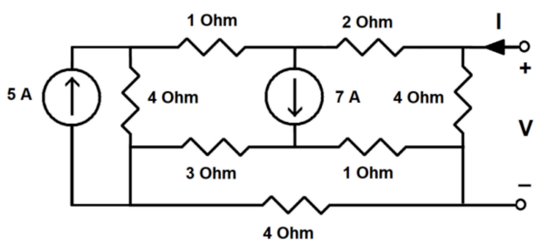
«به نام خدا»

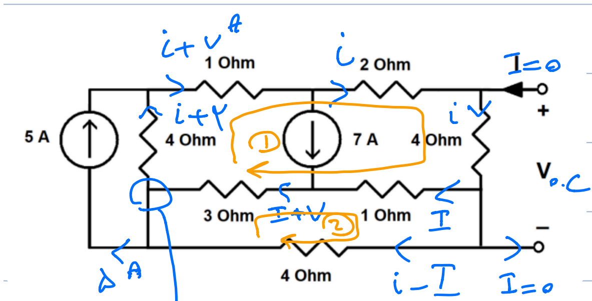
سید پارسا نشائی
۹۸۱۰۶۱۳۴

تمرینات سری سوم مدارهای الکتریکی و الکترونیکی



سوال ۱

به رسم کلی عمل کرده و یک بار دو سر را باز و یک بار بسته می‌گذاریم.



سعی می‌کنیم تا حد امکان متغیر جدید تعریف نکنیم.

KCL: $I + 7 + i - I - i - 2 - 5 = 0$ پس برقرار است.
(یعنی متغیرها را درست گذاشته‌ایم)

KVL 1: $4(i+2) + (i+7) + 2i + 4i + I + 3(I+7) = 0$

$\Rightarrow 11i + 4I = -36 \Rightarrow 22i + 8I = -72$

KVL 2: $-3(I+7) - I + 4(i-I) = 0$

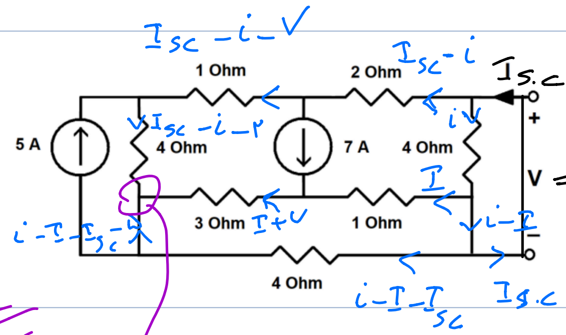
$\Rightarrow 4i - 8I = 21$

جمع دو $\Rightarrow 26i = -51 \Rightarrow i = -\frac{51}{26}$

مقاومت ۴ اهمی

$\Rightarrow V_{th} = V_{o.c} = 4i = -\frac{102}{13}\ v$ ⟶ ولت

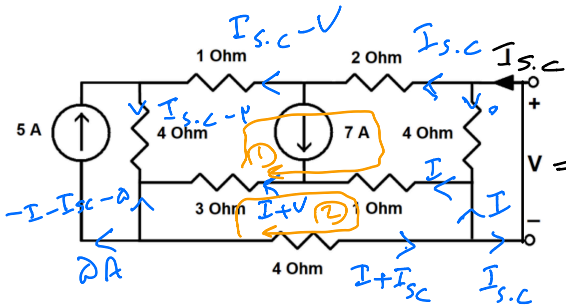
حال دو سر را اتصال کوتاه می‌کنیم:
مشابه جهت قبل متغیرهای گره‌ای را استفاده می‌کنیم.



به وضوح KCL برقرار است.

از طرفی می‌دانیم $i=0$ زیرا $V_{s.c} = 0 = 4i \Rightarrow i = 0$ (4Ω) در نتیجه مدار به شکل زیر می‌شود

