)}{\Delta t}$ وقتی که $\Delta t$ خیلی کوچک است قرار دهیم.

$$\frac{v_C((k+1)\Delta t) - v_C(k\Delta t)}{\Delta t} = 4v_C(k\Delta t) - 2v_C^3(k\Delta t) - 2i_L(k\Delta t)$$

$$\frac{i_L((k+1)\Delta t) - i_L(k\Delta t)}{\Delta t} = v_C(k\Delta t)$$

معادلات را بصورت زیر مرتب می‌کنیم.

$$\begin{cases} v_C\left[(k+1)\Delta t\right] = (1+4\Delta t)v_C(k\Delta t) - 2\Delta t\, v_C^3(k\Delta t) - 2\Delta t\, i_L(k\Delta t) \\ i_L\left[(k+1)\Delta t\right] = \Delta t\, v_C(k\Delta t) + i_L(k\Delta t) \end{cases}$$

حال با $I_o = 2A$ و $V_o = 1V$ و $\Delta t = 0.2sec$ حلقه فوق را تکرار می‌کنیم.

$$\begin{cases} v_C(0.2) = 1.8\times 1 - 0.4\times 1^3 - 0.4\times 2 = 0.6 \\ i_L(0.2) = 0.2\times 1 + 2 = 2.2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_C(0.4) = 1.8\times 0.6 - 0.4\times(0.6)^3 - 0.4\times 2.2 = 0.113 \\ i_L(0.4) = 0.2\times 0.6 + 2.2 = 2.32 \end{cases}$$

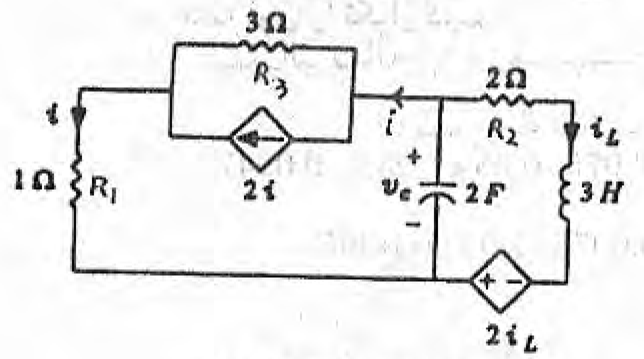
$$\begin{cases} v_C(0.6) = 1.8\times 0.113 - 0.4(0.113)^3 - 0.4\times 2.32 = -0.725 \\ i_L(0.6) = 0.2\times 0.113 + 2.32 = 2.34 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_C(0.8) = 1.8\times(-0.725) - 0.4(-0.725)^3 - 0.4\times 2.34 = -2.08 \\ i_L(0.8) = 0.2\times(-0.725) + 2.34 = 2.19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_C(1) = 1.8\times(-2.08) + 0.4(-2.08)^3 - 0.4(2.19) = -1.02 \\ i_L(0) = 0.2\times(-20.8) + 2.19 = 1.774 \end{cases}$$

بهمین ترتیب می‌توان نقاط بیشتری داد برای رسم دقیق باید از کامپیوتر استفاده شود.

۱۶- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۶) ولتاژ اولیهٔ خازن و جریان اولیهٔ سلف مخالف صفر می‌باشند. معادلات حالت مدار را بنویسید و مسیر حالت را ترسیم نمایید.




شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۶)

حل:

$$KCL: \quad i_C + i_L + i = 0$$

$$KVL: \quad v_{R_2} + v_L - 2i_L - v_C = 0$$

$$v_{R_2} = 2i_L$$

$$\begin{aligned} KCL: &\quad \begin{cases} C\dot{v}_C = -i_L - i \\ L\dot{i} = v_C \end{cases} \\ KVL: & \end{aligned}$$

حال باید $i$ را برحسب متغیرهای حالت بنویسیم. با نوشتن $KVL$ در حلقهٔ چپ داریم.

$$v_C = R_1 i - R_3 i = i - 3i = -2i \quad \Rightarrow \quad i = -\frac{1}{2}v_C$$

حال معادلات را بصورت زیر می‌نویسیم.

$$\left.\begin{aligned} C\dot{v}_C &= \frac{1}{2}v_C - i_L \\ L\dot{i}_L &= v_C \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

برای رسم مسیر از فرمول $X\left[(k+1)\Delta t\right] = (I + \Delta t A)\, X(k\Delta t)$ استفاده می‌کنیم.

با انتخاب اختیاری $V_C(0) = 1^V$ و $i_L(0) = 1^A$ و $\Delta t = 0.1^{sec}$ معادله فوق بصورت زیر در می‌آید.

$$\begin{bmatrix} v_C((k+1)\Delta t) \\ i_L((k+1)\Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{4}\Delta t & -\frac{1}{2}\Delta t \\ \frac{1}{3}\Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C(k\Delta t) \\ i_L(k\Delta t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} v_C(0.1(k+1)) = 1.025\,v_C(0.1k) - 0.05\,i_L(0.1k) \\ i_L(0.1(k+1)) = 0.033 v_C(0.1k) + i_L(0.1k) \end{cases}$$

حال باید حلقه فوق را تکرار کنیم.

$k=0,1,2,\ldots$

$$\begin{cases} v_C(0.1) = 1.025 - 0.05 = 0.975 \\ i_L(0.1) = 0.033 + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} v_C(0.2) = 1.025\times 0.975 - 0.05\times 1.033 = 0.0947 \\ i_L(0.2) = 0.033\times 0.0975 + 1.033 = 1.065 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_C(0.3) = 1.025\times 0.947 - 0.05\times 1.065 = 0.917 \\ i_L(0.3) = 0.033\times 0.947 + 1\times 1.065 = 1.096 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_C(0.4) = 1.025\times 0.917 - 0.05\times 1.096 = 0.885 \\ i_L(0.4) = 0.033\times 0.917 + 1\times 1.096 = 1.126 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_C(0.5) = 1.025\times 0.885 - 0.05\times 1.126 = 0.850 \\ i_L(0.5) = 0.033\times 0.885 + 1\times 1.126 = 1.155 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_C(0.6) = 1.025\times 0.85 - 0.05\times 1.155 = 0.813 \\ i_L(0.6) = 0.033\times 0.85 + 1\times 1.155 = 1.183 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_C(0.7) = 1.025\times 0.813 - 0.05\times 1.183 = 0.774 \\ i_L(0.7) = 0.033\times 0.813 + 1\times 1.183 = 1.21 \end{cases}$$

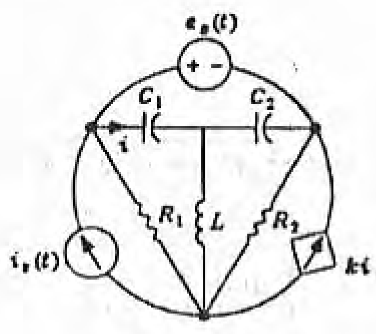
$$\begin{cases} v_C(0.8) = 1.025\times 0.774 - 0.05\times 1.21 = 0.732 \\ i_L(0.8) = 0.033\times 0.774 + 1\times 1.21 = 1.235 \end{cases}$$

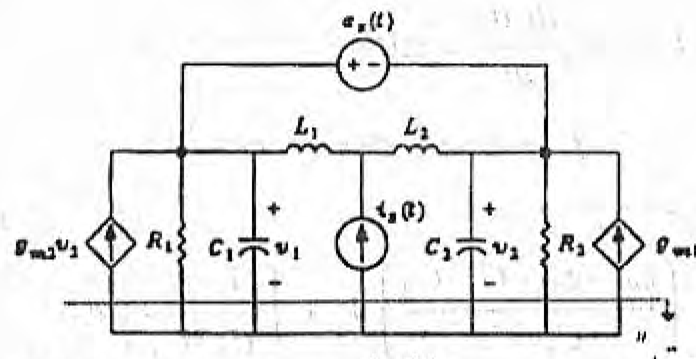
$$\begin{cases} v_C(0.9) = 1.025\times 0.732 - 0.05\times 1.235 = 0.688 \\ i_L(0.9) = 0.033\times 0.732 + 1\times 1.235 = 1.260 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_C(1) = 1.025\times 0.688 - 0.05\times 1.26 = 0.642 \\ i_L(1) = 0.033\times 0.688 + 1\times 1.26 = 1.282 \end{cases}$$

بدین ترتیب می‌توان نقاط بیشتری را نیز بدست آورد و مسیر حالت را رسم کرد.

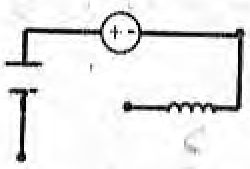
۱۷ - معادلات حالت را برای مدارهای شکل (مسالهٔ ۱۲-۱۷) بنویسید. آنها را به شکل ماتریسی درآورید و جریان گذرنده از منبع ولتاژ $e_s(t)$ در هر دو مدار را برحسب متغیرهای حالت بیان کنید. آیا می‌توانید معادلات حالت را طوری بنویسید که مشتق ورودی ها در آنها ظاهر نشود؟




**شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۷)**

حل : قسمت (الف):



$$\begin{cases} v_2 = v_1 - e_s(t) \\ i_2 = i_1 + i_s(t) \end{cases}$$

پس $v_2$ و $i_2$ نمی‌توانند بعنوان متغیرهای حالت در نظر گرفته شوند.

درخت زیر را انتخاب می‌کنیم.

