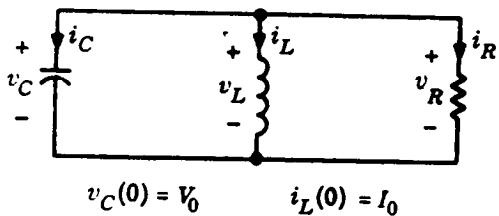


فصل پنجم

مدارهای مرتبه دوم

در فصل چهارم مدارهای الکتریکی مرتبه اول را مفصل "مطالعه کردیم و با مدارهای خطی و غیر خطی هردو مواجه شدیم . ما مدارهای خطی را مطالعه کرده و پاسخ کامل ، پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر آنها را محاسبه نمودیم . همچنین ثابت کردیم که برای مدارهای خطی ، پاسخ ورودی صفر، تابع خطی حالت اولیه و پاسخ حالت صفر تابع خطی ورودی است . این حقایق برای شبکه‌های خطی عمومی معتبر بوده و در فصل میزدهم اثبات خواهند شد . در این فصل مدارهای مرتبه دوم را مطالعه خواهیم کرد . برای تشریح محاسبه پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر ، از یک مدار ساده موازی RLC (مقاومت - سلف - خازن) استفاده خواهیم کرد . همچنین با روش جدیدی برای توصیف یک مدار بنام روش فضای حالت^(۱) مواجه خواهیم شد . این روش را نه تنها در مدارهای خطی ، بلکه در مدارهای غیر خطی نیز بکار خواهیم برد .

۱- مدار RLC خطی تغییر ناپذیر با زمان ، پاسخ ورودی صفر
 در شکل (۱-۱) یک اتصال موازی از سه عنصر پسیو^(۲) خطی تغییر ناپذیر با زمان داریم که عبارت از یک مقاومت ، یک سلف و یک خازن می‌باشد . معادلات شاخه‌های آنها چنین است ،



شکل ۱-۱- مدار RLC موازی ، هر سه جزء خطی ، تغییر ناپذیر با زمان و پسیو هستند

$$(1-1) \quad v_R = Ri_R \quad \text{با} \quad i_R = Gv_R$$

$$(1-1) \quad v_L = L \frac{di_L}{dt}, \quad i_L(0) = I_0 \quad \text{با} \quad i_L(t) = I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t v_L(t') dt'$$

$$(1-1) \quad v_C(t) = V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t') dt' \quad \text{با} \quad i_C = C \frac{dv_C}{dt}, \quad v_C(0) = V_0$$

که در آن C, L, G, R مقادیر «مشتت» بوده و بترتیب نمایشگر مقاومت، رسانایابی، اندوکتانس و ظرفیت میباشند. I_0 نشان دهنده جریان اولیه در داخل سلف و V_0 نمایشگر ولتاژ اولیه در دوسرخازن است. v_R, v_C, v_L, i_R, i_C و i_L شش متغیر شبکه میباشند. از KVL داریم :

$$(1-2) \quad v_C = v_R = v_L \quad \text{واز KCL داریم :}$$

$$(1-2) \quad i_C + i_R + i_L = 0$$

رویه مرتفه شش معادله داریم، سه معادله در $(1-1)$ ، دو معادله در $(1-2)$ و یک معادله در $(1-3)$. بنا براین میتوان انتظار داشت که شش متغیر مجهول شبکه را بتوان بطور یکتا تعیین نمود. در حقیقت توسعه درسی ما نشان خواهد داد که آنها واقعاً بطور یکتا تعیین میشوند.

مسئله مورد نظر اینست که مناسب ترین متغیر را انتخاب کرده و راحت ترین معادله را بر حسب آن متغیر بنویسیم و بر حسب آن متغیر حل کنیم، و سپس پنج متغیر باقیمانده را محاسبه نمائیم. یک راه حل مسئله اینست که ولتاژ خازن v_C را بعنوان مناسب ترین متغیر انتخاب کنیم. با استفاده از معادلات $(1-1)$ تا $(1-3)$ ، معادله انتگرال-دیفرانسیل (1) زیر را بر حسب متغیر v_C بدست میآوریم :

$$(1-4) \quad C \frac{dv_C}{dt} + Gv_C + I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t v_C(t') dt' = 0$$

و :

$$(1-5) \quad v_C(0) = V_0$$

هرگاه ولتاژ v_C بدست آید، پنج متغیر دیگر شبکه را میتوان از معادلات (۱-۱) و (۱-۲) بدست آورد. راه حل دیگر مسأله اینست که جریان مسلف I_L بعنوان متغیر انتخاب شود. اگر معادلات شاخه را برای خازن و مقاومت بکار ببریم، از معادله (۱-۳) بدست میاوریم :

$$C \frac{dv_C}{dt} + Gv_R + i_L = 0$$

چون در (۱-۲)، $v_C = v_R = v_L$ است، معادله بالا با نصیرت در میابد :

$$(1-6) \quad C \frac{dv_L}{dt} + Gv_L + i_L = 0$$

حال معادله شاخه در مورد مسلف را بکار میبریم تا معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر که در آن I_L بعنوان متغیر وابسته است بدست آید :

$$(1-7) \quad LC \frac{d^2i_L}{dt^2} + GL \frac{di_L}{dt} + i_L = 0$$

شرط اولیه لازم چنین است :

$$(1-8) \quad i_L(0) = I_0$$

و :

$$(1-9) \quad \frac{di_L}{dt}(0) = \frac{v_L(0)}{L} = \frac{v_C(0)}{L} = \frac{V_0}{L}$$

معادله دیفرانسیل (۱-۷) با شرایط اولیه (۱-۸) و (۱-۹) دارای جواب منحصر بفرد I_L است. هرگاه جریان I_L بدست آید، میتوان پنج متغیر دیگر شبکه را از معادلات (۱-۱) و (۱-۲) بدست آورد. گیریم برای حل I_L از معادلات (۱-۷) تا (۱-۹) شروع کنیم. چون

هیچ منبعی مدار را تعریف نمیکند، پاسخ i_L ، «پاسخ ورودی صفر» است.
برای راحتی عملیات، فرض کنید دو پارامتر α و ω_0 بصورت زیر تعریف شوند:

$$(1-10) \quad \alpha \triangleq \frac{G}{2C} \quad \omega_0 \triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

پارامتر α ثابت میرایی^(۱) و پارامتر ω_0 (برحسب رادیان برگانیه) فرکانس (زاویه‌ئی) تشذیب^(۲) نامیده میشود. $\omega_0 = 2\pi f_0$ است که در آن f_0 (برحسب هertz)^(۳) فرکانس تشذیب سلف و خازن است. دو پارامتر α و ω_0 رفتار مدار RLC را مشخص میکنند. با تقسیم معادله (۱-۷) به LC بدست میاید:

$$(1-11) \quad \boxed{\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = 0}$$

این یک معادله دیفرانسیل همگن مرتبه دوم با ضرایب ثابت است. «چند جمله‌ای مشخصه» این معادله دیفرانسیل چنین است:

$$(1-12) \quad s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2$$

صفرهای چند جمله‌ای مشخصه، ریشه‌های مشخصه و یا عبارت بهتر «فرکانس‌های طبیعی مدار» نامیده میشوند. این ریشه‌ها عبارتند از:

$$(1-13) \quad \left. \begin{array}{l} s_1 \\ s_2 \end{array} \right\} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \left\{ \begin{array}{l} -\alpha + \alpha_d \\ -\alpha - \alpha_d \end{array} \right.$$

که در آن:

$$\alpha_d \triangleq \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

شکل پاسخ ورودی صفر مدار به مقادیر نسبی α و ω_0 بستگی دارد. برحسب مقادیر نسبی α و ω_0 میتوان پاسخ ورودی صفر را به چهار حالت طبقه‌بندی کرد:

۱- Damping Constant

۲- Resonant Frequency

۳- Hertz

میرای شدید^(۱) ، میرای بعرانی^(۲) ، میرای ضعیف^(۳) و بی اتلاف^(۴). سه حالت اول، شکل موجهای $(\cdot)_L$ را که بصورت نمایی میرا هستند بوجود آورده درحالیکه حالت آخری متناظر با یک شکل موج سینوسی است.

۱- میرای شدید ($\alpha > \omega_0$). فرکانس‌های طبیعی s_1 و s_2 هردو «حقیقی و منفی» هستند و پاسخ، مجموع دو تابع نمایی میرا است:

$$(1-14) \quad i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

که در آن ثابت‌های k_1 و k_2 به شرایط اولیه بستگی دارند.

۲- میرای بعرانی ($\alpha = \omega_0$). دو فرکانس طبیعی مساوی و حقیقی می‌باشند، یعنی $s_1 = s_2 = -\alpha$. پاسخ چنین است:

$$(1-15) \quad i_L(t) = (k + k' t) e^{-\alpha t}$$

که در آن ثابت‌های k و k' به شرایط اولیه بستگی دارند.

۳- میرای ضعیف ($\alpha < \omega_0$). دو فرکانس طبیعی مزدوج مختلط^(۵) هستند $s_1 = -\alpha - j\omega_d$ و $s_2 = -\alpha + j\omega_d$. پاسخ باfon شکل است:

$$(1-16) \quad i_L(t) = k e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \theta)$$

که در آن k و θ ثابت‌های حقیقی هستند که بشرایط اولیه بستگی دارند. یک نمونه از شکل موج $(\cdot)_L$ در شکل (۱-۲) نشان داده شده است که در آن معنی‌های نمایی کم و نگک، معنی‌های پوش^(۶) نامیده می‌شوند. توجه کنید که دامنه نوکهای^(۷) شکل موج طبق پوش‌های نمایی میرا کاهش می‌باشد.

۴- بی اتلاف ($\alpha = 0$ و بنابراین $G = 0$). هردو فرکانس طبیعی انگاری^(۸) هستند $s_1 = j\omega_0$ ، $s_2 = -j\omega_0$. پاسخ چنین است:

۱- Overdamped

۷- Critically damped

۲- Underdamped

۸- Lossless

۹- Complex Conjugate

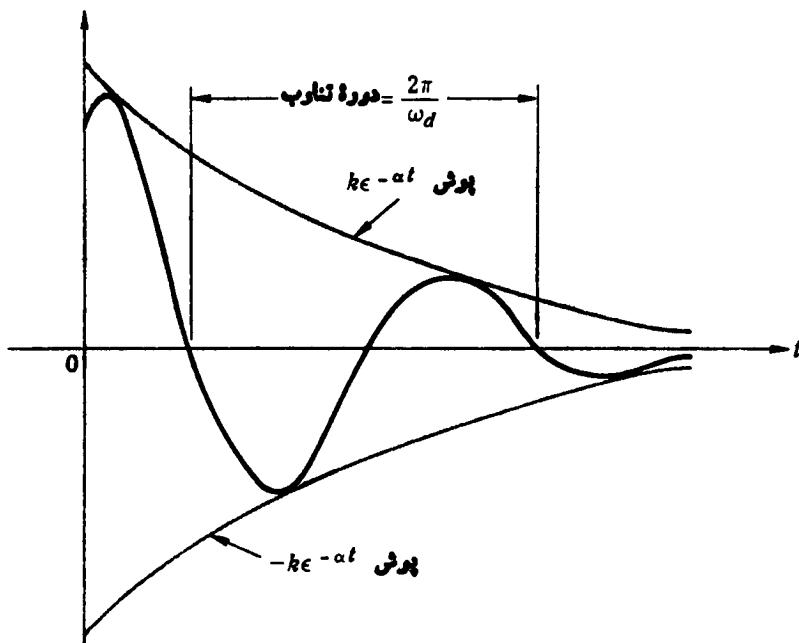
۱- Envelope

۵- Peak

۸- Imaginary

$$(1-17) \quad i_L(t) = k \cos(\omega_0 t + \theta)$$

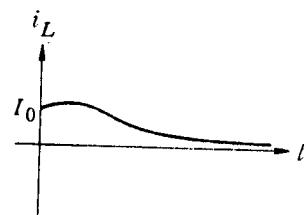
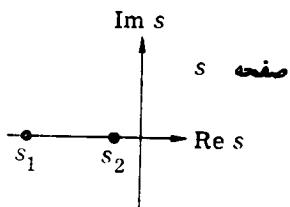
که در آن k و θ ثابت‌های حقیقی هستند که بشرط‌های اولیه بستگی دارند.



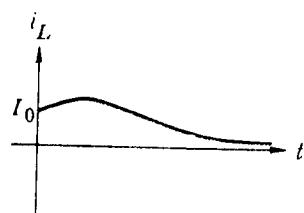
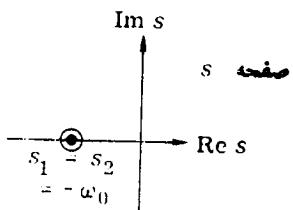
شکل ۱-۲ - شکل موج (۱-۷) برای حالت میرای ضعیف ($\omega < \omega_0$) مدار RLC موازی.

میتوان برآحتی با جایگزینی مستقیم نشان داد که معادلات (۱-۱۴) تا (۱-۱۷) جواب کلی معادله دیفرانسیل همگن (۱-۱۱) میباشند. در هر مورد، دو قابل دلخواه از شرایط اولیه داده شده در معادلات (۱-۸) و (۱-۹) تعیین میشوند. محاسبه ثابت‌های دلخواه از شرایط اولیه داده شده سرراست میباشد.

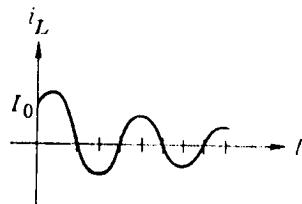
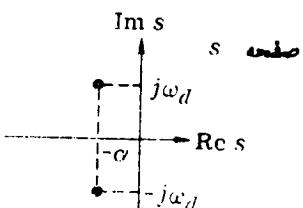
میتوان چهار حالت فوق را برحسب فرکانس‌های طیبی، یعنی برحسب دو ریشه s_1 و s_2 معادله مشخصه معادله دیفرانسیل نیز طبقه‌بندی کرد. چون فرکانس‌های طیبی میتوانند حقیقی، مختلط و یا انگاری باشند، نشان دادن آنها در صفحه مختلط موسوم به «صفحه فرکانس مختلط^(۱)» آموزنده است. در صفحه فرکانس مختلط (صفحه s) محور افقی نمایشگر جزء حقیقی و محور عمودی نشان دهنده جزء انگاری میباشد. چهار



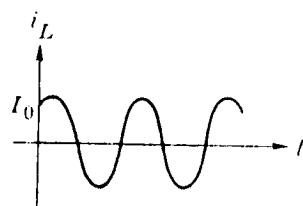
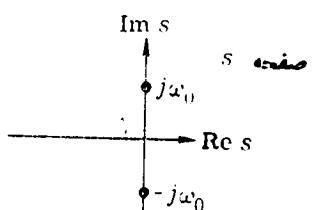
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

شکل ۹-۳۴ - پاسخهای ورودی صفر مدار RLC موازی که بر حسب محل قرارگرفتن فرکانس‌های طبیعی درست چپ و شکل موجها در طرف راست طبقه‌بندی شده‌اند.

(الف) میرای شدید $(\alpha > \omega_0)$. (ب) میرای بحرانی $(\alpha = \omega_0)$.

(ج) میرای ضعیف $(\alpha < \omega_0)$. (د) اتلاف $(\alpha = 0)$.

حالت در شکل (۱-۳) تشریح شده‌اند، که در آن محل فرکانس‌های طبیعی در صفحه ۵، در سمت چپ نشان داده شده و شکل موج (۰-۷) متناظر در سمت راست رسم شده است. اهمیت صفحه فرکانس مختلط، وقتیکه تبدیل لاپلاس^(۱) در فصل سیزدهم معرفی می‌شود روشن‌تر خواهد شد. معهوداً اکنون بایستی تشخیص داد که محل فرکانس‌های طبیعی در صفحه فرکانس مختلط شکل پاسخ را تعیین می‌کند.

تمرین = جواب معادله دیفرانسیل همگن (۱-۱۱) برای حالت میرای ضعیف را

به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

که در آن s_1 و s_2 اعداد مختلط هستند و:

$$s_2 = \bar{s}_1 = -\alpha - j\omega_0 \quad k_2 = \bar{k}_1$$

تیره‌های^(۲) بالای حروف نمایشگر مزدوج مختلط می‌باشند. معادله (۱-۱۶) را از این جواب بدست آورید و نشان دهید که:

$$k = \pm |k_1| \quad \text{و} \quad \theta = \arg k_1$$

«محاسبه ثابت‌های دلخواه» - فرض کنید حالت میرای شدید را در نظر بگیریم.

جريان I_L بوسیله معادله (۱-۱۴) باينصورت داده می‌شود:

$$i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

می‌خواهیم ثابت‌های k_1 و k_2 را از شرایط اولیه مشخص شده در معادلات (۱-۸) و (۱-۹) تعیین کنیم. با محاسبه $i_L(t)$ در (۱-۱۴) در لحظه $t=0$ بدست می‌آوریم:

$$(1-18) \quad i_L(0) = k_1 + k_2 = I_0$$

با مشتق گیری از (۱-۱۴) و محاسبه مشتق در لحظه $t=0$ ، بدست می‌آوریم:

$$(1-19) \quad \frac{di_L(t)}{dt}(0) = k_1 s_1 + k_2 s_2 = \frac{V_0}{L}$$

۲۴۳

اگر معادلات (۱-۱۸) و (۱-۱۹) را برسی کنیم بنت می‌آوریم :

$$(1-20) \quad k_1 = \frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{V_0}{L} - s_2 I_0 \right) \quad \text{و}$$

$$(1-21) \quad k_2 = \frac{1}{s_2 - s_1} \left(\frac{V_0}{L} - s_1 I_0 \right)$$

با جایگذاری k_1 و k_2 در (۱-۱۴)، یک عبارت کلی برای شکل موج جریان (۰) را برسی «حالت اولیه» مدار، یعنی جریان اولیه I_0 در سلف و ولتاژ اولیه V_0 در سرخازن بدست می‌آوریم. بنابراین :

$$(1-22) \quad i_L(t) = \frac{V_0}{(s_1 - s_2)L} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) + \frac{I_0}{s_1 - s_2} (s_1 e^{s_2 t} - s_2 e^{s_1 t})$$

ولتاژ v_C دو سرخازن را می‌توان از روی i_L حساب کرد زیرا $v_C = v_L$ و $v_L = L \frac{di_L}{dt}$:

$$(1-23) \quad v_C(t) = \frac{V_0}{s_1 - s_2} (s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}) + \frac{LI_0(s_1 - s_2)}{s_1 - s_2} (e^{s_2 t} - e^{s_1 t})$$

بطریق مشابه، می‌توان برای حالت میرای ضعیف، جریان سلف و ولتاژ خازن را بصورت زیر بدست آورد :

$$(1-24) \quad i_L(t) = \frac{V_0}{\omega_d L} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t + I_0 e^{-\alpha t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\alpha}{\omega_d} \sin \omega_d t \right)$$

$$(1-25) \quad v_C(t) = V_0 e^{-\alpha t} \left(\cos \omega_d t - \frac{\alpha}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) - \frac{L \omega^r_0}{\omega_d} I_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_d t$$

تمرين ۱ - فرمول‌های (۱-۲۴) و (۱-۲۵) را ثابت کنید.

تمرين ۲ - ثابت کنید که برای حالت بی‌اتلاف، جریان سلف و ولتاژ خازن بصورت زیرداده می‌شوند:

$$(1-26) \quad i_L(t) = \frac{V_0}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t + I_0 \cos \omega_0 t$$

$$(1-27) \quad v_C(t) = V_0 \cos \omega_0 t - \omega_0 L I_0 \sin \omega_0 t$$

تمرین ۳ - اگر $I_0 = 1$ آمپر و $V_0 = 1$ ولت باشد، برای هریک از مدارهای RLC موازی زیر پاسخ‌های حالت صفر را تعیین و شکل موجه‌ای $i_L(t)$ و $v_C(t)$ آنها را نسبت به t رسم کنید:

الف - $R = 1$ اهم، $L = 1$ هانری و $C = 1$ فاراد

ب - $R = 1$ اهم، $L = 1$ هانری و $C = \frac{1}{4}$ فاراد

پ - $R = \infty$ ، $L = 1$ هانری و $C = 1$ فاراد

با استی بع خاطر داشت که حالت بی‌اتلاف در واقع یک حالت حدی، حالت میرای ضعیف است و اگر R بسته بینهایت میل کند، $(\alpha = 0)$ ، نوسان میرا تبدیل به نوسان سینوسی با فرکانس زاویه‌ی ω_0 میگردد.

«انرژی و ضریب Q » - بع خاطر بیاورید که حالت اولیه بوسیله جریان اولیه I_0 در سلف و ولتاژ اولیه V_0 دو سرخازن در لحظه $t=0$ داده میشود. بنابراین، انرژی ذخیره شده اولیه مساوی مجموع $\frac{1}{2} L I_0^2$ (در میدان مغناطیسی) و $\frac{1}{2} C V_0^2$ (در میدان الکتریکی) میباشد. فرض کنید حالت میرای ضعیف را در نظر بگیریم. با گذشت زمان انرژی از خازن به سلف و از سلف به خازن انتقال می‌یابد و ضمن این نوسان، قسمتی از این انرژی بصورت حرارت در مقاومت تلف میشود. بنابراین انرژی کلی که در میدان مغناطیسی و میدان الکتریکی باقی میماند بتدربیج ازین میرود. برای $R = \infty$ ، جریان داخل مقاومت همیشه صفر بوده و هیچ اتلاف انرژی وجود ندارد و بنابراین یک نوسان مداوم^(۱) خواهیم داشت.

توجه کنید که پارامتر ω_0 به فرکانس نوسان میرا، $\omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ ، ارتباط

دارد ، در حالیکه پارامتر a شدت میرایی نمایی را تعیین میکند. میرایی نسی دریک نوسان میرا اغلب بوسیله یک عدد Q که بصورت زیر تعریف میشود مشخص میگردد :

$$(1-28) \quad Q \triangleq \frac{\omega_0}{2a} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{R}{\omega_0 L} = \sqrt{\frac{R}{L C}}$$

میتوان Q را عنوان «ضریب کیفیت^(۱)» یک مدار تشدید فیزیکی درنظر گرفت. هرقدر میرایی کمتر باشد Q بزرگتر خواهد بود. توجه کنید که در مدار RLC موازی ، برای «کاهش» میرایی لازم است که مقاومت را «افزایش» دهیم. یک مدار تشدید بی اتلاف دارای میرایی صفر یا Q بینهایت میباشد. در فصل هفتم نشان خواهیم داد که میتوان Q را به نسبت انرژی ذخیره شده و توان تلف شده در هر میکلی ارتباط داد. چهار حالتی را که مطالعه کردیم میتوان برحسب مقدار Q نیز طبقه بندی نمود.

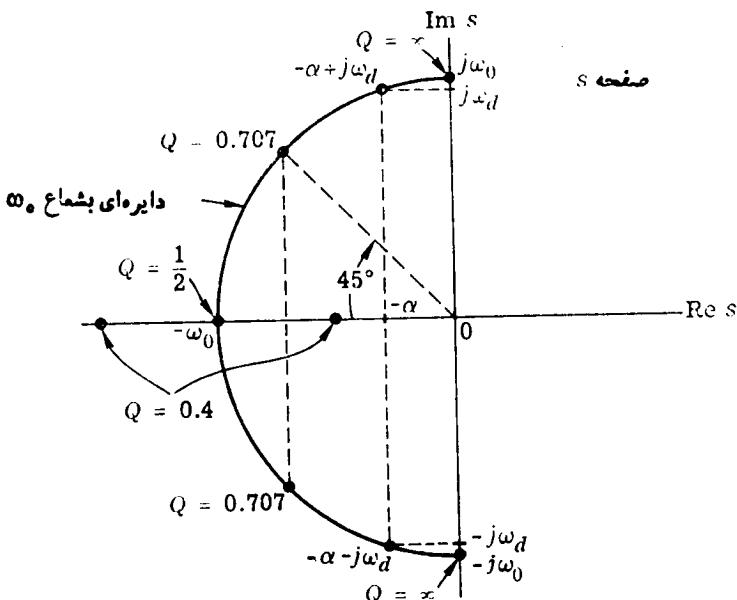
در حالت میرای شدید ، $\frac{1}{2} < Q$ ، در حالت میرای بحرانی ، $Q = \frac{1}{2}$ ، در حالت میرای

ضعیف ، $\frac{1}{2} > Q$ و در حالت بی اتلاف $Q = \infty$ است. در شکل (۱-۴) مقادیر Q

به محل های فرکانس های طبیعی در چهار حالت ارتباط داده شده اند.

حالت بی اتلاف $(Q = 0)$ یک حالت ایده‌آل است ، زیرا یک سلف فیزیکی همیشه دارای مقداری اتلاف میباشد. بنابراین در مدارهای «پسیو» عملی نمیتوان $Q = \infty$ ، پیدا کرد و این بدان معنی است که بدست آوردن نوسان سینوسی ، ناشی از حالت اولیه تنها در واقع غیر ممکن است. در بخش ؛ نشان خواهیم داد که اگر علاوه بر L و C دارای اتلاف ، بعضی از عناصر اکتیو نیز در مدار بکار برد شود ، یک نوسان مداوم بدست خواهد آمد.

تمرین در مدارهای فشرده عملی ، Q هایی با مقدار چندین صد قابل دسترس است. برای بدست آوردن احساسی از معنای Q فرض کنید که $1 \gg Q$ باشد. ثابت کنید که دامنه نوسان میرا ، پس از Q ببریود به 3π درصد مقدار اولیه خود میرسد.



شکل ۴-۱ = مکان فرکانس های طبیعی چهار حالت . در معادله مشخصه

$$\omega_0^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = s^2 + \frac{\omega_0^2}{Q} s + \omega_0^2 = 0$$

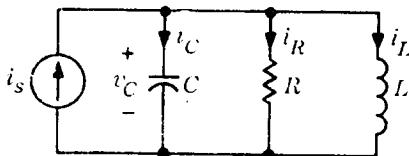
ω_0 را ثابت نگاهداشت و Q تغییر میکند . این متناظر با مداری

است که L و C در آن ثابت مانده و R تغییر میکند .

۲- مدار RLC خطی تغییر ناپذیر با زمان ، پاسخ حالت صفر

مطالعه مدار RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان را ادامه میدهیم تا طرز محاسبه و خواص «پاسخ حالت صفر» را تشریح کنیم . بنابراین ، در حالتی هستیم که در آن شرایط اولیه همه صفر بوده و ورودی بطور متعدد مساوی صفر نیست . در پخش قبل ورودی بطور متعدد مساوی صفر بود ولی شرایط اولیه همگی مساوی صفر نبودند .

در واقع منظور از پاسخ حالت صفر ، پاسخ مدار به یک ورودی اعمال شده در یک زمان دلخواه t_0 میباشد ، بشرط اینکه مدار در $t = 0$ در حالت صفر باشد . علت اینکه بجای t_0 ، $t = 0$ گفته میشود اینست که تأکید کنیم ، شرایط اولیه (جریان داخل سلف و



شکل ۱-۲-۱ - مدار RLC موازی با ورودی منبع جریان

ولناز دو سر خازن) درست قبل از اعمال ورودی صفر میباشدند.

برای مدار شکل (۱-۲) از KCL چنین بدست میابید:

$$(۱-۱) \quad i_C + i_R + i_L = i_s$$

با تکرار همان روش بخش ۱، معادله مدار را بر حسب جریان مسلف L بدست میاوریم، بنابراین:

$$(۱-۲) \quad LC \frac{di_L}{dt} + LG \frac{di_L}{dt} + i_L = i_s(t) \quad t \geq 0$$

و:

$$(۱-۳) \quad i_L(0_-) = 0$$

$$(۱-۴) \quad \frac{di_L}{dt}(0_-) = \frac{v_C(0_-)}{L} = 0$$

۱- معادله فوق متناظر با معادلات (۱-۷)، (۱-۸) و (۱-۹) بخش قبای است. تفاوت آنها در این است که قبل از ورودی صفر بود و شرایط اولیه خیر صفر بودند در حالیکه اکنون تابع ورودی، همانطور که در (۱-۲) دیده میشود $i_L(t)$ بوده و همه شرایط اولیه چنانکه در (۱-۳) و (۱-۴) داده شده است صفر هستند. بخاطر بیاورید که جواب معادله دیفرانسیل خطی نا همگن با ضرایب ثابت مجموع دو جمله است، یعنی:

$$(۱-۵) \quad i_L = i_h + i_p$$

که در آن i_h یک جواب معادله دیفرانسیل همگن، یعنی جواب معادله (۱-۲) با $i_h = 0$ بوده و i_p یک جواب خاص معادله دیفرانسیل نا همگن میباشد. در مسئله ما، i_h در بخش قبل محاسبه شده است زیرا همان پاسخ ورودی صفر است و بخاطر دارید که شامل دو ثابت دلخواه میباشد. بجز حالت میرای بعرانی، میتوان i_h را بصورت زیر نوشت:

$$(2-6) \quad i_h = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

البته اگر فرکانس‌های طبیعی مختلط باشد، درآن صورت:

$$(2-7) \quad s_2 = \overline{s_1} = -\alpha - j\omega_d \quad \text{و} \quad k_2 = \overline{k_1}$$

و میتوان i_h را بصورت زیرینی نوشت:

$$(2-8) \quad i_h = 2|k_1|e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \phi)$$

از طرف دیگر، \dot{v}_h به ورودی بستگی دارد. چنانچه ورودی یک تابع پله باشد، راحت‌تر است که \dot{v}_h بصورت یک ثابت انتخاب شود و اگر ورودی یک سینوسی باشد، راحت‌تر است که \dot{v}_h بصورت یک سینوسی انتخاب گردد.

در بقیه این بخش، تنها پاسخ پله و پاسخ ضربه را حساب‌خواهیم کرد. محاسبه پاسخ حالت صفر برای یک ورودی سینوسی در فصل هفتم و برای ورودی‌های دلخواه در فصل ششم داده خواهد شد.

یک خاصیت مهم پاسخ حالت صفر یک مدار خطی آنست که این پاسخ تابع خطی ورودی است. سا به اثبات این مطلب نخواهیم پرداخت چونکه آن مشابه مدارهای مرتبه اول میباشد که در فصل چهارم داده شده است.

۲-۱- پاسخ پله

میخواهیم پاسخ پله مدار RLC موازی نشان داده شده در شکل (۲-۱) را محاسبه کنیم. بموجب تعریف، ورودی یک پله واحد بوده و شرایط اولیه صفر میباشند. بنابراین از معادلات (۲-۲) تا (۲-۴) داریم:

$$(2-9) \quad LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + LG \frac{di_L}{dt} + i_L = u(t)$$

$$(2-10) \quad i_L(0) = 0$$

$$(2-11) \quad \frac{di_L}{dt}(0) = 0^+$$

+ چون در معادله (۲-۹) ضربه وجود ندارد، لازم نیست که بین -0 و $+0$ تمايزی قابل شويم.

راحت‌ترین جواب خاص معادله (۲-۹) چنین است :

$$(2-12) \quad i_L(t) = 1 \quad t \geq 0$$

بنابراین، چنانچه فرکانس‌های طبیعی مستایز باشند، جواب کلی بصورت زیر خواهد بود:

$$(2-13) \quad i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + 1$$

و چنانکه فرکانس‌های طبیعی مساوی هم باشند، جواب کلی باينصورت است :

$$(2-14) \quad i_L(t) = (k + k' t) e^{-at} + 1$$

اکنون با استفاده از شرایط اولیه (۲-۱۰) و (۲-۱۱) ثابت‌های k_1 و k_2 در معادله (۲-۱۳)

را تعیین می‌کنیم. در زمان $t=0$ از معادلات (۲-۱۰) و (۲-۱۳) نتیجه می‌شود :

$$(2-15) \quad i_L(0) = k_1 + k_2 + 1 = 0$$

با مشتق گیری از (۲-۱۳) و محاسبه مشتق در $t=0$ بدست می‌اید:

$$(2-16) \quad \frac{di_L}{dt}(0) = k_1 s_1 + k_2 s_2 = 0$$

از حل دو معادله فوق بر حسب k_1 و k_2 داریم :

$$(2-17) \quad k_1 = \frac{s_2}{s_1 - s_2} \quad \text{و} \quad k_2 = \frac{-s_1}{s_1 - s_2}$$

بنابراین پاسخ پله واحد چنین است :

$$(2-18) \quad i_L(t) = \left[\frac{1}{s_1 - s_2} (s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}) + 1 \right] u(t)$$

فرکانس‌های طبیعی در حالت میرای ضعیف مختلط هستند، بنابراین :

$$\left. \begin{array}{l} s_1 \\ s_2 \end{array} \right\} = -a \pm j\omega_q$$

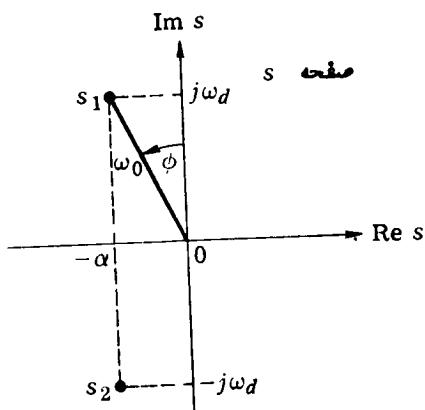
یا در مختصات قطبی^(۱) (شکل (۲-۲)) را بینید) :

$$\left. \begin{array}{l} s_1 \\ s_2 \end{array} \right\} = \omega_0 e^{\pm j \left(\frac{\pi}{r} + \varphi \right)}$$

که در آن :

$$(2-19) \quad |s_1| = |s_2| = \sqrt{\alpha^r + \omega_d^r} = \omega_0 \quad \text{و} \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{\alpha}{\omega_d}$$

جمله اول (۲-۱۸) را میتوان با بصورت بیان کرد :



شکل ۲-۲ - نمایش فرکانس‌های طبیعی s_1 و s_2 بر حسب مختصات قائم و قطبی، مینویسیم :

$$\left. \begin{array}{l} s_1 \\ s_2 \end{array} \right\} = -\alpha \pm j\omega_d = \omega_0 e^{\pm j \left(\frac{\pi}{r} + \varphi \right)} \quad \text{و} \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_d^r + \alpha^r}$$

$$\sin \varphi = \frac{\alpha}{\omega_0}, \quad \cos \varphi = \frac{\omega_d}{\omega_0}, \quad \tan \varphi = \frac{\alpha}{\omega_d}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{s_1 - s_2} (s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}) = \\
 & = \frac{1}{\tau j \omega_d} \omega_0 e^{-\alpha t} \left[e^{j(\omega_d t - \frac{\pi}{\tau} - \varphi)} - e^{-j(\omega_d t - \frac{\pi}{\tau} - \varphi)} \right] \\
 & = \frac{\omega_0}{\tau j \omega_d} e^{-\alpha t} \tau j \sin\left(\omega_d t - \frac{\pi}{\tau} - \varphi\right) \\
 (2-20) \quad & = -\frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \varphi)
 \end{aligned}$$

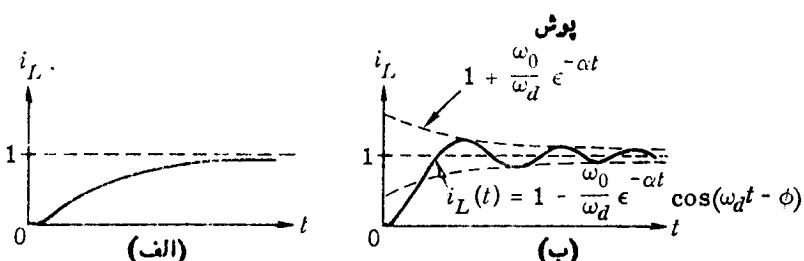
پاسخ پله واحد بصورت زیر درمیابد:

$$(2-21) \quad i_L(t) = \left[-\frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \varphi) + 1 \right] u(t)$$

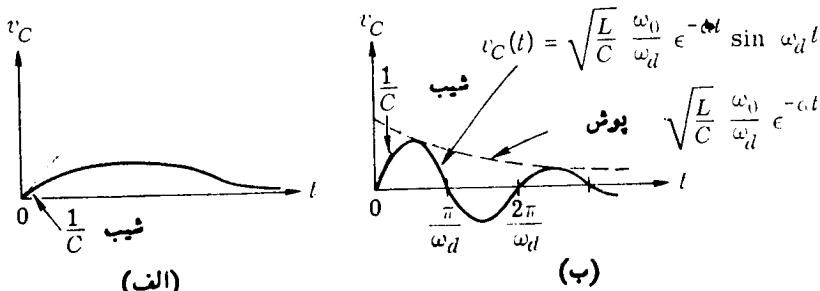
نمونه شکل‌های پاسخ پله برای حالت‌های میرای شدید و میرای ضعیف در شکل (۲-۳) داده شده‌اند.