(دو سر مقاومت 4Ω اتصال کوتاه است)



$$KVL1:\ -4(I_{s.c}-2)-(I_{sc}-7)-2I_{sc}+0(4)+I+3(I+7)=0$$

$$\Rightarrow -7I_{sc}+4I=-36 \Rightarrow -14I_{sc}+8I=-72$$

$$KVL2:\ -3(I+7)-I-4(I+I_{sc})=0$$

$$\Rightarrow -4I_{sc}-8I=21$$

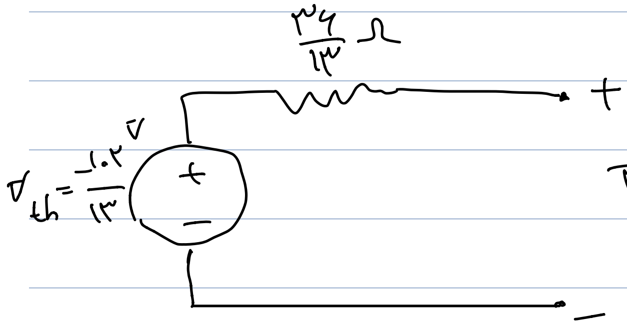
$$\xrightarrow[\text{قبلی}]{\text{جمع با}} -18I_{sc}=-51 \Rightarrow I_{sc}=\frac{51}{18}\ A$$

$$\Rightarrow I_N=-I_{sc}=\frac{-51}{18}\ A$$

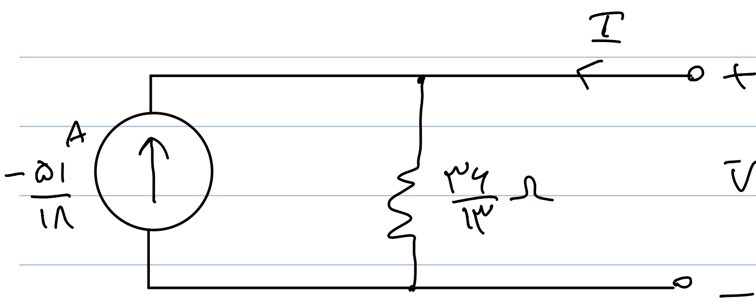
و :

$$R_{th} = \frac{-V_{o.c}}{I_{s.c}} = \frac{-\left(-\frac{۱۰۲}{۱۳}\right)}{\frac{۵۱}{۱۸}} = \frac{\overset{۲}{\cancel{۱۰۲}}}{۱۳} \times \frac{۱۸}{\cancel{۵۱}} = \frac{۳۶}{۱۳}\,\Omega$$

مدار معادل تونن : ←

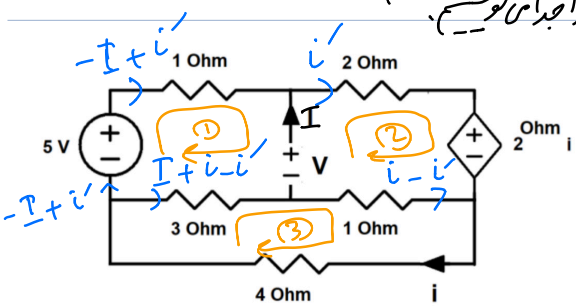


مدار معادل نورتن : ←



سوال ۲ این بار رابطه را برای V و I عمومی می‌یابیم. (به جای یافتن طول و عرض از مبدأ، از ابتدا معادله‌ی خط را می‌یابیم)

KCLها را روی شکل اعمال می‌کنیم. ولی KVLها را جدا می‌نویسیم.



$$KVL1:\ -5+(-I+i')+V+(-3)(I+i-i')=0$$

$$\Rightarrow -4I-3i+4i'=-V+5$$

$$KVL2:\ -V+2i'+2i-(i-i')=0$$

$$\Rightarrow i+3i'=V \Rightarrow i=V-3i'$$

$$KVL3:\ 3(I+i-i')+1(i-i')+4i=0$$

$$\Rightarrow 3I+8i-4i'=0$$

i در KVL2 در دوتای دیگر جای‌گذاری شود

$$\begin{cases} -4I-3(V-3i')+4i'=-V+5 \\ \Rightarrow -4I+13i'=2V+5 \\ 3I+8(V-3i')-4i'=0 \\ \Rightarrow 3I-28i'=-8V \end{cases}$$

$$\xrightarrow[13\times \text{دوم}]{28\times \text{اول}} + \begin{cases} -112I+28\times 13i'=56V+140 \\ 39I-28\times 13i'=-104V \end{cases}$$

$$\Rightarrow -73I=-48V+140 \Rightarrow \begin{cases} I=\underbrace{\frac{48}{73}}_{\frac{1}{R_N}}V-\underbrace{\frac{140}{73}}_{I_N} \\ V=\underbrace{\frac{73}{48}}_{R_{th}}I+\underbrace{\frac{140}{48}}_{V_{th}} \end{cases}$$