معادلات کات ست اساسی متناظر با $C_1$ و معادله حلقه اساسی متناظر با سلف $L_1$ را می‌نویسیم.

$$\begin{cases} i_{C_1} + i_{R_1} - g_{m_2}v_2 - i_s(t) + i_{C_2} + i_{R_2} - g_{m_1}v_1 = 0 \\ v_{L_1} + v_{L_2} = e_s(t) \end{cases}$$

حال باید $v_2$ و $i_2$ و $i_{C_2}$ و $i_{R_1}$ و $i_{R_2}$ را برحسب متغیرهای حالت نوشت. طبق تعریف داریم.

$$\frac{1}{R_1}=G_1 \quad \frac{1}{R_2}=G_2$$

$$C_1\dot{V}_1+G_1V_1-g_{m_2}V_1+g_{m_2}e_s(t)-i_s(t)+C_2\dot{V}_1-C_2\frac{de_s(t)}{dt}+G_2V_1-G_2e_s(t)-g_{m_1}V_1=0$$

$$L_1\dot{i}_1+L_2\dot{i}_1+L_2\frac{di_s(t)}{dt}=e_s(t)$$

حال معادلات فوق را مرتب می‌کنیم.

$$\begin{cases}\dot{V}_1=\left(\dfrac{g_{m_1}+g_{m_2}-G_1-G_2}{C_1+C_2}\right)V_1+\left(\dfrac{G_2-g_{m_2}}{C_1+C_2}\right)e_s(t)+\left(\dfrac{C_2}{C_1+C_2}\right)\dfrac{de_s(t)}{dt}+\dfrac{1}{C_1+C_2}i_s(t)\\ \dot{i}_1=\left(\dfrac{1}{L_1+L_2}\right)e_s(t)-\left(\dfrac{L_2}{L_1+L_2}\right)\dfrac{di_s(t)}{dt}\end{cases}$$

حال جریان گذرنده از منبع ولتاژ را $I$ فرض کرده و آن را نیز برحسب متغیرهای حالت می‌نویسیم.

$$I=i_1+i_{C_1}+i_{R_1}-g_{m_2}v_2$$

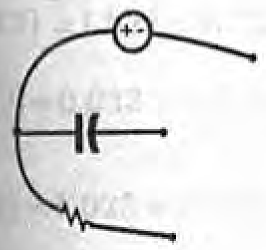
حال عبارات $v_2$ و $i_{R_1}$ و $i_{C_1}$ را از بالا جایگزین می‌کنیم.

$$I=\left[\frac{C_1\ (g_{m_1}-G_1-G_2)\ -g_{m_2}C_2}{C_1+C_2}\right]v_1+i_1+\left[\frac{G_2C_1+g_{m_2}C_2}{C_1+C_2}\right]e_s(t)+\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\frac{de_s(t)}{dt}+\frac{C_1}{C_1+C_2}i_s(t)$$

چون سلفهای $L_1$ و $L_2$ و منبع جریان $i_s(t)$ تشکیل یک کات ست و خازن های $C_1$ و $C_2$ و منبع ولتاژ تشکیل یک حلقه می‌دهند پس ظهور مشتقات ورودی در معادلات حالت اجتناب پذیر است.

قسمت (ب):

چون $v_{C_2}=e_s(t)-v_{C_1}$ پس $v_{C_2}$ می‌باشد نمی‌تواند بعنوان متغیر حالت در نظر گرفته شود. درخت مناسب زیر را انتخاب می‌کنیم. معادله کات ست اساسی متناظر با خازن $C_1$ و معادله حلقه اساسی متناظر با سلف را می‌نویسیم.



$$\begin{cases}i_{C_1}=i_L+i_{C_2} & (I)\\ v_L=v_{R_1}-v_{C_1} & (II)\end{cases}$$

حال $i_{C_2}$ و $v_{R_1}$ را برحسب متغیرهای حالت می‌نویسیم.

از $KCL$ در گره زمین داریم.
و از $KVL$ در مقاومتهای $R_1$ و $R_2$ و منبع ولتاژ داریم:

$$\begin{cases} i_{R_1}+i_L+i_{R_2}-i_s(t)-ki_{C_1}=0 \\ R_1 i_{R_1}-R_2 i_{R_2}=e_s(t) \end{cases}$$

از معادله $I$ داریم.

$$v_{C_1}=\frac{1}{C_1+C_2}\, i_L+\frac{C_2}{C_1+C_2}\,\frac{de_s(t)}{dt}$$

حال $i_{C_1}$ را در دو معادله دو مجهولی ایجاد شده برحسب $i_{R_1}$ و $i_{R_2}$ قرار می‌دهیم و از حل آن دستگاه $i_{R_1}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} i_{R_1}+i_{R_2}=\left[\dfrac{(k-1)C_1-C_2}{C_1+C_2}\right] i_L+\dfrac{kC_1C_2}{C_1+C_2}\,\dfrac{de_s(t)}{dt}+i_s(t) \\ R_1 i_{R_1}-R_2 i_{R_2}=e_s(t) \end{cases}$$

از حل دستگاه نتیجه می‌شود.

$$i_{R_1}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\left[\frac{(k-1)C_1-C_2}{C_1+C_2}\right] i_L+\frac{kC_1C_2R_2}{(C_1+C_2)\ (R_1+R_2)}\,\frac{de_s(t)}{dt}+\frac{1}{R_1+R_2}\,e_s(t)+\frac{R_2}{R_1+R_2}\,i_s(t)$$

بعد از جایگزینی، معادلات حالت بصورت زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{cases} v_{C_1}=\dfrac{1}{C_1+C_2}\, i_L+\dfrac{C_2}{C_1+C_2}\,\dfrac{de_s(t)}{dt} \\ i_L=-v_{C_1}+\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}\left[\dfrac{(k-1)C_1-C_2}{C_1+C_2}\right] i_L+\dfrac{R_1}{R_1+R_2}\,e_s(t)+\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}\,i_s(t)+\dfrac{kR_1R_2C_1C_2}{(R_1+R_2)\ (C_1+C_2)}\,\dfrac{de_s(t)}{dt} \end{cases}$$

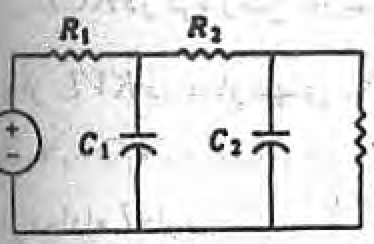
حال جریان گذرنده از منبع ولتاژ را می‌نویسیم.

$$I=i_C+i_{R_1}-i_s(t)$$

$$I=\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\left[\frac{(k-1)C_1-C_2}{C_1+C_2}\right]+\frac{C_1}{C_1+C_2}\right) i_L+\frac{1}{R_1+R_2}\,e_s(t)+\left(\frac{kC_1C_2R_2}{(C_1+C_2)\ (R_1+R_2)}+\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\right)\times$$
$$\frac{de_s(t)}{dt}-\frac{R_1}{R_1+R_2}\,i_s(t)$$

چون منبع ولتاژ $e_s(t)$ و خازنهای $C_1$ و $C_2$ تشکیل حلقه می‌دهند ولی منبع جریان با هیچ سلفی تشکیل کات

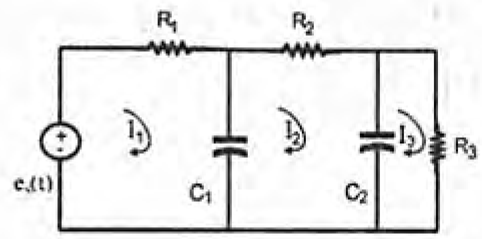
ست نمی‌دهد پس ظهور مشتق $e_s(t)$ در معادلات حالت اجتناب ناپذیر است ولی مشاهده می‌شود که مشتق $i_s(t)$ در معادلات حالت ظاهر نشده است.



شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۹)

۱۹ – می‌دانیم مدار نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۹) از مرتبهٔ دوم است و می‌توان به سادگی با دو معالهٔ حالت برحسب ولتاژهای خازن‌ها، آن را توصیف کرد. فرض کنید می‌خواهیم معادلات حالت این مدار را برحسب جریانهای مش های آن بنویسیم. این معادلات را بنویسید و توضیح مناسبی در مورد این که مدار مرتبهٔ را با سه معادلهٔ حالت بیان می‌کنیم، ارائه دهید.

حل:




$$KVL\ 1: v_{R_1}+v_{C_1}=e_s(t)$$

$$KVL\ 2: v_{R_2}+v_{C_2}-v_{C_1}=0$$

$$KVL\ 3: v_{R_3}-v_{C_2}=0$$

$$KVL\ 1: R_1 i_1+\frac{1}{C_1}\int_0^t (i_1-i_2)\,dt+v_{C_1}(0)=e_s(t)$$

$$KVL\ 2: R_2 i_2+\frac{1}{C_2}\int_0^t (i_2-i_3)\,dt+v_{C_2}(0)-\frac{1}{C_1}\int_0^t (i_1-i_2)\,dt-v_{C_1}(0)=0$$

$$KVL\ 3: R_3 i_3-\frac{1}{C_2}\int_0^t (i_2-i_3)\,dt-v_{C_2}(0)=0$$

حال از طرفین روابط فوق مشتق می‌گیریم.

$$R_1\dot{i}_1+\frac{1}{C_1}(i_1-i_2)=\dot{e}_s(t)$$

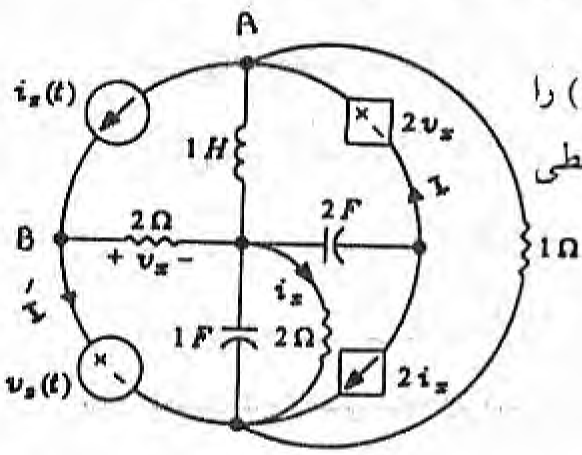
$$R_2\dot{i}_2+\frac{1}{C_2}(i_2-i_3)-\frac{1}{C_1}(i_1-i_2)=0$$

$$R_3\dot{i}_3-\frac{1}{C_2}(i_2-i_3)=0$$

$$\begin{bmatrix}\dot{i}_1\\ \dot{i}_2\\ \dot{i}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{R_1C_1} & \frac{1}{R_1C_1} & \frac{1}{R_1}\\ \frac{1}{R_2C_1} & -\frac{C_1+C_2}{R_1C_1C_2} & \frac{1}{R_2C_2}\\ 0 & \frac{1}{R_3C_2} & -\frac{1}{R_3C_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\\ i_3\end{bmatrix}+\dot{e}_s(t)\begin{bmatrix}\frac{1}{R_1}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

در مورد تعداد حالات در یک مدار اگر تعداد خازن ها و سلفها را انتخاب می‌کنیم به تعداد هر حلقه خازنی و به تعداد هر کات ست سلفی از تعداد حالات مدار کاسته می‌شود یعنی دسته‌ای از ولتاژها و جریان ها می‌توانند بعنوان متغیرهای حالت محسوب می‌شوند بشرط این که کاملا" از هم استقلال داشته باشند در مورد مدار فوق می‌بینیم که سه جریان مش از همدیگر مستقل‌اند پس می‌توان از آنها به عنوان متغیر حالت استفاده کرد.