آموزنده است که پاسخ پله را بدو قسمت تفکیک کنیم، جمله‌یی که یک نمایی میرا یا مینوسی میرا بوده و نمایشگر «حالات گذرا» است و جمله‌ی ثابت مساوی واحد که نشان دهنده «حالات دائمی» است. در هر دو حالت، جریان i_L از صفر شروع کرده و برای $t = \infty$ بمقدار واحد میرسد.

ولتاژ دو مرخازن مدار RLC موازی را میتوان با محاسبه $L \frac{di_L}{dt}$ بسهولت حساب کرد. بنابراین:



شکل ۲-۳ - پاسخهای پله برای جریان سلف در مدار RLC موازی
(الف) میرای شدید. (ب) میرای ضعیف



شکل ۴-۲- پاسخهای پله برای ولتاژ خازن مدار RLC موازی

$$(۴-۲۱) \quad v_C(t) = L \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) u(t)$$

و برای حالت میرای ضعیف:

$$(۴-۲۲) \quad v_C(t) = u(t) \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t$$

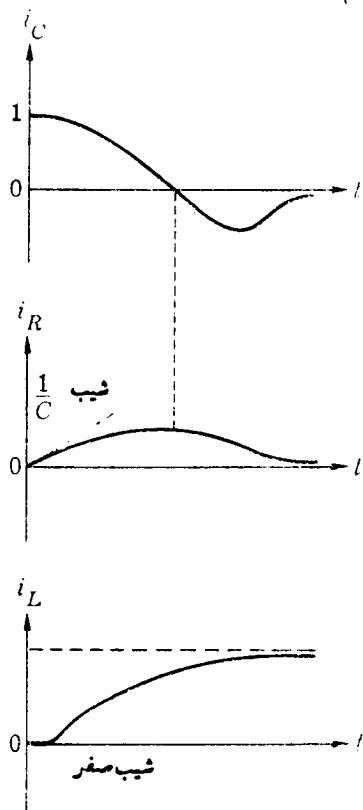
این توابع در شکل (۴-۲) رسم شده‌اند. در این مورد «حالت دائمی» بطور متعدد مساوی صفر است. تمام جریان منبع سرانجام از داخل سلف میگذرد و چون این جریان ثابت است پس ولتاژ دو سلف بطور متعدد مساوی صفر خواهد بود.

«تعابیر فیزیکی» یک منبع جریان ثابت بطور موازی یک مدار RLC موازی که در حالت صفر قرار دارد اعمال میشود. واضح است که ولتاژ دو سر خازن و جریان داخل سلف نمیتوانند بطور ناگهانی تغییر کنند و بنابراین درست پس از اعمال ورودی، مقادیر آنها صفر است. این امر لازم میدارد که جریان داخل مقاومت نیز در ابتدا صفر باشد چونکه خازن میگذرد و موجب افزایش تدریجی ولتاژ میشود. «در لحظه $t=0$ همه» جریان منبع از داخل خازن میگذرد و موجب افزایش تدریجی ولتاژ میشود. «در لحظه $t=0^+$ ، خازن در مقابل اعمال ناگهانی منبع جریان ثابت محدود، مانند یک مدار اتصال کوتاه رفتار میکند.» بمرور زمان ولتاژ دوسر خازن افزایش می‌یابد و جریان در مقاومت و سلف هر دو جاری میشود. پس از مدت زمان درازی مدار یک حالت دائمی میرسد یعنی:

$$\frac{di_L}{dt} = 0 \qquad \frac{d^2i_L}{dt^2} = 0$$

و بنابراین مطابق معادله (۲-۲) تمام جریان منبع از داخل ملحف میگذرد. در نتیجه، چون جریان داخل مقاومت صفر است، ولتاژ دو سر مدار موازی صفر خواهد بود. «در زمان $t = \infty$ ، سلف در مقابل یک منبع جریان ثابت مانند یک مدار اتصال کوتاه رفتار میکند.» برای حالت میرای شدید $(\frac{1}{Q} < 1)$ ، جریانهای داخل خازن و مقاومت و ملحف در شکل (۲-۵) رسم شده‌اند.

تمرین - برای یک مدار RLC موازی با $R = 1$ اهم، $C = 1$ فاراد و $L = 1$ هانزی، جریانهای داخل سلف، خازن و مقاومت را که در اثر اعمال یک ورودی جریان پله یک آمپری حاصل میشود تعیین کنید. مدار در زمان $t = 0$ در حالت صفر است. شکل موجها را رسم کنید.



شکل ۲-۵ - شکلهای i_C ، i_R و i_L ناشی از یک ورودی جریان پله برای مدار RLC موازی $(Q < \frac{1}{2})$ حالت میرای شدید

۲-۲- پاسخ ضربه

اکنون پاسخ ضربه را برای مدار RLC موازی حساب می‌کنیم. بمحض تعریف، ورودی یک ضربه واحد بوده و در $t=0^-$ مدار در حالت صفر می‌باشد. بنابراین پاسخ ضربه i_L ، جواب معادله دیفرانسیل زیر خواهد بود.

$$(2-24) \quad LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + LG \frac{di_L}{dt} + i_L = \delta(t)$$

$$(2-25) \quad i_L(0^-) = 0$$

$$(2-26) \quad \frac{di_L}{dt}(0^-) = 0$$

چون محاسبه و درک فیزیکی پاسخ ضربه در تئوری مدار اهمیت بسزایی دارد، بدینجهت مجددآ چند روش محاسبه و تعبیر برای آن عرضه خواهد شد و تنها، حالت میرای ضعیف یعنی حالتی که فرکانس‌های طبیعی مدار مختلط می‌باشند درنظر گرفته خواهد شد.

«روش اول» - در این روش مستقیماً معادله دیفرانسیل را بکار می‌بریم. چون تابع ضربه $\delta(t)$ برای $t > 0$ بطور متعدد برابر صفر است، پاسخ ضربه را میتوان بعنوان پاسخ ورودی صفر که در $t=0_+$ شروع می‌شود درنظر گرفت. ضربه وارد در $t=0$ شرط اولیه‌ای در $t=0_+$ بوجود می‌آورد و پاسخ ضربه برای $t > 0$ ، اساساً پاسخ ورودی صفر ناشی از آن شرط اولیه است. پس مسئله تعیین این شرط اولیه می‌باشد. فرض کنید هردو طرف معادله (2-24) را از $t=0_-$ تا $t=0_+$ انتگرال بگیریم، بدست می‌آوریم:

$$(2-27) \quad LC \frac{di_L}{dt}(0_+) - LC \frac{di_L}{dt}(0_-) + LG i_L(0_+) - LG i_L(0_-) + \int_{0_-}^{0_+} i_L(t') dt' = 1$$

که در آن مقدار سمت راست، با استفاده از حقیقت زیر بدست آمده است:

$$\int_{0_-}^{0_+} \delta(t') dt' = 1$$

میدانیم که i_L نمیتواند در $t=0$ بجهد، عبارت دیگر، i_L یک تابع پیوسته است یعنی:

$$\int_{0_-}^{0_+} i_L(t') dt' = 0 \quad \text{و} \quad i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

زیرا اگر i_L پیوسته نبود، $\frac{di_L}{dt}$ شامل یک ضربه و $\frac{d^2 i_L}{dt^2}$ شامل یک دوبلت میبود، و معادله (۲-۲۴) هرگز نمیتوانست برقرار باشد چونکه در سمت راست هیچ تابع دو بلند وجود ندارد. از (۲-۲۷) بدست میاوریم:

$$(2-28) \quad \frac{di_L}{dt}(0_+) = -\frac{di_L}{dt}(0_-) + \frac{1}{LC} = \frac{1}{LC}$$

تا آنجا که $t > 0$ مورد نظر است، معادله دیفرانسیل ناممکن (۲-۲۴) با شرط اولیه داده شده در (۲-۲۰) و (۲-۲۶) معادل است با:

$$(2-29) \quad LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + LG \frac{di_L}{dt} + i_L = 0 \quad : ۱$$

$$(2-30) \quad i_L(0_+) = 0 \quad : ۲$$

$$(2-31) \quad \frac{di_L}{dt}(0_+) = -\frac{1}{LC}$$

واضح است که برای $t \leq 0$ $i_L(t)$ صفر است. بنابراین جواب معادله بالا چنین است:

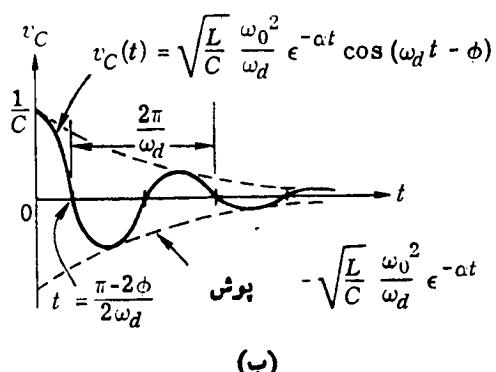
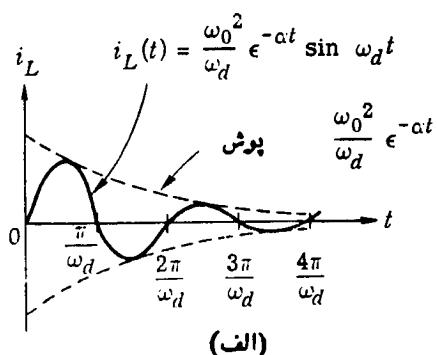
$$(2-32) \quad i_L(t) = u(t) \frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t$$

شکل موج جریان در شکل (۲-۶) الف) نشان داده شده است. توجه کنید که برای یک

حالت اولیه داده شده $i_L = 0$ و $v_C = \frac{1}{C}$ از پاسخ ورودی صفر (۱-۲۴) نیز میتوان (۲-۳۲) را بدست آورد.

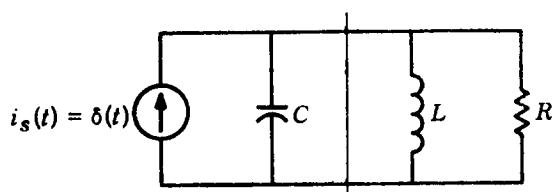
تبصره اتصال موازی یک خازن و منبع جریان i_s را درنظر بگیرید. در فصل دوم نشان دادیم که این اتصال موازی، معادل با اتصال سری همان خازن و منبع ولتاژ v_s میباشد که در آنجا:

$$v_s(t) = \frac{1}{C} \int_{0_-}^t i_s(t') dt' \quad t \geq 0$$

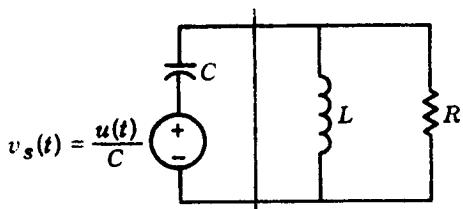


شکل ۲-۶ = پاسخ ضربه مدار RLC موازی برای حالت میرای ضعیف $(\omega > \frac{1}{\sqrt{LC}})$

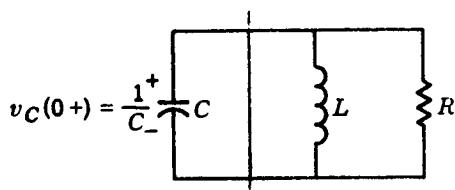
بنابراین منبع ولتاژ معادل منبع جریان ضربه، $\frac{1}{C} u(t)$ است، یعنی برای $t < 0$ منبع ولتاژ بطور متعدد برابر صفر و برای $t > 0$ منبع ولتاژ مساوی ثابت $\frac{1}{C}$ است. اتصال سری یک خازن بی‌بار و منبع ولتاژ ثابت، معادل یک خازن بار شده با ولتاژ اولیه $\frac{1}{C}$ می‌باشد. بنابراین پاسخ ضربه یک مدار RLC موازی ناشی از یک جریان



(الف)



(ب)



(پ)

شکل ۲-۷- مسئله تعیین پاسخ ضربه یک مدار RLC، به مسئله تعیین پاسخ ورودی صفر یک مدار RLC تبدیل می‌شود. توجه کنید که اتصال موازی منبع جریان ضربه و خازن در شکل (الف) به اتصال سری خازن و یک منبع ولتاژ پله در شکل (ب) تبدیل شده و بالاخره به خازن بار شده شکل (پ) تبدیل گردیده است.

ضریب موازی با آن ، با پاسخ ورودی صفر آن مدار با $i_L(o_+) = \frac{1}{C} v_C(o_+)$ بخسان ام است. این برابری ها در شکل (۲-۷) تشریح شده است.

«جایگذاری مستقیم» اکنون با جایگذاری مستقیم (۲-۳۲) در معادلات (۲-۴) تا (۲-۲۶) ثابت می کنیم که این جواب معادله است. این عمل از لحاظ آشنایی با محاسباتی که شامل ضریب هستند تمرین با ارزشی است. واضح است که L داده شده توسط

$$(2-22) \quad \frac{di_L}{dt} + \delta(t) i_L(o_-) = 0 \quad (2-25) \quad \text{را بر می اورد، یعنی،} \quad i_L(o_-) = 0$$

آنچه باقی میماند این است که نشان دهیم (۲-۳۲) در معادله دیفرانسیل (۴) مصدق می کند. با مشتق گیری از (۲-۳۲) بدست می آید :

(۲-۳۳)

$$\frac{di_L}{dt} = \delta(t) \left(\frac{\omega_0^r}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \right) + \frac{u(t) \omega_0^r}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \varphi)$$

جمله اول بصورت $\delta(t)f(t)$ است و چون برای $t \neq 0$ ، $\delta(t) f(t) = 0$ مساوی صفر است پس در این جمله میتوان $t=0$ قرار داد و $\delta(t)f(t)$ را بدست آورد ، ولی چون $f(0)=0$ است پس جمله اول ازین میرود و داریم :

$$(2-34) \quad \frac{di_L}{dt} = \frac{u(t) \omega_0^r}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \varphi)$$

با مشتق گیری مجدد بدست می اوریم :

$$(2-35) \quad \begin{aligned} \frac{d^r i_L}{dt^r} &= \delta(t) \frac{\omega_0^r}{\omega_d} \cos \varphi - u(t) \frac{\omega_0^r}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + r\varphi) \\ &= \omega_0^r \delta(t) - u(t) \frac{\omega_0^r}{\omega_d} e^{-\alpha t} [\sin(\omega_d t + \varphi) \cos \varphi + \cos(\omega_d t + \varphi) \sin \varphi] \end{aligned}$$

با جایگذاری معادلات (۲-۳۲) و (۲-۳۴) و (۲-۳۵) در (۲-۴) که برحسب ω_0 و α مجددآ بصورت زیر نوشته شده است :

$$\frac{1}{\omega_0^r} \frac{d^r i_L}{dt^r} + \frac{\alpha}{\omega_0^r} \frac{di_L}{dt} + i_L = \delta(t)$$

ملاحظه خواهیم کرد که سمت چپ ، چنانکه انتظار داشتیم ، مساوی $(t) = 8$ میگردد . بنابراین با جایگذاری مستقیم ثابت کردیم که $(2-۳۲)$ پاسخ ضربه مدار RLC موازی است .

تمرین - نشان دهید که پاسخ ضربه برای ولتاژخازن مدار RLC موازی چنین است :

$$(2-۳۶) \quad v_C(t) = u(t) \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{\omega_0^2}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \varphi)$$

شکل موج تابع فوق در شکل $(2-۶)$ ب) نشان داده شده است .

«روش دوم» در این روش از رابطه بین پاسخ ضربه و پاسخ پله استفاده میکنیم . این روش تنها برای مدارهای با اجزاء خطی تغییر ناپذیر با زمان قابل استفاده است ، چونکه تنها برای اینگونه مدارها پاسخ ضربه مشتق پاسخ پله میباشد .

تمرین - نشان دهید که پاسخ های ضربه برای L در معادله $(2-۳۲)$ و v_C در معادله $(2-۳۶)$ را میتوان با مشتق گیری از پاسخ های پله برای L در معادله $(2-۲۱)$ و v_C در معادله $(2-۲۳)$ بدست آورد .

«تعییر فیزیکی» اکنون برای توضیح چگونگی رفتار جریانها و ولتاژهای تمام شاخه ها در مدار RLC موازی ، یک ورودی بالس $i(t) = p_{\Delta}(t)$ ، مطابق شکل $(2-۸)$ الف) بکار میبریم . بعخارط بسپارید چنانچه $\Delta \rightarrow \Delta$ ، بالس Δ پست ضربه میل کرده و پاسخ بالس پست پاسخ ضربه میل خواهد نمود . برای شروع کار فرض میکنیم Δ هایاندار و مثبت بوده ولی بسیار کوچک است . در بحث پاسخ پله آموختیم که در $t=0+$ تمام جریان منبع بداخل خازن جاری نمیشود ، یعنی :

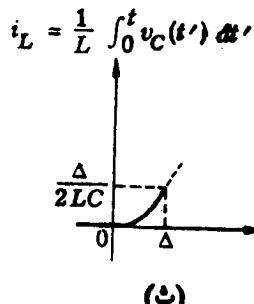
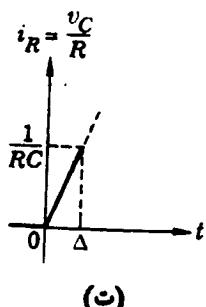
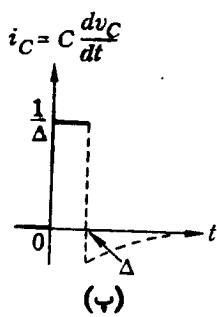
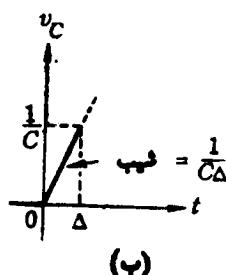
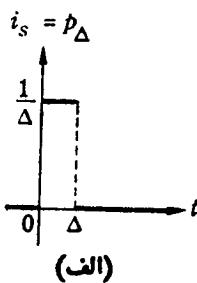
$$i_C(0_+) = i_s(0_+) = i_L(0_+) = 0 \quad \text{و} \quad \frac{1}{\Delta}$$

جریان داخل خازن با شدت اولیه $\frac{dv_C}{dt}(0_+) = \frac{i_C(0_+)}{C} = \frac{1}{C\Delta}$ موجب افزایش تدریجی ولتاژ در سرخازن میگردد . چون توجه اصلی ما به مقادیر کوچک Δ است پس فرض

نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها

میکنیم در طول فاصله کوتاه ($\Delta, 0$) شیب منحنی ولتاژ ثابت بماند. دراین صورت مطابق شکل (۲-۸ ب) در زمان Δ ولتاژ بمقدار $\frac{1}{C}$ میرسد. جریان داخل مقاومت مناسب با ولتاژ v_C بوده و بنابراین یک تابع خطی از t است (شکل ۲-۸ ت) را ببینید). جریان داخل سلف که متناسب با انتگرال v_C میباشد یک تابع سهمی از t است (شکل ۲-۸ پ) را ببینید). دراین فاصله، جریان داخل خازن بطوریکه در شکل (۲-۸ پ) نشان داده شده است ثابت میماند. البته این فرض که در فاصله ($\Delta, 0$) تمام جریان نشان داده شده است ثابت میماند. با مراععه مجدد بالاتر Δ میباشد و بنابراین وقتیکه $0 \rightarrow \Delta$ این خطاب صفر میشود. با مراععه مجدد بشکل (۲-۸ الف) ملاحظه میکنیم وقتیکه $0 \rightarrow \Delta$ ، v_C به یک ضربه δ تبدیل شده، v_C جهشی از 0 به $\frac{1}{C}$ پیدا میکند و v_C چنان است که:

$$v_C = \frac{1}{RC} t + v_0$$



شکل ۲-۸- تشریح فیزیکی پاسخ ضربه یک مدار RLC موازی، v_C پالس ورودی است، v_C ، v_R ، i_R و i_L بدست آمده نشان داده شده‌اند.

$$i_L(o_-) = i_L(o_+) = \frac{di_L}{dt} (o_-) = 0 \quad \text{و} \quad \frac{di_L}{dt} (o_+) = \frac{1}{LC}$$

بالاخره وقتیکه $0 \rightarrow \Delta$ ، از KCL ملاحظه میشود که :

$$i_C(o_+) = -i_R(o_+) - i_L(o_+) = \frac{-1}{RC}$$

توجه کنید که این شرایط با آنهاهی که از بکار بردن روش های دیگر ، مثلاً "در(۲-۳۱)" بدست آمده است مطابقت دارند.

۳- روش فضای حالت

تجزیه و تحلیل انجام شده در بخش های قبل تعمیم سر و است روشن بود که برای مدارهای مرتبه اول بکار رفت ، یعنی مایک متغیر مناسب را انتخاب کردیم (I_L درمورد بالا) و یک معادله دیفرانسیل برحسب این متغیر نوشتم. چنانچه این معادله حل شود متغیرهای دیگر بسهولت محاسبه میشوند. معهذا راه دیگری برای درنظر گرفتن این مسئله وجود دارد. واضح است هرگاه شرایط اولیه جریان I_0 سلف و ولتاژ V_0 خازن معلوم باشند پاسخ ورودی صفر کاملاً معین میشود . بنابراین میتوان V_0 و I_0 را بعنوان مشخص کننده «حالت اولیه» مدار تصور نمود و حالت کنونی (t) $i_L(t)$ و $v_C(t)$ را برحسب حالت اولیه (I_0, V_0) بیان کرد. بعبارت دیگر ، میتوان رفتار یک مدار را بصورت یک مسیر^(۱) در فضای دو بعدی درنظر گرفت که از حالت اولیه (I_0, V_0) شروع میشود و برای هر t ، نقطه متناظر مسیر ، (t) $I_L(t)$ و (t) $v_C(t)$ را معین میکند.

در واقع میتوان سوال کرد که چرا ما بیان گرفتن این جنبه جدید نیاز داریم . دلیل این موضوع نسبتاً ساده است . اول آنکه ، این روش یک توصیف تصویری روشن از رفتار کامل مدار را بما میدهد و دوم آنکه ، این روش تنها راه مؤثر تجزیه و تحلیل مدارهای غیر خطی و تغییر پذیر با زمان است . در این حالت های کلی تر ، سعی مادر انتخاب یک متغیر مناسب و نوشتن معادله دیفرانسیلی از مرتبه بالاتر برحسب آن متغیر ، به بسیاری از پیچیدگی های غیر ضروری منجر میگردد . و بدین جهت یک محرک قوی برای یادگیری روش

فضای حالت در زینه ساده مدارهای خطی تغییر ناپذیر با زمان مرتبه دوم وجود دارد. یک مزیت دیگر این روش آنست که سیستم معادلات پدست آمده از روش فضای حالت، از لحاظ محاسبه و حل عددی آنها در کامپیوترهای دیجیتال و آنالوگ بسهولت قابل برنامه نویسی هستند. بررسی دقیق تر روش فضای حالت در فصل دوازدهم داده خواهد شد.

۱-۳-۱- معادلات و مسیر حالت

اکنون همان مدار RLC موازی را که در بخش ۱ تشریح شد در نظر بگیرید و فرض کنید که ورودی منبع جریان موجود نباشد. میخواهیم پاسخ ورودی صفر را محاسبه کنیم. گیریم i_L و v_C را عنوان متغیرها بکار برد و معادلات (۱-۱ ب) و (۱-۱) را مجددآ بصورت زیر بنویسیم:

$$(۱-۱) \quad \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} v_C \quad t \geq 0$$

$$(۱-۲) \quad \frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{C} i_L - \frac{G}{C} v_C \quad t \geq 0$$

دلیل اینکه معادلات را بصورت فوق مینویسیم (دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول همزمان) بعداً روش خواهد شد. متغیرهای v_C و i_L دارای اهمیت فیزیکی زیادی هستند چونکه آنها با انرژی ذخیره شده در مدار ارتباط نزدیکی دارند. معادلات (۱-۲) و (۱-۱) معادلات دیفرانسیل همزمان مرتبه اول هستند و «معادلات حالت» مدار خوانده میشوند. جفت عددی (۱-۱) را «حالت مدار در زمان t» مینامند. طبیعتاً جفت (۱-۲) را «حالت اولیه» میگویند، این جفت با شرایط اولیه زیر داده میشود:

$$(۱-۳) \quad i_L(0) = I_0$$

$$v_C(0) = V_0$$

از تئوری معادلات دیفرانسیل میدانیم که حالت اولیه داده شده (۱-۳) و معادلات (۱-۱) برای همه مقادیر $t \geq 0$ ، مقدار $(i_L(t), v_C(t))$ را بطور یکتا معین میکنند. بنابراین چنانکه $(i_L(t), v_C(t))$ را عنوان مختصات نقطه بی در صفحه $v_C - i_L$

در نظر بگیریم، در این صورت هنگامیکه t از صفر تابعهای زیاد میشود نقطه $(t, i_L(t), v_C(t))$ یک منحنی را که از (I_0, V_0) شروع میشود، طی میکند. این منحنی «مسیر فضای حالت» خوانده میشود و صفحه $(i_L(t), v_C(t))$ نیز «فضای حالت» مدارگفته میشود. جفت عددهای $(i_L(t), v_C(t))$ را میتوان بعنوان مؤلفه های یک بردار $\mathbf{x}(t)$ که مبدأش مبدأ محورهای مختصات باشد در نظر گرفت بنابراین میتوان نوشت:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}$$

بردار $\mathbf{x}(t)$ را «بردار حالت» یا با اختصار «حالت» نامند. بنابراین $\dot{\mathbf{x}}(t)$ برداری است در فضای حالت که برای همه مقادیر $t \geq 0$ تعریف میشود. مؤلفه های این بردار، یعنی جریان i_L داخل سلف و ولتاژ v_C دو سر خازن را «متغیرهای حالت» گویند. با معلوم بودن حالت در زمان t ، یعنی با دانستن جفت عددهای $(i_L(t), v_C(t))$ را از معادلات حالت (۲-۱) و میتوان سرعت^(۱) مسیر $\left(\frac{di_L}{dt}(t), \frac{dv_C}{dt}(t) \right)$ را از معادلات حالت (۲-۱) و (۲-۲) بدست آورد.

مثال ۱ - در مدار RLC موازی، حالت های میرای شدید، میرای ضعیف و بی اتلاف را در نظر بگیرید و فرض کنید حالت اولیه $I_0 = 1$ آمپر و $V_0 = 1$ ولت باشد.
الف - میرای شدید. $R = ۳$ اهم، $L = ۴$ هانری، $C = \frac{۱}{۱۲}$ فاراد
 $s_1 = -۲$ ، $s_2 = -۱$ ، $a = ۲$. بنابراین فرکانس های طبیعی $\omega_1 = \sqrt{۱ - ۴} = \sqrt{۳}$ و $\omega_2 = \sqrt{۱ + ۴} = \sqrt{۵}$ هستند. از معادلات (۲-۲) و (۲-۱) بدست میاوریم:

$$i_L(t) = \frac{1}{\lambda} (e^{-t} - e^{-\gamma t}) + \frac{1}{\gamma} (-e^{-\gamma t} + \gamma e^{-t}) = \frac{1}{\lambda} e^{-t} - \frac{1}{\lambda} e^{-\gamma t}$$

؛

$$v_C(t) = \frac{1}{\gamma} (-e^{-t} + \gamma e^{-\gamma t}) + \gamma (e^{-\gamma t} - e^{-t}) = -\frac{1}{\gamma} e^{-t} + \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma t}$$

این شکل موجها در شکل (۲-۱) الف) رسم شده اند. اکنون t را بعنوان پارامتر بکار

برده و برای هر مقدار t ، حالت $v_C(t)$ را در فضای حالت، یعنی صفحه ای که محور طولهای آن \mathbb{R}^2 و محور عرضهای آن v_C باشد رسم می کنیم. نتیجه بدست آمده در شکل (۲-۳ ب) نشان داده شده است. توجه کنید که مسیر از نقطه (۱، ۰) برای $t=0$ شروع می شود و به مبدأ مختصات برای $t=\infty$ ختم می گردد.

ب - میرای ضعیف. $R=1$ اهم، $L=1$ هانری و $C=1$ فاراد از معادلات (۱-۲۴) و (۱-۲۵) داریم:

$$\left(\omega_d = \frac{\sqrt{2}}{2}, \omega_0 = 1, a = \frac{1}{2} \right)$$

$$i_L(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} t + \sqrt{2} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} t \right) = 2e^{-\frac{t}{2}} \cos \left(\frac{\sqrt{2}}{2} t - 60^\circ \right)$$

و:

$$v_C(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} t - \sqrt{2} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} t \right) = 2e^{-\frac{t}{2}} \cos \left(\frac{\sqrt{2}}{2} t + 60^\circ \right)$$

شکل موجها در شکل (۲-۲ الف) و مسیر در شکل (۲-۲ ب) رسم شده اند. توجه کنید که مسیر بشکل حلزونی^(۱) است که از نقطه (۱، ۰) شروع شده و به مبدأ مختصات ختم می گردد.

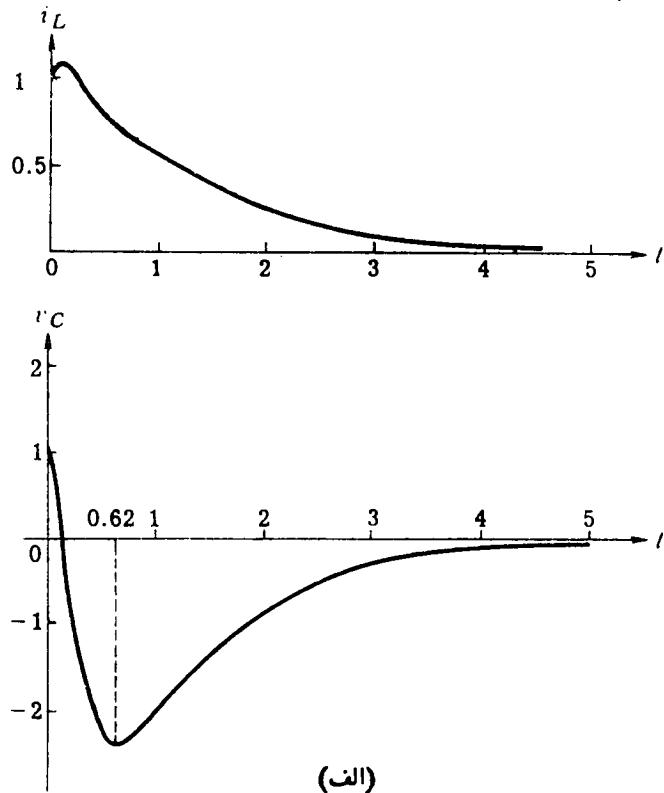
پ - بی اتلاف. $L=\frac{1}{4}$ هانری و $C=1$ فاراد ($\omega_0=2$ ، $a=0$). از معادلات (۱-۲۶) و (۱-۲۷) داریم:

$$i_L(t) = \cos 2t + \frac{1}{\lambda} \sin 2t = 1.0 \cos(2t - 70^\circ)$$

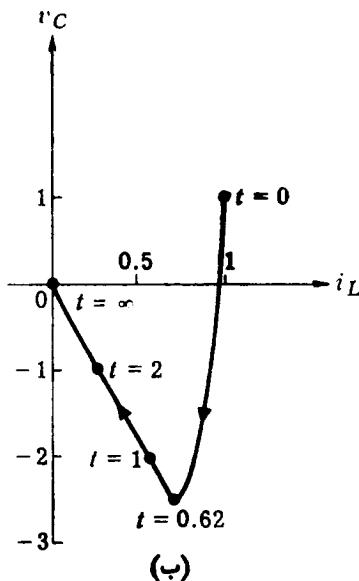
و:

$$v_C(t) = \cos 2t - 8 \sin 2t = 8.0 \cos(2t + 82^\circ)$$

شکل موجها و مسیر در شکل های (۲-۳ الف و ب) رسم شده اند. توجه کنید که در این سورد، مسیر یک بیضی است که مرکزش در مبدأ مختصات قرار دارد و این نشان دهنده آنست که پاسخ ورودی صفر نوسانی است.

