①

only for LTI Circuits

مبحث تبدیل لاپلاس ←

تبدیل حوزه زمان به حوزه فرکانس ← تبدیل معادله دیفرانسیل به یک معادله جبری

* دیگر نگرانِ اینکه ضربه و اثرات آن یعنی تغییرات شرایط اولیه مثل $V_c(0^-)$ و $V_c(0^+)$ نخواهیم بود (چرا؟ *)

$$\mathcal{L}\{f(t)\} \triangleq \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt = F(s)$$

جواب: انتگرال بالا کران پایین‌اش 0^- است. یعنی همه تغییرات 0^- و 0^+ که ممکن است رخ بدهد را در نظر میگیرد.

* نکته) در درس سیگنال سیستم‌ها با لاپلاس دوطرفه آشنا خواهید شد

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

* خواص تبدیل لاپلاس:

۱/ خطی $\quad f_1+f_2 \xrightarrow{\mathcal{L}} F_1(s)+F_2(s)$

۲/ مشتق‌گیری

$$\frac{d}{dt}f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sF(s)-f(0^-)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^2F(s)-sf(0^-)-f'(0^-)$$

۵/ $\displaystyle\int_{0^-}^{t} f(\tau)\,d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}F(s)$

۳/ $f(t-\tau) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-\tau s}F(s)$

۴/ $e^{-at}f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s+a)$ $\quad$ ۶/ $\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$, $\delta^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^n$

۷/ $u(t) \rightarrow 1/s$ $\quad$ ۸/ $e^{-at}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{1}{s+a}$ $\quad$ ۹/ $t^n e^{-at}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

مثال ۲/ فرض کنید پس از حل مدار در حوزه لاپلاس به عبارت زیر رسیدیم.

$$I(s) = \frac{4s^2+3s+1}{2s^3+s+1} \rightarrow \frac{dI}{dt}(0^+) = ?$$

نکته : قضیه مقدار اولیه :

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} s X(s)$$

حل/

$$\frac{dI(0^+)}{dt} = \lim_{s\to\infty} s \mathcal{L}\left\{\frac{dI}{dt}(0^+)\right\}$$

$$= \lim_{s\to\infty} s\left(sI(s) - i(0^+)\right)$$

$$i(0^+) = \lim_{s\to\infty} sI(s) = s \times \frac{4s^2+3s+1}{2s^3+s+1} = 2$$

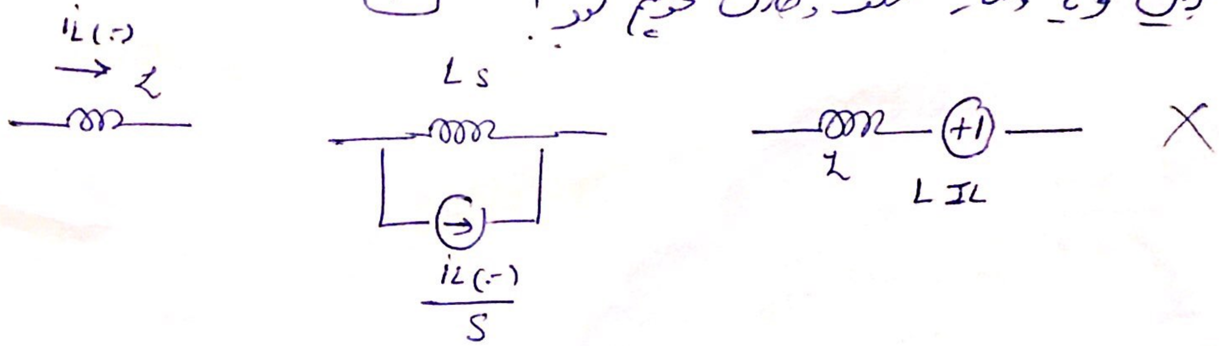
$$= \lim_{s\to\infty} s\left[\frac{4s^3+3s^2+s}{2s^3+s+1} - ۲\right] = 3/2$$