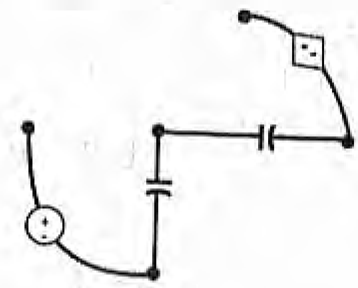
۲۰- معادلات حالت مدار نشان داده شده در شکل (مسالهٔ ۱۲-۲۰) را بنویسید و بردار خروجی $\begin{bmatrix} i_x \\ v_x \end{bmatrix}$ را برحسب ترکیب خطی متغیرهای حالت و ورودی ها بنویسید.




شکل (مسألهٔ ۱۲-۲۰)

حل:

درخت زیر را انتخاب می‌کنیم.



$$\begin{cases} v_x = v_s(t) - v_{C_1} \\ i_x = \dfrac{1}{2} v_{C_1} \end{cases}$$

جریان گذرنده از منبع ولتاژ وابسته $2v_x$ را با نماد $I$ و جریان گذرنده از منبع ولتاژ نابسته $v_s$ را با نماد $I'$ نمایش می‌دهیم.

$C_1$ برای کات ست متناظر با $KCL$ : $i_{C_1} + i_x + 2i_x + i_{R_1} + I' = 0$ $\quad (I)$

$C_2$ برای کات ست متناظر با $KCL$ : $i_{C_2} - 2i_x - I = 0$ $\quad (II)$

برای حلقه سلفی $KVL$ : $V_L = 2V_x - V_{C_2}$ $\quad (III)$

حال باید $i_{R_1}$ و $I$ و $I'$ را برحسب متغیرهای حالت نوشت.

$$v_{R_1} = v_{C_1} - v_{C_2} + 2v_x \quad \Rightarrow \quad i_{R_1} = v_{C_1} - v_{C_2} + 2v_x$$

$$\left[ i_{R_1} = -v_{C_1} - v_{C_2} + 2v_s(t) \right]$$

با نوشتن $KCL$ در گره $A$ جریان $I$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\left[ I = i_L + i_s(t) - v_{C_1} - v_{C_2} + 2v_s(t) \right]$$

با نوشتن $KCL$ در گره $B$ جریان $I'$ را نیز محاسبه می‌کنیم.

$$I' = i_s(t) - \frac{v_x}{2} = i_s(t) + \frac{1}{2}v_{C_1} - \frac{1}{2}v_s(t)$$

حال عبارات بدست آمده در معادلات $I$ و $II$ قرار می‌دهیم تا معادلات حالت بدست آیند.

$$\dot{v}_{C_1} = -v_{C_1} + v_{C_2} - \frac{3}{2}v_s(t) - i_s(t)$$

$$\dot{v}_{C_2} = -\frac{1}{2}v_{C_2} + \frac{1}{2}i_L + v_s(t) + \frac{1}{2}i_s(t)$$

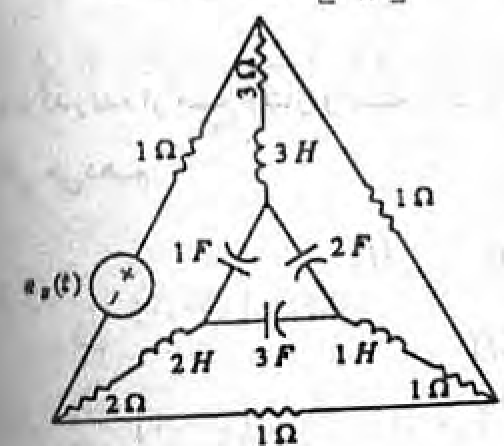
$$\dot{i}_L = -2v_{C_1} - v_{C_2} + 2v_s(t)$$

حال معادلات را بصورت ماتریسی در می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix}\dot{v}_{C_1}\\ \dot{v}_{C_2}\\ \dot{i}_L\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -2 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{C_1}\\ v_{C_2}\\ i_L\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\frac{3}{2} & -1\\ 1 & \frac{1}{2}\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_s(t)\\ i_s(t)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}i_x\\ v_x\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{C_1}\\ v_{C_2}\\ i_L\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_s(t)\\ i_s(t)\end{bmatrix}$$

۲۱- معادلات حالت مدار نشان داده در شکل (مسالهٔ ۱۲-۲۱ ) را بنویسید و آن را به صورت ماتریسی درآورید. جریان گذرنده از منبع ولتاژ $e_s(t)$ را برحسب متغیرهای حالت ورودی بیان کنید.

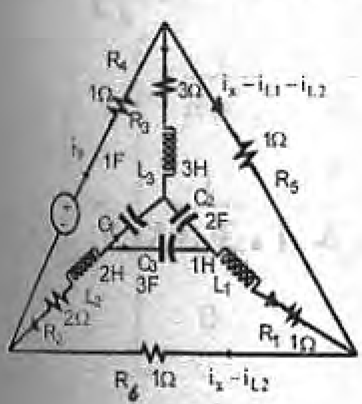


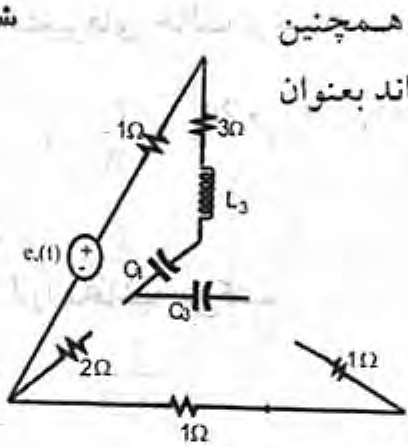

شکل (مسالهٔ ۱۲-۲۱)

حل:

چون سفلهای $L_1$ و $L_2$ و $L_3$ تشکیل یک کات ست می‌دهد ($i_{L_3} = i_{L_1} + i_{L_2}$)پس $i_{L_3}$ نمی‌تواند بعنوان یک متغیر حالت در نظر گرفته شود و همچنین $V_{C_2} = V_{C_3} - V_{C_1}$ می‌باشد پس $V_{C_2}$ نمی‌تواند بعنوان متغیر حالت د رنظر گرفته شود.

در خت زیر را انتخاب می‌کنیم.



چون در محاسبات به $i_x$ احتیاج داریم پس اول آن را محاسبه می‌کنیم برای محاسبه $i_x$ یک $KVL$ در مش بیرونی می‌نویسیم.

$$i_x + i_x - i_{L_1} - i_{L_2} + i_x - i_{L_2} = e_s(t)$$

$$\left[ i_x = \frac{1}{3}\ i_{L_1} + \frac{2}{3}\ i_{L_2} + \frac{1}{3}\ e_s(t) \right]$$

$KVL$ در حلقه سلفی $L_1$ : $v_{L_1} = e_s(t) + v_{C_1} - v_{C_3} - v_{L_3} - v_{R_3} - v_{R_4} - v_{R_5} - v_{R_6}$

$KVL$ در حلقه سلفی $L_2$ : $v_{L_2} = e_s(t) + v_{C_1} - v_{L_3} - v_{R_2} - v_{R_3} - v_{R_4}$

$KCL$ در کات ست خازنی $C_1$ : $i_{C_1} = -i_{L_1} - i_{L_2} - i_{C_2}$

$KCL$ در کات ست خازنی $C_3$ : $i_{C_3} + i_{L_2} + i_{C_1} = 0$

حال باید عبارات فوق را کلا" برحسب متغیرهای حالت بنویسیم. با جایگذاری مقادیر به دو دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر می‌رسیم که از حل آنها معادلات حالت بدست می‌آید.

$$\begin{cases} 4\dot{i}_{L_1} + 3\dot{i}_{L_2} = v_{C_1} + v_{C_3} - 3i_{L_1} - 3i_{L_2} \\ \\ 3\dot{i}_{L_1} + 5\dot{i}_{L_2} = v_{C_1} - \frac{10}{3}\ i_{L_1} - \frac{17}{3}\ i_{L_2} + \frac{2}{3}\ e_s(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{v}_{C_1} - 2\dot{v}_{C_3} = i_{L_1} + i_{L_2} \\ \\ \dot{v}_{C_1} + 3\dot{v}_{C_3} = -i_{L_2} \end{cases}$$

$$\dot{v}_{C_1} = \frac{3}{5}\ i_{L_1} + \frac{1}{5}\ i_{L_2}$$

$$\dot{v}_{C_2} = -\frac{1}{5}\ i_{L_1} - \frac{2}{5}\ i_{L_2}$$

$$\dot{i}_{L_1} = \frac{2}{11}\ v_{C_1} + \frac{5}{11} v_{C_3} - \frac{5}{11} i_{L_1} + \frac{2}{11} i_{L_2} - \frac{2}{11} e_{s(t)}$$

$$\dot{i}_{L_2} = \frac{1}{11}\ v_{C_1} - \frac{3}{11} v_{C_3} - \frac{13}{33}\ i_{L_1} - \frac{41}{33}\ i_{L_2} + \frac{8}{33}\ e_s(t)$$

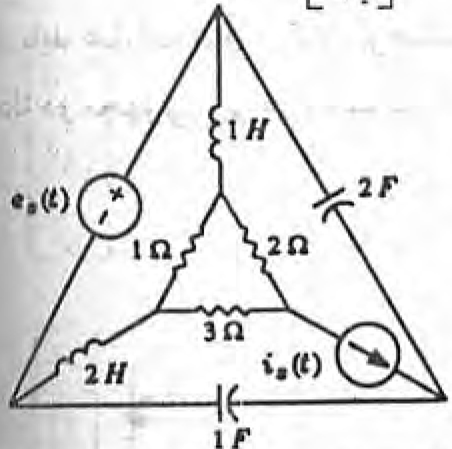
جریان گذرنده از منبع ولتاژ همان $i_x$ است که محاسبه کردیم.

$$i_x = \frac{1}{3}\ i_{L_1} + \frac{2}{3}\ i_{L_2} + \frac{1}{3}\ e_s(t)$$

حال معادلات را بصورت ماتریسی می‌نویسیم.