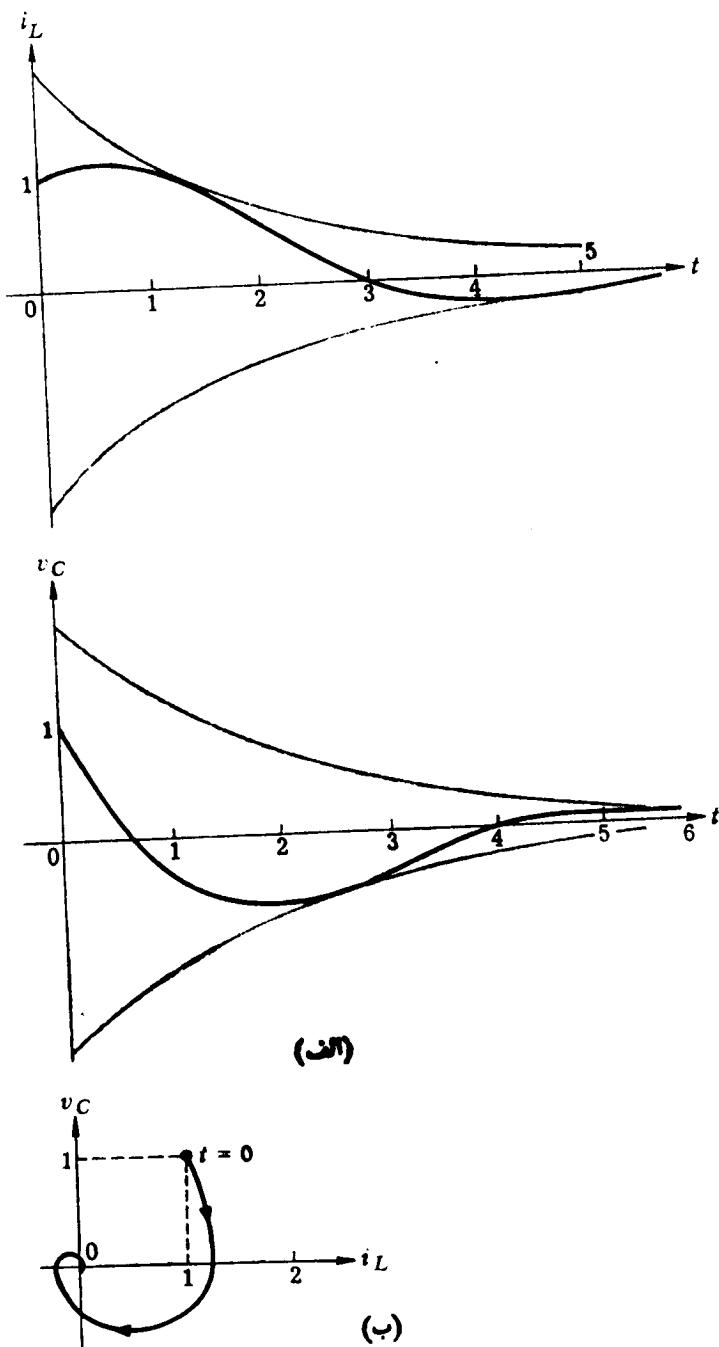


(الف)

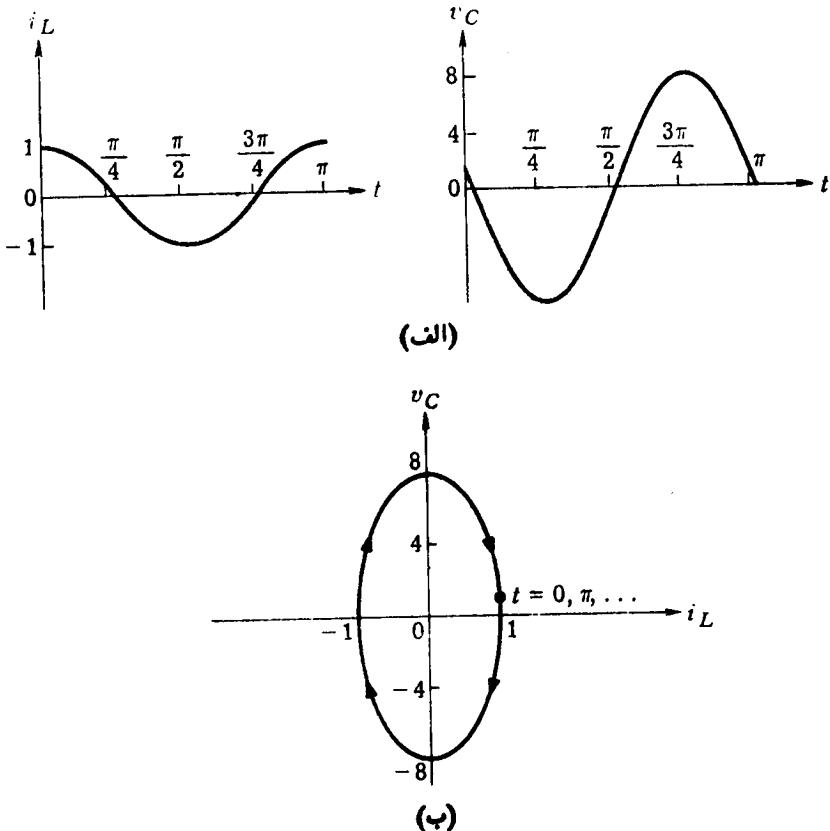


(ب)

شکل ۱-۳-۱ مدار RLC موازی میرای شدید. (الف) شکل موجهای i_L و v_C . (ب) مسیر حالت



شکل ۲-۳۰ = مدار موازی میرای ضعیف. (الف) شکل موجهای i_L و v_C . (ب) مسیر حالت

شکل ۳-۳-۳- مدار LC موازی بی اتلاف.(الف) شکل موجهای i_L و v_C . (ب) مسیر حالت

۳-۴- نمایش ماتریسی

معادلات (۲-۱) و (۲-۲) را میتوان بر حسب متغیرهای حالت بشکل ماتریسی بصورت زیر نوشت:

$$(۲-۴) \quad \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad t \geq 0$$

$$(۲-۵) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

و

که در آنجا:

$$(3-6) \quad \mathbf{A} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{G}{C} \end{bmatrix}$$

$$(3-7) \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} I_0 \\ V_0 \end{bmatrix}$$

معادلات ماتریسی (۳-۴) و (۳-۵) ، بسیار شبیه معادله اسکالر زیر هستند :

$$(3-8) \quad \frac{dx}{dt} = ax \quad x(0) = x_0$$

این معادله اسکالر دارای جواب شناخته شده $x(t) = e^{at}x_0$ میباشد . بطريق مشابه ، معادله ماتریسی دارای جواب زیر است :

$$(3-9) \quad \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{At}}\mathbf{x}_0 \quad t \geq 0$$

که در آن $e^{\mathbf{At}}$ «ماتریسی» است که به \mathbf{A} و t بستگی دارد . عبارت هندسی ، این رابطه بردار حالت اولیه \mathbf{x}_0 را به بردار حالت $\mathbf{x}(t)$ در زمان t می نگارد (۱) . در واقع همانطور که عبارت نمایی $e^{\alpha t}$ بصورت سری توانی (۲) بسط داده میشود (که برای همه مقادیر t معتبر است) :

$$e^{\alpha t} = 1 + at + \frac{a^2 t^2}{2!} + \frac{a^3 t^3}{3!} + \dots$$

ماتریس $e^{\mathbf{At}}$ نیز بصورت سری توانی بسط داده میشود (که برای همه مقادیر t معتبر است) :

$$e^{\mathbf{At}} = \mathbf{I} + \mathbf{At} + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \frac{t^3}{3!} + \dots$$

که در آنجا \mathbf{I} ماتریس واحد (۳) است . در سری اخیر هر جمله یک «ماتریس» میباشد و

بنابراین \mathbf{A}^t نیز یک ماتریس است. هر عنصر ماتریس \mathbf{A}^t تابعی از t است. تذکر این نکته حاiz اهمیت است که معادله (۳-۹) یک «تابع خطی» را نمایش میدهد که بردار \mathbf{x} (بردار حالت اولیه) را به بردار $(t)\mathbf{x}$ (بردار حالت در زمان t) می‌نگارد. گرچه بیشتر از این درباره نمایش و محاسبه \mathbf{A}^t صعبت نخواهیم کرد، معهداً این مطلب که معادله برداری (۳-۹) تمام سیر فضایی حالت را بوجود می‌آورد حاiz کمال اهمیت است.

۳-۳-۱- روش تقریبی برای محاسبه مسیر حالت

با توجه به معادلات (۳-۴) و (۳-۵) میتوان برای هر t ، معادله (۳-۴) را بعنوان تعریف کننده سرعت (t) $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ در طول مسیر در نقطه $(t)\mathbf{x}$ از فضای حالت درنظر گرفت. بویژه با معلوم بودن حالت اولیه $(0)\mathbf{x}$ ، معادله (۳-۴) سرعت اولیه بردار حالت (0) $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ را بما میدهد. میتوان برای محاسبه مسیر تقریبی از یک روش ساده مرحله بمرحله استفاده نمود. روش فوق متکی براین فرض است که اگر یک فاصله زمانی خیلی کوچک Δt درنظر گرفته شود، در طول این فاصله سرعت $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ تقریباً ثابت میماند، بعبارت دیگر، مسیر تقریباً یک پاره خط مستقیم است. بنابراین اگر در زمان 0 با حالت اولیه \mathbf{x}_0 شروع کنیم خواهیم داشت:

$$(3-10) \quad \frac{d\mathbf{x}(0)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}_0$$

و چون فرض میشود که در طول فاصله کوچک $(0, \Delta t)$ سرعت ثابت میماند داریم:

$$(3-11) \quad \mathbf{x}(\Delta t) \approx \mathbf{x}_0 + \frac{d\mathbf{x}}{dt} (0) \Delta t = \mathbf{x}_0 + \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \Delta t$$

برای فاصله بعدی، $(\Delta t, 2\Delta t)$ ، مجددآ فرض میکنیم که سرعت ثابت باشد و آنرا بر مبنای مقدار تقریبی $(\Delta t)\mathbf{x}$ که بوسیله (۳-۱۱) داده میشود محاسبه میکنیم و داریم:

$$(3-12) \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} (\Delta t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(\Delta t)$$

و بنابراین:

$$(3-13) \quad \mathbf{x}(2\Delta t) \approx \mathbf{x}(\Delta t) + \mathbf{A}\mathbf{x}(\Delta t) \Delta t$$

بهمین ترتیب برای محاسبه مقادیر تقریبی متوالی حالت ادامه میدهیم :

$$(۳-۱۴) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}[(k+1)\Delta t] &\approx \mathbf{x}(k\Delta t) + \mathbf{A}\mathbf{x}(k\Delta t)\Delta t \\ &= (\mathbf{I} + \Delta t\mathbf{A})\mathbf{x}(k\Delta t) \end{aligned}$$

$$k=0, 1, 2, \dots, N$$

میتوان این روش را بسهولت برای کامپیوترهای دیجیتال بکار برد . در واقع میتوان نشان داد که چنانچه $0 \rightarrow \Delta t \rightarrow \mathbf{x}(\Delta t), \mathbf{x}(2\Delta t), \dots, \mathbf{x}(N\Delta t)$ که بدینسان حساب میشوند ، پس از نقاط واقعی مسیر واقعی میگذند . مقدار Δt که در عمل باید انتخاب شود به عاملهای زیر بستگی دارد . (۱) تعداد رقم های با معنی^(۱) که در محاسبات نگهداری میشود ، (۲) دقت مورد نیاز ، (۳) ثابت های مسئله و (۴) طول فاصله زمانی که مسیر فوق در آن خواسته میشود . چنانچه مسیر فوق محاسبه شود ، میتوان بسهولت پاسخ مدار را تعیین نمود زیرا این پاسخ بکی از مؤلفه های حالت و یا ترکیب خطی آنها میباشد .

مثال ۲ - گیریم این روش را برای محاسبه مسیر حالت مدار RLC موازی با سیر ایمن ضعیف مثال ۱ بکار برمیم . معادله حالت چنین است :

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

و حالت اولیه عبارتست از :

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

گیریم $\Delta t = 0.2$ ثانیه انتخاب شود . میتوان از (۳-۱۱) برای بدست آوردن حالت در Δt استفاده کرد ، بنابراین :

$$\begin{bmatrix} x_1(0.2) \\ x_2(0.2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

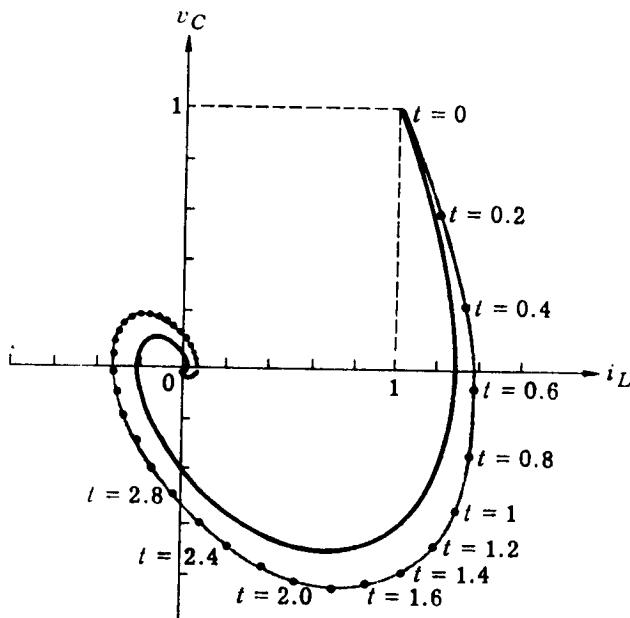
سپس از (۳-۱۳)، حالت در $t = 2\Delta t$ بدست می‌آید و داریم:

$$\begin{bmatrix} x_1(0.4) \\ x_2(0.4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.6 \end{bmatrix} + 0.2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.32 \\ 0.24 \end{bmatrix}$$

در واقع میتوان از روی (۳-۱۴)، حالت در $t = (k+1)\Delta t$ را به حساب حالت در $k\Delta t$ بصورت زیر نوشت:

$$\mathbf{x}[(k+1)\Delta t] = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ -0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k\Delta t)$$

شکل (۳-۴) سیر را بصورت یک منحنی پیوسته و نقاطی که با $\Delta t = 0.2$ ثانیه حساب شده‌اند نشان میدهد. چنانچه، $\Delta t = 0.2$ ثانیه را بکار می‌بردیم نقاطی که از کاربرد



شکل ۳-۴- محاسبه سیر حالت با استفاده از روش مرحله برای مثال ۲ با $\Delta t = 0.2$ ثانیه.

مکرر معادله (۳-۱۴) بدست می‌آمدند همگی روی مسیر واقعی قرار می‌گرفتند.

تمرین - مسیر حالت مثال ۲ را برای موارد زیر محاسبه کنید:

$$\text{الف} - ۱\text{ز} = \Delta t \text{ ثانیه}$$

$$\text{ب} - ۰\text{ر} = \Delta t \text{ ثانیه}$$

تابع حاصل را توضیح دهید.

تبصره - اگر یک مدار RLC موازی که در آن مقاومت، سلف و خازن «غیر خطی» ولی تغییر ناپذیر با زمان باشند را در نظر بگیریم در اینصورت با برقراری فرض‌های نسبتاً کلی در مورد مشخصه‌های آنها، معادلاتی بصورت زیر خواهیم داشت:

$$(۳-۱۵) \quad \frac{di_L}{dt} = f_1(i_L, v_C), \quad \frac{dv_C}{dt} = f_2(i_L, v_C)$$

که در آن توابع f_1 و f_2 به حساب مشخصه‌های شاخه‌ها بدست می‌آیند.

توجه باین موضوع حائز اهمیت است که روش عمومی بدست آوردن محاسبه تقریبی مسیر در این مورد نیز برقرار است و معادلات چنین هستند:

$$(۳-۱۶) \quad \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$$

و معادلات متناظر با (۳-۱۱) و (۳-۱۲) اکنون چنین هستند:

$$(۳-۱۷) \quad \mathbf{x}(\Delta t) \approx \mathbf{x}_0 + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \Delta t$$

$$\mathbf{x}(2\Delta t) \approx \mathbf{x}(\Delta t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}(\Delta t)) \Delta t$$

در بخش ۴ مثالهایی در این مورد داده خواهد شد.

۴-۳- معادلات حالت و پاسخ کامل

اگر مدار RLC موازی مطابق شکل (۲-۱) با یک منبع جریان تعریف کشود، بطريق مشابهی می‌توان معادلات حالت را نوشت. در مرحله اول، ونتایز دو مدار موازی با حالتیکه هیچ منبعی وجود نداشت یکسان است و مانند معادله (۳-۱) بدست می‌آوریم که:

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} v_C$$

مپس در معادله KCL باستی اثر منبع جریان را دخالت داد. بنابراین در مقایسه با معادله (۳-۲) یک جمله اضافی لازم است و داریم :

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{C} i_L - \frac{G}{C} v_C + \frac{i_s}{C}$$

حالت اولیه همان است که توسط معادله (۳-۲) داده میشود :

$$i_L(0) = I_0$$

$$v_C(0) = V_0$$

اگر بردار \mathbf{x} برای نشان دادن بردار حالت بکار رود، یعنی، معادله $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$ ، حالت بصورت ماتریسی چنین خواهد بود :

$$(3-18) \quad -\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}w$$

و حالت اولیه عبارتست از :

$$(3-19) \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} I_0 \\ V_0 \end{bmatrix}$$

در معادله (۳-۱۸) :

$$(3-20) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{G}{C} \end{bmatrix}$$

و :

$$(3-21) \quad \mathbf{b}w = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} i_s$$

ماتریس‌های \mathbf{A} و \mathbf{b} به اجزاء مدار بستگی دارند و ورودی با w نشان داده شده است.

معادله (۳-۱۸) یک معادله دیفرانسیل ماتریسی ناهمگن مرتبه اول است که مشابه معادله دیفرانسیل اسکالر خطی ناهمگن مرتبه اول زیر میباشد:

$$(3-22) \quad \frac{dx}{dt} = ax + bw$$

جواب این معادله اسکالر که در شرط اولیه داده شده $x_0 = (0)$ صدق میکند چنین است:

$$(3-23) \quad x = e^{at} x_0 + \int_0^t e^{a(t-t')} bw(t') dt'$$

توجه کنید که پاسخ کامل بصورت مجموع دو جمله نوشته شده است. جمله اول، یعنی $e^{at} x_0$ پاسخ ورودی صفر است و جمله دوم، که بصورت انتگرال نمایش داده شده است پاسخ حالت صفر میباشد. بطريق مشابه، معادله ماتریسی (۳-۱۸) دارای جواب زیر است:

$$(3-24) \quad \mathbf{x} = e^{At} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-t')} \mathbf{b} w(t') dt'$$

جمله اول، یعنی $\mathbf{x}_0 e^{At}$ پاسخ ورودی صفر است و جمله دوم، که بصورت انتگرال نمایش داده شده است پاسخ حالت صفر میباشد. اگر چه اثبات رابطه (۳-۲۴) در اینجا داده نخواهد شد معهداً صورت معادله (۳-۲۴) قابل توجه است. چنانکه دیده میشود مجدداً این عبارت به محاسبه A^t بستگی دارد. روش تقریبی محاسبه \mathbf{x} که در بخش (۳-۲) داده شد در اینجا نیز میتواند مورد استفاده قرار گیرد.

۶- نوسان، مقاومت منفی و پایداری

ما در بخش‌های پیش مدار RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان را به تفصیل بررسی کردیم و جواب‌های حالت میرای ضعیف را صریحآ بدست آوردیم. حالت خاص مورد توجه این بخش حالت بی اتلاف است که دارای پاسخ ورودی صفر نوسانی است. ما خواص چنین مداری را مطالعه خواهیم کرد و بعلاوه برخی توجهات فیزیکی خاص مربوط به آن را نیز بیان خواهیم نمود.

مدار LC موازی بی اتلاف را میتوان بعنوان حالت خاص یک مدار میرای ضعیف با $R=0$ (یا $G=0$ ، $\alpha=0$) درنظر گرفت. در تشکیل دادن معادلات دیفرانسیل بر حسب ولتاژ خازن یا جریان سلف و بدست آوردن معادلات حالت، هیچ تفاوتی نسبت به مدار میرای ضعیف وجود ندارد. بعلاوه میتوان پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر را مستقیماً با قرار دادن $\alpha=0$ و $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ ، از روی پاسخ

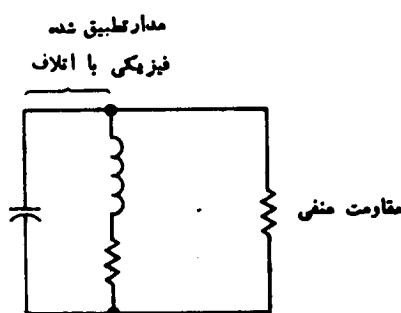
حالت میرای ضعیف بدست آورد. اکنون پارهای از این نتایج را مرور میکنیم. فرکانس‌های طبیعی مدار بی اتلاف $\omega_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{LC}}$ میباشد. پاسخ ورودی صفر یک سینوسی با همان فرکانس زاویه‌ای ω_0 است که این حقیقت در مثال ۱ بخش ۲ تشریح شد. مسیر حالت مطابق شکل (۳-۲ ب) یک‌بیضی است که ملزم میدارد پاسخ ورودی صفر یک مدار بی اتلاف، یک نوسان مدام باشد. انرژی ذخیره شده اولیه در خازن و / یا در سلف بطور بی‌پایان یکدیگر منتقل میشوند.

اکنون پاسخ حالت صفر را درنظر میگیریم. با مراجعه به بخش ۲ بخاطر میاوریم که پاسخ ضربه یک مدار LC بی اتلاف، یک سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω_0 میباشد. پاسخ پله نیز شامل یک قسمت سینوسی با همان فرکانس است. در واقع اگر در زمان صفر مدار در حالت صفر بوده و در فاصله $[T, 0]$ (که در آن T هر زمان بزرگتر از صفر میباشد) یک ورودی دلخواه بآن اعمال شود و پس از زمان T این ورودی مساوی صفر قرار داده شود، دراینصورت برای زمانهای بعد از T پاسخ بصورت $K \sin(\omega_0 t + \theta)$ خواهد بود که در آن دامنه K و فاز θ به ورودی بستگی دارند.

مدار LC بی اتلاف، یک مدار تشدیدی یا یک مدار تطبیق شده^(۱) نامیده میشود. واژه «تطبیق شده» ملزم میدارد که فرکانس نوسان بانتظام مقدار خازن یا سلف، با یک عدد داده شده $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ تطبیق داده شود. اگر مدار فیزیکی چنان میبود که سلف و خازن فیزیکی آن همانند مدل‌های سلف و خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان ما بودند، یک نوسان ساز خطی^(۲) بدست میآمد که با فرکانس زاویه‌ای ω_0 نوسان میکرد.

واضح است که عناصر فیزیکی همانند مدل‌های مداری ما نیستند و چنانکه در فصل دوم گفته شد یک سلف «فیزیکی» همیشه دارای مقدار معنی اتلاف است و مدل آن باید بصورت اتصال سری یک سلف و یک مقاومت در نظر گرفته شود. بنابراین در عمل یک مدار تطبیق شده فیزیکی (بنتهایی) یک نوسان ساز نیست و پشتیکه اتلاف آن بقدر کافی کوچک باشد بصورت یک مدار با میرایی ضعیف رفتار می‌کند. در عمل، برای مدارهای تطبیق شده میتوان Q را تا حدود چندین صد بدست آورد. از نظر اصولی، با استفاده از فوق رساناهای^(۱) میتوان مدارهایی با Q بینهایت نیز بدست آورد.

برای بدست آوردن یک نوسان ساز لازم است اتلاف موجود در هر مدار تطبیق شده فیزیکی را جبران نمود. واضح ترین وسیله برای اینکار وارد کردن عنصری با مقاومت منفی به مدار است بقسمی که نتیجه حاصل یک مدار بی اتلاف باشد. غالباً میتوان یک نوسان ساز نوعی را متشکل از یک مدار تطبیق شده فیزیکی که یک مقاومت با مقاومت منفی متصل است تصویر نمود. این مطلب در شکل (۱-۴) تشریح شده است. در فصل دوم درباره خاصیت مقاومت منفی سیگنال کوچک یک دیود توپلی بحث شده است. بعداً خواهیم دید که با استفاده از پس خورد^(۲) در یک مدار ترانزیستوری نیز میتوان مقاومت منفی بدست آورد. همه این مقاومتها منفی تقریبی هستند یعنی فقط در فاصله معینی از ولتاژها



شکل ۱-۴ = یک نوسان ساز خطی ساده که دارای یک مدار تطبیق شده

فیزیکی و یک مقاومت منفی است

و جریانها و شايد فقط در باند معینی از فرکانس، این گونه وسائل مانند مقاومتهای خطی تغییر ناپذیر با زمان با مقاومتهای منفی رفتار مینمایند. باوجود این، مدل یک مقاومت اکتیو خطی تغییر ناپذیر با زمان مفهود بوده و ما آنرا برای تجزیه و تحلیل رفتار بعضی مدارهای ماده مرتبه دوم بکار خواهیم بود. درک کامل این مدارها در مطالعه مدارهای غیرخطی سودمند خواهد بود.

اکنون مدار RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان مطابق شکل (۴-۲) را درنظر بگیرید که در آن مقاومت دارای یک مقاومت «منفی» ($G < 0$) و ($R > 0$) میباشد. چند جمله‌ای مشخصه برای این مدار، $a = \frac{G}{2C} + 2\omega_0 + \omega_0^2$ است که در آن

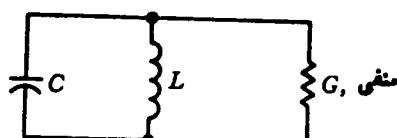
منفی میباشد و ω_0 مانند حالت قبل مساوی $\frac{1}{VLC}$ است. ریشه‌های معادله مشخصه فرکانس‌های طبیعی مدار هستند و چون $a < 0$ است میتوان آنها را بصورت زیر نوشت:

$$\left. \begin{array}{l} s_1 \\ s_2 \end{array} \right\} = |a| \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ انگاری خالص و یا حقیقی است که در حالت اخیر از $|a|$ کوچکتر میباشد. بنابراین فرکانس‌های طبیعی در نیمه راست صفحه فرکانس مختلط قرار دارند. ما پاسخ ورودی صفر را برسی کرده و طبقه بندی زیر را انجام میدهیم:
 $|a| < \omega_0$: دوفرکانس طبیعی مزدوج مختلط هستند ($s_1 = \alpha + j\omega_0$ و $s_2 = \alpha - j\omega_0$).
 $|a| = \omega_0$ که در آن $\alpha = \omega_0^2 - \omega_0^2 = 0$. بنابراین پاسخ چنین است:

$$k e^{|\alpha| t} \cos(\omega_0 t + \theta)$$

که در آن k و θ ثابت‌هایی هستند که بشرط‌های اولیه بستگی دارند.



شکل ۴-۲-۶- مدار RLC موازی

-۲ $|a| > \omega_0$: دو فرکانس طبیعی ω_1 و ω_2 حقیقی و مثبت هستند و پاسخ مجموع

دو نمایی «افزایشی» میباشد :

$$k_1 e^{\omega_1 t} + k_2 e^{\omega_2 t}$$

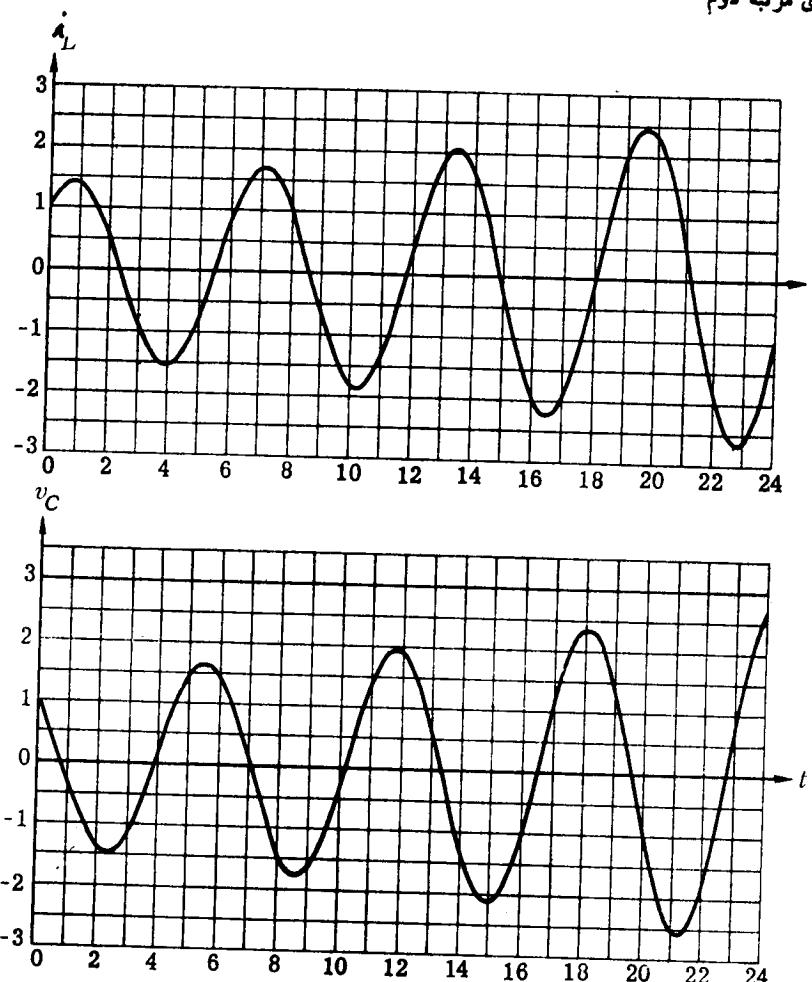
که در آن k_1 و k_2 بشرطی اولیه بستگی دارند.

پاسخ‌ها در هر دو حالت شامل عوامل نمایی افزایشی میباشند و بنابراین با مرور زمان پاسخ‌ها بطور دلخواهی بزرگ میشوند. روش تعیین شکل موجه‌های ω_1 و ω_2 درست مانند موردی است که در آن مقاومت مشتب میباشد. منحنی‌های v_C و i_L بر حسب t در شکل (۴-۳) و مسیر حالت برای یک مورد ($|a| < \omega_0$) و حالت اولیه $i = i(0)$ و $v_C = v(0)$ در شکل (۴-۴) داده شده‌اند.

در ک این پاسخ‌ها حائز کمال اهمیت است. مقاومت خطی دارای مقاومت «ستفی»، جزء «اکتیوی» است که بجای اینکه مانند مقاومت پسیو انرژی تلف نماید به سلف و خازن انرژی تحویل میدهد. بنابراین بدون هیچ ورودی، پاسخ‌ها پس از اینکه در اثر انرژی اولیه در سلف و / یا خازن شروع شدند میتوانند افزایش یابند. چنانکه قبل اشاره شده است، مقاومت خطی اکتیوی‌تها مدلی است که رفتار برخی از وسایل را در فاصله شخص شده‌ای از ولتاژ و جریان بطور تقریبی نشان میدهد. اگر ولتاژها و جریانها خارج از این مقادیر مشخص شده افزایش یابند، محاسبات، دیگر رفتار فیزیکی واقعی مدار را نمایش نمیدهند. در اکثر موارد بایستی توصیف غیرخطی دستگاه را در نظر گرفت و نتایج ریاضی حاصل از فرض تقریب خطی را اصلاح نمود. چنانکه در بخش بعد نشان داده خواهد شد، ممکن است رفتار فیزیکی واقعی به نوسان غیرخطی متنه شود و یا در موارد دیگر پارامتر از عناصر مدار نتوانند جریان زیاد را تحمل نموده و بالاخره بسوزند.

اکنون به تجزیه و تحلیل خطی خود برمیگردیم و دو مورد مقاومت‌های خطی اکتیو و پسیو را با هم در نظر میگیریم. پاسخ‌های ورودی صفر مدارهای RLC موازی را میتوان به سه دسته تقسیم نمود.

«حالت اول» فرکانس‌های طبیعی در «نیمه چهارم صفحه» قرار دارند، یعنی هر دو فرکانس طبیعی ω_1 و ω_2 «جزء‌های حقیقی ستفی» دارند و این امر حالتهای میرای شدید، میرای بحرانی و میرای ضعیف بخش ۱ را شامل میشود. بعلت وجود عامل نمایی میرا



شکل ۳-۴- منحنی های i_L و v_C برای مدار RLC موازی شکل (۲-۴). به مقاومت اکتیو توجه کنید. فرض می شود که $\omega_0 > |a|$ است

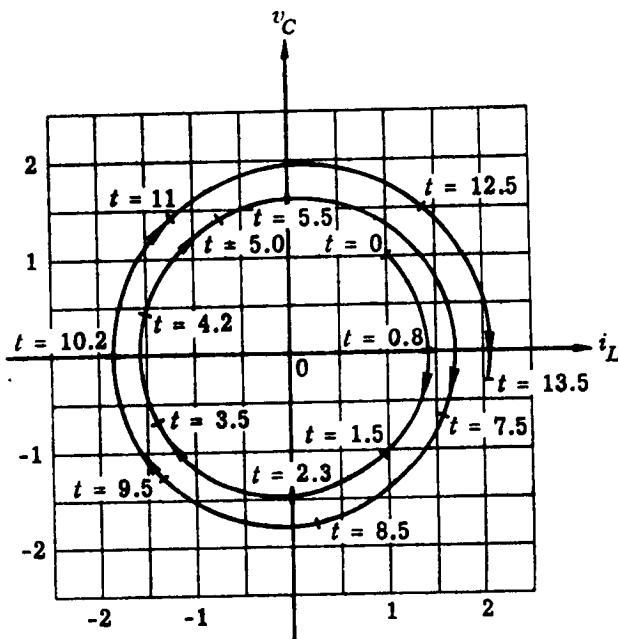
وقتیکه $\infty \rightarrow t$ ، پاسخ ورودی صفر بسته صفر میل میکند. در فضای حالت وقتیکه $\infty \rightarrow t$ ، برای هر حالت اولیه مسیر حالت بسته مبدأ میل میکند. چنین مداری را «پایدار مجازی (۱)» نامند. مسیرهای حالت شکل های (۲-۱ ب) و (۲-۲ ب) مثالهای نوعی هستند. چون مفهوم پایداری مجازی بی اندازه حائز اهمیت است یکبار دیگر آنرا تکرار

۱- Asymptotically stable

میکنیم. مداری را پایدار مجانبی گویند که سیر فضای حالت آن برای هر حالت اولیه و برای ورودی صفر، کراندار^(۱) بماند و وقتیکه $\rightarrow \infty$ ، سیر بست مبدأ میل کند. شرط کراندار بودن تنها برای پایداری مدارهای غیر خطی خاص حائز اهمیت است.

«حالت دوم» فرکانس‌های طبیعی روی «محور انگاری» قرار دارند، یعنی s_1 و s_2 دارای جزء‌های حقیقی صفر میباشند. $s_1 = j2\pi f_0$ و $s_2 = -j2\pi f_0$. این حالت بی اتفاف است. پاسخ ورودی صفر یک سینوس با فرکانس f_0 میباشد. در فضای حالت سیر یک بیضی است که مرکز آن در مبدأ واقع است و مدار را «نوسانی» گویند.

«حالت سوم» فرکانس‌های طبیعی در «نیمه راست صفحه» قرار دارند، یعنی s_1 و s_2 دارای جزء‌های حقیقی مشت میباشند. این وضع متناظر با حالت مقاومت منفی است و وقتیکه $\rightarrow \infty$ ، پاسخ ورودی صفر پیکران^(۲) میگردد. در فضای حالت وقتیکه $\rightarrow \infty$ ، سیر بست بینهایت میل میکند و مدار را «ناپایدار» گویند. یک مثال نمونه‌ای سیر شکل (۴-۱) میباشد. شکل موجه‌ای متناظر i_L و v_C در شکل (۴-۲) نشان داده شده‌اند.



شکل ۴-۴- سیر حالت مدار RLC فکل (۴-۲)

۵- مدارهای غیر خطی و تغییر پذیر با زمان

هنگامیکه در فصل چهارم مدارهای مرتبه اول غیر خطی و تغییر پذیر با زمان را بررسی میکردیم متوجه شدیم که گاهی میتوان این مسائل را بطور تحلیلی نیز حل نمود. علاوه برنشان دادن راه حل های ساده تحلیلی در فصل چهارم تأکید اصلی مانشان دادن این واقعیت بود که در مدارهای غیرخطی خاصیت خطی بودن برقرار نبوده و در مدارهای تغییرپذیر با زمان نیز خاصیت تغییر ناپذیری با زمان برقرار نمیباشد. در مدارهای غیر خطی و تغییر پذیر با زمان مرتبه دوم نیز برای پارهای از مدارهای بسیار خاص، روشهای تحلیلی وجود دارد. همچنین روشهای ترسیمی گوناگونی موجود است که برای انواع زیادی از شبکه ها میتوان آنها را با مزایای بیشتری پکار برد. در کتاب ها، معادلات و روشهای خاص زیادی مانند معادله ون دربل^(۱)، معادله ساتیو^(۲)، معادله دافین^(۳)، روشن خطوط همشیب^(۴) و روشن لینارد^(۵) وجود دارند، ولی ما این روشهای سرsum را ارائه نخواهیم کرد، زیرا اولاً، آنها موضوع های تخصصی ویژه ای بوده و بروشی از حدود مطالب این کتاب خارج هستند، ثانیاً، در عصر کامپیوترهای دیجیتال، اینگونه معادلات و روشهای خاص اهمیت خود را ازدست داده اند، زیرا بهجای در نظر گرفتن یک تقریب ناقص که بکمک آن مسئله را در قالب مسئله دیگری که حل آن معلوم است در آوریم، حل بهترین مدل معلوم هم ارزانتر بوده و هم مفهوم مهندسی بیشتری دارد.

در این بخش منظور ما ابتدا بیان رفتار نیزیکی پارهای از مدارهای غیر خطی و سپس تشریح دقیق نوشتن معادلات دیفرانسیل اینگونه مدارهای غیر خطی میباشد. معادلاتی که از لحاظ محاسبات عددی راحت ترین شکل را دارند دستگاههای دو معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول می باشند (بهجای یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم معمولی). در مورد مدارهای خطی، این معادلات را معادلات حالت گویند، درحالیکه در مورد مدارهای غیر خطی آنها را

۱- van der Pol

۲- Mathieu

۳- Duffin

۴- Isocline

۵- Liénard

«معادلات بصورت نرمال^(۱)» می نامند. یعنی :

$$(۰-۱) \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, w)$$

که در آن \mathbf{x} نمایشگر برداری است که مولفه های آن متغیرهای انتخاب شده شبکه باشند (ولتاژها، جریانها، بارها و شارها)، w نشان دهنده ورودی و \mathbf{f} تابعی با مقدار برداری^(۲) است. معادله (۰-۱) تعیین معادله حالت خطی زیر است :

$$(۰-۲) \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{bw}$$

که در بخش ۳ درباره آن بحث شد. چنانکه قبل "گفته شد، برای کارهای عددی میتوان روش انتگرال گیری مرحله بمرحله را بکار برد. دو مثال زیر این نکات را روشن میسازند.