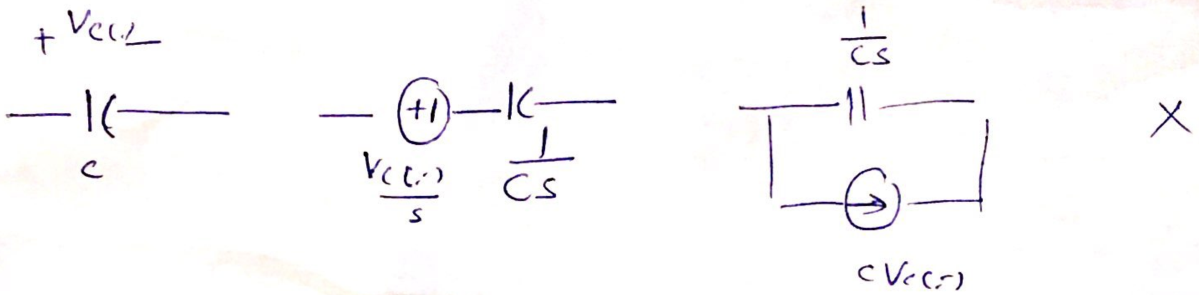
تحلیل مدار به کمک تبدیل لاپلاس

۱/ تبدیل معادله دیفرانسیل به یک معادله جبری

۲/ با استفاده از تبدیل لاپلاس، می‌توان نشان داد و اثرات آن حس بررسی

$\boxed{t}$ $\boxed{F}$ جریان و یا ولتاژ، سلف و خازن نشان خواهیم داد!





$c \longrightarrow \frac{1}{Cs}$ دقیق‌تر : $Z(C) = \frac{1}{CS}$

$Z \triangleq$ امپدانس $=$ مقاومتی که یک المان در برابر عبور جریان از خودش نشان می‌دهد

زمان ؛ [illegible]

$L \to Ls \longrightarrow Z(L) = LS$

$S \triangleq j\omega$, $j = \sqrt{-1}$, $\omega = 2\pi f$ * معنی نمی‌دانند : در درس سیگنال خواهید خواند

$$\begin{cases} Z(C) = \frac{1}{j\omega C} & f\uparrow\ Z(C)\to 0 \quad f\downarrow\ Z(C)\to\infty \\ Z(L) = j\omega L & f\uparrow\ Z(L)\to\infty \quad f\downarrow\ Z(L)\to 0 \end{cases}$$

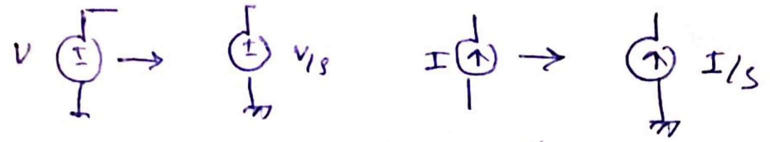
④

0921 - 0344 67601

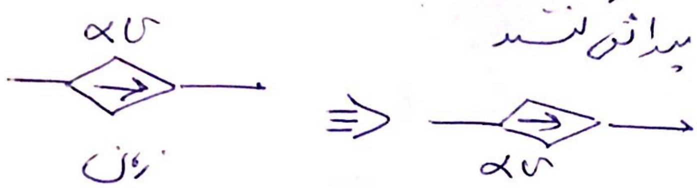
نکته: اگر از شما بخواهند مدار معادل تونن را در حوزه‌ی لاپلاس بدست آورید:

۱/ معادلات در حوزه‌ی لاپلاس نوشته شود، بجای مقاومت معادل، امپدانس معادل را بکار می‌برند.

۲/ منابع مستقل:

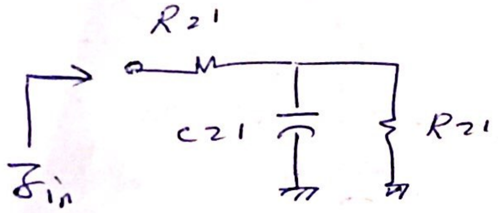


۳/ منابع وابسته ← هرگز تغییری پیدا نمی‌کنند

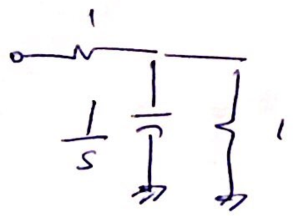


لاپلاس

مثال: امپدانس معادل مدار زیر:



تبدیل در لاپلاس: $Z(C=1) = \frac{1}{sC} = \frac{1}{s} \Rightarrow$



$$\left(\frac{1}{s} \| 1\right) = \frac{1/s \times 1}{1/s + 1} = \frac{1/s}{\frac{s+1}{s}} = \frac{1}{s+1}$$

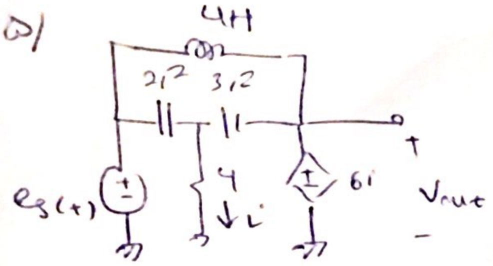
$$Z_T = 1 + \left(\frac{1}{s} \| 1\right) = 1 + \frac{1}{s+1} = \frac{s+2}{s+1} = 1 + \frac{1}{s+1}$$

عکس تبدیل لاپلاس

$$\mathcal{L}^{-1}\{Z(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{1 + \frac{1}{s+1}\right\} = \delta(t) + e^{-t}u(t)$$

معنی آن چیست؟ یعنی چه که مقاومت دارای $\delta(t)$ است؟

⑤ در مدار شکل زیر، پاسخ پله مدار را بیابید.