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{C_1} \\ \dot{v}_{C_3} \\ \dot{i}_{L_1} \\ \dot{i}_{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{11} & \frac{5}{11} & -\frac{5}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} & -\frac{13}{33} & -\frac{41}{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_3} \\ i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix} + e_s(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{11} \\ \frac{8}{33} \end{bmatrix}$$

$$i_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix} + \frac{1}{3} e_s(t)$$




۲۲-الف- معادلات حالت مدار شکل (مسالهٔ ۱۲-۲۲) را بنویسید و جریان گذرنده از منبع ولتاژ $e_s(t)$ را برحسب متغیرهای حالت بیان کنید. سعی کنید مشتق ورودی در معادلات حالت ظاهر نشود.

ب- اکنون فرض کنید منبع جریان $i_s(t)$ با یک سلف $2H$ جایگزین شود. بار دیگر معادلات حالت را بنویسید.

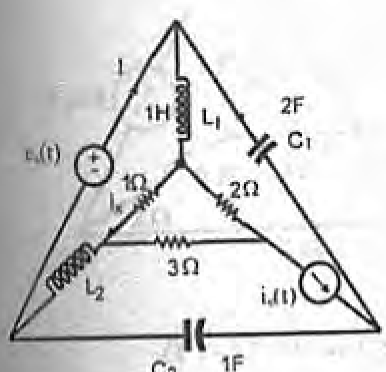
پ- اکنون فرض کنید منبع ولتاژ $e_s(t)$ با خازنی با ظرفیت $2F$ جایگزین شود. بار دیگر معادلات حالت را بنویسید.

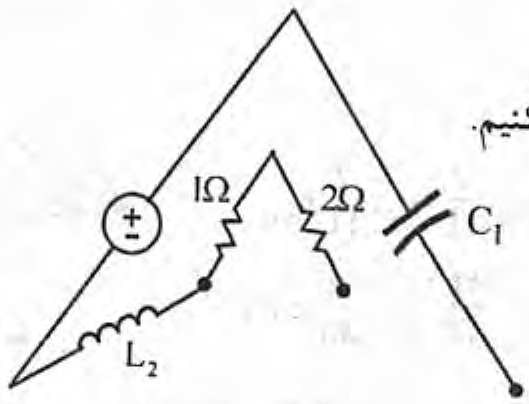
ت- فرض کنید حالتهای ب و پ باهم اتفاق بیفتند. بار دیگر معادلات حالت مدار را بنویسید.

حل:

قسمت (الف)

درخت مناسب زیر را انتخاب می‌کنیم.




چون $v_{C_2}=v_{C_1}-e_s(t)$ و $i_{L_2}=i_{L_1}-i_s(t)$ پس $v_{C_2}$ و $i_{L_2}$ نمی‌توانند بعنوان متغیرهای حالت در نظر گرفته شوند.

برای حل مسأله جریان مقاومت $1\Omega$ را برابر $i_x$ در نظر می‌گیریم و آنها را محاسبه می‌کنیم. طبق $KCL$ جریان مقاومت $2\Omega$ برابر $i_{L_1}-i_x$ و جریان مقاومت $3\Omega$ برابر $i_{L_1}-i_x-i_s(t)$ بدست می‌آیند. برای محاسبه $i_x$ درمثلث داخلی یک $KVL$ می‌نویسیم.

$$i_x-3\left[i_{L_1}-i_x-i_s(t)\right]-2\left[i_{L_1}-i_x\right]=0 \quad\Rightarrow\quad \left[i_x=\frac{5}{6}i_{L_1}-\frac{1}{2}i_s(t)\right]$$

حال معادلات را می‌نویسیم.

$$\begin{cases} v_{L_1}+i_x+v_{L_2}=e_s(t) & (I) \\ i_{C_1}+i_{C_2}+i_s(t)=0 & (II) \end{cases}$$

$KVL$ در حلقه سلفی

$KCL$ در کات ست سلفی

حال باید در عبارات فوق $v_{L_2}$ و $i_{C_2}$ را برحسب متغیرهای حالت نوشت.

$$V_{L_2}=L_2\frac{di_{L_2}}{dt}=L_2\frac{d}{dt}\left[i_{L_1}-i_s(t)\right]=2\dot{i}_{L_1}-2\frac{di_s(t)}{dt}$$

$$i_{C_2}=C_2\frac{dV_{C_2}}{dt}=C_2\frac{d}{dt}\left[v_{C_1}-e_s(t)\right]=\dot{V}_{C_1}-\frac{de_s(t)}{dt}$$

حال عبارات محاسبه شده و $i_x$ را در معادلات $I$ و $II$ قرار می‌دهیم تا معادلات حالت بدست آیند.

$$\begin{cases} \dot{i}_{L_1}=-\frac{5}{18}i_{L_1}+\frac{1}{3}e_s(t)+\frac{1}{6}i_s(t)+\frac{2}{3}\frac{di_s(t)}{dt} \\ \dot{v}_{C_1}=-\frac{1}{3}i_s(t)+\frac{1}{3}\frac{de_s(t)}{dt} \end{cases}$$

جریان گذرنده از منبع ولتاژ بصورت زیر می‌باشد. اگر جریان گذرنده از مبنع ولتاژ را با نماد $I$ نشان دهیم داریم.

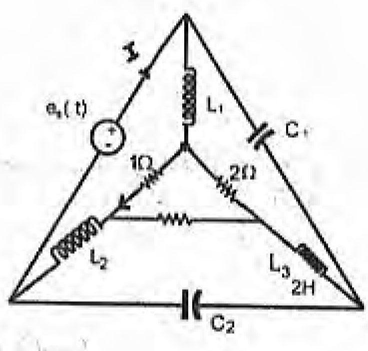
$$I=i_{L_1}+i_{C_1}$$

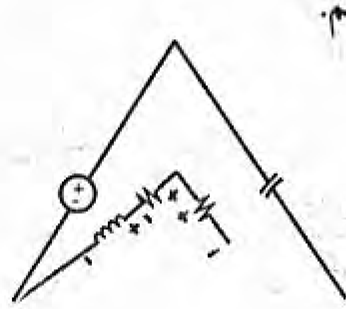
$$I=i_{L_1}-\frac{2}{3}i_s(t)+\frac{2}{3}\frac{de_s(t)}{dt}$$

قسمت (ب):

منبع جریان $i_s(t)$ را با سلف $L_3=2H$ تعویض شده است.

درخت زیر را انتخاب می‌کنیم.



چون $i_{L_2}=i_{L_1}-i_{L_3}$ پس $i_{L_2}$ نمی‌تواند بعنوان متغیر حالت در نظر گرفته شود. همچنین $v_{C_2}=v_{C_1}-e_s(t)$

است پس $v_{C_2}$ نمی‌تواند بعنوان متغیر حالت در نظر گرفته شود. باز دوباره جریان مقاومت $1\Omega$ را برابر $i_x$ فرض کرده و آن را محاسبه می‌کنیم. طبق $KCL$ جریان مقاومت $2\Omega$ برابر $i_{L_1} - i_x$ و جریان مقاومت 3 اهمی برابر $i_{L_1} - i_x - i_{L_3}$ می‌باشد. با نوشتن $KVL$ در مثلث کوچک $i_x$ بدست می‌آید.

$$i_x - 3\left(i_{L_1} - i_x - i_{L_3}\right) - 2\left(i_{L_1} - i_x\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[i_x = \frac{5}{6}\, i_{L_1} - \frac{1}{2}\, i_{L_3}\right]$$

معادلات را می‌نویسیم.

$L_1$ متناظر با حلقه سلفی $KVL$ : $v_{L_1} = e_s(t) - v_{L_2} - i_x$

$L_3$ متناظر با حلقه سلفی $KVL$ : $v_{L_3} = -2\left(i_{L_1} - i_x\right) + i_x + v_{L_2} - e_s(t) + v_{C_1}$

$C_1$ در کات ست خازنی $KCL$ : $i_{C_1} = -i_{C_2} - i_{L_3}$

$i_{C_2}$ را از قبل می‌دانیم و $i_x$ نیز در بالا محاسبه شده است فقط باید $v_{L_2}$ را محاسبه کنیم و در معادلات فوق قرار دهیم تا معادلات حالت بدست آیند.

$$v_{L_2} = L_2 \frac{di_{L_2}}{dt} = L_2 \frac{d}{dt}\left(i_{L_1} - i_{L_3}\right) = 2\dot{i}_{L_1} - 2\dot{i}_{L_3}$$

پس از قرار دادن عبارات و مقادیر دو معادله دو مجهولی زیر حاصل می‌شود که از حل آنها $\dot{i}_{L_1}$ و $\dot{i}_{L_3}$ بدست می‌آیند.

$$\begin{cases} -2\dot{i}_{L_1} + 4\dot{i}_{L_3} = v_{C_1} + \frac{1}{2}\, i_{L_1} - \frac{3}{2}\, i_{L_3} - e_s(t) \\ 3\dot{i}_{L_1} - 2\dot{i}_{L_3} = -\frac{5}{6}\, i_{L_1} + \frac{1}{2}\, i_{L_3} + e_s(t) \end{cases}$$

که از حل آنها داریم.

$$\begin{cases} \dot{i}_{L_1} = \frac{1}{4}\, v_{C_1} - \frac{7}{24}\, i_{L_1} - \frac{1}{8}\, i_{L_3} + \frac{1}{4}\, e_s(t) \\ \dot{i}_{L_3} = \frac{3}{8}\, v_{C_1} - \frac{1}{48}\, i_{L_1} - \frac{7}{16}\, i_{L_3} - \frac{1}{8}\, e_s(t) \\ \dot{v}_{C_1} = -\frac{1}{3}\, i_{L_3} + \frac{1}{3}\, \frac{de_s(t)}{dt} \end{cases}$$

معادله جریان گذرنده از منبع ولتاژ نیز بصورت زیر می‌باشد.

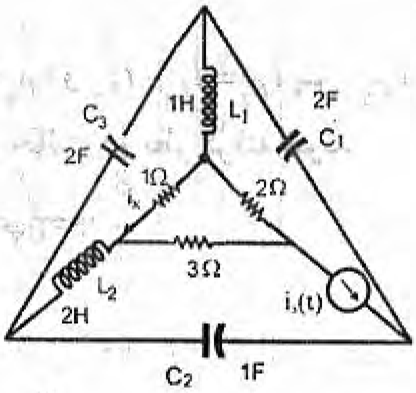
$$I = i_{L_1} + i_C$$

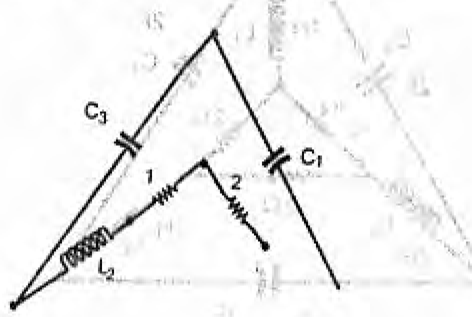
$$\left[I = i_{L_1} - \frac{2}{3}\, i_{L_3} + \frac{2}{3}\, \frac{de_s(t)}{dt}\right]$$

قسمت (پ):

چون $v_{C_2} = v_{C_1} - v_{C_3}$ و $i_{L_2} = i_{L_1} - i_s(t)$ می‌باشد پس $v_{C_2}$ و $i_{L_2}$ نمی‌تواند به عنوان یک متغیر حالت در نظ

گرفته شوند. درخت زیر را انتخاب می‌کنیم.