مثال ۱ - مدار RLC موازی نشان داده شده در شکل (۰-۱) که در آن سلف و خازن، خطی و تغییر ناپذیر با زمان بوده ولی مقاومت یک عنصر غیر خطی با مشخصه نشان داده شده در شکل میباشد را در نظر بگیرید. ممکن است در بعضی موارد مشخصه غیر خطی با یک چند جمله ای بصورت زیر تقریب گردد :

$$(۰-۳) \quad g(v) \approx -\alpha v + \beta v^3$$

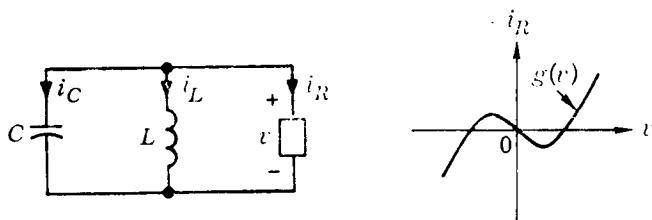
که در آن α و β ثابت هائی هستند که برای برازاندن^(۳) معنی شکل (۰-۱) انتخاب میشوند. ابتدا میتوان ولتاژ v را به جریان سلف بصورت زیر ارتباط داد :

$$(۰-۴) \quad \frac{di_L}{dt} = \frac{v}{L} \quad i_L(0) = I_0$$

سپس با نوشتن معادله KCL برای مدار داریم :

$$i_C = -i_L - i_R$$

و با :



شکل ۱-۵-۱- نوسان ساز غیر خطی با یک مقاومت غیر خطی که مشخصه اش در صفحه $v i_R$ نشان داده شده است

$$(1-1) \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{i_L}{C} - \frac{g(v)}{C} \quad v(0) = V_0$$

با ترکیب معادلات (۱-۱) و (۱-۲) معادله‌ای بصورت نسبی خواهیم داشت :

$$(1-2) \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v}{L} \\ -\frac{i_L}{C} - \frac{g(v)}{C} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

با حالت اولیه :

$$(1-3) \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} i_L(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 \\ V_0 \end{bmatrix} = \mathbf{x}_0$$

با معلوم بودن حالت اولیه \mathbf{x}_0 ، اعداد L و C و مشخصه $g(\cdot)$ ، میتوان جواب را به وسیله روش مرحله بمرحله گفته شده در بخش ۲ بدست آورد. در این روش با حالت اولیه داده شده $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ در (۱-۳) شروع کرده و حالت $\mathbf{x}(\Delta t)$ در زمان Δt را به وسیله معادله (۱-۱۷) محاسبه میکنیم. بنابراین :

$$\mathbf{x}(\Delta t) \approx \mathbf{x}(0) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \Delta t$$

و سپس چنین ادامه میدهیم :

$$\mathbf{x}(2\Delta t) \approx \mathbf{x}(\Delta t) + \mathbf{f}[\mathbf{x}(\Delta t)] \Delta t$$

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

بنابراین میتوان مسیر را در فضای حالت یعنی صفحه L_1 رسم نمود. دو نمونه از این مسیرها در شکل (۱-۲) ارائه شده است. مسیر اول که در شکل (۱-۲-الف) نشان داده شده است حالت اولیه زیر را دارد:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} I_0 \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

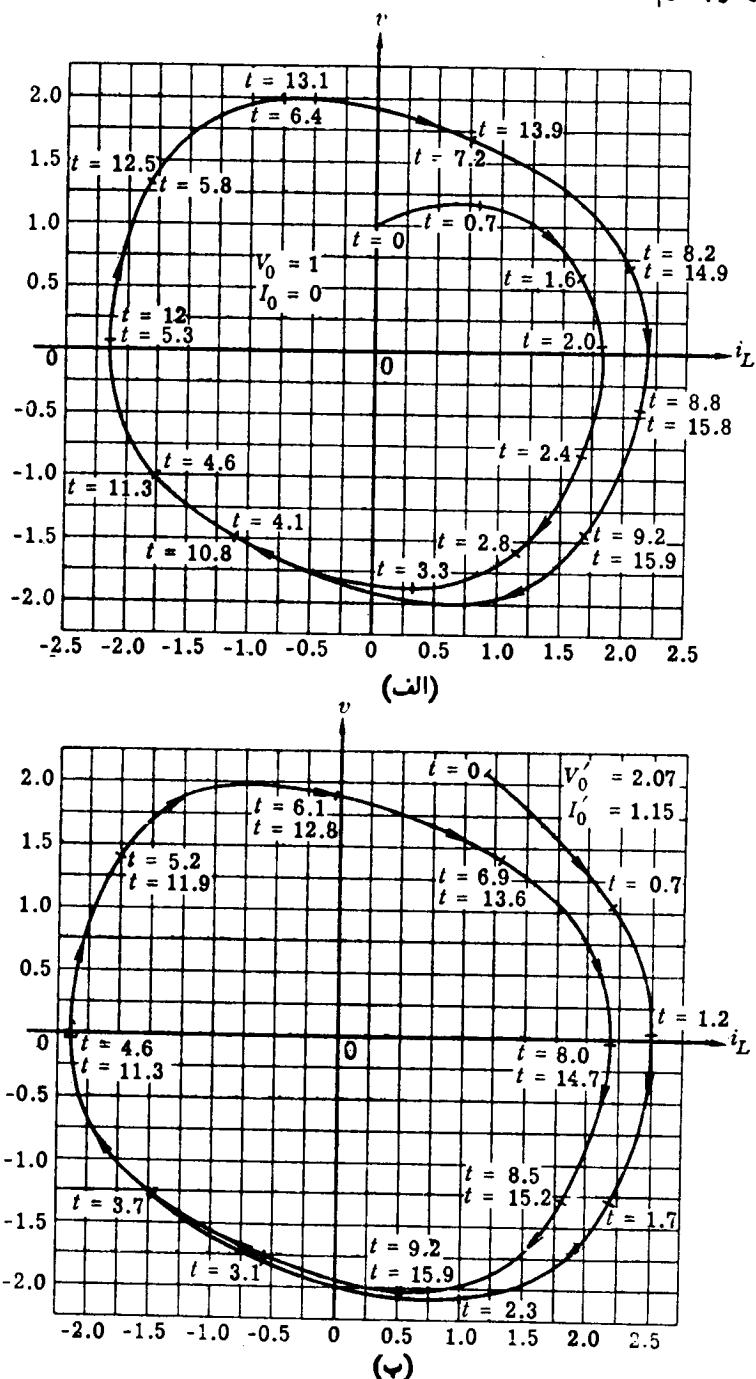
توجه کنید که با افزایش t مسیر بست مختصی بسته‌ای که «سیکل حد (۱)» خوانده می‌شود میل میکند و این اسر لازم میدارد که پس از مدتی، پاسخ ورودی صفر مدار غیرخطی، فوق العاده یک حرکت تناوبی نزدیک شود یعنی بالاخره هردو شکل موج $(0)_L$ و $(0)_R$ بصورت توابع تناوبی از زمان درمی‌آیند. در شکل (۱-۲-ب)، از یک حالت اولیه متفاوت شروع میکنیم:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} I_0 \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \\ 207 \end{bmatrix}$$

مشاهده این نکته قابل توجه است که در این حالت با افزایش t مسیر از پیرون بست «همان» سیکل حد میل میکند.

تیصره ۵ = باید خاطرنشان ساخت که تفاوت‌های مشخصی بین پاسخ ورودی صفر یک مدار خطی و پاسخ ورودی صفر یک مدار غیرخطی وجود دارد. مدار LC موازی خطی (حالت بی اتلاف) که با حالت اولیه دلخواهی شروع می‌شود بلاگاصله به نوسان میتوانیم سیرسد و بعلاوه دامنه‌های نوسان L و R به حالت اولیه بستگی دارند. مدار غیرخطی پس از یک حالت گذرا به حالت نوسانی میرسد و در این مثال بنظر نمی‌آید که دامنه نوسان به حالت اولیه بستگی داشته باشد.

«تقریب خطی تکه‌ای» اکنون رفتار فیزیکی مدار را بر مبنای تقریب خطی تکه‌ای مشخصه مقاومت غیرخطی بیان میکنیم. دامنه تغییرات ولتاژ در دو سر مقاومت در شکل (۱-۳-الف) رابه سه ناحیه تقسیم میکنیم. در ناحیه ۱، یعنی آنجاییکه $-E < u < 0$ است مشخصه مقاومت غیرخطی را با خط مستقیمی با شیب مثبت $\frac{1}{R_1}$ که محور R را



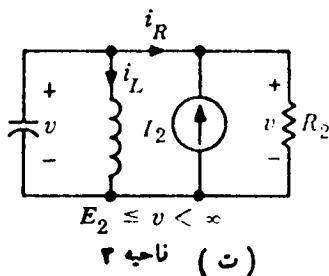
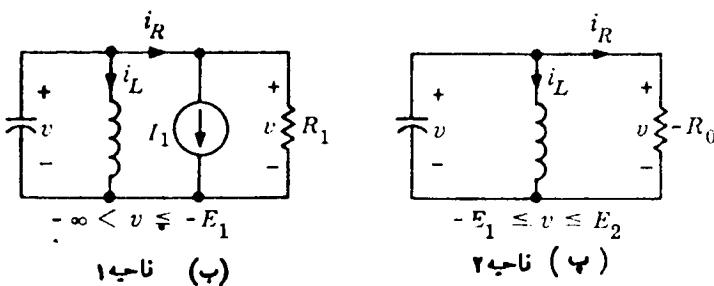
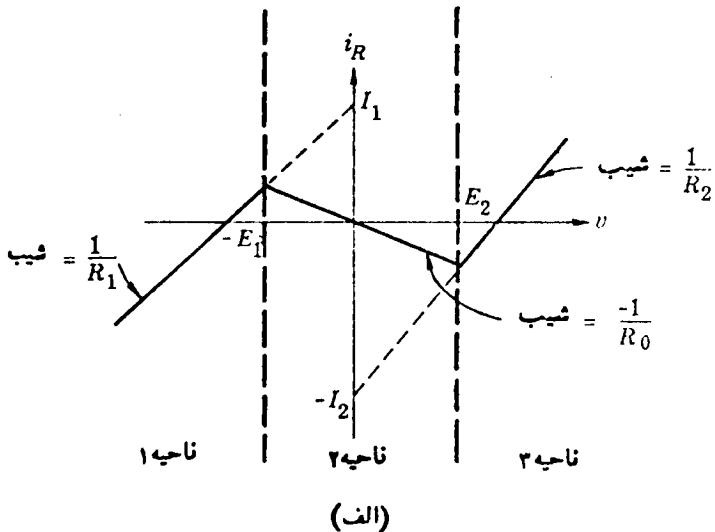
شکل ۲-۵- مسیرهای نوسان ساز غیر خطی شکل (۱-۰) . برای هردو شرایط اولیه میکسانی بدست میآید

در نقطه‌ی بعرض I_1 قطع میکند تقریب میکنیم. بنابراین مقاومت غیر خطی در ناحیه ۱ را میتوان با اتصال موازی یک مقاومت خطی با مقاومت مشتب R_1 و یک منبع جریان ثابت I_1 جایگزین کرد. این جایگزینی در مدار معادل شکل (۰-۳ ب) نشان داده شده است. در ناحیه ۲، یعنی آنجائیکه $E_2 < 0$ است مشخصه مقاومت غیر خطی را با خط مستقیمی که از مبدأ کذشته و شیب منفی $\frac{1}{R_2}$ دارد مطابق شکل (۰-۳ الف) تقریب میکنیم (توجه کنید که $0 > R_2$). بنابراین مقاومت «اکتیو» غیرخطی در ناحیه ۲ را میتوان با یک مقاومت خطی با مقاومت «منفی» R_2 جایگزین کرد. این جایگزینی در مدار معادل شکل (۰-۳ ب) نشان داده شده است. در ناحیه ۳، یعنی آنجائیکه $E_3 < 0$ است مشخصه مقاومت غیر خطی را با خط مستقیمی با شیب مشتب $\frac{1}{R_3}$ که محور R_3 را در نقطه‌ای بعرض I_3 — قطع میکند (توجه کنید $0 > I_3$ است) تقریب میکنیم. بنابراین مقاومت غیر خطی در ناحیه ۳ را میتوان با اتصال موازی یک مقاومت خطی با مقاومت مشتب R_3 و یک منبع جریان ثابت I_3 جایگزین کرد. این جایگزینی در مدار معادل شکل (۰-۳ ت) نشان داده شده است. بسته به ولتاژ دوسر مقاومت غیر خطی، یکی از سه مدار معادل تقریبی شکل (۰-۳) را بایستی بکار برد.

با آشنایی که به تجزیه و تحلیل مدارهای RLC «خطی» موازی مرتبه دوم داریم، میتوان بسهولت مشخصه‌های مدار را در هر یک از سه ناحیه مقاومت غیر خطی تعیین نمود. سواله بعدی ما تعیین رفتار مدار دور مزدھای^(۱) دو ناحیه خواهد بود. گیریم که حالت اولیه مدار $I_1 = 0$ و $V_L = 0$ باشد که فرض میشود در ناحیه ۲ قرار گیرد. مدار RLC خطی موازی را که در آن مقاومت خطی و اکتیو است میتوان (مانند بخش قبل) تجزیه و تحلیل نمود. مسیر، برای این مدار خطی از (۰، ۲) شروع شده و از مبدأ دور میشود و وقتیکه $\infty \rightarrow t$ چون مدار ناپایدار است، مسیر باید به بینهایت برسد. معهدا در لحظه t_1 مسیر به نقطه‌ای میرسد که در آن E_1 یا $E_1 = -E(t_1)$ بوده و تقریب مقاومت منفی دیگر معتبر نخواهد بود. پس از اینکه مسیر از نقطه $[v(t_1), i_L(t_1)]$ ، $i_L(t_1) \rightarrow \infty$ در ناحیه ۱ و یا در ناحیه ۳ خواهیم بود و برای نمایش دستگاه لازم میگذرد، در ناحیه ۱ و یا در ناحیه ۳ خواهیم بود و برای نمایش دستگاه لازم است ترکیب مقاومت پسیو خطی و منبع جریان ثابت بکار برد شود. بنابراین، بسته

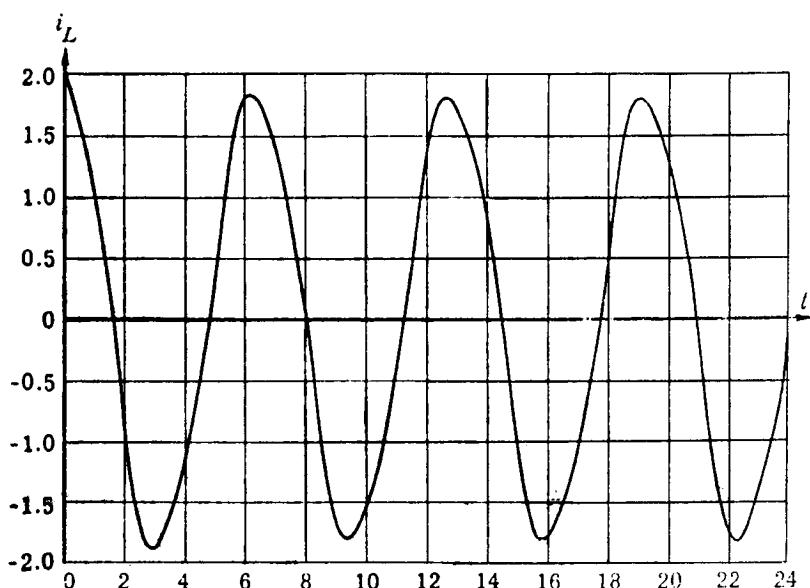
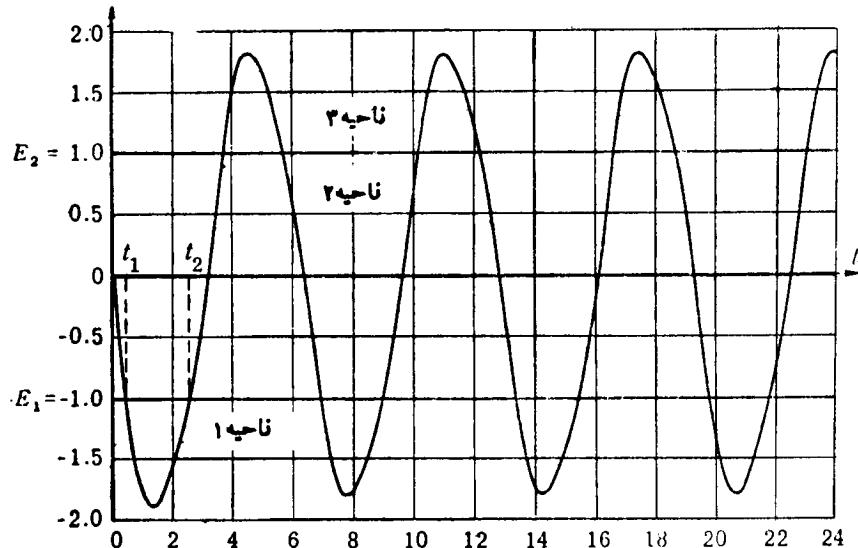
باينکه $E_1 - E_2$ مساوی E_1 - یا $+E_2$ باشد، مدار از تقریب خطی تکه‌ای شکل (۰-۳ ب) به شکل (۰-۳ ب) یا شکل (۰-۳ ت) بریگردد.

فرض کنید شکل موج واقعی و لتاژ مطابق شکل (۴-۰) باشد. در زمان $t=0$ دستگاه در ناحیه ۲ است و در $t=t_1$ و لتاژ بمقدار E_1 — میرسد. بنابراین برای $t > t_1$ دستگاه در ناحیه ۱ است و باستی مدار شکل (۳-۰) ب) را پکار برد و پاسخ کامل را



شکل ۳-۵- تقریب خطی تکه‌ای نومنان ساز غیر خطی

برای حالت اولیه داده شده $(v(t_1), i_L(t_1))$ ، که در آن $v(t_1) = -E_1$ است محاسبه نمود. پاسخ را میتوان بهمولت با مدار معادل خطی شکل (۳-۵ ب) محاسبه



شکل ۴-۵- شکل موجهای v و i_L برای تقریب نشان داده شده در شکل (۳-۵ ب)، در اینجا $E_1 = E_2 = 1$ ولت است

کرد. این پاسخ در شکل (۴-۵) که در آن v و i_L بمحاسبه زمان رسم شده‌اند نشان داده شده است. در $t = t_2$ مجدداً ولتاژ $-E_1 = -E(t_2)$ است و برای $t > t_2$ به عمل در ناحیه ۲ برمی‌گردد، پس باید مدار معادل شکل (۳-۵ پ) را بکار برد. بنابراین پاسخ مدار آکتیو شکل (۳-۵ پ) باحالات اولیه داده شده $(v(t_2), i_L(t_2))$ را که در آن $-E_1 = -E(t_2)$ است محاسبه می‌کنیم. دستگاه سپس در ناحیه ۳ کار کرده و پس از آن مجدداً به ناحیه ۲ برمی‌گردد. با ادامه این عمل، شکل موجه‌ای ولتاژ و جریان بالاخره بیک حالت دائمی، یعنی یک رفتار تناوبی همچنانکه در شکل نشان داده شده است بیرون می‌نماید. در فضای حالت قسمتی از مسیر را که یک منحنی بسته باشد سیکل حد نامند.

مثال ۲ - مدار LC موازی خطی شکل (۴-۶) را درنظر بگیرید که در آن خازن تغییر ناپذیر با زمان، ولی سلف تغییر پذیر با زمان است معادله KCL چنین است :

$$(۴-۸) \quad i_L + i_C = i_s$$

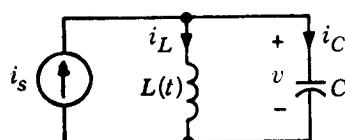
گیریم شار بعنوان متغیر شبکه بکار رود، دراینصورت :

$$(۴-۹) \quad i_L(t) = \frac{\Phi(t)}{L(t)}$$

$$(۴-۱۰) \quad v = \frac{d\Phi}{dt}$$

برای خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان داریم :

$$(۴-۱۱) \quad i_C = C \frac{dv}{dt}$$



شکل ۴-۵ - مدار خطی تغییر پذیر با زمان، خازن C تغییر ناپذیر با زمان است ولی سلف با زمان تغییر می‌کند $L(t)$

از ترکیب این چهار معادله، یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم که در آن Φ متغیر وابسته است بدست می‌آید. بنابراین:

$$(۰-۱۲) \quad C \frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{\Phi}{L(t)} = i_s(t)$$

اگر $L(t)$ یک تابع تناوبی بصورت زیر باشد:

$$(۰-۱۳) \quad L(t) = \frac{1}{a + b \cos \omega_1 t}$$

که در آن a و b هردو ثابت بوده و $a < b$ است، معادله (۰-۱۲) بصورت معادله معروف ماتیو درسی آید و چنانچه، ω_1 بطور متسابق انتخاب گردد میتوان نشان داد که نوسالی با دامنه افزایشی تماشی در مدار حاصل می‌شود. این پدیده را «نوسان پارامتری»^(۱) گویند. انرژی نوسان افزایشی توسط عاملی که موجب تغییر اندوکتانس می‌شود فراهم می‌گردد. در دوره‌های اولیه رادیو برای فراهم کردن اندوکتانس تغییر پذیر نوسان ساز از آلترناتورها^(۲) استفاده می‌شد. بحث درباره جزئیات این مطلب در فصل نوزدهم داده شده است.

اکنون همان مدار را از نقطه نظر فضای حالت در نظر می‌گیریم و بار q خازن و شار Φ سلف را بعنوان متغیرهای وابسته بگار می‌بریم. از ترکیب معادلات (۰-۸) و (۰-۹) داریم:

$$(۰-۱۴) \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{\Phi}{L(t)} + i_s(t)$$

از ترکیب معادلات (۰-۱۰) و (۰-۱۱) داریم:

$$(۰-۱۵) \quad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{q}{C}$$

و بصورت ماتریسی داریم:

$$(۰-۱۶) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{-L(t)} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} i_s(t)$$

$$(۰ - ۱۷) \quad \begin{bmatrix} q(0) \\ \Phi(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ \Phi \end{bmatrix}$$

میتوان مجدداً معادلات را با بکار بردن روش انتگرال‌گیری مرحله بمرحله بطور عددی حل نمود.

۶- مدارهای دوگان و تشابه

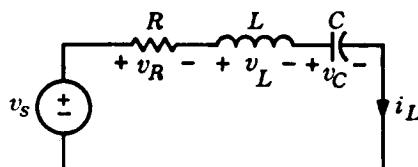
۶-۱ دوگانی

تاکنون مدارهای مرتبه دوم خطی، غیرخطی، تغییر ناپذیر و تغییر پذیر با زمان را درنظر گرفتیم ولی خود رابه مدارهای RLC موازی محدود ساختیم. فرض کنید مثال ساده‌دیگری مانند مدار RLC سری را درنظر بگیریم. رفتار این مدار بطور دقیق با رفتار مدار RLC موازی مربوط میشود.

مدار شکل (۶-۱) را که در آن اتصال سری یک مقاومت، سلف و خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان توسط یک منبع ولتاژ تحریک میشود درنظر بگیرید. تجزیه و تحلیل این مدار مشابه تجزیه و تحلیل مدار RLC موازی است. میخواهیم پاسخ کامل مدار یعنی پاسخی که ناشی از ورودی و حالت اولیه میباشد را تعیین کنیم. ابتدا لازم است معادله دیفرانسیلی بر حسب یکی از ساده‌ترین متغیرهای شبکه بست آوریم. برای هریک از سه شاخه، ولتاژ و جریان شاخه توسط معادله آن شاخه بهم مربوط میشوند. متغیرهای جریان باقیستی در محدودیت‌های KCL مدقّک‌شوند یعنی :

$$(۶-۱) \quad i_L = i_R = i_C$$

در حالیکه متغیرهای ولتاژ باقیستی محدودیت‌های KVL را برآورند:



شکل ۶-۱- مدار RLC سری با ورودی منبع ولتاژ

$$(6-2) \quad v_L + v_R + v_C = v_s$$

بنابراین معادله انتگرال دیفرانسیل زیر بر حسب جریان حلقه (که با i_L مشخص شده) خواهیم داشت:

$$(6-3) \quad L \frac{di_L}{dt} + Ri_L + V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i_L(t') dt' = v_s$$

با شرط:

$$(6-4) \quad i_L(0) = I_0$$

اکنون میتوان معادلات (6-2) و (6-4) را بر حسب v_C حل نمود. معهداً اگر ولتاژ v_C متغیر مورد توجه باشد، معادله فوق یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم تبدیل میشود و تنها لازم است که معادلات شاخه‌ها:

$$(6-5) \quad v_C = V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i_L(t') dt' \quad i_L = C \frac{dv_C}{dt}$$

در (6-3) جایگزین گردد. معادله دیفرانسیل مرتبه دوم چنین است:

$$(6-6) \quad LC \frac{d^2v_C}{dt^2} + RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = v_s$$

با شرایط اولیه:

$$(6-7) \quad v_C(0) = V_0$$

و:

$$(6-8) \quad \frac{dv_C(0)}{dt} = \frac{i_L(0)}{C} = \frac{I_0}{C}$$

معادلات (6-6) تا (6-8) برای تمام مقادیر $0 \leq t \leq T$ ولتاژ خازن را کاملاً معین میکنند. میتوان بهره‌ولت تشابه میان تجزیه و تحلیل مدار RLC «سری» و مدار «موازی» را تشخیص داد. در واقع اگر تغییرات سازگاری در طرز نمایش معرفی کنیم، میتوان به معادلات همانندی رسید. شاید از معادلات (6-6) تا (6-8) تاکنون متوجه شده باشیم که ولتاژ خازن در مدار RLC سری همان نقش جریان سلف در مدار RLC

موازی را ایفا میکند [معادلات (۱-۷) تا (۱-۹)]، بنابراین چنانچه تغییر و تبدیل مناسبی بکار رود حل مدار RLC سری را میتوان از روی حل مدار RLC موازی بدست آورد. این مفهوم را که معمولاً «دوگانی^(۱)» نامند در مثالهای زیر تشریح میکنیم. بحث جزئیات آن در فصل دهم داده خواهد شد.

مثال ۱ = مدار RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان شکل (۶-۲) را درنظر بگیرید. میخواهیم آنرا با مدار RLC سری شکل (۶-۱) مقایسه کنیم. برای تعایز میان طرز نمایش و سبلهای مدارهای سری و موازی علامت «کلاه^(۲)» ($\hat{\wedge}$) را برای مشخص کردن تمام پارامترها و متغیرهای مدار موازی بکار میبریم. مثلاً با نوشتен معادله KVL برای مدار سری بدست میآید:

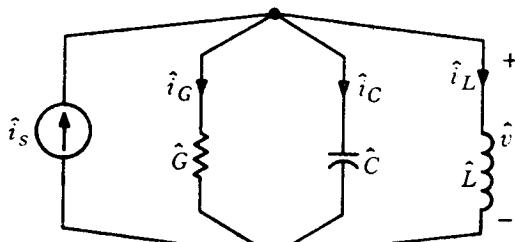
$$v_s = v_L + v_R + v_C$$

$$v_s = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt' + v_C(0)$$

بطریق مشابه، با نوشتен معادله KCL برای مدار موازی بدست میآید:

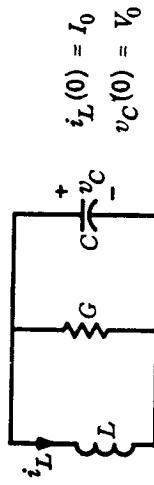
$$\hat{i}_s = \hat{i}_C + \hat{i}_G + \hat{i}_L$$

$$\hat{i}_s = \hat{C} \frac{d\hat{v}}{dt} + \hat{G} \hat{v} + \frac{1}{\hat{L}} \int_0^t \hat{v}(t') dt' + \hat{i}_L(0)$$



شکل ۶-۲ = مدار RLC موازی با ورودی منبع جریان

جدول ۱-۵ - پاسخ ورودی صفر یاک مدار مرتبه دوم



$$i_L(0) = I_0$$

$$v_C(0) = V_0$$

$$\frac{d^2i_L}{dt^2} + \frac{G}{C} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = 0$$

$$\begin{cases} \omega_0 \triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \alpha \triangleq \frac{G}{2C} \end{cases}$$

حالات میرای غایب $\Omega < \omega_0$: $s_1 = -\alpha + \alpha_0, s_2 = -\alpha - \alpha_0$ با $\alpha_0 \triangleq \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$
دارای دو ریشه ممتد $\mathbf{Q} = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\sqrt{C/L}}{G} = \omega_0 CR$

$$\begin{cases} \omega_0 \triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \alpha \triangleq \frac{R_s}{2L} \end{cases}$$

حالات میرای غایب $\Omega > \omega_0$: $s_1 = -\alpha + \alpha_0, s_2 = -\alpha - \alpha_0$ با $\alpha_0 \triangleq \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

$$i_L(t) = \frac{I_0}{s_1 - s_2} (s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}) + \frac{V_0}{(s_1 - s_2)L} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t})$$

$$v_C(t) = I_0 \frac{s_1 s_2 L}{s_1 - s_2} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) + \frac{V_0}{s_1 - s_2} (s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t})$$

$$v_C(t) = \frac{V_0}{s_1 - s_2} (s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}) + \frac{I_0}{(s_1 - s_2)L} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t})$$

$$i_L(t) = V_0 \frac{s_1 s_2 C}{s_1 - s_2} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) + \frac{I_0}{s_1 - s_2} (s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t})$$

حالات ۴ $\alpha = \omega_0$ or $Q = \infty$ حالات میرای بحرانی . ۱۶) حالت $s_1 = s_2 = -\alpha$)

$i_L(t) = I_0(1 + \omega_0t)e^{-\omega_0t} + \frac{V_0}{\omega_0 L} \omega_0 t e^{-\omega_0 t}$	$v_C(t) = V_0(1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t} + \frac{I_0}{\omega_0 C} \omega_0 t e^{-\omega_0 t}$
$v_C(t) = -I_0 \omega_0^2 L t e^{-\omega_0 t} + V_0(1 - \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$	$i_L(t) = -V_0 \omega_0^2 C t e^{-\omega_0 t} + I_0(1 - \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$

حالات ۵ $\alpha < \omega_0$ or $Q > \frac{1}{2}$.	($s_1 = -\alpha + j\omega_d$) $s_2 = -\alpha - j\omega_d$ حالات میرای مغفف	$\omega_d \triangleq \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ $\vartheta \sin \phi = \frac{\alpha}{\omega_0}$
$i_L(t) = I_0 \frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \phi) + \frac{V_0}{\omega_0 L} \frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t$	$v_C(t) = V_0 \frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \phi) + \frac{I_0}{\omega_0 C} \frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t$	
$v_C(t) = -I_0 \frac{\omega_0^2 L}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t + V_0 \frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \phi)$	$i_L(t) = -V_0 \frac{\omega_0^2 C}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t + I_0 \frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \phi)$	

حالات ۶ $\alpha = 0$ or $Q = \infty$ حالات بدون اتلاف . ∞ حالات $s_1 = j\omega_0$ $s_2 = -j\omega_0$)

$i_L(t) = I_0 \cos \omega_0 t + \frac{V_0}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t$	$v_C(t) = V_0 \cos \omega_0 t + \frac{I_0}{\omega_0 C} \sin \omega_0 t$
$v_C(t) = -I_0 \omega_0 L \sin \omega_0 t + V_0 \cos \omega_0 t$	$i_L(t) = -V_0 \omega_0 C \sin \omega_0 t + I_0 \cos \omega_0 t$

اکنون فرض کنید که $L = \hat{C}$ و $R = \hat{G}$ و $C = \hat{L}$ و $v_C(t) = \hat{i}_L(t)$ باشد. در اینصورت دو معادله دارای ضرایب یکسان بوده و تنها از لحاظ طرز نمایش با هم متفاوت است. پالنتیجه اگر برای تمام مقادیر $t \geq 0$ ، روابط $i(t) = \hat{v}(t)$ و $\hat{i}_s(t) = \hat{v}(t)$ نیز برقرار باشد، پاسخ‌ها یکسان خواهد بود، یعنی برای تمام مقادیر $t \geq 0$ ، $i(t) = \hat{v}(t)$ نیز است. ایندو مدار را «دوگان^(۱)» نامند. بویژه هردو مدار پاسخ‌های ضربه و پله همانند خواهند داشت. لیست پاسخ‌های ورودی صفر هر مدار در جدول (۱-۵) داده شده است.

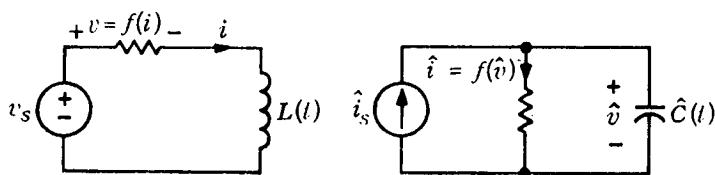
مثال ۲ - برای اینکه دو مدار دوگان باشند، لازم نیست که حقاً «خطی» و «تفییر ناپذیر با زبان» باشند. دو مدار شکل (۲-۳) را در نظر بگیرید. سلف خطی تغییر پذیر با زمان مدار اول برای هر مقدار t با شبیه مشخصه $L(t)$ آن مشخص می‌شود. بطريق مشابه خازن خطی تغییر پذیر با زمان مدار دوم با $\hat{C}(t)$ مشخص می‌گردد. مقاومت غیر خطی مدار اول با تابع $f(v)$ مشخص می‌شود که منحنی آن همان مشخصه مقاومت است که در آن v بر حسب v رسم می‌شود. مقاومت غیر خطی مدار دوم بوسیله همان منحنی مشخص می‌شود، بشرطیکه در مشخصه آن v بر حسب \hat{v} رسم گردد (به تعویض \hat{v} رسم شده باشند). اگر جریان داخل مقاومت اول v باشد و لاتراز دوسر آن \hat{v} رسم شده باشد، و اگر لاتراز دوسر مقاومت دوم \hat{v} باشد جریان داخل آن v است. برای مدار سری با استفاده از KVL داریم :

$$v_s(t) = \frac{d}{dt} [L(t)i(t)] + f(i(t))$$

برای مدار موازی با استفاده از KCL داریم :

$$\hat{i}_s(t) = \frac{d}{dt} [\hat{C}(t)\hat{v}(t)] + f(\hat{v}(t))$$

فرض کنید که برای هر مقدار $t \geq 0$ ، $L(t) = \hat{C}(t)$ باشد. در اینصورت دو معادله



شکل ۳-۴- دو مدار دوگان، توجه کنید که مقاومت‌ها غیر خطی هستند

بالا دارای شکل یکسان بوده و این دو مدار، «دوگان» خوانده می‌شوند. بالنتیجه چنانچه حالتهای اولیه یکسان بوده $[v(0) = \hat{v}(0)]$ و ورودی‌ها نیز دارای شکل موج مشابه باشند [برای همه مقادیر $t \geq 0$]، $i(t) = \hat{i}(t)$ پاسخ‌ها همانند خواهند بود، یعنی شکل موج (\cdot) که برای $t \geq 0$ تعریف می‌شود همانند شکل موج $(\hat{\cdot})$ است که برای $t \geq 0$ تعریف می‌گردد.

اکنون این دو مثال را بررسی نموده و مشاهده می‌کنیم که میان آنها تناظرهای یک‌بیک زیادی وجود دارد. معادله KVL یک مدار، متناظر با معادله KCL مدار دیگر است. حلقه یکی از مدارها متناظر با گرهی از مدار دیگر است. جدول زیر اصطلاحات دوگان نوعی را نشان میدهد.

KCL	KVL
ولتاژ	جريان
گره همراه با دسته شاخه‌هایی	حلقه
که بآن گره وصل‌اند	
اجزاء بطور موازی	اجزاء بطور سری
خازن	ساف
مقاومت	مقاومت
منبع جریان	منبع ولتاژ

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

توجه باین نکتهٔ حائز اهمیت است که پاره‌ای از این تناظرها به «خواص گراف^(۱)» مربوط بوده در حالیکه برخی دیگر به «ماهیت شاخه‌ها» مربوط است. بنابراین در بحث آوردن دوگانی باید مفهوم گراف‌های دوگان نیز معرفی شود. بحث کامل این موضوع در فصل دهم داده خواهد شد. در حال حاضر میخواهیم تنها روی این حقیقت تأکید کردیم که مفهوم دوگانی در نظریه مدارها اهمیت زیادی دارد و میتوان جزئیات بسیاری از مدارها را بشرطیکه خصوصیات مدار دوگان معلوم باشد بدون تجزیه و تحلیل بخوبی درک کرد. در ضمن درس، گاه‌آز مفهوم دوگانی استفاده خواهیم کرد.