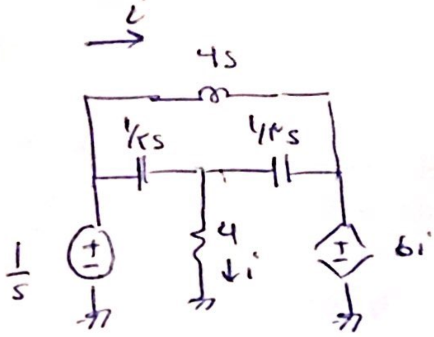


$Z(L=4H) = 4s$

$Z(C=2F) = \frac{1}{2s}$, $Z(C=3F) = \frac{1}{3s}$

$\mathcal{L}\{u(t)\} = 1/s$

حل/: رسم مدار معادل،



$\hat{i} = \frac{1/s - 6i}{4s} = \frac{1-6si}{4s^2}$

$$KCL: \frac{\frac{1}{s} - 4i}{\frac{1}{2s}} = i + \frac{4i - 6i}{\frac{1}{3s}} \Rightarrow \cancel{\ldots}$$

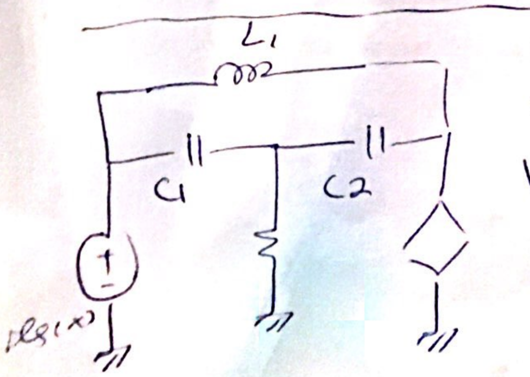
$\Rightarrow \cancel{\ldots}$

$\Rightarrow 2s(\frac{1}{s} - 4i) = i + 3s(4i - 6i)$ $\quad 2 = 8is - 6is + i = i(2s+1)$

$\Rightarrow 2 - 8is = i - 6is \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{i(s) = \frac{2}{2s+1}}$ $\quad V_{out}(s) = 6i = \frac{12}{2s+1}$

$\Rightarrow V_{out}(s) = \frac{6}{s+1/2} = 6\left[\frac{1}{s+\frac{1}{2}}\right] \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{V_{out}(t) = 6e^{-1/2 t}u(t)}$

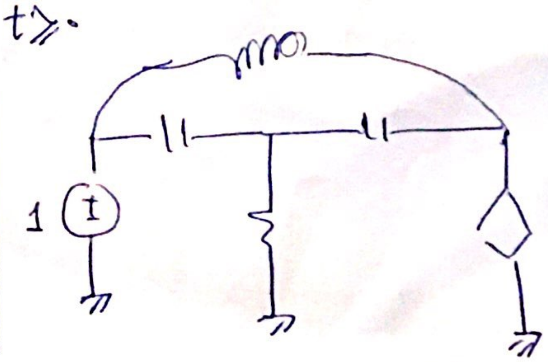


$i_L(0^-) = 0$

$V_{C1}(0^-) = 0$

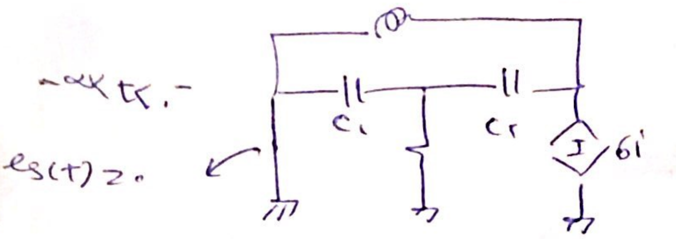
$V_{C2}(0^-) = 0$

$t \geq 0$



(۶)