طبق محاسبات بندهای قبلی داریم.

$$\left[i_x=\frac{5}{6}\,i_{L_1}-\frac{1}{2}\,i_s(t)\right]$$

$KVL$ در حلقه متناظر با سلف $L_1$ :

$KCL$ در کات‌ست متناظر با $C_1$ :

$KCL$ در کات ست متناظر با $C_3$ :

$$\begin{cases} v_{L_1}=v_{C_3}-i_x-v_{L_2} & (I) \\ i_{C_1}+i_s(t)+i_{C_2}=0 & (II) \\ i_{C_3}+i_{L_2}-i_{C_2}=0 & (III) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{L_2}=L_2\dot{i}_{L_1}-L_2\dfrac{di_s(t)}{dt} \\ i_{C_2}=C_2\dot{v}_{C_2}=C_2\dot{v}_{C_1}-C_2\dot{v}_{C_3} \end{cases}$$

با جایگزین کردن مقادیر در معادله $(I)$ داریم.

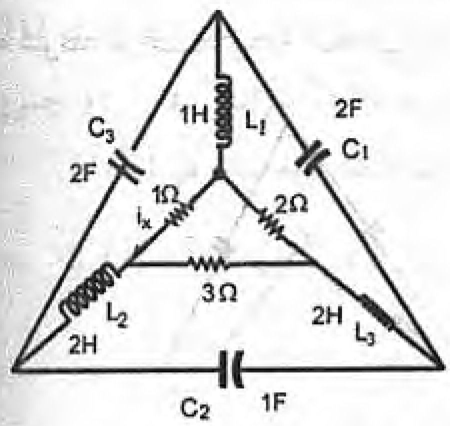
$$\dot{i}_{L_1}=\frac{1}{3}\,v_{C_3}-\frac{5}{18}\,i_{L_1}+\frac{1}{6}\,i_s(t)+\frac{2}{3}\,\frac{di_s(t)}{dt}$$

با جایگزین کردن مقادیر در معادلات $(II$ و $III)$ به دو معادله دو مجهولی زیر می‌رسیم که با حل آن $v_{C_1}$ و $v_{C_3}$ بدست می‌آیند.

$$\begin{cases} 3\dot{v}_{C_1}-\dot{v}_{C_3}=-\,i_s(t) \\ -\dot{v}_{C_1}+3\dot{v}_{C_3}=-\,i_{L_1}+i_s(t) \end{cases}$$

و بطور کلی معادلات بصورت زیر می‌شوند.

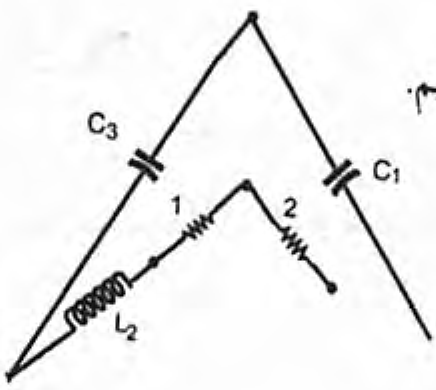
$$\begin{cases} \dot{v}_{C_1}=-\dfrac{1}{8}i_{L_1}-\dfrac{1}{4}\,i_s(t) \\ \dot{v}_{C_3}=-\dfrac{3}{8}\,i_{L_1}+\dfrac{1}{4}\,i_s(t) \\ \dot{i}_{L_1}=\dfrac{1}{3}\,V_{C_3}-\dfrac{5}{18}\,i_{L_1}+\dfrac{1}{6}\,i_s(t)+\dfrac{2}{3}\,\dfrac{di_s(t)}{dt} \end{cases}$$




قسمت (ت):

چون $v_{C_2}=v_{C_1}-v_{C_3}$ و $i_{L_2}=i_{L_1}-i_{L_3}$ پس $v_{C_2}$ و $i_{L_2}$ نمی‌توانند بعنوان متغیر حالت در نظر گرفته شوند.

درخت زیر را انتخاب می‌کنیم.




$i_x$ را با توجه به محاسبه در قسمت (ب) می‌نویسیم.

$$\left[i_x=\frac{5}{6}\, i_{L_1}-\frac{1}{2}\, i_{L_3}\right]$$

معادلات حلقه ها و کات ست ها را می‌نویسیم.

$$\begin{cases} v_{L_1}=v_{C_3}-v_{L_2}-i_x \\ v_{L_3}=-2\left(i_{L_1}-i_x\right)+i_x+v_{L_2}-v_{C_3}+v_{C_1} \\ i_{C_1}=-i_{C_2}-i_{L_3} \\ i_{C_3}=i_{C_2}-i_{L_2} \end{cases}$$

با محاسباتی که در قسمتهای قبل داشتیم می‌توانیم معادلات حالت را بنویسیم که در این مورد به دو دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر می‌رسیم که با حل هر یک از آنها معادلات حالت نوشته می‌شوند.

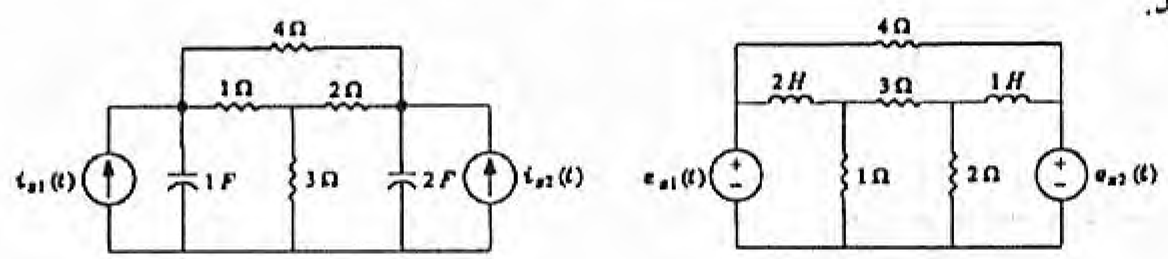
$$\begin{cases} 3\dot{i}_{L_1}-2\dot{i}_{L_3}=v_{C_3}-\frac{5}{6}i_{L_1}+\frac{1}{2}i_{L_3} \\ -2\dot{i}_{L_1}+4\dot{i}_{L_3}=v_{C_1}-v_{C_3}-\frac{1}{2}\, i_{L_1}-\frac{3}{2}\, i_{L_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\dot{v}_{C_1}-\dot{v}_{C_3}=-i_{L_3} \\ -\dot{v}_{C_1}+3\dot{v}_{C_3}=-i_{L_1}+i_{L_3} \end{cases}$$

معادلات را بصورت ماتریسی می‌نویسیم.

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{C_1} \\ \dot{v}_{C_2} \\ \dot{i}_{L_1} \\ \dot{i}_{L_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{13}{24} & -\frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{19}{48} & -\frac{7}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_3} \\ i_{L_1} \\ i_{L_3} \end{bmatrix}$$

۲۳- معادلات حالت مدارهای نشان داده شده درشکل (مسالهٔ ۱۲-۲۳) را با روش منظم بنویسید و به شکل ماتریسی درآورید.

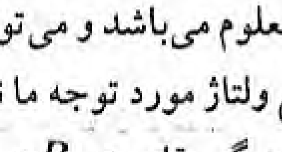


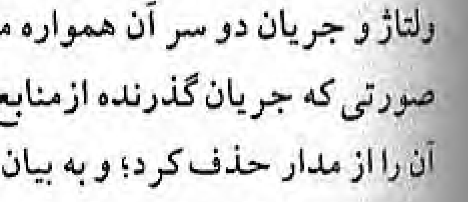

(ب) (الف)

شکل (مسألهٔ ۱۲-۲۳)

حل:

چون مقاومت $R_4$ با دو منبع ولتاژ $e_1$ و $e_2$ سری است پس ولتاژ و جریان دو سر آن همواره معلوم می‌باشد و می توان در صورتی که جریان گذرنده ازمنابع ولتاژ مورد توجه ما نباشد آن را از مدار حذف کرد؛ و به بیان دیگر مقاومت $R_4$ هیچ نقشی در تعیین ثابت زمانی مدار ندارد. درخت مناسب زیر را انتخاب می‌کنیم. معادلات حلقه را نوشته و بصورت ماتریسی در می‌آوریم.
مقاومت $R_1$ و $R_2$ را به ترتیب با $G_1$ و $G_2$ نمایش می‌دهیم.




$$BV=0$$

$$v_{R_3}-v_{G_1}+v_{G_2}=0$$

$$v_{L_1}-e_1+v_{G_1}=0$$

$$v_{L_2}-e_2+v_{G_2}=0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} v_{R_3} \\ v_{L_1}-e_1 \\ v_{L_2}-e_2 \\ v_{G_1} \\ v_{G_2} \end{bmatrix} = 0$$

(دقت شود که منابع ولتاژ جزو لینکهای سلفی هستند)

از طرفی معادلات کات ست را نیز می‌نویسیم. $QJ=0$

می‌توان از روی ماتریس $B$ ماتریس $Q$ را نوشت.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{R_3} \\ j_{L_1} \\ j_{L_2} \\ j_{G_1} \\ j_{G_2} \end{bmatrix} = 0$$

اکنون معادلات شاخه‌ها را نیز می‌نویسیم.

$$\begin{cases} v_{R_3} = R_3 j_{R_3} \\ v_{L_1} = L_1 \dfrac{d}{dt} j_{L_1} - e_1 \\ v_{L_2} = L_2 \dfrac{d}{dt} j_{L_2} - e_2 \\ j_{G_1} = G_1 v_{G_1} \\ j_{G_2} = G_2 v_{G_2} \end{cases}$$

توضیح: در معادلات فوق دقت شود که $v_{L_1}$ و $v_{L_2}$ کل ولتاژ شاخه را نشان می‌دهند یعنی ولتاژ لینک شامل اتصال سری سلف و منبع ولتاژ است.