(زیرا معادلات باید به شکل

$$V = V_{th} + R_{th} I$$

و

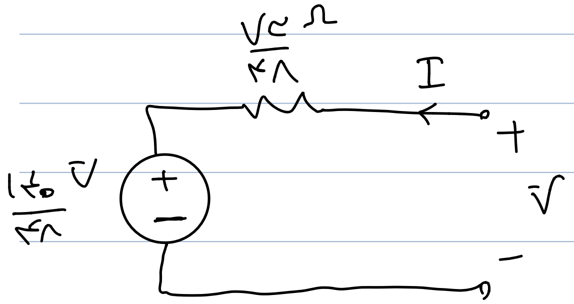
$$I = -I_N + \frac{V}{R_N}$$

باشند)

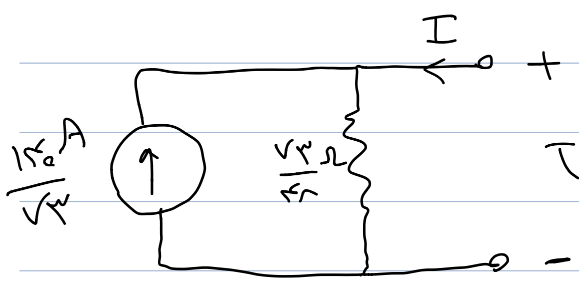
$$\Rightarrow R_{th} = R_N = \frac{73}{48}\,\Omega, \quad I_N = \frac{140}{73}\,A, \quad V_{th} = \frac{140}{48}\,V$$

پس مدارهای معادل به شکل زیر می‌شوند:

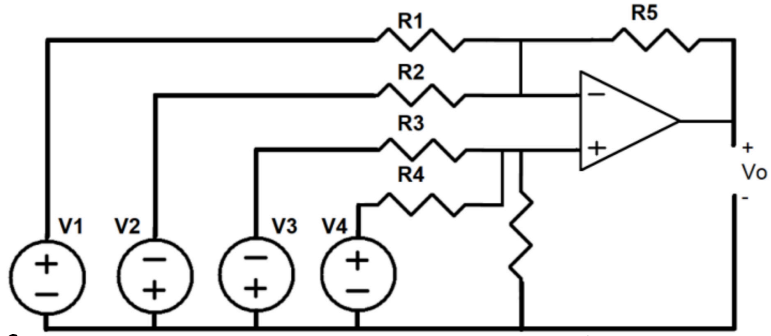
مدار معادل تونن:



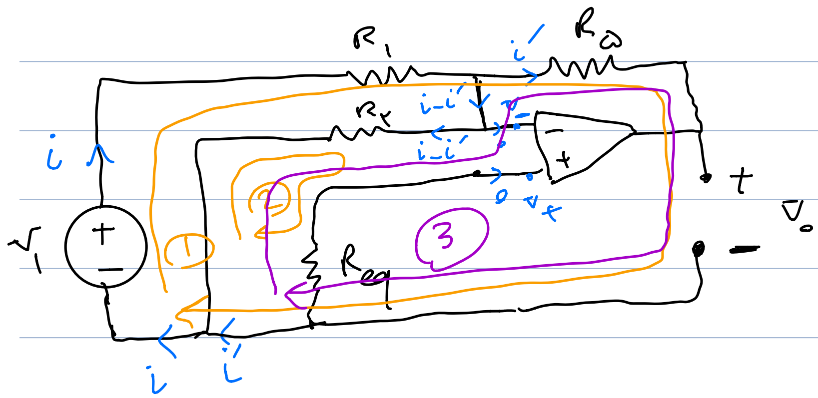
مدار معادل نورتن:



سؤال ۳



جهت استفاده از قضیه‌ی برهم نهی هر بار منابع را به جز یکی خاموش کرده و برای منبع باقی مانده محاسبه را انجام می‌دهیم، سپس جواب‌های حاصل شده برای V_0 را با یکدیگر جمع می‌کنیم. مثلاً اول، V_1 را نگه می‌داریم و بقیه را خاموش می‌کنیم.