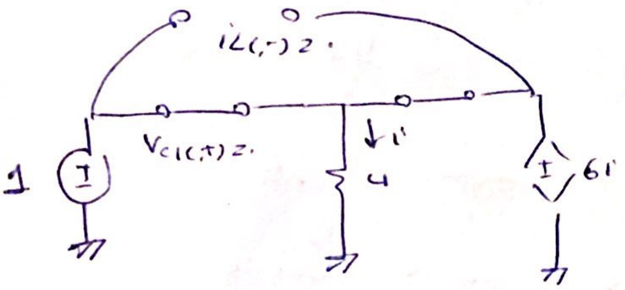
مشتق بدانید. سپس مشتق مثال ذیل ⟸ لاپلاس قدرتمند!



$$\begin{cases} i_L(0^-)=0 \\ V_{c1}(0^-)=0 \\ V_{c2}(0^-)=0 \\ i=0 \end{cases} \Longrightarrow$$ هیچ منبع ترکیبی در مدار نداریم!

اما $V_{c2}(0^+)$ ، $V_{c1}(0^+)$ ــ چه اتفاقی برایشان می‌افتد. ⟵ ~~[illegible]~~

فرض کنید پیوسته باشند ⟵ $t=0^+$



$i(0^+)=\frac{1}{4}=0.25$

$6i(0^+)=V_{out}(0^+)=1.5$ ✗

$[1=4i=6i]$ ✗

پس به کمک لاپلاس، دیگر کاری به مقادیر اولیه در لحظه 0^+ نخواهیم داشت

اما گاهی اوقات تشخیص اینکه $V_c(0^+)$ با $V_c(0^-)$ یکسان است

و حل در حوزه زمان بسیار آسان‌تر است. ≪midterm دو ترم قبل≫

درس ۲: آشنایی با تابع شبکه

در حل یک مدار، مثلاً فرض کنید بخواهیم ولتاژ یک شاخه را محاسبه کنیم.

طبیعتاً مدار دارای یک سری سلف و خازن است که «ممکن است دارای جریان و یا ولتاژ اولیه باشند» و یک سری منابع تحریک داریم.

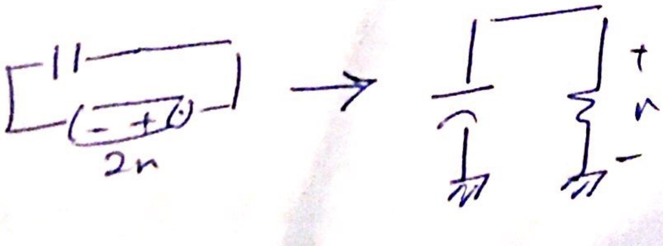
اگر اثر هر کدام را جدا بررسی کنیم، ~~...~~ خواهیم داشت.

پاسخ حالت صفر + پاسخ ورودی صفر = $V(t)$

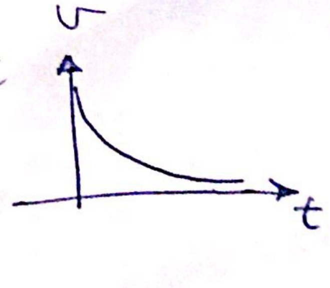
۱/ پاسخ ورودی صفر: همانطور که از اسمش پیداست، یعنی حل مدار یا یعنی یافتن ولتاژ یک گره یا جریان یک شاخه اگر هیچ ورودی به مدار اعمال نشود. یعنی هیچ منبع تحریک ورودی‌ای نداریم.

پس حل مدار، فقط به ولتاژ و یا جریان اولیه سلف و خازن بستگی دارد.

مثال /

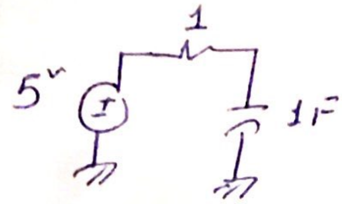


$v = 2e^{-t/\tau}$

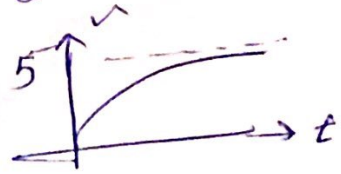


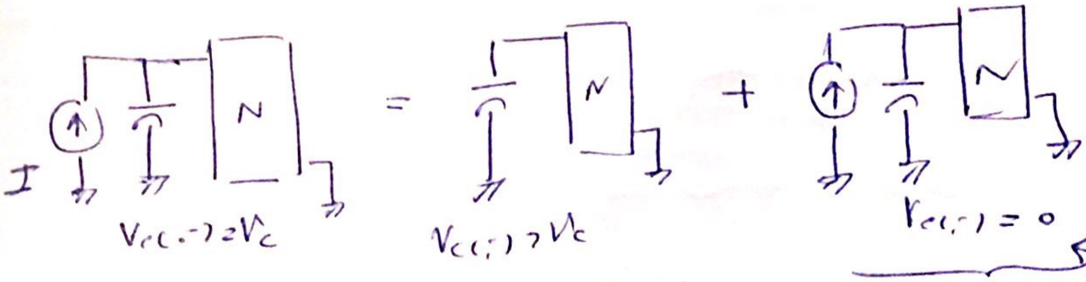
پاسخ حالت صفر : تعیین کننده حالت اولیه سلف و خازن صفر است و حل مدار