۶-۲- نشابه‌های الکتریکی و مکانیکی

ما در مکانیک کلاسیک با حرکت‌های هارمونیکی ساده، نوسانی میرا و نمایی میرا برخورد کرده‌ایم که کاملاً مشابه آنچه که تابحال در این درس مطالعه کرده‌ایم میباشند. اکنون اجزاء اساسی مکانیکی و طرز تشکیل معادلات در سیستم‌های مکانیکی را مروزنموده و تشابه آنها را با مدارهای الکتریکی بررسی میکنیم.

مثال ۳- سیستم مکانیکی شکل (۶-۴) را در نظر بگیرید که در آن جسمی به جرم M بوسیله فنری با ضریب فنریت^(۲) K بدیوار بسته شده است. این جسم توسط نیرویی که با f_s مشخص می‌شود کشیده میشود. سطح تماس میان جسم و زمین دارای نیروی مالشی است که حرکت جسم را کند می‌نماید و در هر لحظه از زمان در خلاف جهت سرعت اثر میکند. میتوان معادله حرکت جسم را با استفاده از دیاگرام جسم آزاد^(۳) مطابق شکل (۶-۴) نوشت. فرض کنید f_K نیرویی باشد که فنر روی جسم اعمال میکند و گیریم f_B نیروی مالشی باشد، دراینصورت نیروی کل که روی جسم اثر میکند مساوی $f_s - f_K - f_B$ است و این نیرو بموجب قانون نیوتون^(۴) مساوی مشتق مقدار حرکت است. بنابراین :

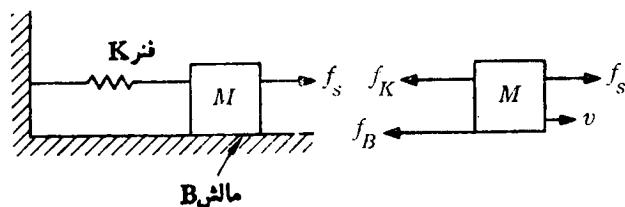
$$(۶-۹) \quad f_s - f_K - f_B = \frac{d}{dt} Mv$$

۱- Graph

۲- Free - body

۳- Spring Constant

۴- Newton



شکل ۶-۶ - سیستم مکانیکی و دیاگرام جسم آزاد آن

که در آن v سرعت درجهت نیروی f است. این حقیقت بسیار معروف است که نیروی مالش تابعی از سرعت بوده و بصورت $(\cdot) f_B$ مشخص میگردد ، در حالیکه نیروی الاستیکی^(۱) تابعی از تغییرسکان^(۲) بوده است که با $(\cdot) f_K$ بیان میشود. گیریم معادله (۶-۹) را مجددآ بصورت زیر بنویسیم :

$$(6-10) \quad f_s = f_K(x) + f_B(v) + \frac{d}{dt} Mv$$

اکنون اتصال سوازی یک مقاومت ، یک سلف ، یک خازن و یک منبع جریان i را در نظر میگیریم. میتوان معادله KCL را چنین نوشت:

$$(6-11) \quad i_s = i_L(\Phi) + i_R(\hat{v}) + \frac{d}{dt} Cv$$

که در آنجا $C\hat{v}$ بار خازن خطی است و

$$\Phi(t) = \Phi(0) + \int_0^t \hat{v}(t') dt'$$

شار سلف غیر خطی است. $(\cdot) i_L$ و $(\cdot) i_R$ بترتیب جریان داخل سلف بصورت تابعی از شار و جریان داخل مقاومت بصورت تابعی از ولتاژ را نشان میدهند. در سیستم

$$v = \frac{dx}{dt} \text{ سرعت است و}$$

$$x = x(0) + \int_0^t v(t') dt'$$

تغییر مکان می‌باشد. بعلاوه، اگر $i_s = i_R$ ، $f_s = f_B$ و $M = C$ باشد دو معادله همانند بوده و مدار RLC موازی را مشابه الکتریکی^(۱) سیستم مکانیکی نامند. متغیر \hat{v} (ولتاژ) در مدار تشابه‌ی مانند متغیر مکانیکی v (سرعت) رفتار می‌نماید. مفهوم تشابهی نظریه مفهوم دوگانی است بجز اینکه تشابه معمولاً، تنها معادل بودن دینامیکی دو سیستم را لازم میدارد در حالیکه دوگانی بودن، بعلاوه برای تشابه، ارتباط توبولوژیکی را نیز ایجاد می‌کند^(۲). برای بیان و درک بسیاری از پدیده‌های فیزیکی، اغلب استفاده از ایده تشابهی مفید است زیرا افراد بسته به آموزش و تجربه خود همواره با نوعی از این سیستم‌ها آشنا‌اند. چنانکه گفته شد مفهوم تشابهی تنها بجهات خطی تغییر ناپذیر با زمان محدود نمی‌شود. متغیرها و اجزاء مشابه در جدول‌های زیر خلاصه شده‌اند.

سیستم‌های مکانیکی	مدارهای الکتریکی
نیرو f_s	جريان i_s
سرعت v	ولتاژ \hat{v}
فقر	تغییر مکان \hat{x}
مالش	شار Φ
جرم	سلف
خازن	مقاومت

علاوه، چنانچه سه جزء اصلی خطی و تغییر ناپذیر با زمان باشند، روابط تشابهی آشنای زیر بدست می‌آیند:

سیستم‌های مکانیکی	مدارهای الکتریکی
جرم	$f = M \frac{dv}{dt}$
مالش	$f = Bv$
فتر	$f(t) = f(0) + K \int_0^t v(t') dt'$
خازن	$i = C \frac{d\hat{v}}{dt}$
رسانا	$i = G\hat{v}$
سلف	$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t \hat{v}(t') dt'$

این دسته از کمیت‌های تشابهی تنها دسته ممکن نمی‌باشد و بخصوص اگر بجای ارتباط دادن سیستم مکانیکی به مدار RLC «موازی»، آنرا به مدار RLC «سری» مربوط می‌کردیم، دسته متفاوت دیگری از کمیت‌های مشابه بدست می‌اوردیم. مثلاً میتوانستیم ولتاژ v را منتظر با نیروی i و جریان v را منتظر با سرعت i در نظر بگیریم.

خلاصه

- پاسخ‌های ورودی صفر مدارهای RLC پسیو خطی تغییر ناپذیر با زمان مرتبه دوم، مطابق جدول (۵-۱) (صفحه‌های ۲۹۴ و ۲۹۰) به چهار دسته طبقه‌بندی می‌شوند.

- پاسخ‌های ورودی صفر یک مدار RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان را میتوان بر حسب مسیرهای حالت که در صفحه LVC بر حسب پارامتر t رسم می‌شوند بیان نمود. حالت مدار در زمان t ، بردار $\mathbf{x}(t) \triangleq \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}$ و حالت اولیه آن بردار

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} i_L(0) \\ v(0) \\ v_C(0) \end{bmatrix}$$

- مدار RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان مرتبه دوم (پسیو یا آکتیو) را میتوان نسبت به محل فرکانس‌های طبیعی و ماهیت مسیرهای حالت آن مطابق جدول (۵-۲) نیز طبقه‌بندی کرد.

جدول ۲-۵- طبقه بندی مدارهای RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان

مدار RLC موازی	بسیو	بی اتلاف	آکتیو
$G = \frac{1}{R} > 0$	$G = \frac{1}{R} = 0$	$G = \frac{1}{R} < 0$	
محل فرکانس‌های طبیعی	نیمه راست صفحه ω	محور ω	نیمه چپ صفحه ω
مسیرهای حالت	ناپایدار	نوسانی	پایدار مجانبی

- روش فضایی حالت در تجزیه و تحلیل مدارهای غیر خطی و تغییر پذیر با زمان بسیار مفید است. معادلات بصورت $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, w, t)$ هستند که در آن \mathbf{x} حالت و w ورودی است و میتوان جواب را با محاسبه مرحله به مرحله بدست آورد.
- مفهوم مدارهای دوگان براین حقیقت استوار است که معادلات توصیف کننده مدارهای دوگان شکل یکسانی دارند
- اگر یک سیستم مکانیکی مشابه یک مدار الکتریکی باشد، در این صورت هردو با معادلاتی که شکل یکسانی دارند توصیف میگردند.

مسئل

- ۱- محاسبه عبارتهای نمایی با بکار بردن طرز نمایش بخش ۱ نشان دهید که :

$$\frac{d}{dt} e^{-at} \cos \omega_q t = -\omega_0 e^{-at} \sin(\omega_q t + \Phi)$$

$$\frac{d}{dt} e^{-at} \sin \omega_q t = \omega_0 e^{-at} \cos(\omega_q t + \Phi)$$

- ۲- فرکانس‌های طبیعی فرض کنید که فرکانس‌های طبیعی یک مدار خطی تغییر ناپذیر با زمان یکی از صورت‌های زیر باشد:

$$\text{الف} - s_1 = 2 \quad s_2 = -2$$

$$\text{ب} - s_1 = s_2 = -2$$

$$\text{پ} - s_1 = -j2 \quad s_2 = j2$$

$$\text{ت} - s_1 = 2 + j2 \quad s_2 = 2 - j2$$

برای پاسخ‌های ورودی صفر، عبارتهای کلی بصورت توابع زمانی با مقدار حقیقی بیان کنید.

۳- ضریب Q برای یک مدار RLC داده شده با $Q = 500$ چند پریود لازم است صبر شود تا پوش پاسخ ورودی صفر به مقدار ۱۰ درصد، ۱ درصد، ۰۱ درصد حداً کثر مقدار آن در پریود اول برسد (در هر سو ۰.۱ جوابی با تقریب حداً کثیر نیم پریود بدست آورید).

۴- ضریب Q دو مدار RLC خطی تغییر ناپذیر با زمان را در نظر بگیرید که اولی یک مدار موازی با مقادیر اجزاء R' ، L و C و دوی یک مدار سری با مقادیر اجزاء R و L میباشد. اگر قرار باشد دو مدار Q یکسان داشته باشند چه رابطه‌ای بین R و R' وجود دارد؟ وقتیکه $\infty \rightarrow Q$ ، چه اتفاق میافتد؟

۵- تعیین ثابت‌های دلخواه از روی شرایط اولیه با داشتن یک مدار RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان با $\omega_0 = 10$ رادیان بر ثانیه و $Q = \frac{1}{2}$ و $C = 1$ فاراد، معادله دیفرانسیل را بنویسید. پاسخ ورودی صفر برای ولتاژ v_C دوسر خازن را تعیین کنید. شرایط اولیه $v_C(0) = 2$ ولت و $i_L(0) = 0$ آمپر میباشد.

۶- پاسخ‌های پله و ضربه برای مدار RLC موازی مسئله ۰ فرض کنید ورودی یک منبع جریان i_n باشد که بطور موازی با آن وصل شده است. پاسخ پله و پاسخ ضربه برای ولتاژ v_C را تعیین کنید.

۷- پاسخ کامل منبع جریان i_n را بطور موازی با مدار RLC مسئله ۰ وصل میکنیم و گیریم $u(t) = u(t) \cos 2t$ باشد. پاسخ حالت صفر و پاسخ گذرا را تعیین کنید.

۸- پاسخ حالت دائمی سینوسی، پاسخ گذرا و پاسخ کامل برای مدار RLC موازی مسئله ۹ گیریم که ورودی منبع جریان $u(t) = u_0 \cos 2t$ باشد که بطور موازی بآن وصل شده است. برای شرایط اولیه $x(0) = 0$ ولت و $v_C(0) = 0$ آمده‌است. کامل را تعیین کنید. جزء گذرا و جزء حالت دائمی را صریح‌آمیخت و نشان دهید که پاسخ کامل، مجموع پاسخ ورودی صفر مسئله ۹ و پاسخ حالت صفر مسئله ۷ می‌باشد.

۹- حذف حالت گذرا منبع جریان $u(t)$ را بطور موازی با مدار RLC مسئله ۹ وصل می‌کنیم و گیریم $u(t) = u_0 \cos 2t$ باشد. آیا ممکن است شرایط اولیه را چنان انتخاب نمود که حالت گذرا بی موجود نباشد؟ در چنین صورتی شرایط اولیه لازم را تعیین کنید، در غیر اینصورت جواب خود را توجیه نمائید.

۱۰- حل معادلات دیفرانسیل معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + x = e^{-rt} \quad x(0) = 1, \quad \frac{dx}{dt}(0) = -1 \quad \text{الف}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 2x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0 \quad \text{ب}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \cos t \quad x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 1 \quad \text{پ}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = tu(t) \quad x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0 \quad \text{ت}$$

۱۱- حل معادلات دیفرانسیل ماتریسی و مسیرهای حالت معادلات

دیفرانسیل ماتریسی زیر را با روش تقریب متوالی حل کنید و مسیرهای حالت را رسم نمائید:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

۱۲- پاسخ ضربه و تعویض منبع مدار RLC موازی خطی تغییرناپذیر با زمان با $\omega_0 = ۱۰$ رادیان بر ثانیه و $Q = ۱۰$ داده شده است. ورودی منبع ولتاژی است که بطور سری با سلف وصل شده است. برای ولتاژ v_C دوسر خازن، پاسخ ضربه را تعیین کنید (راهنمایی: از مدار معادل نرتن استفاده نمایید).

۱۳- پاسخ پله و پاسخ شیب برای مدار مسئله ۱۲، پاسخ پله و پاسخ شیب را تعیین کنید.

۱۴- خطی بودن پاسخ حالت صفر یک مدار RLC موازی خطی تغییرناپذیر با زمان داده شده است. پاسخ حالت صفر به ورودی می‌نویسی $v_L(t) = u(t) \cos(2t + 60^\circ)$ چنین است:

$$v_L(t) = e^{-t} + 2e^{-2t} + 100\cos(2t + 60^\circ) \quad t \geq 0$$

پاسخ کامل این مدار برای ورودی می‌نویسی $v_L(t) = 2u(t) \cos(2t + 60^\circ)$ ، وقتیکه مدار از حالت اولیه معینی شروع می‌کند چنین است:

$$v_L(t) = -e^{-t} + 2e^{-2t} + 100\cos(2t + 60^\circ) \quad t \geq 0$$

اگر مدار با همان حالت اولیه شروع کند، پاسخ کامل را به ورودی می‌نویسی:

$$v_L(t) = 0 \quad t < 0$$

تعیین کنید.

۱۵- پاسخ ورودی صفر، معادله دیفرانسیل و مسیر حالت مدار شکل (مسئله ۱۰) خطی و تغییر ناپذیر با زمان است.

الف- معادله دیفرانسیلی با متغیر وابسته v_C بنویسید و شرایط اولیه مناسب را بر حسب توابعی از $(0)_L$ و $(0)_C$ بیان کنید (راهنمایی: با هکار بردن متغیرهای v_L و v_C معادله گره را در گره ۱ و معادله حلقه برای v_L را بنویسید).

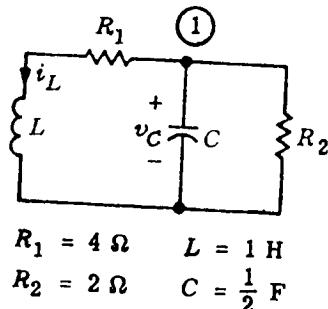
ب- پاسخ ورودی صفر $(0)_L$ و $(0)_C$ را محاسبه کنید.

پ- پاسخ ورودی صفر را بصورت یک بردار حالت، $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} v_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}$ بنویسید،

$\mathbf{x}_1(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\mathbf{x}_2(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ متناظر با مسیرهای حالت $(0)_L$ و $(0)_C$ باشند. را که در آن L در امتداد محور طولها و C در امتداد محور عرضها باشد رسم کنید.

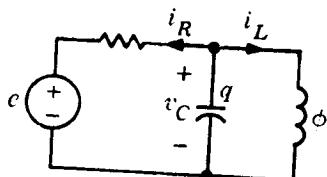
نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها

ت - آیا سیر (۰) خاصیت ویژه‌ای دارد؟ کدام سیرهای دیگر، درصورتیکه وجود داشته باشند، آین خاصیت مشابه را دارا می‌باشند؟



شکل (مسئله ۵-۱۵)

۱۶- مسیر حالت مدار غیرخطی و انتگرال تغیری تقریبی مدار غیرخطی تغیر ناپذیر با زمان شکل (مسئله ۱۶-۰) عناصری دارد که چنین توصیف می‌شوند.
 $i_R = \alpha v_R$ که در آنجا $\alpha = 2$ مهو $\beta = 1$ فاراد،
 $v_C = \beta v_C + \gamma v_C^2$ ، $i_L = \delta i_L$ و $\Phi = \delta i_L$ هانری است. منبعی که مدار را تحریک
 $\frac{1}{3}$ فاراد بر ولت مرربع و $\frac{1}{2}$ هانری است. میکند ولتاژ $e(t) = \sin(\omega t)$ ولت را دارد و در زمان $t=0$ ولتاژ دو-رخازن
 $v_C(0) = 2$ ولت و جریان داخل سلف $i_L(0) = -2$ آمپر است. با بکار بردن
 $\Delta t = 0.1$ پعنوان بردار حالت، معادله حالت مدار را بنویسید و با استفاده از تقریب
 $\dot{x} = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$ خطی متوالی یعنی $\dot{x}[n+1] \approx \dot{x}[n] + \dot{x}(n\Delta t)\Delta t$ با $\Delta t = 0.1$ را
 ثانیه و $n=0, 1, 2, \dots$ ، مسیر فضای حالت را رسم کنید. v_C و i_L را
 بصورت توابعی از زمان رسم کنید.

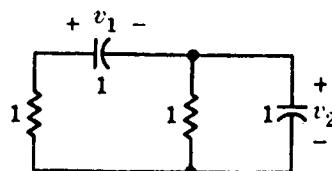


شکل (مسئله ۵-۱۶)

۱۷- تشکیل دادن معادلات دیفرانسیل و انرژی الف - در مدار شکل (مسئله ۱۷-۵) معادلات دیفرانسیل را برای $v_1(t)$ و $v_2(t)$ تشکیل دهید.

ب - گیریم $\frac{d}{dt} [v_1(t) + v_2(t)] = 0$ باشد. ثابت کنید برای همه

$$\text{مقادیر } t, \frac{dv}{dt} \leq 0 \text{ است.}$$



شکل (مسئله ۱۷-۵)

۱۸- مدارهای غیر خطی، معادلات بصورت نرمال و انرژی الف -

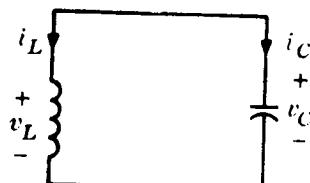
برای مدار غیر خطی تغییر ناپذیر با زمان داده شده در شکل (مسئله ۱۸-۵) معادله دیفرانسیل را بر حسب متغیرهای q و Φ بنویسید که در آن مشخصه سلف بصورت $i_L = \Phi + \Phi^3$ (۱) شار است) و مشخصه خازن بصورت $v_C = 2q$ (q بار است) داده شده است.

ب - گیریم در زمان t_0 مقادیر شار و پاره ترتیب Φ_0 و q_0 باشند. انرژی ذخیره

شده در مدار چقدر است؟

پ - گیریم در زمان t_0 ، $q=0$ و $\Phi=2$ باشد. برای $t_0 \geq t \geq 0$ حداقل

مقدار $q(t)$ چقدر است؟ (راهنمایی: آیا هیچ اختلاف انرژی در مدار وجود دارد؟)



شکل (مسئله ۱۸-۵)

۱۹- مشخص سازی حالت و مسیر حالت برای مدار RLC سری خطی

تغییر ناپذیر با زمان شکل (مسئله ۱۹-۵)، $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$ را به عنوان بردار حالت بکار برد

نظریه اساسی مدارها و شبکهای

تنها اطلاعاتی که از اندازه‌گیری انجام شده این مدار در دست است، مشتق زمانی بردار حالت در دو سورد متفاوت می‌باشد یعنی :

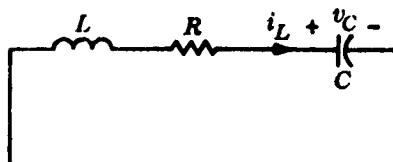
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{در}$$

الف - مقادیر اجزاء R و L و C را تعیین کنید.

ب - مشتق بردار حالت در $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ را با دو روش محاسبه کنید. اول،

از معادله $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$ استفاده کنید. دوم، مشتق نامعلوم را با ترکیب خطی مناسب مشتق‌های داده شده مساوی قرار دهید.

پ - شبیه $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ مسیر فضای حالت را دو $\frac{dV_C}{dI_L}$ حساب کنید.



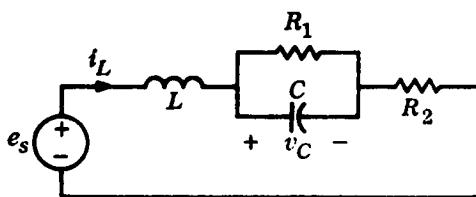
شکل (مسئله ۵-۱۹)

۲۰ - پاسخ ضربه، پاسخ کامل و حالت دائمی سینوسی مدار نشان داده شده در شکل (مسئله ۵-۲۰) از اجزاء خطی تغییر ناپذیر با زمان ساخته شده است. ولتاژ ورودی و ولتاژ V_C پاسخ آن است. مقادیر اجزاء $R_1 = 2$ اهم و $R_2 = 3$ اهم و $L = 1$ هانری و $C = 0.2$ فاراد می‌باشد.

الف - پاسخ ضربه i_L را تعیین کنید.

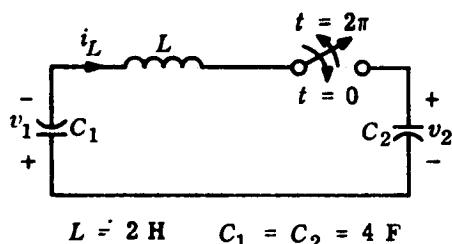
ب - پاسخ کامل ناچی از ورودی $(t) = 0$ و حالت اولیه $i_L(0) = 2$ آمپر و $V_C(0) = 1$ ولت را محاسبه کنید.

پ - برای ورودی $v_s = 0.008 \sin \omega t$ ، حالت دائمی سینوسی V_C ، i_L و v_{R_2} را محاسبه و رسم نمایید. نتایج را بصورت توابع زمانی با مقدار حقیقی بیان کنید.



شکل (مسأله ۵-۲۰)

۲۱- مدار بی اتلاف و مسیر حالت مدار LC خطی تغییر ناپذیر با زمان شکل (مسأله ۵-۲۱) را در نظر بگیرید. قبل از زمان $t=0$ کلید باز بوده و ولتاژهای دوسر خازن‌ها بصورت $v_1 = 1$ ولت و $v_2 = 4$ ولت میباشند. در لحظه $t=0$ کلید را می‌بندیم و برای فاصله زمانی π ثانیه آنرا در این وضع نگاه میداریم و سپس در $t=2\pi$ ثانیه مجدد آنرا باز کرده و پس از آن برای همیشه باز نگاه میداریم. برای $t > 2\pi$ ثانیه مقادیر v_1 و v_2 چقدر میباشد؟ مسیر حالت را در صفحه v_L و v_C رسم کنید زمان π ثانیه چه میتوان گفت؟ (راهنمایی: نتایج انتخاب خاص این فاصله زمانی را تجزیه و تحلیل نمائید).



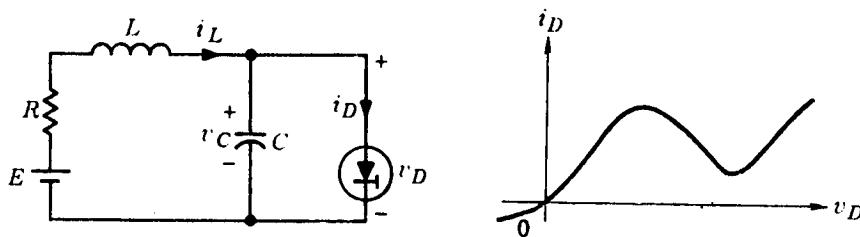
شکل (مسأله ۵-۲۱)

- ۲۲- مقاومت منفی و پاسخ ورودی صفر در مدار شکل (مسأله ۵-۱۰) مقاومت R_2 را به ۲-اهم تبدیل میکنیم.
- الف - فرکانس‌های طبیعی مدار چیست؟
- ب - چنانچه $i_L(0) = 1$ آمپر و $v_C(0) = 1$ ولت باشد پاسخ‌های ورودی صفر $(v_L)_0$ و $(v_C)_0$ را تعیین کنید.
- پ - مسیر حالت را رسم کنید.

۲۴- مدار دوگان دوگان مدار شکل (مسأله ۵-۱۵) را رسم کنید و مقادیر همه اجزاء آنرا مشخص سازید.

۲۵- تشابه مکانیکی و مدارهای دوگان - برای سیستم مکانیکی شکل (۶-۴) دو مدار الکتریکی که مشابه‌های الکتریکی سیستم مکانیکی باشند رسم کنید.

۲۶- مدار غیر خطی و معادله دیفرانسیل بصورت نرمال مدار شکل (مسأله ۵-۲۰) یک نمونه مدار نوسان ساز دیود تونلی است. این دیود را بصورت مقاومتی که با مشخصه $i_D = g(v_D)$ معین می‌شود مدل بیکنیم. معادله دیفرانسیل را بصورت نرمال با متغیرهای v_L و v_C بنویسید:



شکل (مسأله ۵-۲۵)

فصل ششم

مبانی مدارهای خطی و تغییرناپذیر بازمان

در دو فصل پیش مدارهای مرتبه اول و مرتبه دوم را مطالعه کردیم و بسیاری از مفاهیم و تکنیک‌های اساسی را بدست آوردیم. در این فصل ابتدا برخی از نتایج مهم را خلاصه نموده و آنگاه به تعمیم بعضی از آنها می‌پردازیم. سپس به بررسی مقدماتی تجزیه و تحلیل گره و تجزیه و تحلیل متن در مورد مدارهای خطی تغییرناپذیر بازمان خواهیم پرداخت و نشان خواهیم داد که نتایج این تجزیه و تحلیل منجر به توصیف ورودی - خروجی (۱) بر مبنای یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه ۲ام باصرایب ثابت می‌گردد. همچنین روشی برای حسابه پاسخ ضربه‌از معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ام از آن خواهد شد و آنگاه پاسخ‌های مربوط به ورودی‌های داخله را بررسی خواهیم کرد. بالاخره نمایش انتگرال کانولوشن (۱) را دقیقاً بدست آورده و طرز محاسبه این انتگرال را با مثالهای متعدد روشن خواهیم ساخت.

۱- برخی تعاریف و خواص کلی

در فصل دوم سه جزء اصلی مدار یعنی، مقاومت، خازن و سلف را معرفی کردیم و یک طبقه بندي چهار گانه برای هر چهار گانه قابل شدیم که عبارت بودند از: خطی بودن یا غیرخطی بودن، تغییرناپذیر و یا تغییرناپذیر بازمان بودن.

برای تسهیل دریابان فرمول‌های آینده بازهم از این طبقه بندي چهار گانه پاد می‌کنیم. هر مدار با این خاصیت که هر یک از اجزاء آن یک « عنصر خطی » و یا یک منبع نابسته باشد یک مدار خطی نامیده می‌شود. بهمن ترتیب هر مدار با این خاصیت که هر یک از اجزاء آن یک « عنصر تغییرناپذیر با زمان » و یا یک منبع نابسته باشد یک مدار تغییرناپذیر بازمان خواهد بود. بنابراین، یک مدار خطی تغییرناپذیر بازمان مداری است که هر یک از اجزاء آن یک « عنصر خطی تغییرناپذیر بازمان » و یا یک منبع نابسته

باشد. واضح است که اگر مداری خطی نباشد آنرا مدار غیرخطی و اگر مداری تغییرناپذیر با زمان نباشد، آنرا مدار تغییرپذیر بازمان نامند.

در این تعاریف، متابع نابسته باستی بطور جداگانه مورد بررسی قرار گیرند زیرا (۱) ولتاژ دوسر یک منبع ولتاژ و جریان یک منبع جریان در تجزیه و تحلیل مدار تقشی را بازی میکنند که با نقش سایر متغیرهای شبکه ویا اجزاء دیگر مدار تقاضت دارد، و (۲) تمام متابع نابسته عناصر غیرخطی و تغییرپذیر بازمان هستند (مثلًا)، یک منبع ولتاژ سینوسی میتواند بعنوان یک مقاومت غیرخطی تغییرپذیر بازمان مورد بررسی قرار گیرد زیرا مشخصه آن برای هر زمان یک خط الکتری در صفحه z میباشد که عرض آن یک تابع سینوسی از زمان است، یعنی مشخصه آن خط راست است که برای تمام زمانها از مبدأ « نیکزد »).

علاوه بر این باستی تأکید نمود که مجموعه « تمام » ولتاژ‌های دوسر متابع ولتاژ نابسته و « تمام » جریان‌های داخل متابع جریان نابسته بعنوان « ورودی‌های مدار » شناخته میشوند. بنابراین مداری که فقط شامل یک منبع نابسته باشد « مدار با یک ورودی » خوانده میشود. در این فصل، تنها مدارهای با یک ورودی و با یک خروجی را مورد بررسی قرار خواهیم داد، یعنی مدارهایی که فقط شامل یک منبع نابسته بوده و تنها یک متغیر (خروجی) است که باید محاسبه گردد. ورودی میتواند شکل سوچ ناشی از یک منبع ولتاژ نابسته و یا یک منبع جریان نابسته باشد. این شکل سوچ ممکن است بصورت یک ثابت، پک تابع پله، یک تابع ضربه، یک تابع سینوسی و یا هر تابع دلخواه دیگری از زمان باشد. خروجی که میتوان آنرا « پاسخ » مدار نیز نامید، میتواند بصورت ولتاژ یکشاخه بخصوص، جریان یک شاخه بخصوص و یا ترکیب خطی بعضی ولتاژ شاخه‌ها و جریان شاخه‌ها و یا بار روی یک خازن و یا شار^(۱) داخل یک سلف باشد.

برای تمام مدارهای فشرده که در این کتاب مورد بحث می‌باشند قادر خواهیم بود یک معادله دیفرانسیل و یا دستگاهی از معادلات دیفرانسیل را بطریقی بنویسیم که از حل آنها تمام ولتاژ‌های شاخه‌ها و جریان‌های شاخه‌ها محاسبه گردند.

برای اینکه بتوانیم جواب متحصر بفرد دستگاه معادلات دیفرانسیل را بدست آوریم باید علاوه بر ورودی‌های شرایط اولیه^(۲) را نیز دقیقاً بدانیم. نحوه بیان این شرایط اولیه بستگی به طرز

نوشتن معادلات دیفرانسیل خواهد داشت . بخصوص در فصل سیزدهم نشان خواهیم داد که اگر در لحظه اولیه ، تمام ولتاژهای خازنها و جریانهای سلفها معلوم باشد شرایط اولیه مطلوب بطور یکتا مشخص خواهد بود .

« هر مجموعه‌ی از شرایط اولیه که همراه باورودی‌ها ، برای تمام زمانهای $t \geq t_0$ ، تمام متغیرهای مدار را بطور یکتا مشخص سازد حالت مدار در زمان t_0 نامیده می‌شود » . از بینهای فوق مشاهده می‌کنیم که حالت پک‌مدار در زمان t_0 همیشه بیتواند مجموعه تمام ولتاژهای خازنها و جریانهای سلف‌ها در لحظه t_0 انتخاب شود . حالتی که در آن تمام شرایط اولیه صفر باشند حالت صفر t_0 خوانده می‌شود . برای مدارهای خطی اگر تمام ورودی‌ها صفر بوده و مدارهای درحالت صفر باشد تمام متغیرهای شبکه از آن بعد برای همیشه صفر خواهند بود ، وقتی ورودی در لحظه t_0 به مدار اعمال می‌شود ، مجموعه شرایط اولیه در لحظه t_0 که برای یکتا مشخص نمودن متغیرهای شبکه لازم است ، همانطور که قبلاً گفته شد ، حالت مدار در لحظه t_0 خوانده می‌شود که بطور خلاصه آنرا « حالت اولیه (t_0) » می‌خوانیم . کلمه « اولیه » به حالت مدار در لحظه‌ای که ورودی اعمال می‌شود اشاره می‌کند . پاسخ (خروجی) یک مدار را پاسخ حالت صفر (t_0) مینامیم اگر این پاسخ « بروط » به مداری باشد که ورودی در لحظه دلخواه t پتانسیل اعمال شده و مدار قبل از اعمال این ورودی در حالت صفر بوده است (معنی در لحظه t_0) . همچنین پاسخ مداری را که ورودی آن بطور مستعد ، مساوی صفر باشد پاسخ ورودی صفر (t_0) خواهیم نامید . واضح است که پاسخ حالت صفر ، تنها ناشی از ورودی آن است و بطریق مشابه ، پاسخ ورودی صفر ، تنها ناشی از شرایط اولیه می‌باشد . این پاسخ ناشی از انرژی ذخیره شده اولیه در مدار خواهد بود .

پاسخ کامل (t) عبارت از پاسخ مدار به مجموع ورودی و شرایط اولیه خواهد بود . در فصل‌های پیش خواص مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان سرتبه اول و دوم را بررسی کردیم . بعد آن خواهیم دید که این خواص برای هر مدار خطی تغییرناپذیر با زمان و یا تغییرپذیر با زمان نیز صادق است . برای مدارهای خطی (تغییرناپذیر یا تغییرپذیر با زمان) :

۱ — State of a circuit at time t_0

۲ — Zero state

۳ — Initial state

۴ — Zero-state response

۵ — Zero-input response

۶ — Complete response

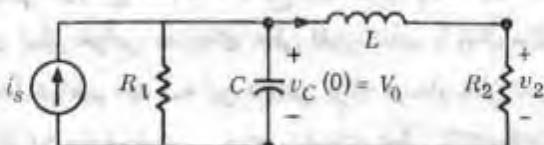
- ۱- «پاسخ کامل» مجموع پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر میباشد.
- ۲- «پاسخ حالت صفر» تابع خطی ورودی است.
- ۳- «پاسخ ورودی صفر» تابع خطی حالت اولیه میباشد.

۲- تجزیه و تحلیل گره و مش

در فصل سوم مدارهای ساده مقاومتی را که بصورت اتصال سری یا موازی عناصر بودند تجزیه و تحلیل نمودیم و برای آنها مدارهای معادلی بدست آوردیم. در فصل های چهارم و پنجم مدارهای شامل مقاومت، خازن و سلف را بررسی کردیم. این مدارها توپولوژی (۱) ساده‌بی داشتند به طوریکه یا مدار فقط شامل یک حلقه تنها بود که دراینصورت تنها یک معادله حلقه (KVL) رفتار مدار را مشخص نمیکرد و یا مدار فقط شامل دو گره بود که در اینصورت تنها یک معادله گره (KCL) رفتار مدار را مشخص مینمود. برای مدارهای با توپولوژی پیچیده لازم است روش‌های کلی و اصولی برای تجزیه و تحلیل آنها بدست آورده که این کار در فصل های نهم تادوازدهم انجام شده است. در این بخش، مداری را که کمی منصفانه از مداری است که در فصل پنجم مطالعه کردیم انتخاب میکنیم تا دو روش اساسی تجزیه و تحلیل مدار، یعنی تجزیه و تحلیل گره و تجزیه و تحلیل مش را تشریح نمائیم.

برای شروع، مدار ساده شکل (۱-۲) را در نظر می‌گیریم که ورودی آن منبع جریان زن و خروجی آن ولتاژ v_2 دوسر مقاومت R_2 میباشد. حالت اولیه با $i_L(0) = I_0$ و $v_C(0) = V_0$ بیان شده و جهت‌های قراردادی آنها در شکل نشان داده شده است.

$$i_L(0) = I_0$$

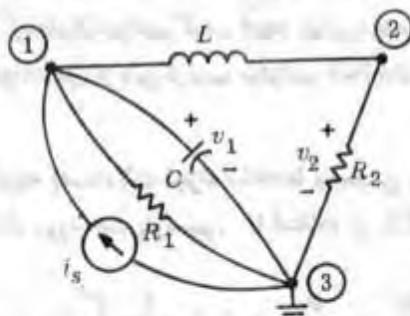


شکل ۱-۲-۱- مثال ساده‌بی که تجزیه و تحلیل گره و تجزیه و تحلیل مش را تشریح میکند. منبع جریان زن ورودی و ولتاژ v_2 ، خروجی مدار میباشد.