حال معادلات حلقه و کات ست را بصورت زیر نیز می‌توان نوشت.

$$\begin{bmatrix} v_{R_3} \\ v_{L_1} - e_1 \\ v_{L_2} - e_2 \end{bmatrix} = -F \begin{bmatrix} v_{G_1} \\ v_{G_2} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} j_{G_1} \\ j_{G_2} \end{bmatrix} = F^T \begin{bmatrix} j_{R_3} \\ j_{L_1} \\ j_{L_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_{R_3} \\ v_{L_1} - e_1 \\ v_{L_2} - e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{G_1} \\ v_{G_2} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} j_{G_1} \\ j_{G_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{R_3} \\ j_{L_1} \\ j_{L_2} \end{bmatrix}$$

حال معادلات را به شکل متعارف می‌نویسیم.

$$\begin{cases} v_{L_1} = -v_{G_1} + e_1 \\ v_{L_2} = -v_{G_2} + e_2 \end{cases}$$

حال باید $v_{G_1}$ و $v_{G_2}$ را برحسب $j_{L_1}$ و $j_{L_2}$ نوشته شود.

$$\begin{cases} v_{R_3} = v_{G_1} - v_{G_2} \\ j_{G_1} = -j_{R_3} + j_{L_1} \\ j_{G_2} = j_{R_3} + j_{L_2} \end{cases}$$

از سه معاله فوق دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر بدست می‌آید.

$$\begin{cases} (R_1+R_3)\, v_{G_1} - R_1 v_{G_2} = R_1 R_3 i_{L_1} \\ -R_2 v_{G_1} + (R_2+R_3)\, v_{G_2} = R_2 R_3 i_{L_2} \end{cases}$$

که با حل دستگاه فوق نتیجه می‌شود.

$$v_{G_1} = \frac{R_1\,(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3} i_{L_1} + \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2+R_3} i_{L_2} = \frac{5}{6} i_{L_1} + \frac{1}{3} i_{L_2}$$

$$v_{G_2} = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2+R_3} i_{L_1} + \frac{R_2\,(R_1+R_3)}{R_1+R_2+R_3} i_{L_2} = \frac{1}{3} i_{L_1} + \frac{4}{3} i_{L_2}$$

مقادیر را جایگزین کرده و معادلات حالت بصورت زیر هستند.

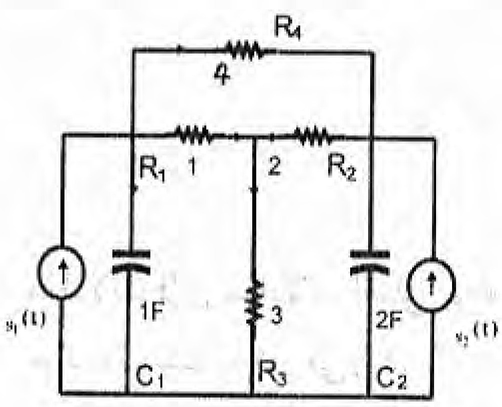
$$L_1 \dot{i}_{L_1} = -\frac{5}{6} i_{L_1} - \frac{1}{3} i_{L_2} + e_1$$

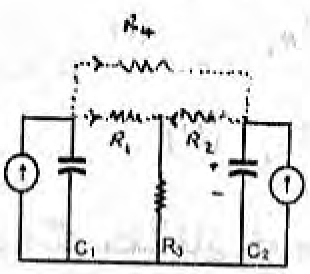
$$L_2 \dot{i}_{L_2} = -\frac{1}{3} i_{L_1} - \frac{4}{3} i_{L_2} + e_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{L_1} \\ \dot{i}_{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{s_1}(t) \\ e_{s_2}(t) \end{bmatrix}$$

قسمت (ب):

درخت زیر را انتخاب می‌کنیم.




معادلات حلقه را بصورت زیر می‌نویسیم. $BV=0$

توضیح: $v_{G_3}$ همان ولتاژ روی مقاومت $R_3$ است.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} v_{R_1} \\ v_{R_2} \\ v_{R_4} \\ v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ v_{G_3} \end{bmatrix} = 0 \qquad F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

معادلات کات ست رانیز می‌نویسیم. $Q\dot{J}=0$

توضیح :دقت شود عبارتهای $\dot{J}_{C_1}$ و $\dot{J}_{C_2}$ شامل منابع جریان $i_{s_1}$ و $i_{s_2}$ می‌باشند و یا:

$$\dot{J}_{C_1}=i_{C_1}-i_{s_1}(t)$$

$$\dot{J}_{C_2}=i_{C_2}-i_{s_2}(t)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{J}_{R_1} \\ \dot{J}_{R_2} \\ \dot{J}_{R_4} \\ \dot{J}_{C_1} \\ \dot{J}_{C_2} \\ \dot{J}_{G_3} \end{bmatrix} = 0$$

حال معادلات فوق را بصورت زیر می‌نویسیم.

$$\begin{bmatrix} v_{R_1} \\ v_{R_2} \\ v_{R_4} \end{bmatrix} = -F \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ v_{G_3} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \dot{J}_{C_1} \\ \dot{J}_{C_2} \\ \dot{J}_{G_3} \end{bmatrix} = F^T \begin{bmatrix} \dot{J}_{R_1} \\ \dot{J}_{R_2} \\ \dot{J}_{R_4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_{R_1} \\ v_{R_2} \\ v_{R_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ v_{G_3} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \dot{J}_{C_1} \\ \dot{J}_{C_2} \\ \dot{J}_{G_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{J}_{R_1} \\ \dot{J}_{R_2} \\ \dot{J}_{R_4} \end{bmatrix}$$

حال معادلات فوق را بصورت متعارف می‌نویسیم.

$$\dot{J}_{C_1} = -\dot{J}_{R_1} - \dot{J}_{R_4} \qquad (I)$$

$$\dot{J}_{C_2} = -\dot{J}_{R_2} + \dot{J}_{R_4} \qquad (II)$$

معادلات فوق معادلات اصلی بوده و بقیه معادلات بخاطر حذف دیگر متغیرهایی که جزو متغیرهای حالت نیستند به کار می‌رود.

$$\dot{J}_{G_3} = \dot{J}_{R_1} + \dot{J}_{R_2}$$

$$v_{R_1} = v_{C_1} - v_{G_3}$$

$$v_{R_2} = v_{C_2} - v_{G_3}$$

$$v_{R_4} = v_{C_1} - v_{C_2}$$

$$v_{G_3} = R_3\dot{J}_{R_3} = R_3\left(\dot{J}_{R_1} + \dot{J}_{R_2}\right) = 3\dot{J}_{R_1} + 3\dot{J}_{R_2}$$

$$J_{R_1}=\frac{1}{R_1}\ v_{R_1}=\frac{1}{R_1}\ \left(v_{C_1}-v_{G_3}\right)=v_{C_1}-3J_{R_1}-3J_{R_2}$$

$$J_{R_2}=\frac{1}{R_2}\ v_{R_2}=\frac{1}{R_2}\ \left(v_{C_2}-v_{G_3}\right)=\frac{1}{2}\ v_{C_2}-\frac{3}{2}\ J_{R_1}-\frac{3}{2}J_{R_2}$$

حال معادلات فوق را بصورت زیر مرتب می‌کنیم.

$$J_{R_4}=\frac{1}{R_4}\ v_4=\frac{1}{R_4}\ v_{C_1}-\frac{1}{R_4}\ v_{C_2}$$

$$\begin{cases} 4J_{R_1}+3J_{R_2}=v_{C_1} \\ \frac{3}{2}J_{R_1}+\frac{5}{2}J_{R_2}=\frac{1}{2}\ v_{C_2} \end{cases}$$

که از حل دستگاه فوق داریم.

$$J_{R_1}=\frac{5}{11}\ v_{C_1}-\frac{3}{11}\ v_{C_2}$$

$$J_{R_2}=-\frac{3}{11}\ v_{C_1}+\frac{4}{11}\ v_{C_2}$$

حال عبارات محاسبه شده $J_{R_1}$ و $J_{R_2}$ و $J_{R_3}$ را در معادلات $I$ و $II$ قرار می‌دهیم.

$$J_{C_1}=\left(-\frac{5}{11}\ v_{C_1}+\frac{3}{11}\ v_{C_2}\right)+\left(-\frac{1}{4}\ v_{C_1}+\frac{1}{4}\ v_{C_2}\right)$$

$$J_{C_2}=\left(\frac{3}{11}\ v_{C_1}-\frac{4}{11}\ v_{C_2}\right)+\left(\frac{1}{4}\ v_{C_1}-\frac{1}{4}\ v_{C_2}\right)$$

حال باید عبارات $J_{C_1}$ و $J_{C_2}$ را نیز در معادلات فوق قرار دهیم.

$$J_{C_1}=C_1\dot{v}_{C_1}-i_{s_1}(t)=\dot{v}_{C_1}-i_{s_1}(t) \qquad J_{C_2}=C_2\dot{v}_{C_2}-i_{s_2}(t)=2\dot{v}_{C_2}-i_{s_2}(t)$$

با مرتب کردن معادلات فوق به معادله ماتریسی زیر خواهیم رسید.

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{C_1} \\ \dot{v}_{C_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{31}{44} & \frac{23}{44} \\ \frac{23}{88} & -\frac{27}{88} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_{s_1}(t) \\ i_{s_2}(t) \end{bmatrix}$$

۲۴-الف- فرض کنید در مدارهای مسألهٔ ۲۳، مقاومت 4 اهمی با خازنی با ظرفیت 2 فاراد جایگزین شود. بار دیگر معادلات حالت را بنویسید.

ب- فرض کنید در مدارهای مسألهٔ ۲۳، مقاومت 4 اهمی با سلفی با اندوکتانس 2 هانری جایگزین شود. بار دیگر معادلات حالت را بنویسید.

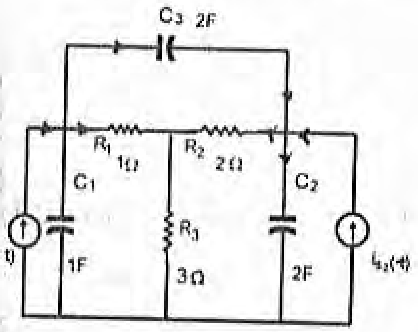
پ- فرض کنید در مدار شکل (مسالهٔ ۱۲-۲۳ الف) تزویج $M=1H$ میان دو سلف برقرار باشد. بار دیگر معادلات حالت را بنویسید.