تنها با اثرات اعمال یک منبع ورودی است . $V_c(0^-)=0$



$$v_c(t)=5(1-e^{-t/2})u(t)$$





پس در حالت کلی

پاسخ ورودی صفر   پاسخ حالت صفر

** $X(t) =$ پاسخ حالت صفر + پاسخ ورودی صفر $\xrightarrow{\mathcal{L}}$

$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \mathcal{L}\{$ پاسخ حالت صفر $\} + \mathcal{L}\{$ پاسخ ورودی صفر $\}$

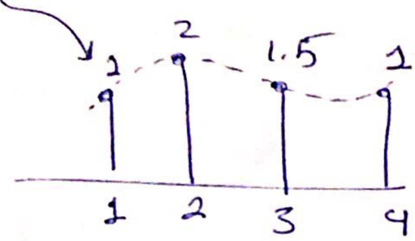
تابع شبکه

$$\text{تابع شبکه} = \frac{\mathcal{L}\{\text{پاسخ حالت صفر}\}}{\mathcal{L}\{\text{ورودی}\}}$$

کلاً / اصلاً منظور از تابع شبکه چیست؟ ← برگردیم از اول ←

$$\delta(t) \overset{\Delta}{=} \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\, dt = 1$$

$$f(t) = \sum_n k_n \delta(t - t_n)$$



$$f = 1.\delta(t-1) + 2\delta(t-2) + 1.5\delta(t-3) + 1.\delta(t-4)$$

اگر ما پاسخ سیستم خودمان را به ورودی ضربه بدانیم (LTI) می‌توانیم ادعا کنیم

که پاسخ آن را به هر نوع ورودی دیگر را نیز می‌توانیم محاسبه کنیم. یعنی

بدانیم: ورودی $\delta(t) \longrightarrow$ خروجی $y(t)$

حال فرض کنید ورودی ما $f(t)$ است. می‌توانیم $f(t)$ را به صورت جمع چندین ضربه بنویسیم

$$f(t) = 1.\delta(t-1) + 2\delta(t-2) + 1.5\,\delta(t-3) + \delta(t-4)$$

$$\downarrow$$

$$y = y(t-1) + 2y(t-2) + 1.5\,y(t-3) + y(t-4)$$

!!!

این جا منظور تابع شبکه است.

تابع شبکه $=$ $\dfrac{L\{\text{پاسخ حالت صفر}\}}{L\{\text{ورودی}\}}$

* تابع شبکه، همان تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه است. یعنی وقتی ورودی را ضربه بگذاریم، و مدار را در حوزه‌ی لاپلاس حل کنیم، حاصل در حوزه‌ی لاپلاس همان تابع شبکه است.

حالا که تابع شبکه را محاسبه کردیم، پاسخ حالت صفر مدار به هر نوع ورودی دیگر را خواهیم داشت.

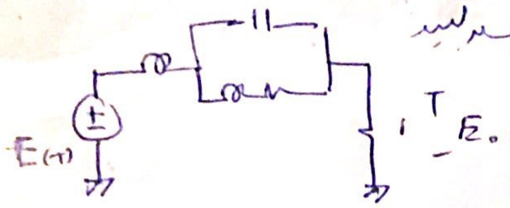
$L\{\text{پاسخ حالت صفر}\} =$ تابع شبکه $\times L\{\text{ورودی دلخواه}\}$

$L\{\text{پاسخ حالت صفر}\} = \dfrac{L\{\text{پاسخ صفر}\}}{\cancel{L\{\text{ورودی}\}}} \times \cancel{L\{\text{ورودی}\}}$

محاسبه تابع شبکه

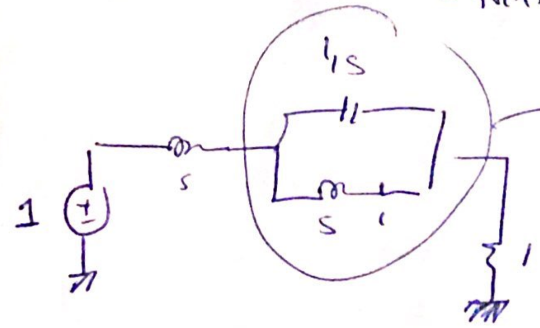
$1 \quad e_s(t) = \delta(t) \longrightarrow L \longrightarrow$ تابع شبکه.