به جای سه مقاومت R_3, R_4, R_6 چون موازی اند و جریانشان هم تاثیری در پاسخ ندارد، مقاومت معادل قرار داده‌ایم.

$$KVL1: \quad -V_1 + R_1 i + R_5 i' + V_0 = 0$$

$$KVL2: \quad -(i-i')R_2 + \underbrace{\cancel{V_- - V_+}}_{\text{صفر}} + \underbrace{\cancel{0(R_{eq})}}_{\text{صفر}} = 0$$

$$\Rightarrow -(i-i')R_2 = 0 \xrightarrow{\text{با فرض } R_2 \neq 0} i = i'$$

$$\xrightarrow[\text{جایگذاری در KVL1}]{} -V_1 + (R_1+R_5)\,i + V_0 = 0$$

$$\Rightarrow V_0 = V_1 - (R_1+R_5)\,i$$

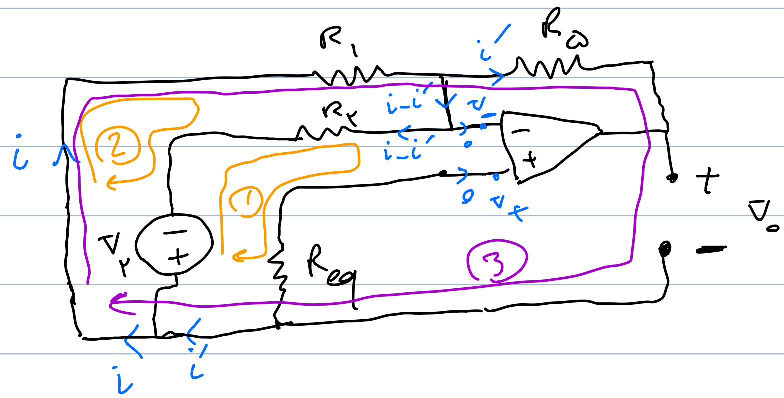
$$KVL3: \quad -R_2\underbrace{\cancel{(i-i')}}_{\text{صفر}} + R_5 i' + V_0 = 0 \Rightarrow i' = i = -\frac{V_0}{R_5}$$

$$\xrightarrow[\text{جایگذاری نتیجه‌ی KVL2 در}]{} V_0 = V_1 + \frac{V_0(R_1+R_5)}{R_5} \xrightarrow[\text{ضرب طرفین}]{\times R_5} \rightarrow$$

بقیه در صفحه‌ی بعد

$$\cancel{R_5 V_0} = R_5 V_1 + R_1 V_0 + \cancel{R_5 V_0} \Rightarrow \boxed{V_0 = -\frac{R_5}{R_1} V_1}$$

حال V_1 را نگه داشته و بقیه را خاموش می‌کنیم:



$$KVL1: V_2 - R_2(i-i') + \underbrace{\cancel{V_- - V_+}}_{\text{صفر}} - \underbrace{\cancel{0(R_{eq})}}_{\text{صفر}} = 0$$

$$\Rightarrow V_2 = R_2(i-i')$$

$$KVL2: R_1 i + R_2(i-i') - V_2 = 0 \Rightarrow V_2 = R_1 i + R_2(i-i')$$

$$\xrightarrow{KVL1} \cancel{R_2(i-i')} = R_1 i + \cancel{R_2(i-i')}$$

$$\Rightarrow R_1 i = 0 \xrightarrow[R_1 \neq 0]{\text{فرض}} \boxed{i = 0}$$

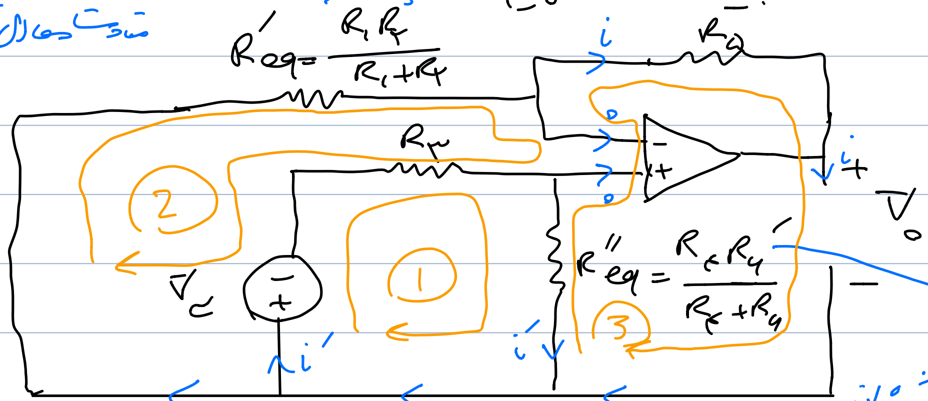
$$\Rightarrow V_2 = -R_2 i' \Rightarrow i' = -\frac{V_2}{R_2}$$