۲-۱- تجزیه و تحلیل گره

اولین قدم در تجزیه و تحلیل گره شمارش تعداد گره‌های مدار می‌باشد. در این مورد سه گره وجود دارد که آنها را بصورت ① و ② و ③ علامت گذاری نموده‌ایم (به شکل ۲-۲) که تکرار شکل (۱-۲) بوده و برای تأکید گره‌ها می‌باشد مراجعه کنید).

واضح است که می‌توان بین گره‌ها سه ولتاژ «جفت گره^(۱)» تعریف نمود که پر ترتیب ۷۲۳ و ۷۱۲ هستند. در اینجا این ولتاژها پر ترتیب ولتاژ شاخه‌هایی هستند که گره‌های ① و ② و ③، ① و ③، ① و ② را بهم وصل می‌کنند. از KVL میدانیم که مجموع ولتاژها در هر حلقه باقی مساوی صفر باشد؛ بنابراین KVL یک محدودیت خطی میان ولتاژهای سه جفت گره ملزم می‌گردد. اگر $v_1 = v_{13} - v_{12}$ تعیین شود، $v_2 = v_{12} - v_{23}$ بود، معمولاً یک گره بنام «گره مبنای^(۲)» انتخاب می‌شود (بعضی اوقات گره مأخذ^(۳)) و یا زمین هم خوانده شده و با علامت مشخص می‌گردد. در این صورت ولتاژ مابین گره‌ها نسبت پایین گره مبنای را «ولتاژهای گره‌ها^(۴)» (یا ولتاژهای گره‌ها نسبت به مأخذ) مینامند. در سورد اخیر گره ③ بعنوان مبنای بوده و ولتاژهای گره‌ها ۱ و ۲ می‌باشند.



شکل ۲-۲- مدار شکل (۲-۱) مجدداً رسم شده است
تاعلامت گذاری گره که اولین قدم تجزیه
و تحلیل گره است تأکید شود.

۱ - Node-pair

۲ - Reference node

۳ - Datum node

۴ - Node voltages

واضح است که سایر ولتاژهای جفت گره‌ها نیز بر حسب ولتاژهای v_1 و v_2 با استفاده از قانون KVL قابل بیان هستند. بنابراین در حالت کلی اگر مداری دارای $v_1 + v_2$ گره باشد، تعداد n ولتاژ گره با پستی مشخص گردد زیرا بادانست آنها هر ولتاژ جفت گره و بویژه ولتاژهای شاخه‌ها بلطفاً مقدار تعیین می‌گردند. در بالا فقط از قانون ولتاژ-کیرشوف استفاده نمودیم ولی البته برای پیدا نمودن تمام ولتاژهای شاخه‌ها و بخصوص پاسخ مطلوب، لازم است از قانون جریان کیرشوف نیز استفاده شود.

حال استباطهای قانون جریان کیرشوف را در این مدار بررسی می‌کنیم. البته برای اینکار میتوان سه معادله گره را برای گره‌های ① و ② و ③ نوشت، معهداً واضح است که یکی از سه معادله اضافی^(۱) خواهد بود، زیرا با افزودن هر دو معادله، معادله سوم نتیجه خواهد شد که ممکن است فقط در یک ضریب ۱ - با آن اختلاف داشته باشد. بنابراین برای این مدار سه گرهی، KCL تنها دو معادله نابسته گره بهما خواهد داد. باسانی میتوان نشان داد که در مداری با $(v_1 + v_2)$ گره، تنها ۲ معادله نابسته گره وجود خواهد داشت (البته این مطلب در قابل دهم نشان داده خواهد شد). برای صریح‌جوبی در وقت، پنجای اینکه معادلات گره را صریح‌آ بر حسب جریان‌های شاخه‌ها پنویسیم، از معادلات شاخه‌ها استفاده نموده و جریان‌های متناسبی^(۲) بر حسب ولتاژهای شاخه‌ها بیان می‌کنیم. همچنان تمام ولتاژهای شاخه‌ها را تیز بر حسب ولتاژهای گره‌های بین خواهیم کرد. نتیجه نهایی، بدست آوردن دو معادله برای دو ولتاژ نامعلوم گره‌ها خواهد بود و با این ترتیب میتوانیم ولتاژهای هر دو گره و یا هر یک از آنها را بدست آوریم.

حال بیخواهیم با توجه به معادلات اجزاء شاخه‌ها و همچنین رابطه $v_{12} = v_1 - v_2$ دو معادله گره را برای مثال بورده بحث پنویسیم. با استفاده از KCL برای گره ① داریم،

$$(۲-۱) \quad C \frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1}{R_1} + I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t (v_1 - v_2) dt' = i_s(t)$$

و برای گره ②،

$$(۲-۲) \quad -I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t (v_2 - v_1) dt' + \frac{v_2}{R_2} = 0$$

شرط اولیه اضافی داده شده چنین است :

$$(2-2) \quad v_1(0) = V_0$$

معادلات (۱ - ۲) و (۲ - ۲) دو معادله گره هستند که در آنها فقط دو ولتاژ گره v_1 و v_2 بعنوان متغیر ظاهر می‌شوند . معادله (۲ - ۲) یک شرط اولیه لازم برای مشخص نمودن یکتا جواب معادلات (۱ - ۲) و (۲ - ۲) می‌باشد .

هدف مسأله ما بdst آوردن یک معادله دیفرانسیل است که v_2 متغیر وابسته آن باشد . در قصل چهاردهم یک روش اصولی برای بdst آوردن معادله دیفرانسیل از روی یک دستگاه معادلات انتگرال - دیفرانسیل^(۱) ارائه خواهد شد . در مردم مثال فوق ، ساده‌ترین روش اینست که ابتدا دو معادله (۱ - ۲) و (۲ - ۲) را باهم جمع کنیم تا داشته باشیم :

$$(2-1) \quad C \frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} = i_s$$

با مشتق گیری از معادله (۲ - ۲) بdst می‌آید :

$$\frac{1}{L} v_2 - \frac{1}{L} v_1 + \frac{1}{R_2} \frac{dv_2}{dt} = 0$$

و یا :

$$(2-3) \quad v_1 = v_2 + \frac{L}{R_2} \frac{dv_2}{dt}$$

با مشتق گیری از (۳ - ۲) داریم :

$$(2-4) \quad \frac{dv_1}{dt} = \frac{dv_2}{dt} + \frac{L}{R_2} \frac{d^2 v_2}{dt^2}$$

معادله دیفرانسیل برای v_2 از جایگذاری (۳ - ۲) و (۴ - ۲) در (۱ - ۲) بdst می‌آید .
بنابراین ،

$$(۲-۷) \quad LC \frac{dv_2}{dt} + \left(R_2 C + \frac{L}{R_1} \right) \frac{dv_1}{dt} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) v_2 = R_2 i_s$$

شرط اولیه لازم برای یکتا مشخص نمودن جواب (۲-۷) را میتوان از معادله (۲-۳) و معادلات اصلی (یا معادل آنها) با قراردادن $i_s = 0$ بدست آورد. از (۲-۲) بدست میآوریم:

$$(۲-۸) \quad v_2(o) = R_2 I_0 \quad \text{و از (۲-۴) داریم:}$$

$$(۲-۹) \quad \frac{dv_2}{dt}(o) = \frac{R_2}{L} [v_1(o) - v_2(o)] = \frac{R_2}{L} (V_0 - R_2 I_0)$$

تمرین - برای مدار شکل (۲-۲) معادله دیفرانسیلی که v_1 و v_2 را بهم ربط میدهد بدست آورید. شرایط اولیه لازم برای مشخص نمودن جواب یکتا معادله را نیز مشخص سازید.

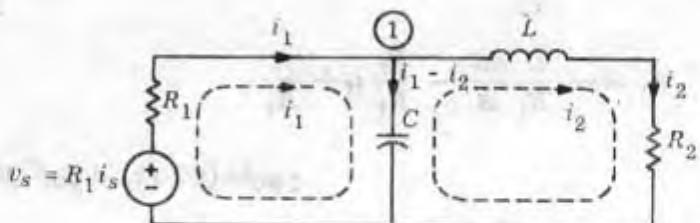
۲-۲- تجزیه و تحلیل مش

(۱۰) اوش دیگری برای تجزیه و تحلیل یک شبکه کلی برایه نوشتن معادلات مش استوار است. مدار شکل (۱-۲) را که با استفاده از مدار معادل تونن ترکیب موادی و مقاومت، در شکل (۲-۳) دوباره رسم شده است در نظر بگیریم. داریم:

$$(۲-۱۰) \quad v_s = R_1 i_s$$

جریان درمنش ۱ را (که شامل v_1 و R_1 و C میباشد) با v_1 و جریان درمنش ۲ را (که شامل C و R_2 میباشد) با v_2 مشخص میکنیم. جریان واقعی شاخه های منبع i_s و مقاومت R_1 برابر i_1 است و جریان شاخه های شامل سلف L و مقاومت R_2 برابر i_2 میباشد. جریان شاخه شامل خازن C ، مجموع جبری دوجریان مش، یعنی $v_1 - v_2$ میباشد. این موضوع با یکار بردن KCL در گره ① نیز آشکار است.

+ فرض میشود که v_2 تابع پریه و یا تابع ویژه دیگری نمیباشد. اگر v_2 شامل ضربه در $t=0$ باشد بایستی دقت بیشتری نمود. در این مورد میتوان از معادلات، بین $t=0-$ تا $t=0+$ انتگرال گرفت تا شرایط اولیه جدیدی در $t=0+$ بدست آید.



شکل ۲-۳ - مدار شکل (۱ - ۲) برای تجزیه و تحلیل مش مجدد رسم شده است. توجه کنید که منبع جریان شکل (۱ - ۲) با استفاده از مدار معادل توافق با منبع ولتاژ تعویض شده است.

حال KVL را در مسها بکار میبریم. در روابط KVL، ولتاژ شاخه‌ها را صریح‌آ با استفاده از معادلات شاخه‌ها بر حسب i_1 و i_2 بیان می‌داریم و تابعی داریم:

$$(2-11) \quad R_1 i_1 + V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t (i_1 - i_2) dt' = v_s(t)$$

و برای مش ۲ :

$$(2-12) \quad L \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 - V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t (i_2 - i_1) dt' = 0$$

شرط اولیه اضافی داده شده چنین است:

$$(2-13) \quad i_2(0) = I_0$$

معادلات (۱۱ - ۲) و (۱۲ - ۲) معادلات مش مدار می‌باشند که در آنها تنها دو جریان مش i_1 و i_2 بعنوان متغیر داده می‌شوند. معادله (۲-۱۳) شرط اولیه لازم برای مشخص نمودن جواب بطور یکتا می‌باشد. برای بدست آوردن معادله دیفرانسیل با متغیر خروجی v_s تنها کافی است معادله دیفرانسیل مربوط به i_2 را بدست آوریم. ساده‌ترین راه، جمع کردن دو معادله (۱۱ - ۲) و (۱۲ - ۲) است تا بدست آوریم:

$$R_1 i_1 + L \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 = v_s$$

و یا :

$$(۲-۱۴) \quad i_1 = -\frac{L}{R_1} \frac{di_r}{dt} - \frac{R_r}{R_1} i_r + \frac{v_s}{R_1}$$

با مشتق گیری از (۲-۱۲) داریم :

$$(۲-۱۵) \quad L \frac{d^r i_r}{dt^r} + R_r \frac{di_r}{dt} + \frac{i_r}{C} - \frac{i_1}{C} = 0$$

با جایگذاری (۲-۱۴) در (۲-۱۵) بدست می آید :

$$(۲-۱۶) \quad LC \frac{d^r i_r}{dt^r} + \left(R_r C + \frac{L}{R_1} \right) \frac{di_r}{dt} + \left(1 + \frac{R_r}{R_1} \right) i_r = \frac{v_s}{R_1}$$

شرط اولیه از رابطه (۲-۱۲) بدست می آید که چنین است :

$$(۲-۱۷) \quad i_r(0) = I_0$$

با قراردادن $t=0$ از (۲-۱۲) بدست می آید :

$$(۲-۱۸) \quad \frac{di_r}{dt}(0) = \frac{1}{L} (V_0 - R_r I_0)$$

چون $v_s = R_1 i_s$ و $v_r = R_r i_r$ معادله بر حسب i_s و i_r چنین است :

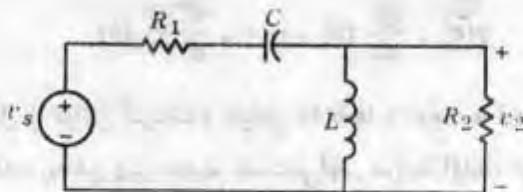
$$(۲-۱۹) \quad LC \frac{d^r v_r}{dt^r} + \left(R_r C + \frac{L}{R_1} \right) \frac{dv_r}{dt} + \left(1 + \frac{R_r}{R_1} \right) v_r = R_r i_s$$

و شرایط اولیه چنین می باشند :

$$(۲-۲۰) \quad v_r(0) = R_r I_0$$

$$(۲-۲۱) \quad \frac{dv_r}{dt}(0) = \frac{R_r}{L} (V_0 - R_r I_0)$$

مثال فوق این حقیقت کلی را نشان میدهد که برای هر مدار خطی تغییرناپذیر با زمان



شکل ۴-۷- مدار برای تمرین تجزیه و تحلیل مش و تجزیه و تحلیل گره که در آن V_s ورودی و V_2 پاسخ میباشد.

که دارای یک ورودی و یک خروجی باشد همیشه میتوان یک معادله دیفرانسیل بطریقی نوشت که خروجی را به ورودی ارتباط دهد. البته هرچه مدار پیچیده‌تر باشد، کار پیشتری لازم خواهد بود. اما همانطور که در قابل های دهم و سیزدهم خواهیم دید برای این نوع مدارها روش‌های منظمی وجود دارد که ساده‌ترین معادله دیفرانسیلی که خروجی را به ورودی ارتباط میدهد بما خواهد داد.

تمرین- با کاربردن تجزیه و تحلیل مش و تجزیه و تحلیل گره، معادله دیفرانسیلی برای ولتاژ V را در مدار شکل (۴-۲) بنویسید.

۳- نمایش ورودی - خروجی (معادله دیفرانسیل مرتبه n)

بطور کلی، برای مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان با یک ورودی و یک خروجی، رابطه بین خروجی و ورودی میتواند با یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام باشد اثبات بیان شود، بنابراین،

$$(3-1) \quad \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = b_0 \frac{d^m w}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} w}{dt^{m-1}} + \dots + b_m w$$

که در آنجا w نمایشگر خروجی و y نماینده ورودی میباشد. ثابت‌های a_1, a_2, \dots, a_n و b_0, b_1, \dots, b_m به مقادیر عناصر و توابعی مدار استگی دارند. شرایط اولیه چنین میباشند:

+ چنانکه بعداً خواهیم دید، این مطلب صرفاً وقتی صحیح است که جمله شامل $\frac{d^m w}{dt^m}$ تابع غربه (t) و یا هیچیک از مشتقهای آن نباشد.

$$y(0), \frac{dy}{dt}(0), \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(0)$$

معادله دیفرانسیل از قوانین کیفیت و خواص شاخه ها با توجه به تجزیه و تحلیل های گرده وشن همآل طور که در بخش پیش دیدیم بدست می آید، شرایط اولیه، از حالت اولیه داده شده مدار و همچنین معادلات مدار تعیین می شوند. روش کلی برای نوشتن معادلات دیفرانسیل مرتبه n ام و تعیین شرایط اولیه در فصل های دهم و یازدهم و سیزدهم مورد بحث قرار خواهد گرفت. در حال حاضر فرض می کنیم که ارتباط بین ورودی و خروجی بصورت معادله (۳-۱) بیان شده و می خواهیم انواع پاسخ ها را مورد مطالعه قرار دهیم.

۳-۹ پاسخ ورودی صفر

پاسخ ورودی صفر عبارتست از پاسخ مدار وقتی که ورودی آن بطور متعدد برابر صفر باشد. بنابراین سمت راست معادله (۳-۱) بطور متعدد برابر صفر خواهد بود و عبارت دیگر، معادله دیفرانسیل همگن می باشد. چند جمله ای مشخصه^(۱) این معادله دیفرانسیل یک چند جمله ای از درجه n بر حسب s می باشد:

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

و صفرهای^(۲) این چند جمله ای، $s = 0, 1, 2, \dots$ نیز «فرکالس های طبیعی متغیر شبکه بر» نامیده می شوند. بخوبی معلوم است که اگر تمام فرکالس های طبیعی متغیر باشند، جواب معادله همگن چنین خواهد بود:

$$(3-2) \quad y(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{s_i t}$$

که در آنجا ثابت های k_i از شرایط اولیه داده شده تعیین می شوند. هرگاه بعضی از فرکالس های طبیعی مکرر شوند، معادله (۳-۲) را بایستی بطریقی اصلاح نمود تا توانهای n نیز چنان که در پیمیه ب بیان شده است در آن وارد گردد. بعنوان مثال، اگر $s = 5$ ، صفر مرتبه سوم چند

جمله‌یی مشخصه معادله دیفرانسیل باشد، معادله (۳-۲) شامل:

$$k_1 e^{s_1 t} + k_2 t e^{s_1 t} + k_3 t^2 e^{s_1 t}$$

خواهد بود.

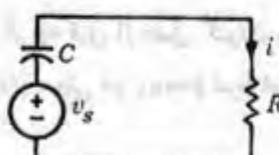
۳-۷ پاسخ حالت صفر

بطور کلی، پاسخ حالت صفر برای متغیر z در معادله (۱ - ۳) به شکل زیر می‌باشد (مجدداً فرض می‌شود تمام فرکانس‌های طبیعی متمایز باشند).

$$(۳-۳) \quad y(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{s_i t} + y_p(t)$$

که در آن (t) پا («پک») پاسخ خصوصی معادله (۳-۱) بوده و تنها به ورودی u بستگی خواهد داشت. n ثابت k_i با این شرط مشخص می‌شوند که تمام شرایط اولیه (0_-) پر $\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(0_-)$ صفر باشند، یعنی مدار درست در لحظه قبل از اعمال $\frac{dy}{dt}(0_-), \dots$ ورودی در حالت صفر باشد.

مثال - مدار RC شکل (۳-۱) را در نظر بگیرید که در آن u ورودی و جریانی که از مقاومت می‌گذرد، یعنی i ، خروجی است. درست در لحظه قبل از اعمال ورودی خازن $v_s(t) = V_m \cos t$ به مدار اعمال می‌شود. بعبارت دیگر، می‌توان از تابع پله (0_+) استفاده کرده و برای تمام زمانهای t ، $v_s(t) = u(t) V_m \cos t$ قرار داد. از قانون KVL بست می‌آوریم:



شکل ۳-۱ - یک مدار ساده RC

$$(2-1) \quad Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt' = v_s(t) = u(t) V_m \cos t$$

و یا :

$$(2-2) \quad R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{dv_s}{dt}$$

توجه شود که (2-2) بصورت (2-1) میباشد. حال سمت راست (2-2) را محاسبه می‌کنیم.

از اینرو،

$$\frac{dv_s}{dt} = V_m \frac{du}{dt} \cos t + V_m u(t) \frac{d}{dt} \cos t = V_m \delta(t) - V_m u(t) \sin t$$

وجود $V_m \delta(t)$ در سمت راست (2-2) موجب میشود که جریان i در لحظه $t=0$ تابع مونته (1) گردد. در حقیقت برای اینکه مقدار سمت چپ معادله (2-2) ضربه $V_m \delta(t)$ سمت راست را متعادل کند، $R \left(\frac{di}{dt} \right)$ باقیستی شامل ضربه $V_m \delta(t)$ باشد و بدینجهت نشاند

($\frac{V_m}{R} u(t)$) خواهد بود که یک تابع پله است. از نظر فیزیکی، این مطلب بسیار تشریح میگردد، چون شکل موج ولتاژ (v) کراندار است، ولتاژ دوسرخازن C و مقاومت R کراندار بوده و درنتیجه جریان i کراندار خواهد بود و بالاخره پاره و ولتاژ دوسرخازن C بیوسته میباشد. از این رو، $v_C(o_-) = v_C(o_+)$ و با استفاده از KVL داریم که:

$$v_R(o_+) = v_s(o_+) - v_C(o_+) = V_m$$

بعبارت دیگر،

$$i(o_+) = \frac{v_R(o_+)}{R} = \frac{V_m}{R}$$

بنابراین مشاهده میشود که اگر چه قبل از وصل کردن منبع ولتاژ v (یعنی در $t=0^-$) شرط اولیه صفر است، $i(o_-) = 0$ ، ولی در $t=o_+$ شرط اولیه صفر نبوده و بدورودی پستگی خواهد داشت!

لازم است مذکور شویم که جمله y در (۳-۲) میتواند « y » پاسخ خصوصی باشد، یعنی بوجب تعريف، هرچوایی که در معادله دیفرانسیل ناهمگن (۳-۱) صدق نماید. بعضی پاسخ های خصوصی خیلی راحت تر از سایرین هستند. برای ورودی p ، y برابر یک ثابت اختیار میشود^۴. برای ورودی میتوسی، y بصورت یک میتوسی با همان فرکانس انتخاب میشود، و برای یک ورودی که یک چندجمله‌ای از t باشد، y بصورت یک چندجمله‌ای از t با همان درجه انتخاب میشود (به ضمیمه پ مراجعة گردد). در فصل بعد برای حالتی که ورودی میتوسی است، بطور مفصل بحث خواهیم نمود.

۳-۳- پاسخ ضریب

محاسبه پاسخ ضریب تا اندازه‌یی ظرفیت‌پذیر شده زیرا سمت راست (۳-۱) شامل شرایط میشوند و مشتقه‌ای ضریب‌ها خواهد بود. در این زیر بخش با استفاده از مثالی، محاسبه مستقیم پاسخ ضریب از معادله دیفرانسیل را تشریح خواهیم کرد. در بخش نشان خواهیم داد که تعیین پاسخ حالت صفر برای یک ورودی دلخواه، تنها با اطلاع از پاسخ ضریب پستگی دارد و بدین جهت بسیار مهم است که از پاسخ ضریب آسودگی خیال پیدا کرده و روش محاسبه آنرا بخوبی فراگیریم.

حال بیخواهیم نشان دهیم که چگونه میتوان پاسخ ضریب را مستقیماً از روی معادله دیفرانسیل (۳-۱) بدست آورد:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b_0 w^{(m)} + b_1 w^{(m-1)} + \dots + b_m w$$

با شرایط اولیه:

$$(۳-۶) \quad y^{(0)}(0_-) = y^{(1)}(0_-) = y^{(2)}(0_-) = \dots = y^{(n-1)}(0_-) = 0$$

برای سهولت طرز تماشی، بالاتر نویس (۳-۶) را برای تماش $\frac{d^n}{dt^n}$ بکار برده‌ایم. واضح است

+ اگر در معادله دیفرانسیل، درجه m از درجه n بزرگتر باشد، آنگاه برای ورودی p ، y علاوه بر یک مقدار ثابت، بایستی شامل ضریب و بعضی مشتقهای آن نیز باشد. این موضوع را بعداً بررسی خواهیم کرد.

که اگر ورودی w یک ضربه واحد باشد، سمت راست معادله شامل تابع ضربه و مشتقهای متوالی آن خواهد بود. مشتقهای متوالی تابع ضربه را گاه «توابع ویژه^(۱)» نیز میخوانند. از نظر نمایش داریم:

$$\frac{du}{dt} = \delta \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^t \delta(t') dt' = u(t)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \delta^{(1)} \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^t \delta^{(1)}(t') dt' = \delta(t)$$

$$\frac{d\delta^{(1)}}{dt} = \delta^{(2)} \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^t \delta^{(2)}(t') dt' = \delta^{(1)}(t)$$

$$\frac{d\delta^{(n)}}{dt} = \delta^{(n+1)} \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^t \delta^{(n+1)}(t') dt' = \delta^{(n)}(t)$$

تعیین مستقیم پاسخ ضربه h براین پایه قرار گرفته است که توابع ویژه سمت راست باید با توابع ویژه سمت چه معادله^(۲-۱) متعادل باشند. چون در $\delta^{(n+1)}(t) = \delta(t)$ ، $w(t) = \delta(t)$ میباشد، بالاترین مرتبه تابع ویژه در سمت راست برابر $\delta^{(m)}$ بوده و چگونگی پاسخ ضربه h ، به مقادیر n و m بستگی خواهد داشت.

-۱ - $n > m$ (حالت مناسب^(۲)). پاسخ ضربه h شامل هیچ نوع تابع ویژه‌ای نیست،

اما چنانکه $\delta^{(n+1)}(t) = \delta(t)$ لازم میدارد $\frac{d^n h}{dt^n}$ شامل $\delta^{(m)}$ میباشد.

-۲ - $n = m$. پاسخ ضربه h شامل یک ضربه $b_0 \delta$ خواهد بود (در اینجا، b_0 ضریب $\delta^{(m)}$ در معادله $w(t) = \delta(t)$ میباشد).

-۳- $n < m$. پاسخ ضربه \neq بیش از یک تابع ویژه را شامل میگردد و ضربی که برای هر تابع ویژه تعیین میشود بسهولت از متعادل نمودن دوطرف معادله حاصل میگردد . دریچه جاری، خود را برای حالتی که $n > m$ میباشد محدود خواهیم کرد (حالات مناسب) . یادآوری میکنیم که بمحض تعریف، تابع ضربه (t) برای تمام زمانهای $t > 0$ بطور متعدد مساوی صفر است و درنتیجه مشتقهای متوالی ضربه ، یعنی توابع ویژه نیز دارای همین خاصیت خواهند بود . بنابراین برای ورودی ضربه واحد، سمت راست معادله $(3-1)$ برای $t > 0$ بطور متعدد مساوی صفر است و درنتیجه تا زمانیکه $t = 0$ مورد نظر میباشد ، پاسخ ضربه، معادل پاسخ ورودی صفرخواهد بود، توابع ویژه درست راست $(1 - 3)$ اساساً شرایط اولیه در $t = 0$ را مشخص میکنند، یعنی شرایطی، درست لحظه‌یی بس از اعمال ضربه میباشدند . این شرایط چنین هستند:

$$h(0_+), h^{(1)}(0_+), \dots, h^{(n-1)}(0_+)$$

بنابراین ، تا زمانیکه $t > 0$ مورد نظر میباشد، میتوان پاسخ ضربه \neq را بهمان صورت جواب معادله همگن بر حسب \neq ثابت اختیاری \neq بیان نمود . با فرض اینکه تمام ریشه‌های معادله مشخصه $(3-1)$ متمایز باشند، خواهیم داشت :

$$(3-7) \quad h(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{s_i t} \quad t > 0$$

چون بمحض قرارداد ، برای $t < 0$ $h(t) = 0$ میباشد و چون h هیچ تابع ویژه‌یی را شامل نمیگردد میتوان نوشت (برای تمام t) :

$$(3-8) \quad h(t) = \left(\sum_{i=1}^n k_i e^{s_i t} \right) u(t)$$

کاری که باقی میماند ، گذاشتن $(3-8)$ در معادله دیفرانسیل $(1-3)$ و محاسبه n ثابت k_i میباشد . البته با استی درستگیری توابع ویژه دقت کافی مبذول گردد .

مثال - فرض کنید که معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده پاسخ u به ورودی w برای یک مدار داده شده بصورت زیر باشد :

$$(۳-۹) \quad \frac{d^2y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + 2y = \frac{dw}{dt} + 2w$$

بیخواهیم پاسخ ضربه h این مدار را بدست آوریم. توجه کنید در معادله (۳-۹) ، $n=2$ و $m=1$ میباشد، ازاین‌رو این حالت یک حالت مناسب میباشد و در تیجه پاسخ ضربه هیچ نوع تابع ویژه‌یی را شامل نمیگردد. ریشه‌های معادله مشخصهٔ معادله دیفرانسیل (۳-۹) برابر، $s_1 = -1$ و $s_2 = -2$ است. بنابراین میتوان پاسخ ضربه را بصورت زیر نشان داد:

$$(۳-۱۰) \quad h(t) = (k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t}) u(t)$$

با یک مرتبه مشتق گیری از h بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} h^{(1)}(t) &= (k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t}) \delta(t) + (-k_1 e^{-t} - 2k_2 e^{-2t}) u(t) \\ &= (k_1 + k_2) \delta(t) + (-k_1 e^{-t} - 2k_2 e^{-2t}) u(t) \end{aligned}$$

با یک مرتبه دیگر مشتق گیری بدست می‌آید:

$$h^{(2)}(t) = (k_1 + k_2) \delta^{(1)}(t) + (-k_1 - 2k_2) \delta(t) + (k_1 e^{-t} + 2k_2 e^{-2t}) u(t)$$

با گذاشتن $w = \delta(t)$ و $y = h(t)$ در معادله (۳-۹) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} h^{(2)}(t) + t h^{(1)}(t) + 2h(t) &= (k_1 + k_2) \delta^{(1)}(t) + (2k_1 + k_2) \delta(t) \\ &= \delta^{(1)}(t) + 2\delta(t) \end{aligned}$$

حال ضرایب $\delta^{(1)}(t)$ و $\delta(t)$ را در دو طرف مساوی هم قرار میدهیم:

$$k_1 + k_2 = 1$$

$$2k_1 + k_2 = 2$$

بنابراین ضرایب k_1 و k_2 چنین خواهند بود:

$$k_1 = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad k_2 = \frac{1}{2}$$

درنتیجه پاسخ ضربه از معادله (۴-۱۰) بصورت زیر بدست می‌آید:

$$h(t) = \frac{1}{\tau} (e^{-t} + e^{-\tau t}) u(t)$$

تمرين - پاسخ ضربه برای متغیر w را که با معادلات دیفرانسیل زیر مشخص شده است بدست آورید:

$$\frac{dy}{dt} + 2y = w$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = \frac{dw}{dt} + w$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 1 \cdot \frac{dy}{dt} + 1 \cdot y = \frac{dw}{dt} + w$$

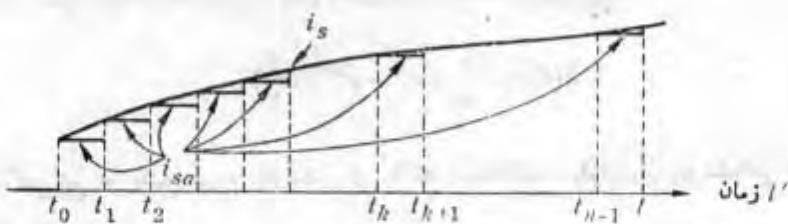
۴- پاسخ به یک ورودی دلخواه

اگرnon میدانیم که چگونه میتوان پاسخ ضربه یک مدار خطی تغییرنابذیر بازمان را محاسبه نمود. در این بخش نشان خواهیم داد که با استفاده از پاسخ ضربه این مدار میتوان پاسخ حالت صفر را برای هر نوع ورودی دلخواه بدست آورد. در این محاسبه «خطی بودن» و تغییرنابذیری بازمان(۲) دو خاصیت بسیار اساسی برای بدست آوردن نتایج سپاهند.

۱-۴- بدست آوردن انتحصار الگانولوشن

دراینجا میخواهیم پاسخ حالت صفر (y) یک مدار خطی تغییرنابذیر بازمان را به یک ورودی (w) محاسبه کنیم. فرض میکنیم که ورودی در لحظه t_0 به مدار اعمال شود و مدار در زمان t_0 در حالت صفر قراردادسته باشد، و بنا بر این میتوان برای $t > t_0$, $y(t) = 0$ را در نظر گرفت.

مسأله، محاسبه (y), یعنی پاسخ w در لحظه t برای هر زمان $t > t_0$ است، بافرض اینکه پاسخ ضربه w مدار برای ما معلوم است. یعنوان قدم اول، ورودی w را با تقریبی



شکل ۱-۴- نمایش تقریبی i_{sa} توسمط i_s که از پالس‌های با عرض یکسان و متواالی تشکیل شده است.

پس از درنظر میگیریم. همانطور که در شکل (۱-۴) نشان داده شده است فاصله (t_0, t) را به تعداد زیادی، مثلاً n فاصله کوچک با طول Δ تقسیم مینماییم. نقاط این زیر قسمتها را $t_1, t_2, \dots, t_{k+1}, t_k, \dots, t_{n-1}, t_n$ مینماییم. بنابراین:

$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \dots = t_{k+1} - t_k = \dots = \Delta$$

میباشد. توابع پله i_{sa} را با تقریب آنچنان به معنی i_s ارتباط میدهیم که عرض معنی تقریبی i_{sa} در نقطه‌ی بطول t' مطابق روابط زیر باشد:

$$(1-1) \quad i_{sa}(t') = \begin{cases} i_s(t_0) & t_0 \leq t' < t_1 \\ i_s(t_1) & t_1 \leq t' < t_2 \\ \dots & \dots \\ i_s(t_k) & t_k \leq t' < t_{k+1} \\ \dots & \dots \\ i_s(t_{n-1}) & t_{n-1} \leq t' < t_n = t \end{cases}$$

بوجه کنید که t' یک زمان دلخواه در فاصله $[t_0, t]$ میباشد. ارتباط شکل موج i_{sa} به شکل موج داده شده (۱-۴) در شکل (۱-۴) نشان داده شده است. واضح است که (برای بسیاری از انواع ورودی‌ها) وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $i_{sa}(t')$ از $i_s(t')$ اختلاف میان پاسخ مدار به i_s و i_{sa} نیز بست صفر میل میکند (پاسانی میتوان نشان

داد که این موضوع برای تمام راه های پیوسته تکه ای^(۱) صادق است .