مثال / تابع شبکه را برای ورودی E_0 را حساب کنید



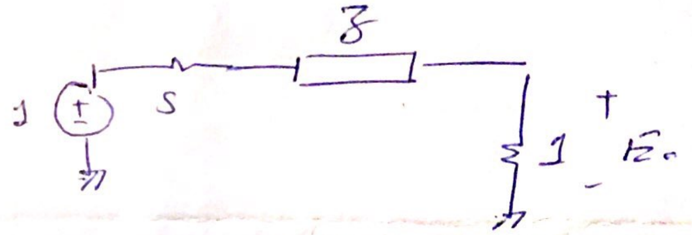
حل / $\delta(t) \longrightarrow$ حوزه لاپلاس

$L\{\delta(t)\} = 1$



$$Z = \frac{1}{s} \parallel (1+s)$$

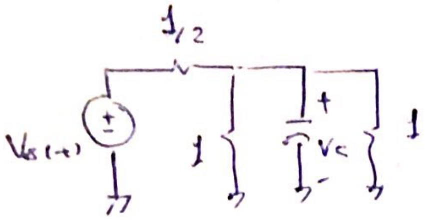
$$Z = \frac{\frac{1}{s} \times (s+1)}{\frac{1}{s} + s + 1} = \frac{\frac{s+1}{s}}{\frac{s^2+s+1}{s}} = \boxed{\frac{s+1}{s^2+s+1}}$$



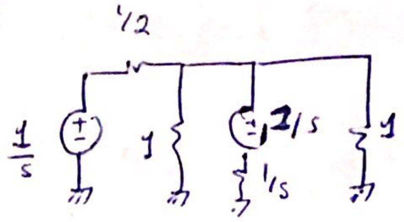
$$E_0 = \frac{1}{1+s+Z} \times 1 = \frac{1}{1+s+\frac{s+1}{s^2+s+1}} = \frac{s^2+s+1}{s+1+(s^2+s+1)(s+1)}$$

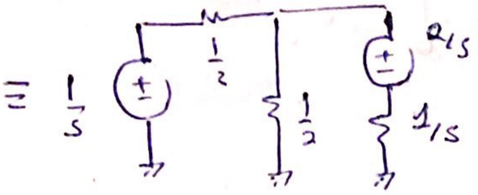
$$= \boxed{\frac{s^2+s+1}{(s+1)(s^2+s+2)}}$$

مثال/ مدار زیر را در نظر بگیرید. اگر $V_c(0^-)=2$ باشد، مقدار $V_c(t)$ را برای $t>0$ بیابید. اگر $V_s(t)=u(t)$ باشد.

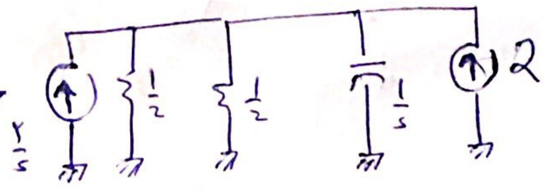


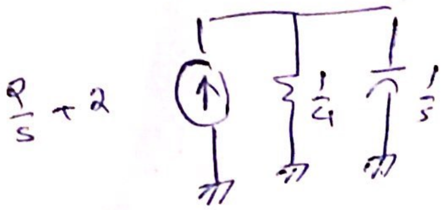
چون $V_c(0^-)=V_c(0^+)$ → خود را دارد





⇒





$$i_c(s)=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{s}+\frac{1}{4}}\left(\frac{2}{s}+2\right)$$

$$V_c(s)=\frac{1}{s}\left[\frac{2}{s}+2\right]\left[\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{s}+\frac{1}{4}}\right]=\frac{2}{s}*\frac{s+1}{s}*\frac{1/4}{1/s+\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{1}{s}*\frac{s+1}{1\cancel{2}}*\frac{1/2}{\cancel{8}\,1+\frac{1}{4}s}=\frac{1}{s}*(s+1)*\frac{2}{s+4}$$

$$=\frac{2(s+1)}{s(s+4)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}=\frac{1/2}{s}+\frac{3/2}{s+1}$$

$$A=\lim_{s\to 0} sV_c(s)=\frac{2(0+1)}{(0+4)}=1/2$$

$$B=\lim_{s\to -4}(s+4)V_c(s)=\frac{(2)(-4+1)}{(-4)}=\frac{2*-3}{-4}=3/2$$

$$V_c(t)=\frac{1}{2}u(t)+\frac{3}{2}e^{-t}u(t)=\left[\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-t}\right]u(t)$$

محاسبه تابع شبکه!