حل:

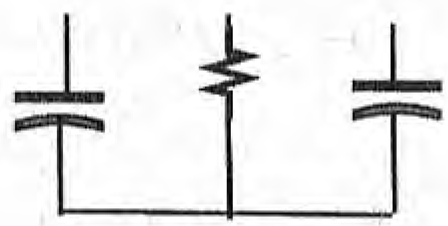
الف)

در مدار (الف) مسأله ۲۳ اگر بجای مقاومت $4\Omega$ خازن $2F$ قرار دهیم چون خازن همانند مقاومت $4\Omega$ در مساله ۲۳ با دو منبع ولتاژ $e_{s_1}(t)$ و $e_{s_2}(t)$ تشکیل یک حلقه می‌دهد پس کلا" در معادلات حالت تأثیری ندارد و در این حالت معادلات حالت عین مسأله ۲۳ خواهد بود.

در مورد مدار (ب) مسأله ۲۳ معادلات حالت را بصورت زیر محاسبه می‌کنیم.




درخت زیر را انتخاب می‌کنیم



چون $v_{C_3}=v_{C_1}-v_{C_2}$ پس $v_{C_3}$ نمی‌تواند بعنوان متغیر حالت در نظر گرفته شود.

حالت معادلات کات ست ها را می‌نویسیم.

$$\begin{cases} i_{C_1}=i_{s_1}(t)-i_{R_1}-i_{C_3} & (I) \\ i_{C_2}=i_{s_2}(t)-i_{R_2}+i_{C_3} & (II) \end{cases}$$

حال باید $i_{R_1}$ و $i_{R_2}$ و $i_{C_3}$ را برحسب متغیرهای حالت بنویسیم.

با نوشتن $KVL$ در حلقه‌های اساسی متناظر با لینک های مقاومت $R_1$ و $R_2$ داریم.

و همین طور به جای $i_{R_3}$ می‌توان از $KCL$ نوشت.

$$i_{R_3}=i_{R_1}+i_{R_2}$$

$$\begin{cases} i_{R_1}+3i_{R_3}=v_{C_1} \\ 2i_{R_2}+3i_{R_3}=v_{C_2} \\ i_{R_1}+i_{R_2}=i_{R_3} \end{cases}$$

با جایگزینی $i_{R_3}$ در دو رابطه دیگر به دو معادله دو مجهولی زیر می‌رسیم که از حل آن $i_{R_1}$ و $i_{R_2}$ محاسبه می‌شوند.

$$\begin{cases} 4i_{R_1}+3i_{R_2}=v_{C_1} \\ 3i_{R_1}+5i_{R_2}=v_{C_2} \end{cases}$$

با حل دستگاه نتیجه می‌شود.

$$\left[i_{R_1}=\frac{5}{11}v_{C_1}-\frac{3}{11}v_{C_2}\right] \text{ و } \left[i_{R_2}=\frac{-3}{11}v_{C_1}+\frac{4}{11}v_{C_2}\right]$$

و همین طور داریم.
$$\left[i_{C_3}=C_3\dot{v}_{C_3}=2\dot{v}_{C_1}-2\dot{v}_{C_2}\right]$$

حال سه عبارت فوق را در معادلات $(I)$ و $(II)$ قرار می‌دهیم تا معادلات حالت بدست آیند.

$$\begin{cases} \dot{v}_{C_1}=i_{s_1}(t)-\frac{5}{11}v_{C_1}+\frac{3}{11}v_{C_2}-2\dot{v}_{C_1}+2\dot{v}_{C_3} \\ 2\dot{v}_{C_2}=i_{s_2}(t)+\frac{3}{11}v_{C_1}-\frac{4}{11}v_{C_2}+2\dot{v}_{C_1}-2\dot{v}_{C_3} \end{cases}$$

معادلات فوق یک دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر را تشکیل می‌دهند که از حل آنها معادلات حالت بدست می‌آیند.

$$\begin{cases} 3\dot{v}_{C_1}-2\dot{v}_{C_3}=-\frac{5}{11}v_{C_1}+\frac{3}{11}v_{C_2}+i_{s_1}(t) \\ -2\dot{v}_{C_1}+4\dot{v}_{C_2}=\frac{3}{11}v_{C_1}-\frac{4}{11}v_{C_2}+i_{s_2}(t) \end{cases}$$

که از حل دستگاه فوق نتیجه می‌شود.

$$\begin{cases} \dot{v}_{C_1}=-\frac{7}{44}v_{C_1}+\frac{1}{22}v_{C_2}+\frac{1}{2}i_{s_1}(t)+\frac{1}{4}i_{s_2}(t) \\ \dot{v}_{C_2}=-\frac{1}{88}v_{C_1}-\frac{3}{44}v_{C_2}+\frac{1}{4}i_{s_1}(t)+\frac{3}{8}i_{s_2}(t) \end{cases}$$

می‌توان معادلات فوق را بصورت ماتریسی نیز نوشت.

$$\begin{bmatrix}\dot{v}_{C_1}\\ \dot{v}_{C_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{7}{44} & \frac{1}{22}\\ \frac{-1}{88} & \frac{-3}{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{C_1}\\ v_{C_2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_{s_1}(t)\\ i_{s_2}(t)\end{bmatrix}$$

قسمت (ب):

در مدار (الف) مسأله 23 اگر به جای مقاومت $4\Omega$ یک سلف $2H$ قرار دهیم چون سلف همانند مقاومت $4\Omega$ درمسأله 23 با دو منبع ولتاژ $e_{s_1}(t)$ و $e_{s_2}(t)$ تشکیل یک حلقه می‌دهند پس در معادلات حالت نوشته شده

درمسأله 23 تأثیری ندارد اما وجود سلف باعث اضافه شدن یک معادله جدید به معادلات قبلی می‌شود که معادله جدید بصورت زیر می‌باشد.

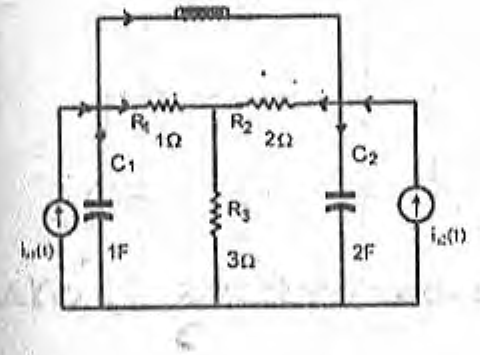
$$v_{L_3}=e_{s_1}(t)-e_{s_2}(t) \qquad \Rightarrow \qquad \left[\dot{i}_{L_3}=\frac{1}{2}\,e_{s_1}(t)-\frac{1}{2}\,e_{s_2}(t)\right]$$

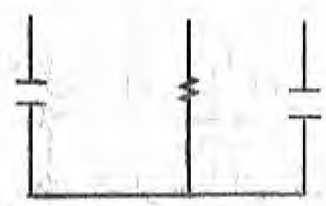
پس معادلات حالت کلاً بصورت زیر خواهد بود.

$$\begin{bmatrix}\dot{i}_{L_1}\\ \dot{i}_{L_2}\\ \dot{i}_{L_3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{6} & \frac{1}{3} & 0\\ -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_{L_1}\\ i_{L_2}\\ i_{L_3}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_{s_1}(t)\\ e_{s_2}(t)\end{bmatrix}$$

در مورد مدار (ب) مسأله را دوباره حل می‌کنیم.

درخت زیر را انتخاب می‌کنیم.



معادلات کات ست اساسی مربوط به خازن ها و معادله حلقه اساسی مربوط به سلف را می‌نویسیم.

$$\begin{cases} i_{C_1}=i_{s_1}(t)-i_{R_1}-i_L & (I)\\ i_{C_2}=i_{s_2}(t)-i_{R_2}+i_L & (II)\\ v_L=v_{C_1}-v_{C_2} & (III)\end{cases}$$

از قسمت (الف) همین مسأله 24 عبارات $i_{R_1}$ و $i_{R_2}$ را محاسبه کرده‌ایم.

$$\left[i_{R_1}=\frac{5}{11}v_{C_1}-\frac{3}{11}v_{C_2}\right] \qquad \left[i_{R_2}=-\frac{3}{11}v_{C_1}+\frac{4}{11}v_{C_2}\right]$$

از جایگزینی $i_{R_1}$ و $i_{R_2}$ در معادلات $(I)$ و $(II)$ معادلات حالت بدست می‌آیند.

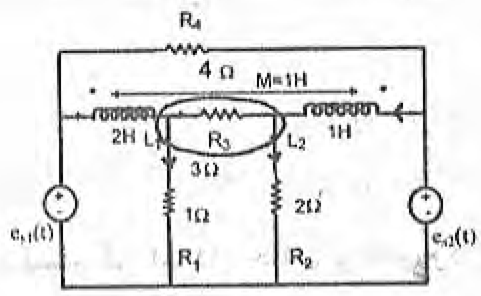
$$\begin{cases} \dot{v}_{C_1} = -\frac{5}{11} v_{C_1} + \frac{3}{11} v_{C_2} - i_L + i_{s_1}(t) \\ \dot{v}_{C_2} = \frac{3}{22} v_{C_1} - \frac{2}{11} v_{C_2} + \frac{1}{2} i_L + \frac{1}{2} i_{s_2}(t) \\ \dot{i}_L = \frac{1}{2} v_{C_1} - \frac{1}{2} v_{C_2} \end{cases}$$

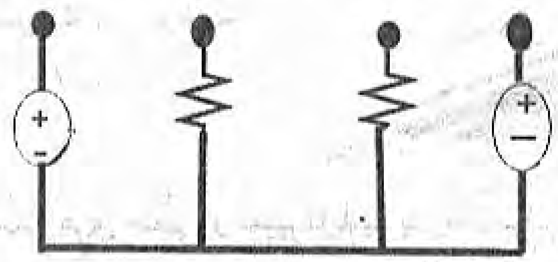
که می‌توان آنها را بصورت ماتریسی درآورد.

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{C_1} \\ \dot{v}_{C_2} \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{11} & \frac{3}{11} & -1 \\ \frac{3}{22} & -\frac{2}{11} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s_1}(t) \\ i_{s_2}(t) \end{bmatrix}$$

قسمت (پ):

چون مقاومت $4\Omega$ با منابع ولتاژ $e_1$ و $e_2$ تشکیل حلقه می‌دهند باز دوباره بدلیل ذکر شده در مسأله 23 در معادلات حالت تأثیری ندارد پس می‌توان آن را حذف کرد. درخت مناسب زیر را انتخاب می‌کنیم.