توجه کنید که تقریب پله ای \hat{m}_Δ را میتوان بصورت مجموعی از پالس های مستطیلی در نظر گرفت و این امر در شکل (۲-۴) نشان داده شده است . تمام پالس های دارای عرض یکسان Δ بوده ، ولی از لحاظ ارتفاع و محل قرار گرفتن در روی محور زمان متفاوت میباشند . پیاد آورید که در فصل دوم تابع پالس \hat{m} را بصورت زیر تعریف نمودیم .

$$p_\Delta(t') = \begin{cases} 0 & t' \leq 0 \\ \frac{1}{\Delta} & 0 < t' < \Delta \\ 0 & \Delta \leq t' \end{cases}$$

هر گاه این تابع پالس \hat{m}_Δ را به زمان t بسمت «راست» انتقال دهیم ، تابع پالس منتقل شده ای با تفاوت زیر بدست می آید :

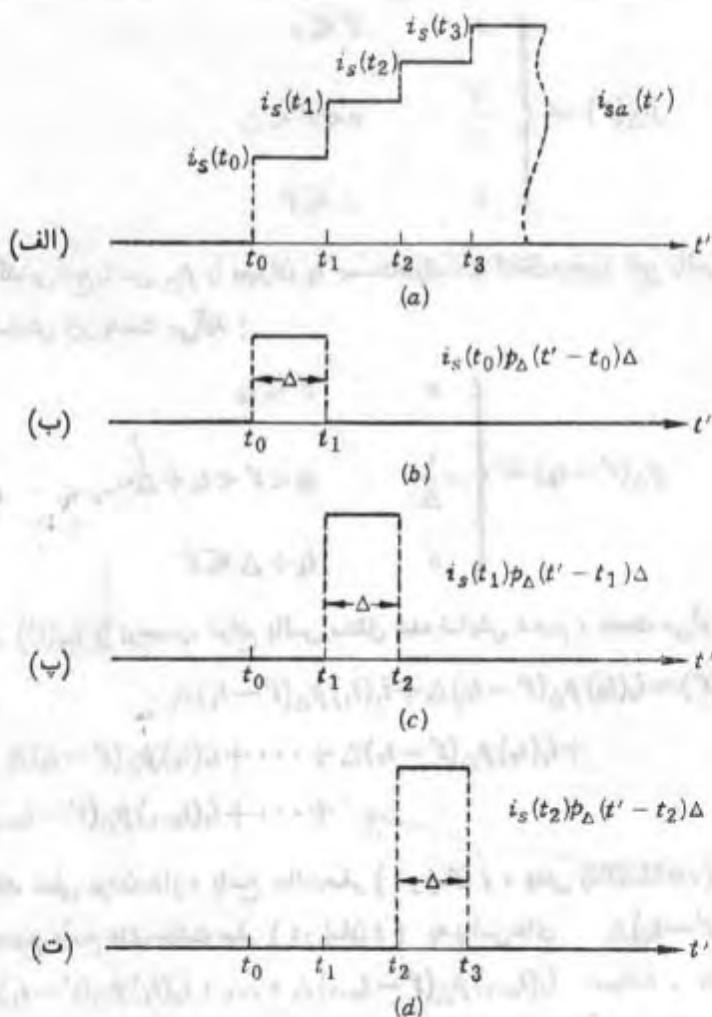
$$p_\Delta(t' - t_k) = \begin{cases} 0 & t' \leq t_k \\ \frac{1}{\Delta} & t_k < t' < t_k + \Delta \\ 0 & t_k + \Delta \leq t' \end{cases}$$

اگر (t'_k) را بر حسب توابع پالس منتقل شده تفاوت دهیم ، بدست می آوریم :

$$\begin{aligned} i_{st}(t') &= i_s(t_0) p_\Delta(t' - t_0) \Delta + i_s(t_1) p_\Delta(t' - t_1) \Delta \\ (t - 2) \quad &+ i_s(t_r) p_\Delta(t' - t_r) \Delta + \dots + i_s(t_k) p_\Delta(t' - t_k) \Delta \\ &\quad + \dots + i_s(t_{n-1}) p_\Delta(t' - t_{n-1}) \Delta \end{aligned}$$

یعنی بودن مدار ، پاسخ حالت صفر (در زمان t ، یعنی زمان مشاهده) به \hat{m}_Δ ، برابر مجموع پاسخ های حالت صفر (در زمان t) به پالس های $i_s(t_0) p_\Delta(t' - t_0) \Delta$ ، $i_s(t_1) p_\Delta(t' - t_1) \Delta$ ، $i_s(t_{n-1}) p_\Delta(t' - t_{n-1}) \Delta$ ، ... ، $i_s(t_n) p_\Delta(t' - t_n) \Delta$ میباشد . بنابراین ، مسئله به محاسبه پاسخ حالت صفر مدار (در زمان t) یکی از پالس ها مثلاً پالس $(1+k) \Delta$ ، یعنی

بنابراین $i_s(t_k) p_\Delta(t' - t_k) \Delta$ پس از t_k بینجای می‌شود. هرگاه پاسخ حالت صفر مدار به $(+) p_\Delta$ را برابر $h_\Delta(0)$ بنامیم، با استفاده از خواص خطی بودن و تغییرناپذیری با زمان نتیجه می‌شود که پاسخ حالت صفر مدار به پالس $i_s(t_k) p_\Delta(t' - t_k) \Delta$ در زمان مشاهده t ، برابر $i_s(t_k) h_\Delta(t - t_k) \Delta$ خواهد بود. آرگومنت $h_\Delta(t_k) = i_s(t_k) p_\Delta(t' - t_k) \Delta$ است، زیرا پالس $p_\Delta(t' - t_k) \Delta$ در زمان t_k بمدار اعمال شده است. بنابراین در زمان مشاهده که آنرا t



شکل ۴-۴- تابع تقریبی i_{sa} شکل (الف) میتواند به عنوان مجموع پالسهای مستطیلی شکلهای (ب) و (ج) و (د) وغیره تعبیر شود.

مینامیم، تنها $t - t_0$ از زمان اعمال پالس گذشته است. با تکرار این استدلال برای هریک از پالس‌های $(\cdot)_n$ ، پاسخ حالت صفر برای $(\cdot)_n$ چنین بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 & i_s(t_0)h_{\Delta}(t-t_0)\Delta + i_s(t_1)h_{\Delta}(t-t_1)\Delta \\
 & + \cdots + i_s(t_k)h_{\Delta}(t-t_k)\Delta + \cdots + i_s(t_{n-1})h_{\Delta}(t-t_{n-1})\Delta \\
 (\cdot)_n & = \sum_{k=0}^{n-1} i_s(t_k)h_{\Delta}(t-t_k)\Delta
 \end{aligned}$$

قدم بعدی میل دادن $n \rightarrow \infty$ میباشد. چون $t - t_0 = n\Delta$ ثابت بوده و وقتی $n \rightarrow \infty$ ، درنتیجه $t - t_0 \rightarrow 0$. وقتی $0 \rightarrow \Delta$ ، نتایج زیر حاصل میشوند:

۱- تقریب پله‌ای $(\cdot)_n$ بصورت ورودی اصلی (\cdot) دوست آید.

۲- پاسخ حالت صفر به $(\cdot)_n$ همان پاسخ حالت صفر به (\cdot) ، یعنی، (\cdot) بیکردد.

۳- پاسخ حالت صفر h_{Δ} به $(\cdot)_n$ همان پاسخ ضربه h میشود.

۴- مجموع موجود در $(\cdot)_n$ تبدیل با تکرار میشود، بعبارت دیگر،

$$v(t) = \int_{t_0}^t i_s(t')h(t-t')dt' \quad t \geq t_0$$

این معادله برای هر زمان $t_0 > t$ ، «ولتاژ خروجی حالت صفر» در زمان t را که ناشی از جریان ورودی i_n در زمان t_0 میباشد بدست میدهد.

«نتیجه» «محاسبه» «پاسخ حالت صفر» هر مدار خطی تغییرناپذیر بازمان به یک ورودی «دلخواه» منجر میشود به:

۱- تعیین «پاسخ ضربه» h

۲- محاسبه انتگرال:

$$\int_{t_0}^t h(t-t')i_s(t')dt' = v(t) \quad t \geq t_0$$

که در آنجا ∂ لحظه‌یی است که ورودی θ به مدار اعمال می‌شود. این چنین انتگرالی را انتگرال کانولوشن می‌نامند.

قضیه فرعی (۱) - با نتیجه گیری مستقیم از (۱-۴) می‌توان گفت که شکل موج (۰)، ۷، یعنی «پاسخ حالت صفر یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان به یک ورودی «دلخواه»، تابع خطی شکل موج ورودی (۰)، ۸، می‌باشد». (به تعریف یک تابع خطی در ضمیمه الف و مثال ۸ بخش ۲-۳ در همان ضمیمه مراجعه شود).

تبصره ۱ = هر مقدار جدید θ که بخواهیم ولتاژ خروجی (۰)، ۷ را در آن حساب کنیم نیاز به یک انتگرال گیری جدید دارد زیرا، عبارت زیر انتگرال (۰)، ۷ تیز به θ وابسته است.

تبصره ۲ = توجه شود که حد پائین انتگرال، ۰، ۸، زمانی است که در آن مدار در حالت صفر می‌باشد، و همچنین توجه کنید که حد بالای انتگرال، ۰، ۹، زمانی است که بخواهیم θ را در آن حساب کنیم. نباید انتگرال را برای مقادیر بیش از θ در حد بالا حساب نمود، زیرا مقادیری که جریان ورودی پس از زمان θ دارا می‌شود، اثری روی پاسخ مدار در زمان θ نخواهد داشت.

تبصره ۳ = حال استدلال این بیان را، که پاسخ حالت صفر در زمان θ ، ناشی از یک ضربه اعمال شده در لحظه θ ، تابعی از θ - t می‌باشد، مجدداً ببررسی می‌کنیم. در حالت کلی می‌توان نوشت، $h(t, t_k)$ ، یعنی پاسخ یک تابع دو متغیره است: t ، یعنی لحظه مشاهده، و t_k ، یعنی لحظه‌یی که ضربه به مدار اعمال شده است. حال «تغییرناپذیر با زمان» بودن مدار را بخاطر می‌آوریم، بدین معنی که برای هر T ، نتایجی که از انجام آزمایشی در زمان حال بدست می‌آید، «کاملاً» مساوی همان نتایجی است که از انجام همان آزمایش در T ثانیه بعد بدست خواهد آمد، و بوجه پاسخ حالت صفر در زمان $t + T$ ، ناشی از ضربه اعمال شده در زمان t ، معادل با پاسخ حالت صفر در زمان $t + T$ است، ناشی از ضربه اعمال شده در زمان $t + T$ خواهد بود و بنابراین:

$$h(t, t_k) = h(t + T, t_k + T) \quad \text{برای تمام } T$$

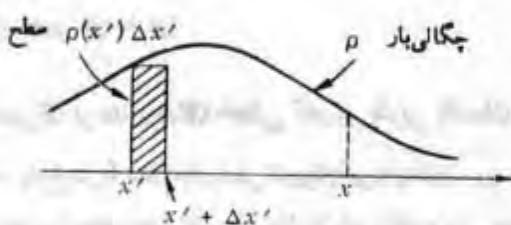
چون این معادله برای تمام مقادیر T برقرار است، عدد $h(t, t_k)$ بطور یکتا بی

با تفاضل $t - t_0$ مشخص میگردد و درنتیجه نوشتن آن بصورت $(t - t_0)/h$ تصدیق میشود.

قضیره ۴- مطلب جالبی که ازابن بحث نتیجه میشود اینست که چون در محاسبه پاسخ حالت صفر توسط (۴-۱) هیچگونه استفاده‌ی از نمایش معادله دیفرانسیل مدارهای «فسرده» نشده است، بنابراین هرگاه بروشی، پاسخ ضربه یک مدار گسترده (۱) خطی تغییرناپذیر با زمان را بدانیم، آنگاه با استفاده از (۴-۱) میتوان «پاسخ حالت صفر» آنرا به «هر» ورودی دلخواه محاسبه نمود.

۴-۲- مثالی از انتگرال کانولوشن در فیزیک

شاید تاکنون به انتگرال کانولوشن در فیزیک بخورد کرده‌اید. مثلاً فرض کنید که یک طناب نایلونی محکم داریم که روی آن مقداری بار الکتریکی توزیع نموده‌ایم، این طناب میتواند سمه مولداندو گراف (۲) باشد. فرض کنید میخواهیم پتانسیل الکتروستاتیکی را در نقطه x' ازابن طناب، که ناشی از توزیع بار یکنواخت با چگالی ρ میباشد در شکل (۴-۳) نشان داده شده است. حساب کنیم. بار واقع در فاصله کوچک $(x' + \Delta x') - x'$ مساوی $\rho \Delta x'$ میباشد که در آن (x') ، چگالی بار در نقطه x' بر حسب کولمب بر متر و $\rho \Delta x'$ ، طول فاصله بر حسب متر است. اگر این بار برابر ۱ کولمب بود، پتانسیل در نقطه x' مساوی $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x' - x}$ میشود (توجه کنید، بعلت اینکه فاصله بین دونقطه یک عدد مثبت است، کاربرد قدر مطلق $x' - x$ ضروری میباشد). حال با توجه باین واقعیت که پتانسیل در یک نقطه، تابعی



شکل ۴-۳-۴- توزیع پتانسیل الکتروستاتیک مربوط به انتگرال کانولوشن

خطی از بار میباشد و با استفاده از خاصیت همگنی، سهم پتانسیل نقطه x ناشی از بار $\rho(x')$ مساویست با:

$$\frac{\rho(x') \Delta x'}{4\pi\epsilon_0 |x - x'|}$$

با استفاده از خاصیت جمع پذیری و گذشتن به حد، پتانسیل زیر بدست می آید:

$$(t-5) \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(x') dx'}{4\pi\epsilon_0 |x - x'|}$$

هرگاه برای سهولت،

$$h(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |r|}$$

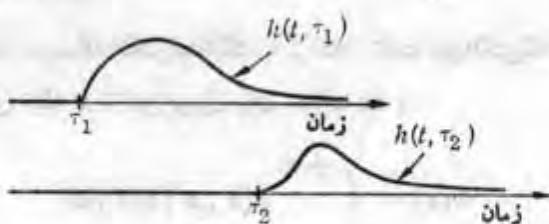
باشد، که در آن r معرف فاصله است، رابطه (۵-۴) را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x - x') \rho(x') dx'$$

تعابیر تابع h چنین است: (۲) h پتانسیل ناشی از « واحد » بار الکتریکی در فاصله r از این بار میباشد. انتگرال کانولوشن باستی از $-\infty$ تا $+\infty$ گرفته شود زیرا هر باری که روی این طناب محکم قرار گیرد، خواهد درست راست و خواهد درست چپ نقطه x واقع باشد، در پتانسیل نقطه x سهیم خواهد بود.

۴-۴- تفسیری بر مدارهای خطی تغییرپذیر بازمان

تا کنون فقط پاسخ ضربه مدارهای خطی تغییرپذیر بازمان را مورد مطالعه قراردادهایم. سهیوم پاسخ ضربه برای مدارهای خطی تغییرپذیر بازمان نیز بکار میروند. بموجب تعریف، پاسخ حالت صفر به یک ضربه واحد، پاسخ ضربه نامیده میشود. یعنوان مثال مدارهای خطی تغییرپذیر بازمان، یک تقویت کننده خطی را که ضربب تقویت^(۱) آن به کنندی بازمان تغییر



شکل ۴-۴ - پاسخ های ضربه برای مدار تغییرنایابی بازمان.

در مرور اول، یک ضربه واحد در زمان τ_1

و در مرور دوم، در زمان τ_2 به مدار اعمال

شده است.

میکند در نظر میگیریم، برای چنین مداری پاسخ حالت صفر به ضربه واحدی که در زمان τ_1 اعمال میشود، یعنی $(\tau_1 - t)\delta$ ، مساوی پاسخ حالت صفر برای ضربه واحد دیگری که در زمان τ_2 ، یعنی $(\tau_2 - t)\delta$ بمدار اعمال میگردد نخواهد بود. علت این امر اینست که ضربه تقویت آن در زمان τ_2 و لحظه بی بعد از آن متغیر است. بالنتیجه در بیان پاسخ ضربه باستی لحظه اعمال ضربه به مدار نیز بدقت تعیین شود. درحال مورد بحث، پاسخ ضربه ممکن است مشابه شکل (۴-۴) باشد. بطور کلی $(\tau_1 - t)\delta$ بیان کننده «پاسخ حالت صفر در زمان t » ناشی از «ضربه واحد اعمال شده در زمان τ » میباشد.

برای «مدارهای خطی تغییرنایابی بازمان» میتوان نشان داد که پاسخ حالت صفر تابع خطی ورودی است. در حقیقت با استفاده از خواص جمع پذیری و همگنی میتوان نشان داد که «پاسخ حالت صفر بسیار یک ورودی «دخلخواه» η که در زمان t_0 اعمال میشود برابر است» با:

$$(4-6) \quad v(t) = \int_{t_0}^t h(t, t') i_s(t') dt' \quad t \geq t_0$$

چنانچه فرمول فوق را با (۴-۶) مقایسه کنیم، مشاهده خواهیم کرد که تنها تفاوت ایندوآنست که آکنون پاسخ ضربه تابعی از دو متغیر t و t' میباشد در حالیکه در (۴-۶)

تابعی از تناصل $t - t'$ بود.

بطور مشابه، در سواله الکتروستاتیک، اگر ثلا" ثابت دی الکتریکی^(۱) ϵ ، تابعی از x' باشد، پتانسیل نقطه x با این فرمول بیان خواهد شد:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, x') \rho(x') dx'$$

که در آنجا (x, x') ، پتانسیل نقطه x ، ناشی از یک بار نقطه بی واحد در x' میباشد.

۴-۴- پاسخ کامل

در فصل چهارم ثابت کردیم که برای یک مدار RC خطی تغییرناپذیر با زمان و از مرتبه اول، پاسخ کامل مساوی مجموع پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر میباشد. در حقیقت برای هر مدار خطی، تغییرناپذیر یا تغییرناپذیر با زمان، بیان فوق صحیح میباشد. اثبات کلی و کامل این بیان در فصل هفدهم داده خواهد شد. نهلا" این حقیقت را بصورت معادله زیر بیان میکنیم:

$$y(t) = z(t) + v(t)$$

با:

$$(t-v) \quad y(t) = z(t) + \int_{t_0}^t h(t, t') w(t') dt' \quad t \geq t_0$$

که در آن z پاسخ ورودی صفر و v پاسخ حالت صفر، w ورودی و h پاسخ کامل میباشد. از معادله (۴-۷) واضح است که «پاسخ کامل»، تنها موقعی یک تابع خطی ورودی است که پاسخ ورودی صفر، بطور متعدد برابر صفر باشد».

تمرین ۱- فرض کنید که در مدار شکل (۲-۱)، سلف L و مقاومت R را حذف کنیم. گیریم v_C ورودی و v_C پاسخ باشد. عبارتی برای $(v_C(t))$ ، یعنی پاسخ کامل مدار، بر حسب v_0 و ولتاژ اوایله خازن V_0 پیدا نمایید.

تمرین ۲ - خازن C را از مدار شکل (۲-۱) حذف کنید. با در نظر گرفتن v ، معنوان پاسخ، عبارتی برای (t) ، یعنی پاسخ کامل مدار بر حسب v و جریان اولیه سلف I_0 ، پلست آورید.

۵- محاسبه انتگرال های کانولوشن

در بخش قبل تشان دادیم که پاسخ حالت صفر v یک مدار خطی تغییرنایابی با زمان، به یک ورودی دلخواه (t) که در زمان t_0 بمدار اعمال می شود، با انتگرال کانولوشن،

$$(۵-۱) \quad v(t) = \int_{t_0}^t h(t-t') i_s(t') dt' \quad t \geq t_0$$

برای تمام t

بیان می کرد که در آن v پاسخ ضربه واحد می باشد. بنابراین با داشتن پاسخ ضربه h ، میتوان برای $t \geq t_0$ ، $v(t)$ ناشی از (t) را که در حلقه t_0 بمدار اعمال می شود با انتگرال گیری رابطه (۵-۱) پلست آورد. در این بخش با استفاده از چند مثال، محاسبه انتگرال کانولوشن را تشریح خواهیم کرد. معهدها ابتدا دو تیجه ساده ولی محدود را پلست می آوریم.

۱- فرض کنید که ورودی i_s ، ضربه واحدی است که در $t_0 < t$ بمدار اعمال می شود، یعنی، $i_s(t) = \delta(t-t_0)$. می خواهیم بوسیله (۵-۱) نشان دهیم که پاسخ v توسط $h(t-t_0)$ بیان می شود. از رابطه (۵-۱) داریم:

$$(۵-۲) \quad v(t) = \int_{t_0}^t h(t-t') \delta(t'-t_0) dt' \quad t > t_0$$

برای $t > t_0$

از تعریف تابع ضربه میدانیم که $\delta(t'-t_0)$ برای تمام زمانها بجز $t'=t_0$ برابر صفر است. در نقطه t_0 ، δ و زه بوده و دارای خاصیت:

$$\int_{t_0-}^{t_0+} \delta(t'-t_0) dt' = 1$$

میباشد . بنابراین میتوان بجای (۲-۵) چنین نوشت :

$$v(t) = \int_{t_1-}^{t_1+} h(t-t') \delta(t'-t_1) dt'$$

که در آن t_1- و t_1+ بترتیب نمایشگر درست لحظه‌ی قبیل ، و درست لحظه‌ی بعد از t_1 میباشند . برای مدارهای فشرده خطی تغییرناپذیر با زمان ، h در فاصله $(0, \infty)$ یک تابع پیوسته میباشد . بنابراین میتوان نوشت :

$$(3-2) \quad v(t) = h(t-t_1) \int_{t_1-}^{t_1+} \delta(t'-t_1) dt' = h(t-t_1) \quad t > 0$$

درنتیجه ، انتگرال کانولوشن دارای این خاصیت مهم است که (برای $t_0 > t_1 > t$) :

$$(3-3) \quad \int_{t_0}^t h(t-t') \delta(t'-t_1) dt' = h(t-t_1)$$

معادله (۳-۳) را میتوان نتیجه مستقیم خطی بودن و تغییرناپذیری با زمان مدار دانست . زیرا بمحض تعریف ، $h(t)$ پاسخ حالت صفر در زمان t به ضربه « اعمال شده در زبان ۵ » میباشد . تغییرناپذیری با زمان لازم میدارد که اگر ضربه دولحظه $t-t'$ به مدار اعمال شده باشد ، پاسخ حالت صفر همان شکل سوچ قبلی را داشته ، اما پاندازه $t-t'$ ثانیه انتقال یافته میباشد . عبارت دیگر ، دراینحالت پاسخ مساوی $h(t-t_1)$ خواهد بود [چنانکه توسط (۴-۵) پیش گویی شد] .

۲- انتگرال کانولوشن (۱-۵) را میتوان با یک تغییر متغیر بصورت دیگری نوشت .
 گریم $\tau = t-t'$ باشد که τ یک متغیر ساختگی (۱) جدید است ، آنگاه $t-t' = \tau$ و $t = t_0 + d\tau$ خواهد بود . حد پائین انتگرال بر حسب متغیر جدید بصورت $\tau = t-t_0$ و حد بالای انتگرال بصورت $\tau = 0$ خواهد شد . بنابراین :

$$(e-5) \quad v(t) = \int_{t-t_0}^0 h(\tau) i_s(t-\tau) (-d\tau)$$

$$= \int_0^{t-t_0} h(\tau) i_s(t-\tau) d\tau$$

چون τ و t' متغیرهای ساختگی انتگرال هستند، میتوان (e-5) را برای مقایسه با (e-1) مجددآ بر حسب t' نوشت و بنابراین:

$$(e-6) \quad v(t) = \int_0^{t-t_0} h(t') i_s(t-t') dt' \quad t \geq t_0$$

درنتیجه، اگر $t_0 = 0$ باشد، (e-1) و (e-6) هردو دارای حدود انتگرال گیری یکسان خواهند بود، یعنی بین 0 و t ،

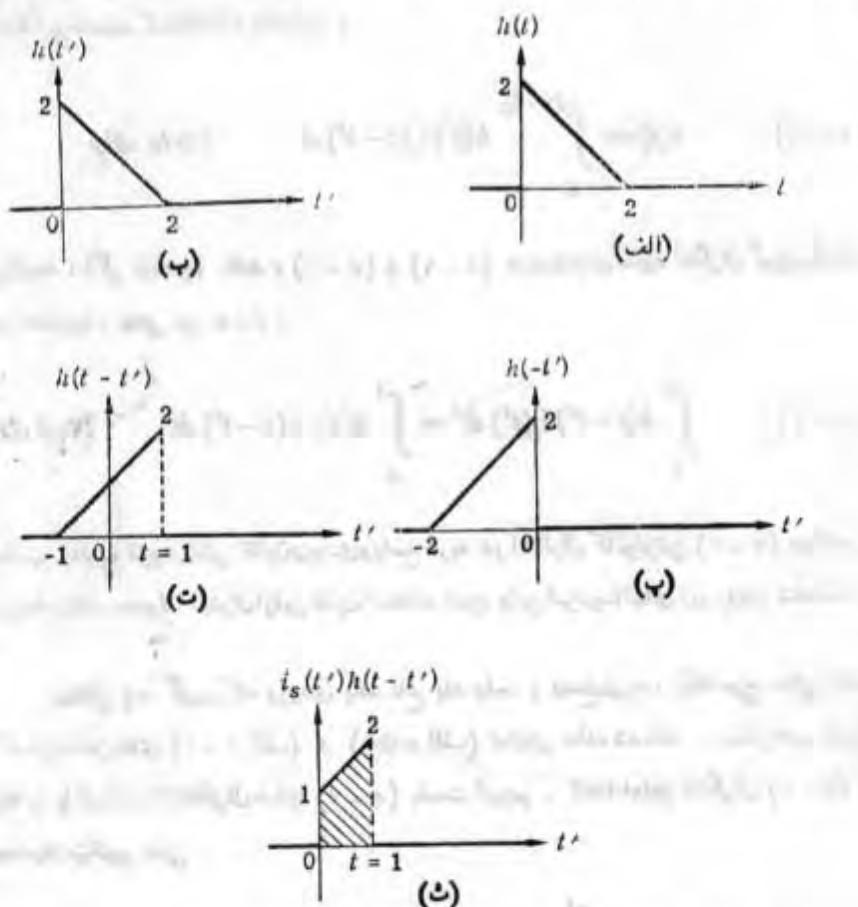
$$(e-7) \quad \int_0^t h(t-t') i_s(t') dt' = \int_0^t h(t') i_s(t-t') dt' \quad t \geq 0$$

مطلوب جالب توجه نقش تقارن و رودی و پاسخ ضربه در انتگرال کانولوشن (e-7) میباشد. در محاسبات، معمولاً میتوان از این تقارن استفاده نمود و این امر در مثالهای زیر روشن شده است.

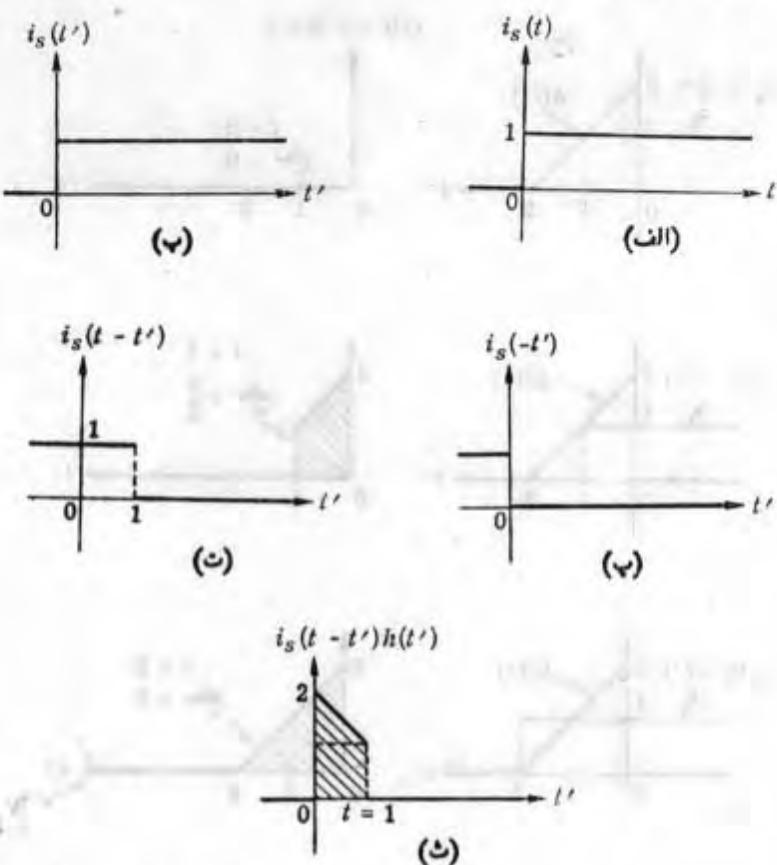
مثال ۱ - گیریم که رودی یک تابع پله واحد و پاسخ ضربه، یک موج مثلثی باشد که در شکل های (۱ - e الف) و (۲ - e الف) تماش داده شده اند. میخواهیم پاسخ پله را با استفاده از انتگرال های (e-7) بدست آوریم. ابتدا اولین انتگرال (e-7) را محاسبه میکنیم یعنی:

$$(e-8) \quad v(t) = \int_0^t h(t-t') i_s(t') dt' \quad t \geq 0$$

شکل (۱ - ه) نمایش هندسی پاسخ ضربه را بما میدهد. این شکل در (۱ - ه ب) تکرار شده است، که در آن بجای متغیر t ، متغیر t' بکار رفته است. شکل (۱ - ه پ)، $(t' - t)$ را بر حسب t' نشان میدهد. توجه شود که این شکل تصویر آینه‌بی نمایش شکل قبل نسبت به محور عرضها میباشد. شکل (۱ - ه ت)، تابع $h(t - t')$ را بر حسب t' نشان میدهد. توجه کنید که مقادار ثابتی است (در شکل $1 = t$ میباشد). همچنین توجه کنید که نمایش شکل (۱ - ه ت)، از انتقال شکل (۱ - ه پ) بمقدار t ثانیه، بسمت راست حاصل شده است. شکل (۱ - ه ث) نمایش هندسی عبارت زیر انتگرال



شکل ۱-۵- مثالی برای تشریح محاسبه انتگرال کاتولوشن با استفاده از معادله (۱-۸). محاسبه برای $t = 1$ انجام شده است.



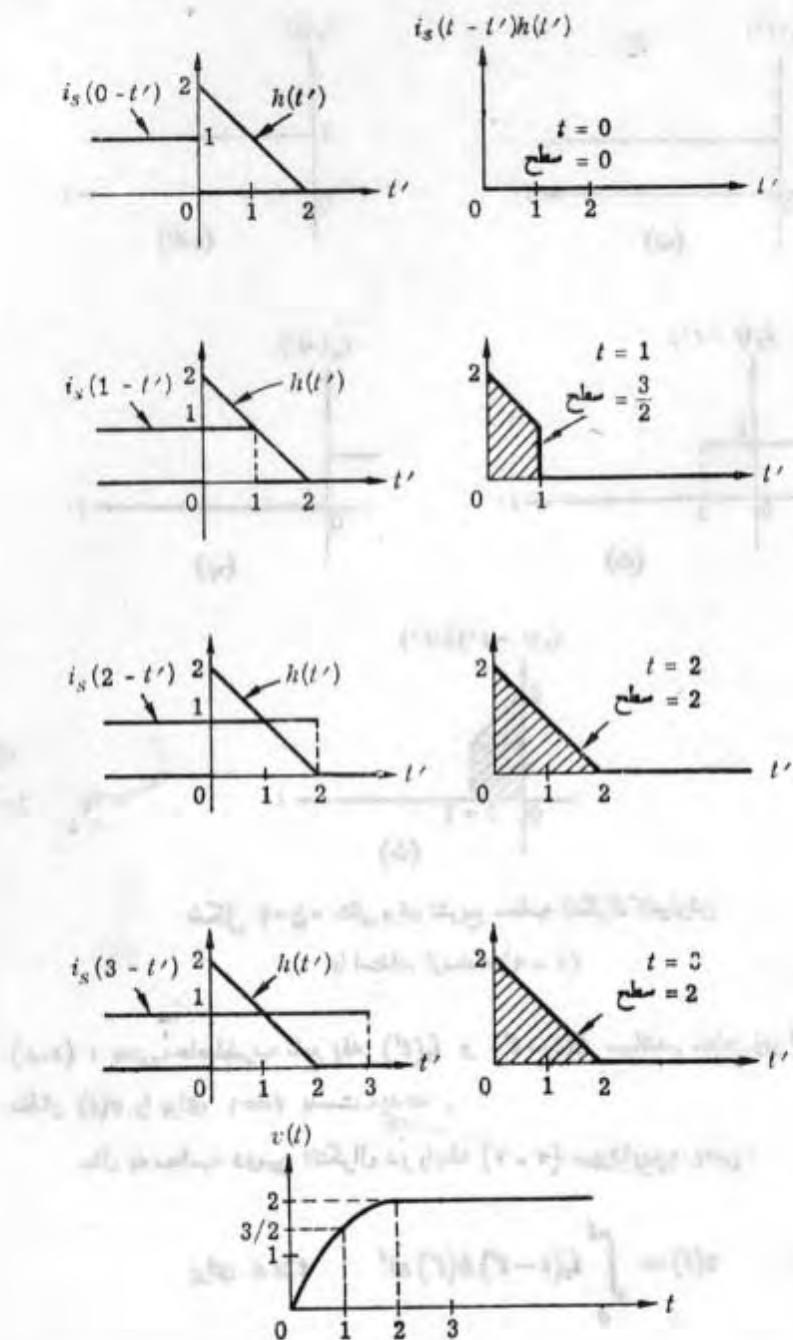
شکل ۲-۵-۲- مثالی برای تشریح محاسبه انتگرال کانولوشن
با استفاده از معادله (۹-۶)

(۹-۸)، یعنی، حاصل ضرب تابع پله $i_s(t')$ و $h(t-t')$ میباشد. سطح زیر این شکل،
مقدار $v(t)$ را برای $t = 1$ بدست میدهد.

حال به محاسبه دوین انتگرال در رابطه (۷-۶) میپردازیم، یعنی:

$$(9-9) \quad v(t) = \int_0^t i_s(t-t') h(t') dt' \quad t \geq 0$$

ابتدا را بر حسب (۹-۶) رسم میکنیم (شکل ۲-۵-۳). آنگاه تصویر آینه‌ی آنرا نسبت



شکل ۳-۵- مثال ۱ : تشریح محاسبه کانولوشن

به محور عرضها یعنی $(t') - t$ را برحسب t' رسم میکنیم. سپس همه نمایش هندسی را بعیزان t ثانیه، بسته راست انتقال داده و $(t' - t) - t$ را برحسب t' بسته میآوریم (شکل ۲ - ه). آنگاه حاصلضرب پاسخ ضربه (t') و $h(t' - t)$ را رسم میکنیم (شکل ۲ - ه'). مطع نزیر این شکل، $v(t)$ را برای $t = 1$ تعیین میکند. واضح است که نتایج بدست آمده از هردو حالت مساوی خواهند بود. در شکل (۳ - ه) نمایش های هندسی را که برای محاسبه انتگرال (۹ - ه) برای مقادیر ۳، ۲، ۱، ۰، ۱، ۲، ۳ برکار رفته، رسم نموده ایم.

مثال ۲ - پاسخ حالت صفر را برای ورودی و پاسخ ضربه داده شده در شکل (۴ - ه الف)

تعیین نموده و رسم کنید. داریم :

$$i_s(t) = u(t) - u(t-1)$$

$$h(t) = e^{-t} u(t)$$

واضح است که پاسخ $v(t)$ برای t منفی صفر میباشد. برای $t \geq 0$ از رابطه زیر استفاده میکنیم :

$$v(t) = \int_0^t h(t-t') i_s(t') dt'$$

$$i_s(t)$$

$$1$$

$$0$$

$$1$$

$$t$$

$$h(t)$$

$$1$$

$$0$$

$$t$$

$$e^{-t}$$

$$\int_0^t h(t-t') i_s(t') dt'$$

$$v(t)$$

$$1 - e^{-1}$$

$$0$$

$$t$$

نظریه اساس مدارها و شبکه ها

برای $0 \leq t < 1$ ، چون $i_s(t) = 1$ است داریم :

$$v(t) = \int_0^t e^{-(t-t')} dt' = 1 - e^{-t}$$

برای $t \geq 1$ ، چون $i_s(t) = 0$ ، تنها کافی است تا $v(t)$ انتگرال گرفته شود . بنابراین :

$$v(t) = \int_0^1 e^{-(t-t')} dt' = (e-1)e^{-t}$$

تعبیر هندسی این دو مرحله و پاسخ مدار در شکل (۴-۱ ب) نشان داده شده اند .

مثال ۳ - پاسخ حالت صفر را برای ورودی و پاسخ ضربه نشان داده شده در شکل (۴-۱ الف) تعیین نمائید . داریم :

$$i_s(t) = u(t) \sin \pi t$$

$$h(t) = u(t) - u(t-1)$$

برای $0 \leq t < 1$ داریم :

$$v(t) = 0$$

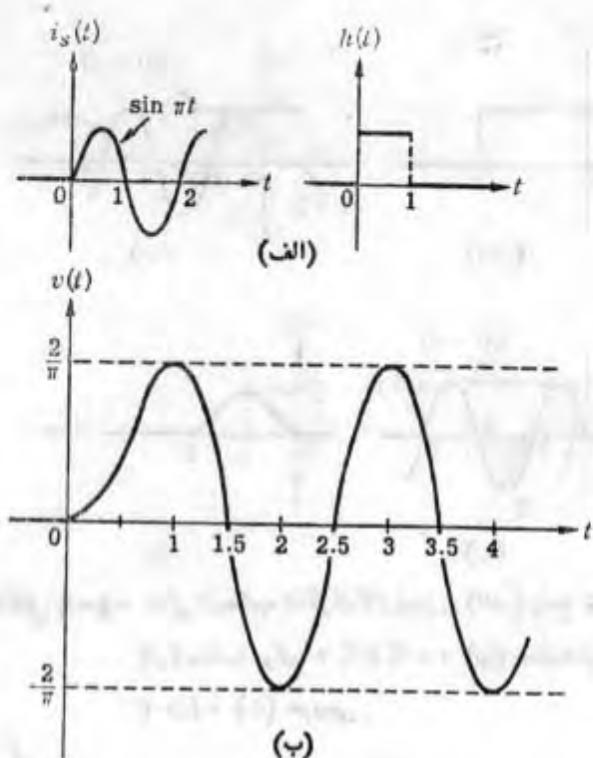
می خواهیم با استفاده از روش ترسیمی، انتگرال کانولوشن را حساب کنیم . برای $0 \leq t \leq 1$ داریم :

$$v(t) = \int_0^t \sin \pi t' dt' = \frac{1}{\pi} (1 - \cos \pi t)$$

برای $t \geq 1$ داریم :

$$v(t) = \int_{t-1}^t \sin \pi t' dt' = \frac{1}{\pi} [\cos \pi(t-1) - \cos \pi t]$$

$$= -\frac{1}{\pi} \cos \pi t$$



شکل ۵-۵-۳ مثال ۳ انتگرال کاونولوشن

نتیجه در شکل (۶-ه ب) نشان داده شده است. توجه کنید که پاسخ پس از گذشت زمان «گذرا»، که در فاصله $1 \leq t \leq 0$ میباشد، مینوسی خواهد بود.