گفتیم تابع شبکه، لاپلاس پاسخ ضربه مدار است. یعنی

$$\text{پاسخ ضربه} = \frac{d}{dt}\left[\text{پاسخ پله}\right] \rightarrow \mathcal{L}\{\text{پاسخ ضربه}\} = s\,\mathcal{L}\{\text{پاسخ پله}\}$$

$$\begin{cases} V_c(s) = \dfrac{1/2}{s} + \dfrac{3/2}{s+1} \longrightarrow V_c(t) = \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2} e^{-t}\right] u(t) \\ h_{V_c}(t) = \dfrac{d}{dt} V_c(t) = 2\delta(t) + u(t)\left[-\frac{3}{2} e^{-t}\right] = 2\delta(t) - \frac{3}{2} e^{-t} u(t) \end{cases}$$

$$H(s) = s V_c(s) = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{3/2\, s}{s+1}}_{\text{درجه صورت و مخرج یکی است}} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{s+1-1}{s+1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left[1 - \frac{1}{s+1}\right]$$

$$\begin{cases} H(s) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{s+1}\right) \longrightarrow \mathcal{L}^{-1} \\ h(t) = 2\delta(t) - 3/2\, e^{-t} u(t) \end{cases}$$

~~$H(s) = 2 - \frac{3}{2} e^{-t} u(t)$~~ ~~بیخیال~~ تابع شبکه $H(s) = 2 - \frac{3}{2}\frac{1}{s+1}$

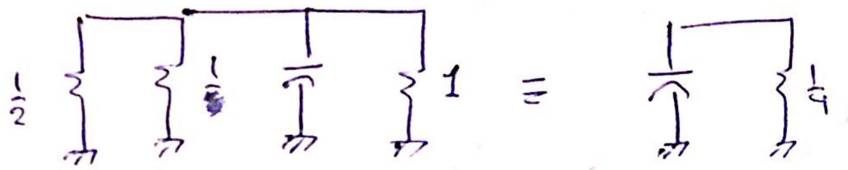
یعنی چه؟ یعنی اینکه وقتی ما $H(s)$ را داشته باشیم، پاسخ حالت صفر

هر ورودی دلخواهی را داریم.

اما پاسخ ورودی صفر چه می‌شود؟ ← خیلی هیچی! باید جوابش را به ما بدهند

یا صورت آورم!

ورودی صفر → $V_s(t)=0$



$R_T = \frac{1}{4}$

$C = 1$

$\tau = RC = 1/4$

$R_T = \frac{1}{2} \| 1 \| \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$V_c(t) = V_0 e^{-t/\tau} u(t) = \boxed{2e^{-4t} u(t)}$

* یعنی پاسخ ورودی صفر مدار همان $2e^{-4t}u(t)$ است و ثابت است.

تغییر هر ورودی ای به مدار دهیم، تغییری در پاسخ ورودی صفر ایجاد نمی‌شود

زیرا همانطور که از اسمش پیداست، پاسخ را ورودی صفر

بوده و تنها به مقادیر اولیه مدار [ولتاژ اولیه خازن و جریان اولیه سلف] بستگی دارد.

ورودی → پاسخ کامل = $\underbrace{\text{پاسخ ورودی صفر}}_{\text{به ورودی ربط دارد}}$ + پاسخ حالت صفر (unit step)

اعمال ورودی (لاپلاس) → $\mathcal{L}\{\text{پاسخ کامل}\} = \mathcal{L}\{\text{پاسخ ورودی صفر}\} + \mathcal{L}\{\text{پاسخ حالت صفر}\}$

در مثال قبل: $\begin{cases} \text{پاسخ کامل} = \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-t}\right]u(t) \\ \text{ورودی} = u(t) \end{cases}$

۱۴/ مثال / فرض کنید پاسخ ورودی صفر مداری برابر $2e^{-4t}u(t)$ است. اگر پاسخ کامل به ورودی $V_s(t)=u(t)$ برابر $[\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-t}]u(t)$ باشد پاسخ کامل به ورودی $e^{-t}u(t)$ را بیابید؟

حالت صفر : ~~$2e^{-4t}u(t)$~~

پاسخ ورودی صفر : $2e^{-4t}u(t) \longrightarrow \frac{2}{s+4}$

ورودی $\longrightarrow u(t) \longrightarrow 1/s$

پاسخ کامل $\longrightarrow [\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-t}]u(t) \longrightarrow \frac{\frac{1}{2}}{s}+\frac{\frac{3}{2}}{s+1}$