$$KVL3: \underbrace{\cancel{R_1 i}}_{\text{صفر (چون } i=0)} + R_5 i' + V_0 = 0 \Rightarrow V_0 = -R_5 i'$$

$$\xrightarrow{\text{نتیجه KVL2}} \boxed{V_0 = \frac{R_5}{R_2} V_2}$$

حال V_3 را نگه داشته و بقیه را حذف می‌کنیم.

چون R_1 و R_2 موازی شده اند مقاومت معادل قرار میدهیم



چون R_4 و R_6 موازی شده اند مقاومت معادل قرار میدهیم

* نام گذاری های i های انجام شده در حل این سوال بر اساس قانون KCL انجام شده است

$$KVL\ 1:\quad V_3 + R_3 i' + \frac{R_4R_6 i'}{R_4+R_6} = 0 \Rightarrow i' = \frac{-V_3}{R_3 + \frac{R_4R_6}{R_4+R_6}}$$

$$KVL\ 2:\quad \frac{R_1R_2 i}{R_1+R_2} + \underbrace{\cancel{V_- - V_+}}_{\text{صفر}} - R_3 i' - V_3 = 0$$

$$\xrightarrow{i' \text{ جایگذاری}} \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} i - V_3 + \frac{R_3V_3}{R_3 + \frac{R_4R_6}{R_4+R_6}} = 0$$

$$\Rightarrow i = \frac{R_1+R_2}{R_1R_2}\left(V_3 - \frac{R_3V_3}{R_3 + \frac{R_4R_6}{R_4+R_6}}\right)$$

$$KVL\ 3:\quad -\frac{R_4R_6 i'}{R_4+R_6} + \underbrace{\cancel{V_+ - V_-}}_{\text{صفر}} + R_5 i + V_o = 0$$

جایگذاری i, i' $\longrightarrow$

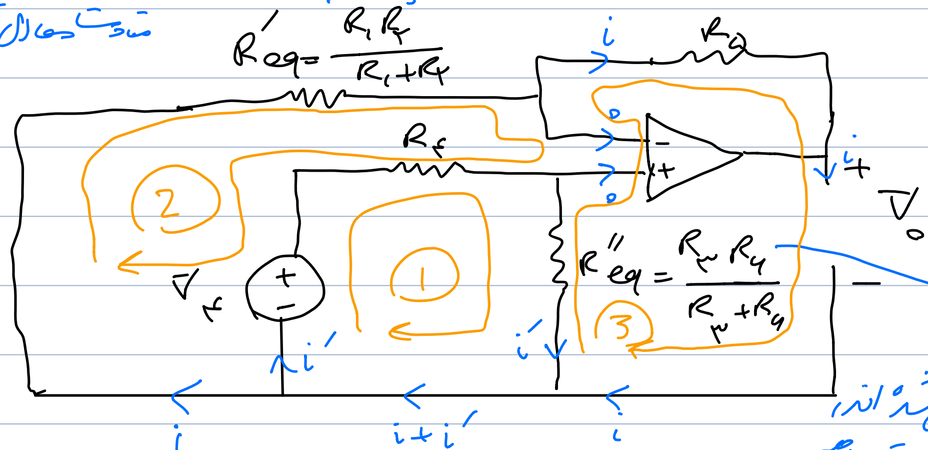
$$\frac{R_4 R_6 V_3}{R_4 R_3 + R_6 R_3 + R_4 R_6} + \frac{R_5 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2}\left(V_3 - \frac{R_3 V_3}{R_3 + \frac{R_4 R_6}{R_4 + R_6}}\right) + V_0 = 0$$

$$\Longrightarrow V_0 = \left(\frac{-R_4 R_6}{R_4 R_3 + R_6 R_3 + R_4 R_6} - \frac{R_5 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2}\left(1 - \frac{R_3}{R_3 + \frac{R_4 R_6}{R_4 + R_6}}\right)\right) V_3$$

* ادامه در صفحه‌ی بعد $\longleftarrow$

حال V_4 را نگه داشته و بقیه را حذف می‌کنیم.