حال معادلات حلقه‌های اساسی متناظر با لینکهای سلفی را می‌نویسیم.

$$\begin{cases} v_{L_1} = e_{s_1}(t) - i_{R_1} \quad (I) \\ v_{L_2} = e_{s_2}(t) - 2\, i_{R_2} \quad (II) \end{cases}$$

حال باید $i_{R_1}$ و $i_{R_2}$ را برحسب متغیرهای حالت بنویسیم.

از نوشتن $KCL$ در ابرگره نشان داده شده در شکل داریم.

$$i_{R_1} + i_{R_2} = i_{L_1} + i_{L_2}$$

و اما می‌دانیم $i_{R_1} = 2i_{R_2}$ پس داریم.

$$\left[ i_{R_1} = \frac{2}{3}\, i_{L_1} + \frac{2}{3}\, i_{L_2} \right] \qquad \left[ i_{R_2} = \frac{1}{3}\, i_{L_1} + \frac{1}{3}\, i_{L_2} \right]$$

پس با جایگزینی عبارت $i_{R_1}$ و $i_{R_2}$ در معادلات $I$ و $II$ داریم.

$$\begin{cases} 2\dot{i}_{L_1}+\dot{i}_{L_2}=-\frac{2}{3}\,i_{L_1}-\frac{2}{3}\,i_{L_2}+e_{s_1}(t) \\ \dot{i}_{L_1}+\dot{i}_{L_2}=-\frac{2}{3}\,i_{L_1}-\frac{2}{3}\,i_{L_2}+e_{s_2}(t) \end{cases}$$

حال با حل دستگاه فوق معادلات حالت بصورت زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{cases} \dot{i}_{L_1}=e_1-e_2 \\ \dot{i}_{L_2}=-\frac{2}{3}\,i_{L_1}-\frac{2}{3}\,i_{L_2}-e_1+2e_2 \end{cases}$$

که اگر بصورت ماتریسی نوشته شود داریم.

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{L_1} \\ \dot{i}_{L_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_{s_1}(t) \\ e_{s_2}(t) \end{bmatrix}$$

۲۵ - ثابت کنید اگر $x$ بردار حالت و $w$ ورودی و $y$ یک خروجی دلخواه یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان باشند، می‌توان همواره $y$ را به صورت زیر نوشت:

$$y=c^Tx+d_0w$$

حل :

می‌دانیم که پاسخ کامل هر متغیر در مدارهای خطی و تغییرناپذیر با زمان برابر است با پاسخ حالت صفر به اضافه پاسخ ورودی صفر .

اگر معادلات حالت را بصورت $\dot{X}=AX+BW$ در نظر بگیریم می‌بینیم که حالت $X$ ناشی از منابع ورودی و حالت اولیه است برای اثبات این مسأله از تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم.

$$SX(s)-X(0)=AX(s)+BW(s)$$

$$X(s)=(SI-A)^{-1}X(0)+(SI-A)^{-1}BW(s)$$

پس از نوشتن عبارت $y=c^Tx+dw$ از لحاظ منطقی صحیح می‌باشد. زیرا با جایگزینی $X(s)$ در عبارت فوق داریم.

$$y(s)=C^T\,(SI-A)^{-1}X(0)+\left[C^T(SI-A)^{-1}B+d\right]\,w(s)$$

که بیانگر عبارت پاسخ کامل برابر پاسخ ورودی صفر + پاسخ حالت صفر می‌باشد. توضیح این که عبارت

تبدیل لاپلاس در معادلات فوق کلا" ماتریسی می‌باشد.

۲۶- معادله دیفرانسیل توصیف کنندهٔ یک مدار به صورت زیر است:

$$\frac{d^3y}{dt^3}+4\frac{d^2y}{dt^2}+6\frac{dy}{dt}+3y=\frac{d^2w}{dt^2}+3\frac{dw}{dt}+2w(t)$$

معادلات حالت این مدار را چنان بنویسید که مشتق ورودی در معادلات آن ظاهر نشود.

حل :

$$\frac{d^3y}{dt^3}+4\frac{d^2y}{dt^2}+6\frac{dy}{dt}+3y=\frac{d^2w}{dt^2}+3\frac{dw}{dt}+2w$$

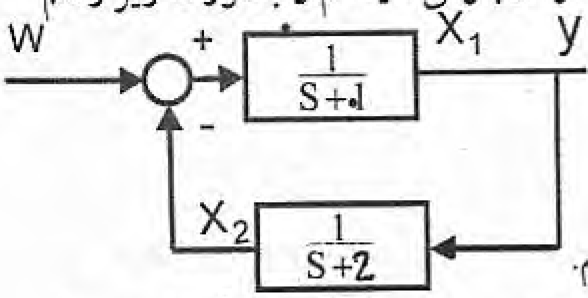
از طرفین تبدیل لاپلاس می‌گیریم تا تابع تبدیل مدار را به دست آوریم.

$$(s^3+4s^2+6s+3)\,y(s)=(s^2+3s+2)\,w(s)$$

$$\frac{y(s)}{w(s)}=\frac{s^2+3s+2}{s^3+4s^2+6s+3}=\frac{(s+1)(s+2)}{(s+1)\,(s^2+3s+3)}=\frac{s+2}{s^2+3s+3}$$

$$\frac{y(s)}{w(s)}=\frac{s+2}{1+(s+1)(s+2)}=\frac{\frac{1}{s+1}}{1+\frac{1}{(s+1)(s+2)}}$$

پس تابع تبدیل حلقه بازبرابر است با $\frac{1}{(s+1)(s+2)}$ و می‌توان نمودار بلوکی سیستم را بصورت زیر رسم کرد.



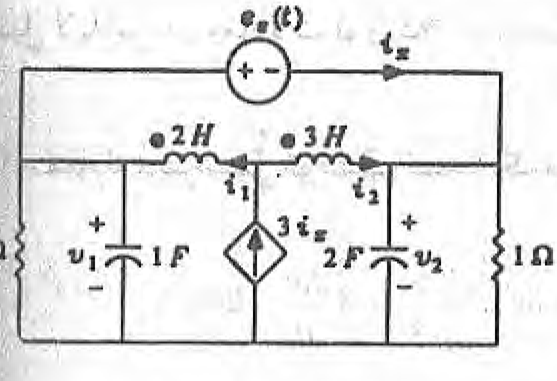

خروجی هر بلوک را به عنوان یک متغیر حالت در نظر می‌گیریم.

$$(w+y_2)\,\frac{1}{s+1}=X_1 \;\Rightarrow\; (w-y_2)=(s+1)X_1 \;\Rightarrow\; \dot{X}_1=-X_1-X_2+W$$

$$X_1\frac{1}{s+2}=X_2 \;\Rightarrow\; X_1=(s+2)X_2 \;\Rightarrow\; \dot{X}_2=X_1-2X_2$$

حال معادلات فوق را بصورت ماتریسی در می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix}\dot{X}_1\\ \dot{X}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix}+W\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

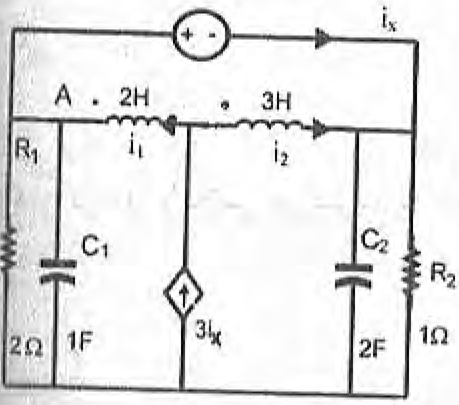



شکل (مسألهٔ ۱۲-۲۷)

۲۷ -الف- معادلات حالت مدار نشان داده شده در شکل (مسالهٔ ۱۲-۲۷) را بنویسید و جریان گذرنده از منبع ولتاژ را برحسب متغیرهای حالت و ورودی بیان کنید.

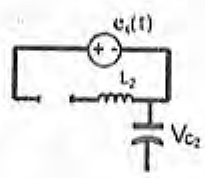
ب- اگر تزویج $M=1H$ میان سلف ها وجود داشته باشد، بار دیگر معادلات حالت را بنویسید.

حل :




چون $v_{C_1}=e_s(t)-v_{C_2}$ و $i_{L_2}=3i_x-i_{L_1}$ می‌باشد پس $i_{L_2}$ و $v_{C_1}$ نمی‌توانند به عنوان متغیرهای حالت در نظر گرفته شوند.

درخت مناسب زیر را اختیار می‌کنیم.




$$KCL\ A: i_x=i_{L_1}-i_{C_1}-i_{R_1}$$

$$i_x=i_{L_1}-\dot{v}_{C_1}-\frac{1}{2}v_{C_1}$$

با جایگزین کردن $v_{C_1}=e_s(t)-v_{C_2}$ داریم.

$$\left[i_x=i_{L_1}+\frac{1}{2}v_{C_2}+\dot{v}_{C_2}-\frac{1}{2}e_s(t)-\frac{de_s(t)}{dt}\right]$$

حال معادله کات ست مربوط به خازن $C_2$ را می‌نویسیم.

$$i_{C_2}=i_x+i_{L_2}-i_{R_2}$$

با جایگزین $i_{L_2}$ داریم.

$$i_{C_2}=4i_x-i_{L_1}-v_{C_2}$$

$$\left[\dot{V}_{C_2}=-\frac{1}{2}V_{C_2}-\frac{3}{2}i_{L_1}+e_s(t)+2\frac{de_s(t)}{dt}\right]\quad (I)$$ معادلهٔ اول حالت

معادله حلقه مربوط به سلف $L_1$ را نیز می‌نویسیم.

$$v_{L_1}=-e_s(t)+v_{L_2}\qquad v_{L_2}=9\frac{di_x}{dt}-3\dot{i}_{L_1}$$

با ترکیب دو رابطه فوق داریم.

$$5\dot{i}_{L_1}=9\frac{di_x}{dt}-e_s(t)\quad (II)$$

حال باید عبارت $\frac{di_x}{dt}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{di_x}{dt}=\dot{i}_{L_1}+\frac{1}{2}\dot{v}_{C_2}+\ddot{v}_{C_2}-\frac{1}{2}\frac{de_s(t)}{dt}-\frac{d^2e_s(t)}{dt^2}$$