$\mathcal{L}\{\text{پاسخ کامل}\} = \mathcal{L}\{\text{حالت صفر}\} + \mathcal{L}\{\text{ورودی صفر}\}$

$\frac{\frac{1}{2}}{s}+\frac{\frac{3}{2}}{s+1} = \mathcal{L}\{\text{حالت صفر}\} + \frac{2}{s+4}$

$\Rightarrow \mathcal{L}\{\text{حالت صفر}\} = \frac{\frac{1}{2}}{s}+\frac{\frac{3}{2}}{s+1}-\frac{2}{s+4} = \frac{\frac{1}{2}(s+1)(s+4)+\frac{3}{2}(s)(s+4)-2(s)(s+1)}{(s)(s+1)(s+4)}$

$\mathcal{L}\{\text{حالت صفر}\} = H(s)\times \mathcal{L}\{\text{ورودی}\}$

$$H(s) = s \times \frac{\frac{1}{2}(s+1)(s+4)+\frac{3}{2}(s)(s+4)-2(s)(s+1)}{s(s+1)(s+4)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(s^2+5s+4)+\frac{3}{2}(s^2+4s)-2(s^2+s)}{(s^2+5s+4)}$$

$$= \frac{s^2(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-2)+s(\frac{5}{2}+\overset{6}{\cancel{4}}-2)+2}{s^2+5s+4} = \frac{6.5s+2}{(s+1)(s+4)}$$

$$= \boxed{\frac{-1.5}{s+1}+\frac{8}{s+4}} \longrightarrow$$

~~[illegible]~~

اکنون، تابع شبکه را بدست آوردیم، پس ادعا می‌کنیم پاسخ به هر ورودی را داریم:

$$\text{ورودی} = e^{-t}u(t) \xrightarrow{L} V_s(s) = \frac{1}{s+1}$$

شرایط اولیه $\rightarrow$ تبدیل $\rightarrow \dfrac{2}{s+4}$

$$\text{پاسخ حالت صفر} = V_s(s) \times H(s) = \frac{1}{s+1} * \left[\frac{-1.5}{s+1} + \frac{8}{s+4}\right]$$

$$= \frac{-1.5}{(s+1)^2} + \frac{8}{s+4}$$

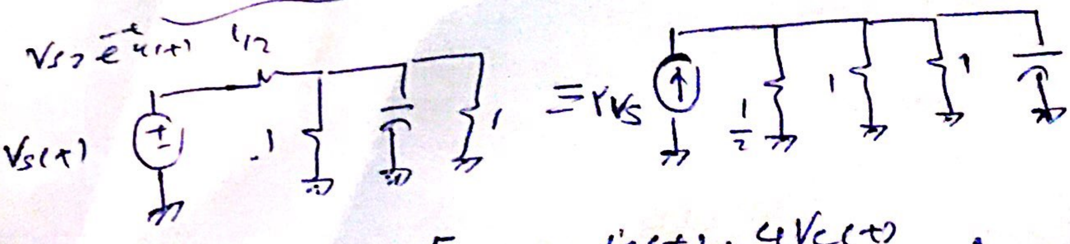
$$\text{پاسخ کامل} = \left[\frac{-1.5}{(s+1)^2} + \frac{8}{s+4}\right] + \left[\frac{2}{s+4}\right]$$

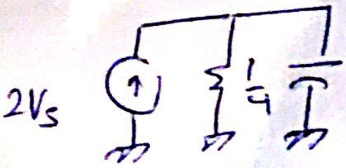
$$\text{پاسخ کامل} = \frac{-1.5}{(s+1)^2} + \frac{10}{s+4}$$

$$L^{-1}: e^{-t}u(t) \rightarrow \frac{1}{s+1} \rightarrow te^{-t}u(t) \rightarrow \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\text{پاسخ کامل}: \boxed{-1.5te^{-t} + 10e^{-4t}u(t)}$$

مثال:





$$2V_s(t) = i_c(t) + 4V_c(t) \quad \cdot \quad \dot{V}_c + 4V_c = 2e^{-t}u(t)$$

$$2V_s(t) = \dot{V}_c + 4V_c(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{c\,\text{خصوصی}} = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) \;/\; \text{عمومی}: Ae^{-t}u(t) + Bte^{-t}u(t)$$

$$V_c(t) = \left[\frac{1}{2} + A\right]e^{-t}u(t) + Bte^{-t}u(t) \quad \left[\, t=0 \right.$$