چون R_1 و R_2 موازی شده اند مقاومت معادل قرار میدهیم



چون R_3 و R_6 موازی شده اند مقاومت معادل قرار میدهیم

$$KVL\ 1:\quad -V_4 + R_4 i' + \frac{R_3R_6 i'}{R_3+R_6} = 0 \Rightarrow i' = \frac{-V_4}{R_4 + \frac{R_3R_6}{R_3+R_6}}$$

$$KVL\ 2:\quad \frac{R_1R_2 i}{R_1+R_2} + \underbrace{\cancel{V_- - V_+}}_{\text{صفر}} - R_4 i' - V_4 = 0$$

$$\xrightarrow{i' \text{ جایگذاری}} \quad \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} i - V_4 + \frac{R_4 V_4}{R_4 + \frac{R_3R_6}{R_3+R_6}} = 0$$

$$\Rightarrow i = \frac{R_1+R_2}{R_1R_2}\left(V_4 - \frac{R_4 V_4}{R_4 + \frac{R_3R_6}{R_3+R_6}}\right)$$

$$KVL3:\quad -\frac{R_3R_6 i'}{R_3+R_6} + \underbrace{\cancel{V_+ - V_-}}_{\text{صفر}} + R_5 i + V_o = 0$$

جاگذاری i و i' $\longrightarrow$

$$\frac{R_3 R_6 v_4}{R_3 R_4 + R_6 R_4 + R_3 R_6} + \frac{R_5 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2} \left(v_4 - \frac{R_4 v_4}{R_4 + \frac{R_3 R_6}{R_3 + R_6}} \right) + v_o = 0$$

$$\Rightarrow v_o = \left(\frac{-R_3 R_6}{R_3 R_4 + R_6 R_4 + R_3 R_6} - \frac{R_5 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2} \left(1 - \frac{R_4}{R_4 + \frac{R_3 R_6}{R_3 + R_6}} \right) \right) v_4$$

پس v_o اصلی مدار برابر می‌شود با:

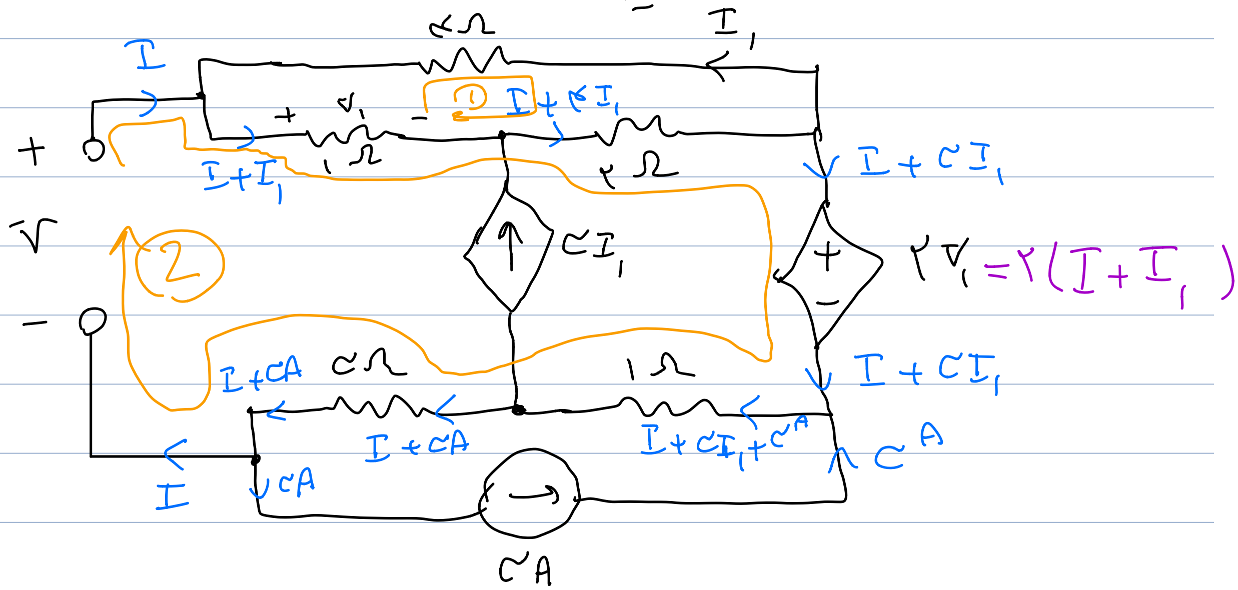
$$v_o = -\frac{R_5}{R_1} v_1 + \frac{R_5}{R_2} v_2$$

$$+ \left(\frac{-R_4 R_6}{R_4 R_3 + R_6 R_3 + R_4 R_6} - \frac{R_5 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2} \left(1 - \frac{R_3}{R_3 + \frac{R_4 R_6}{R_4 + R_6}} \right) \right) v_3$$

$$+ \left(\frac{-R_3 R_6}{R_3 R_4 + R_6 R_4 + R_3 R_6} - \frac{R_5 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2} \left(1 - \frac{R_4}{R_4 + \frac{R_3 R_6}{R_3 + R_6}} \right) \right) v_4$$

سوال ۴

تونن و نورتن را برای بقیه‌ی مدار، به جز عنصر غیرخطی محاسبه می‌کنیم؛ یعنی دو سر عنصر غیرخطی را اینجا v می‌گیریم:



$$KVL1: \quad -4I_1 - 2(I+4I_1) - (I+I_1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 13I_1 + 3I = 0$$

$$KVL2: \quad (I+I_1) + 2(I+4I_1) + 2(I+I_1) + (I+3I_1+3) + 3(I+3) - v = 0$$

$$\Rightarrow \quad 14I_1 + 9I = v - 12$$

$$\xrightarrow{-3KVL1+KVL2} \quad -25I_1 = v - 12 \Rightarrow I_1 = \frac{12-v}{25}$$

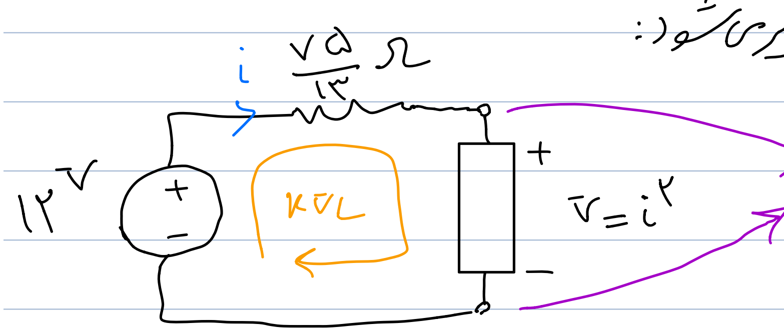
$$\Rightarrow \quad \frac{13}{25}(12-v) = -3I \Rightarrow \begin{cases} I = -\frac{13}{75}(12-v) \\ v = \underbrace{\frac{75}{13}}_{R_{th}} I + \underbrace{12}_{v_{th}} \end{cases}$$

$$I = -\underbrace{\frac{156}{75}}_{I_N} + \underbrace{\frac{13}{75}}_{\frac{1}{R_N}} v$$

(زیرا معادلات باید به شکل
$$V = V_{th} + R_{th} I$$
و
$$I = -I_N + \frac{V}{R_N}$$
باشند)

$$\Rightarrow R_{th} = R_N = \frac{75}{13}\,\Omega, \quad I_N = \frac{-156}{75}\,A, \quad V_{th} = 12\,V$$

پس مدار معادل تونن به شکل زیر می‌شود:



دو سری که برای آن دو مدار معادل تونن را بدست آوردیم

$$KVL: \; -12 + \frac{75}{13} i + i^2 = 0 \Rightarrow i^2 + \frac{75}{13} i - 12 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل معادله}} \Delta = \left(\frac{75}{13}\right)^2 - 4(-12) \simeq 81.28 \Rightarrow i = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-\frac{75}{13} \pm \sqrt{81.28}}{2} \begin{cases} \nearrow i = 1.62\,A \\ \searrow i = -7.39\,A \end{cases}$$