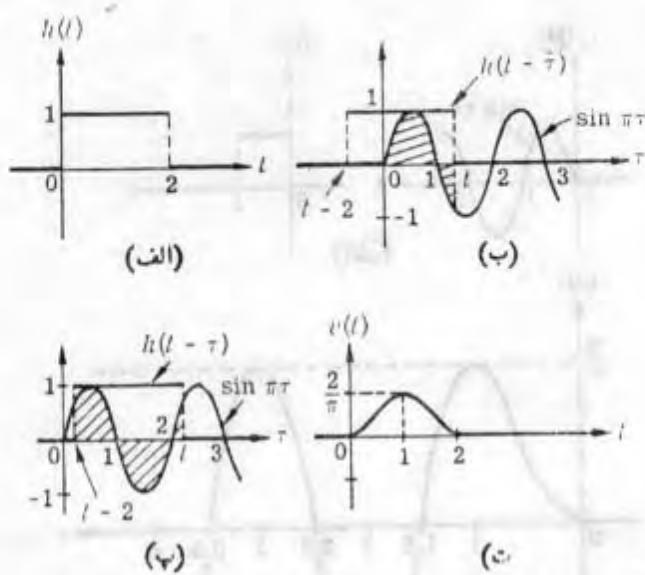
مثال ۴ برای همان ورودی مثال ۲ و پاسخ ضربه شکل (۶-ه الف) که یک پاس مستطیلی با عرض ۲ ثانیه میباشد، پاسخ حالت صفر را تعیین کنید. بنابراین:

$$i(t) = (\sin \pi t)u(t) \quad h(t) = u(t) - u(t-2)$$

برای $0 < t$ داریم:

$$v(t) = 0$$

برای $2 \leq t \leq 0$ (شکل ۶-ه ب را بینید):



شکل ۶-۵- مثالی از محاسبه انتگرال کانولوشن. (الف) پاسخ خریبه،
 (ب) محاسبه برای $0 \leq t \leq 2$ ، (ج) محاسبه برای
 (د) خروجی، $t \geq 2$.

$$v(t) = \int_0^t \sin \pi t' dt' = \frac{1}{\pi} (1 - \cos \pi t)$$

برای $t \geq 2$ (شکل ۶-ه ب را بینید).

$$v(t) = \int_{t-2}^t \sin \pi t' dt' = \frac{1}{\pi} [\cos \pi(t-2) - \cos \pi t] = 0$$

پاسخ (ج) در شکل (۶-ه) نشان داده شده است. توجه کنید که برای $t \geq 2$ ، پاسخ بطور مستعد مساوی صفر میباشد. در حقیقت، برای $t \geq 2$ ، پاسخ حالت صفر را میتوان پک تابع سینوسی با دامنه صفر تعبیر نمود.

خلاصه

- در این فصل برخلاف فصل های قبل ، اساساً با روش هایی برخورد میکنیم که در تجزیه و تحلیل مدارهای خطی تغییرناپذیر بازمان مفید میباشد. سه روش عمله چنین است : (۱) تجزیه و تحلیل مش و گره ، (۲) تعیین پاسخ ضربه یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام ، (۳) محاسبه انتگرال های کانولوشن .
- تجزیه و تحلیل گره برای مداری با $1 + n$ گره ، برایه نوشتن n معادله KCL در n گره ، بر حسب مجموعه بی از n و ناژ جفت گره قرار دارد .
- تجزیه و تحلیل مش برای مداری با m مش ، برایه نوشتن m معادله KVL برای m مش ، بر حسب مجموعه بی از m جریان مش قرار دارد .
- برای یک مدار خطی تغییرناپذیر بازمان پایک ورودی و یک خروجی ، با انجام عملیاتی در معادلات گره یا مش ، یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام با ضرایب ثابت برای متغیر خروجی بدست میآید .
- پاسخ ضربه یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام مناسب ، بصورت زیر میباشد :

$$h(t) = u(t) \left(\sum_{i=1}^n k_i e^{s_i t} \right)$$

- که در آن ، s_i و k_i و $u(t)$ ریشه «متمايز» معادله مشخصه میباشد .
- برای مدارهای خطی تغییرناپذیر بازمان ، پاسخ حالت صفر $t = 0$ به هر ورودی v_0 که در زمان t_0 بمدار اعمال میشود ، مساوی کانولوشن ورودی v_0 که در زمان t_0 اعمال شده ، با پاسخ ضربه h میباشد . یعنی :

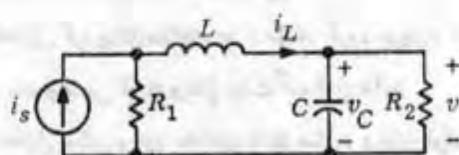
$$v(t) = \int_{t_0}^t h(t-t') i_s(t') dt' \quad \text{برای } t \geq t_0$$

- برای تمام $t \geq 0$ داریم :

$$\int_0^t h(t-t') i_s(t') dt' = \int_0^t i_s(t-t') h(t') dt'$$

مسائل

- ۱- تجزیه و تحلیل گره برای مدار نشان داده شده در شکل (مسئله ۶-۱) با بکار بردن تجزیه و تحلیل گره، معادله دیفرانسیلی بر حسب ولتاژ v بدست آورید. شرایط اولیه $v_C(0) = V_0$ و $i_L(0) = I_0$ داده شده‌اند.

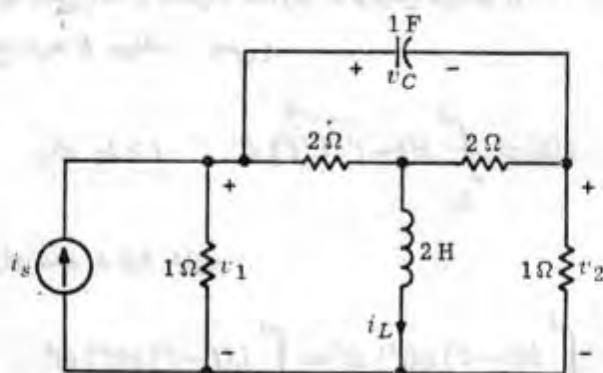


شکل (مسئله ۶-۱)

- ۲- تجزیه و تحلیل مش در مدار مسئله قبل، منبع جریان را به منبع ولتاژ معادل تبدیل نموده، آنگاه با بکار بردن تجزیه و تحلیل مش، معادله دیفرانسیلی بر حسب متغیر v بدست آورید.

- ۳- معادلات حالت معادلات حالت را برای مدار مسئله قبل بتویسید. v و i_L را بعنوان متغیرهای حالت بکار ببرید.

- ۴- تجزیه و تحلیل گره معادلات گره را برای مدار خطی تغییرناپذیر با زمان شکل (مسئله ۶-۴) بتویسید. معادلات دیفرانسیلی برای ولتاژهای v_1 و v_2 تعیین کنید. شرایط اولیه لازم برای هر مورد را بر حسب $v_C(0)$ و $i_L(0)$ بیان کنید.



شکل (مسئله ۶-۴)

۵- تجزیه و تحلیل مش مسأله قبل را با بکار بردن تجزیه و تحلیل مش حل کنید.

۶- معادلات حالت معادلات حالت را برای مدار شکل (مسأله ۴ - ۶) بنویسید.

۷- شرایط اولیه و تحریک ضربه مدار خطی تغییرناپذیر بازمان RLC در شکل (مسأله ۷ - ۶) را در نظر بگیرید. گیریم که h ، جریان سلف ناشی از $\dot{h} = 0$ بوده و

$$h(0_-) = \frac{dh}{dt}(0_-) = 0$$

الف - مقادیر (0_+) h و $\frac{dh}{dt}(0_+)$ را محاسبه کنید (برحسب R ، L و C) .

ب - مستقیماً لشان دهید که (با بررسی شرایط اولیه و گذاردن آنها در معادله دینامیکی):

$$i_L(t) = \int_0^t h(t-t') i_s(t') dt' \quad t \geq 0$$

پاسخ حالت صفر بدورودی \dot{h} میباشد.



شکل (مسأله ۷ - ۶)

۸- پاسخ ورودی صفر، پاسخ ضربه و پاسخ پله معادله دینامیکی یک مدار خطی تغییرناپذیر بازمان، بصورت زیر داده شده است:

$$\frac{d^r y}{dt^r} + \zeta \frac{d^r y}{dt^r} + \alpha \frac{dy}{dt} + \gamma y = \frac{d^r w}{dt^r} + \varphi w$$

شرایط اولیه عبارتند از:

$$y(0_-) = 1 \quad \frac{dy}{dt}(0_-) = 2 \quad \frac{d^2y}{dt^2}(0_-) = -1$$

پاسخ ورودی صفر، پاسخ خوبی و پاسخ پله را بدست آورید.

۹- پاسخ حالت صفر و پاسخ کامل برای مسئله ۸، اگر w ورودی سینوسی، $w(t) = \cos t$ باشد، پاسخ حالت صفر را با دو روش مختلف بدست آورید. پاسخ کامل را برای شرایط اولیه داده شده محاسبه کنید.

۱۰- پاسخ ضربه پاسخ خوبی معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = w \quad \text{الف.}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = \frac{dw}{dt} + w \quad \text{ب.}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = \frac{dw}{dt} + 2w \quad \text{پ.}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 2y = \frac{d^2w}{dt^2} + 2w \quad \text{ت.}$$

۱۱- پاسخ ضربه برای سیستم‌های نامناسب پاسخ ضربه معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید. پاسخ‌ها شامل توابع ویژه خواهد بود. توابع ویژه لازم را با معادل نمودن جملات متناظر دو طرف معادله بدست آورید.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 2y = 2 \frac{d^2w}{dt^2} + 0 \frac{dw}{dt} + w \quad \text{الف.}$$

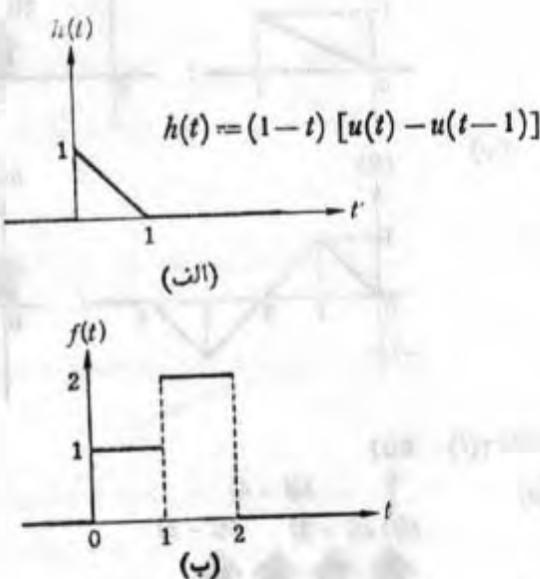
$$\frac{dy}{dt} + 2y = \frac{d^2w}{dt^2} + 2 \frac{dw}{dt} + 2w \quad \text{ب.}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 0 \frac{dy}{dt} + 2y = 2 \frac{d^2w}{dt^2} + 2 \frac{dw}{dt} + w \quad \text{پ.}$$

۱۲ - پاسخ حالت صفر یک مدار خطی تغییرنابذیر بازمان، دارای پاسخ ضربه (0) مطابق شکل (مسئله ۱۲ - ۶ الف) میباشد.

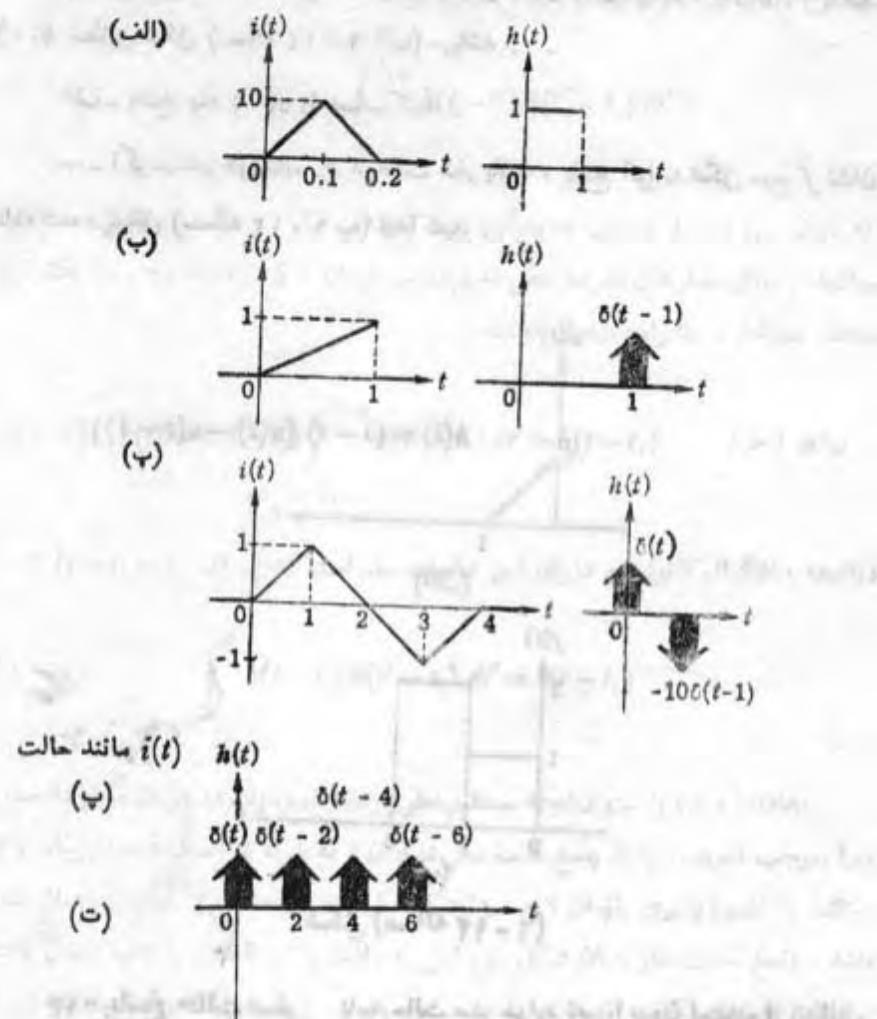
الف - پاسخ پله (0) را حساب کنید.

ب - اگر سیستم در زمان 0 درحالت صفر باشد، پاسخ آنرا به شکل موج f نشان داده شده در شکل (مسئله ۱۲ - ۶ ب) پیدا کنید.



شکل (مسئله ۱۲ - ۶)

۱۳ - پاسخ حالت صفر پاسخ حالت صفر موارد زیر را بدون استفاده از انتگرال کانولوشن بدقت رسم کنید (شکل مسئله ۱۳ - ۶). \therefore نایانده پاسخ ضربه مدار خطی تغییرنابذیر بازمان مورد بررسی و نمایش ورودی آن است.



شکل (مسأله ۱۳ - ۶)

۱۴- انتگرال کانولوشن مسأله ۱۳ را با استفاده از انتگرال کانولوشن حل کنید.

۱۵- پاسخ پله و پاسخ ضربه پاسخ حالت صفر / یک شبکه به جریان ورودی

ضریبه واحد در شکل (مسأله ۱۰ - ۶) رسم شده است.

الف - پاسخ حالت صفر را به ورودی پله واحد $i(t) = u(t)$ محاسبه و رسم کنید.

ب - پاسخ حالت صفر را برای پالس های $\Delta(t) = \Delta(t - t_0)$ برای مقادیر $t_0 = 1, 2, 3$ محاسبه و رسم کنید.

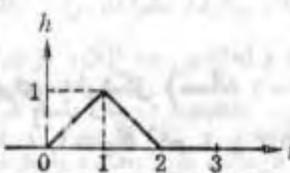
پ - فرض کنید که با تغییر طرح مدار توسط عناصر موجود، میتوان h را به صورت دلخواه درآورد بشرطیکه:

$$h(t) = 0 \quad \text{برای تمام } t < 0 \quad (1)$$

$$0 \leq h(t) \leq 1 \quad t \geq 0 \quad (2)$$

$$\int_0^\infty h(t) dt = 1 \quad (3)$$

با این محدودیت های داده شده، اگر بخواهیم پاسخ پله مدار اصلاح شده در کوتاهترین مدت به حالت دائمی خود برسد، چه شکلی را برای h انتخاب خواهید نمود؟



شکل (مسأله ۱۵)

۱۶ - پاسخ پله شیب دار پاسخ ضربه یک مدار خطی تغییرنابذیر بازمان بصورت زیر مشخص میگردد:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{1+t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

پاسخ حالت صفر η را برای تابع شیب واحد $\eta = \eta(t_0)$ که در لحظه $t_0 = 1$ بمدار اعمال میشود محاسبه و رسم کنید.

۱۷ - انتگرال گانولوشن اگر پاسخ ضربه یک مدار خطی تغییرنابذیر بازمان بصورت زیر داده شده باشد:

$$h(t) = \begin{cases} 2e^{-t} & 0 \leq t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$

پاسخ حالت صفر مدار را به ورودی زیر حساب کنید:

$$i_s(t) = \begin{cases} tu(t) & 0 \leq t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$

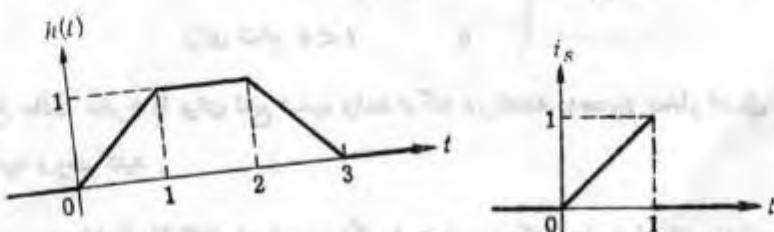
- ۱۸ - مدار تغییر پذیر بازمان برای یک مدار خطی تغییر پذیر بازمان، اگر پاسخ در زمان t ناشی از ضربه واحد اعمال شده دولحظه τ بصورت زیر باشد:

$$h(t, \tau) = t - \tau^2$$

با استفاده از کانولوشن، پاسخ را برای ورودی $i_s(t) = tu(t) + 2u(t) - \delta(t)$ محاسبه نمایید.

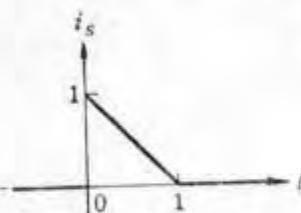
- ۱۹ - پاسخ کامل برای مدار شکل (مسئله ۱-۶) فرض کنید $R_1 = 1$ اهم، $L = 1$ هاتری، $C = 2$ فاراد، $I_0 = 1$ آمپر و $V_0 = 1$ ولت باشد. پاسخ ضربه و پاسخ کامل را برای وکטור خروجی i_s ناشی از بالанс $i_{s1}(t) = u(t) - u(t-1)$ حساب کنید. هرگاه ورودی به $i_s(t) = 2i_{s1}(t)$ تبدیل شود پاسخ کامل به چه صورت خواهد بود؟

- ۲۰ - انتگرال کانولوشن پاسخ حالت صفر مدار خطی تغییر تا پذیر با زمان را از روی پاسخ ضربه $h(t)$ و ورودی i_s که در شکل (مسئله ۶-۲) نشان داده شده اند حساب کنید.



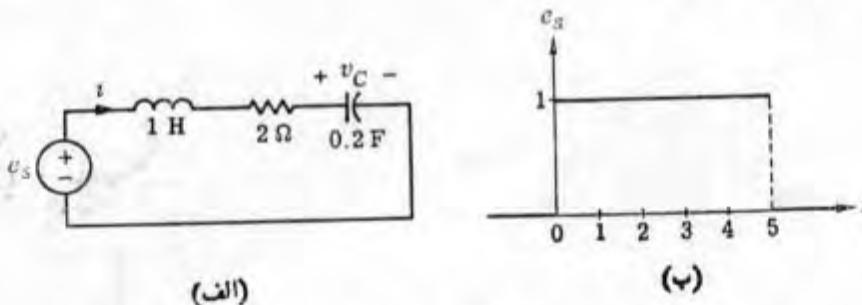
شکل (مسئله ۶-۲۰)

۲۱ - انتگرال کانولوشن مسئله ۲۰ را برای همان پاسخ ضربه ولی با ورودی دیگر نه که در شکل (مسئله ۶ - ۲۱) نشان داده شده تکرار نماید.



شکل (مسئله ۶ - ۲۱)

۲۲ - پاسخ ضربه، پاسخ کامل و کانولوشن مدار خطی تغییرناپذیر با زمان RLC سری نشان داده شده در شکل (مسئله ۶ - ۲۲ الف) را که دارای ورودی v_s و پاسخ مبایشد در نظر بگیرید.



شکل (مسئله ۶ - ۲۲)

- الف - پاسخ ضربه را محاسبه و رسم کنید.
- ب - عبارتی بنویسید که توسط آن بتوان پاسخ کامل را برای هرولتاز ورودی v_s که در زمان $t=0$ بدار اعمال نمایشود و برای هر حالت اولیه $v_C(0)=V_0$ و $i_L(0)=I_0$ و $i(0)=0$ بدست آورد.

- پ - پاسخ کامل را برای $I_0=1$ آبر، $V_0=1$ ولت و v_s مطابق شکل (مسئله ۶ - ۲۲ ب) بدست آورده و رسم نماید.

فصل هفتم

تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی

شکل موجهای سینوسی در علوم و مهندسی نقش مهمی را بازی میکنند. در مدارهای الکتریکی، فرکانس سینوسی‌های موردنظر میتوانند از چند هرتز (سیکل در ثانیه) تا حدود کیلوهertz، مگا هرتز و گیگاهertz^(۱) تغییر کنند. همه ما با جریان سینوسی Hz - ۵۰ که برای انتقال قدرت و استفاده در منازل بکار می‌رود آشنا هستیم. در آزمایشگاه نیز از مولدهای سینکال سینوسی و آشکارسازهایی^(۲) که دائمه‌های متعددی از فرکانس را دربردارند استفاده کردیم. بعنوان یک مهندس برق میدانیم که شکل موجهای سینوسی در زندگی سرفهای ما بمتزله نان شب هستند، زیرا همانطور که بعد از خواهیم دید، اگر پاسخ یک مدار غلی تغییرناپذیر با زمان را به «هر قابع سینوسی» بدایم، اصولاً پاسخ آنرا به «هر سینکال» دیگر خواهیم داشت. بنابراین، یادگیری مؤثرترین روش کار با توابع سینوسی بسیار حائز اهمیت است.

در فصل چهارم مثالهای را بیان نمودیم که در خلال آنها پاسخ مدارهای ساده به رودی‌های سینوسی را بدست آوردیم. روش بکاررفته برای تعیین یک جواب خاص اگرچه سریع است بود ولی بسیار ناشیانه است. در این فصل روش بسیار ساده‌تر و ظریف‌تری را بدست خواهیم آورد که پربایه نمایش یک سینوسی با فرکانس داده شده، توسط یک عدد مختلط قرار دارد.

۱- مرور اعداد مختلط

۱-۱- توصیف اعداد مختلط

ابتدا پاره‌ای حقایق اساسی در مورد اعداد مختلط را خلاصه میکنیم. گیریم z یک عدد مختلط باشد و x و y بترتیب جزء حقیقی و جزء انتگاری آن باشند. در این صورت:

$$(1-1) \quad z = x + jy$$

نظریه اساسی مدارها و شبکهای

که در آن $\sqrt{-1} = j$. همچنین میتوان نوشت:

$$(1-1) \quad \operatorname{Re}(z) = x \quad \operatorname{Im}(z) = y$$

که در آن $\operatorname{Re}(\dots)$ بمعنی «جزء حقیقی ...» و $\operatorname{Im}(\dots)$ بمعنی «جزء انتگاری ...» میباشد. سمت راست معادله (1-1) نمایش مختصات قائم^(۱) عدد مختلط z میباشد. نمایش قطبی عدد مختلط z چنین است:

$$(1-2) \quad z = |z| e^{j\theta}$$

که در آن $|z|$ اندازه و یا دامنه z نامیده میشود و مقدار آن چنین است:

$$(1-3) \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

و θ زاویه و یا فاز z نامیده میشود و مقدار آن چنین میباشد:

$$(1-4) \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

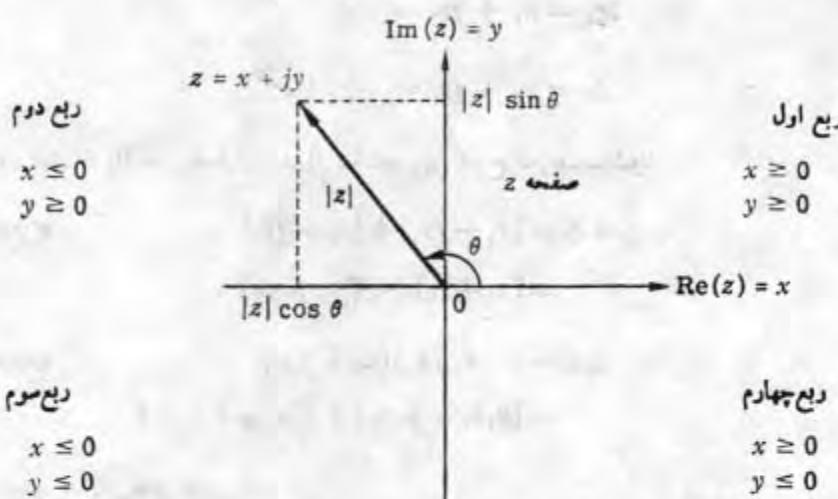
گاه آن زاویه θ را بصورت جزئی مینویسیم. بر حسب $|z|$ و θ داریم:

$$(1-5) \quad x = |z| \cos \theta \quad y = |z| \sin \theta$$

این حقایق در شکل (1-1) تشریح شده‌اند که در آنجا عدد مختلط z با نقطه‌ای که مختصات آن $\operatorname{Im}(z)$, $\operatorname{Re}(z)$ میباشد مربوط شده است. توجه کنید که فاز θ زاویه بین محور x و برداری است که از مبدأ شروع شده و به نقطه z ختم میگردد.

تبصره ۵- زاویه θ محدودیت فاصله $(-\pi, \pi]$ یا $[0, 2\pi)$ می‌باشد^۲، و بنابراین θ توسط x , y بطوریکتا تعریف می‌شود. در محاسبه θ با استفاده از رابطه $(1-1)$ بایستی بخاطرداشته باشیم که هرگاه $\tan \theta$ معلوم باشد، زاویه θ در فاصله $(0, 2\pi)$ بطوریکتا مشخص نخواهد بود. بعنوان مثال $\tan 266^\circ = -1$ است، ولی $\tan 206^\circ$ نیز مساوی 0 خواهد بود. برای یکتا مشخص نمودن θ بایستی علامت‌های $\operatorname{Im}(z)$, $\operatorname{Re}(z)$

^۲ نشان دهنده فاصله $0 \leq \theta < 2\pi$ یا $-\pi < \theta \leq \pi$ نمایشگر فاصله $(-\pi, \pi]$ می‌باشد.



شکل ۱-۱ - عدد مختلط و نمایش قطبی. هر عدد مختلط ج متناظر با نقطه‌ای در صفحه ج می‌باشد که می‌تواند توسط جزء‌های حقیقی و انگاری خود و یا توسط اندازه و فازش مشخص شود

را در نظر گرفت که مشخص گننده ربعی^(۱) از صفحه مختلط می‌باشد که ج در آن قرار دارد.

تمرین ۱ - $\tan \theta$ را برای $2\pi < \theta \leq 0$ بحسب θ رسم کنید.

تمرین ۲ - اعداد مختلط زیر را بصورت قطبی بیان کنید: $5 + j_{10}$ ، $1 + j_2$ و $-1 - j_2$

تمرین ۳ - اعداد مختلط زیر را بصورت مختصات قائم بیان کنید (یعنی، $z = x + jy$):

$$30^\circ e^{j60^\circ}, 100^\circ e^{j45^\circ}, 240^\circ e^{j10^\circ} \text{ و } 180^\circ e^{j25^\circ}.$$

۱-۲ عملیات با اعداد مختلط

قواعد عملیات اعداد مختلط همانند عملیات اعداد حقیقی است، بشرط اینکه از رابطه $= j^2$ استفاده شود. این قواعد همانند می‌باشند زیرا هم اعداد حقیقی و هم اعداد مختلط هردو از اصول یک میدان^(۲) پروری می‌کنند (ضمیمه‌الف، بخش ۱-۲ را ببینید). گیریم:

$$z_1 = x_1 + jy_1 = |z_1| e^{j\theta_1}$$

$$z_2 = x_2 + jy_2 = |z_2| e^{j\theta_2}$$

دو عدد مختلط باشند. عملیات اعداد مختلط بین شرح تعریف می‌شوند:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) \quad \text{» جم «}$$

$$= (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) \quad \text{» ضرب «}$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

ویرحسب نمایش‌های قطبی آنها:

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{j\theta_1} |z_2| e^{j\theta_2}$$

$$= |z_1| |z_2| e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

تمرین = نشان دهید:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + j(-x_1 y_2 + x_2 y_1)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

«مزدوج مختلط» هرگاه عدد مختلط $yj + x = j$ را داشته باشیم، گوئیم که عدد مختلط $yj - x$ که با j نشان داده می‌شود مزدوج مختلط^(۱) j است. پس از

دیده می‌شود که هرگاه $|z| e^{j\theta} = z$ باشد آنگاه:

$$\bar{z} = |z| e^{-j\theta}$$

و:

$$z + \bar{z} = 2x$$

$$z - \bar{z} = 2jy$$

و سیار مهم‌تر:

$$z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$$

و:

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad y = \frac{1}{2j}(z - \bar{z})$$

تمرین - مقادیر زیر را حساب نموده و نتایج را، هم بصورت مختصات قائم و هم بصورت مختصات قطبی بیان کنید.

$$\frac{(1+j_1)(1+j_2)}{(1-j_1)(1-j_2)} \quad \text{و} \quad 2e^{j20^\circ} - e^{-j45^\circ}$$

۲- فازورها و معادلات دیفرانسیل معمولی

۱- نمایش یک سینوسی بوسیله یک فازور

یک «سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω » را بصورت هرتابعی از t که در فاصله $(-\infty, \infty)$ تعریف شده و دارای شکل زیر باشد، تعریف کرده‌ایم:

$$(1) \quad A_m \cos(\omega t + \Phi)$$

که در آن ثابت‌های حقیقی A_m ، ω و Φ بترتیب دامنه، فرکانس زاویه‌ای^(۱) و فاز سینوسی نامیده می‌شوند.

منظور از آنچه که بیان خواهد شد، بدست آوردن قضیه مهم زیر است.

قضیه اصلی مجموع جبری هر تعداد از سینوسی‌ها با «فرکانس زاویه‌ای یکسان»، مثلاً ω ، و هر تعداد از مشتق‌های آنها از هر مرتبه، خود یک سینوسی با «همان» فرکانس زاویه‌ای ω می‌باشد.

مثال ۱ - تابع $f(t) = \sin(\omega t)$ برای تمام مقادیر ω بصورت زیر تعریف می‌شود

در نظر بگیرید:

$$f(t) = 2 \cos(2t + 60^\circ) - t \sin 2t + \frac{d}{dt} 2 \sin 2t$$

توجه کنید که f مجموع دو سینوسی و مشتق سینوسی دیگر است که هر یک از آن سینوسی‌ها دارای فرکانس یکسان $\omega = 2$ رادیان بر ثانیه می‌باشند. قضیه اصلی بیان میدارد که تابع f را میتوان بصورت یک سینوسی تنها با «همان» فرکانس زاویه‌ای نشان داد. برای بررسی این حقیقت با بسط مستقیم جمله کسینوسی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 \cos 2t \cos 60^\circ - 2 \sin 2t \sin 60^\circ - t \sin 2t + t \cos 2t \\ &= \cos 2t - \sqrt{3} \sin 2t - t \sin 2t + t \cos 2t \\ &= \cos 2t - (t + \sqrt{3}) \sin 2t \\ &= \sqrt{1 + (t + \sqrt{3})^2} \cos (2t + \tan^{-1} \frac{t + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}) \\ &= 7.7 \cos (2t + 48.8^\circ) \end{aligned}$$

که بصورت داده شده در معادله (۱-۲) می‌باشد.

این قضیه اصلی در انتهای این زیربخش داده خواهد شد. ابتدا می‌خواهیم راجع به استباطهای قضیه اصلی پژوهش کنیم. این قضیه بیان میدارد که میتوان روش‌های جبری را به سینوسی‌ها اعمال نمود. نخست توجه کنید که یک سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω ، با دامنه A_m و فاز Φ بطور کامل مشخص می‌شود، و بدینجهت فکر «نمایش» یک سینوسی بوسیله عدد مختلط $A \triangleq A_m e^{j\Phi}$ برای ما حاصل می‌گردد. توجه کنید که $|A| = A_m$ اندازه عدد مختلط A و $\Phi = \arg A$ فاز آن است. عبارت دقیق‌تر، سینوسی $(x(t) \triangleq A_m \cos(\omega t + \Phi))$ توسط عدد مختلط $A \triangleq A_m e^{j\Phi}$ «نمایش» داده می‌شود و بر عکس با داشتن عدد مختلط $A = A_m e^{j\Phi}$ و فرکانس زاویه‌ای ω ، سینوسی را میتوان چنین پلست آورد.

$$(۱-۲) \quad x(t) = \operatorname{Re}(A e^{j\omega t})$$

در واقع :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(Ae^{j\omega t}) &= \operatorname{Re}(A_m e^{j(\omega t + \Phi)}) \\
 &= \operatorname{Re}[A_m \cos(\omega t + \Phi) + j A_m \sin(\omega t + \Phi)] \\
 (2-2) \quad &= A_m \cos(\omega t + \Phi) = x(t)
 \end{aligned}$$

توجه کنید که در مرحله آخر از «حقیقی» بودن A_m ، t ، ω و Φ استفاده کرده ایم. برای راحتی، عدد مختلط A که سینوسی $A_m \cos(\omega t + \Phi)$ را نشان میدهد، فازور ^(۱) نمایش دهنده سینوسی خوانده میشود. بر حسب تعریف فازور A با $A = A_m e^{j\Phi}$ بیان میشود.

مثال ۲ - گیریم $v(t) = 110 \sqrt{2} \cos(2\pi 60t + \frac{\pi}{3})$ ولت باشد. دراینصورت

فازور نمایش دهنده سینوسی چنین است:

$$A = 110 \sqrt{2} e^{j(\frac{\pi}{3})}$$

یعنی:

$$v(t) = \operatorname{Re}(A e^{j2\pi 60t})$$

تبصره ۱ - بایستی تأکید شود که دانستن نمایش فازوری یک سینوسی، تنها مقادیر دامنه و فاز آنرا مشخص میسازد و اطلاعی از فرکانس پذست نمیدهد. بنابراین هنگام محاسبات با فازورها، بایستی فرکانس فازورها را در نظر داشت.

تبصره ۲ - بطريق دیگر، هر گاه یک سینوسی را به جای تابع کسینوس با تابع سینوس مشخص کنیم داریم:

$$y(t) = A_m \sin(\omega t + \Phi)$$

دراینصورت نیز نمایش فازوری $A \triangleq A_m e^{j\Phi}$ بقوت خود باقی است، معندها خود سینوسی را بایستی از رابطه زیر دوباره پذست آورد:

$$y(t) = \text{Im}(Ae^{j\omega t})$$

در این کتاب منحصرآ از نمایش جزء حقیقی استفاده شده است.

تبصر ۵ - سیخواهیم در صفحه مختصات مختلط، تابع $Ae^{j\omega t}$ رارسم کنیم. مختصات

عدد مختلط $Ae^{j\omega t}$ چنین اند:

$$x(t) = \text{Re}(Ae^{j\omega t}) \quad y(t) = \text{Im}(Ae^{j\omega t})$$

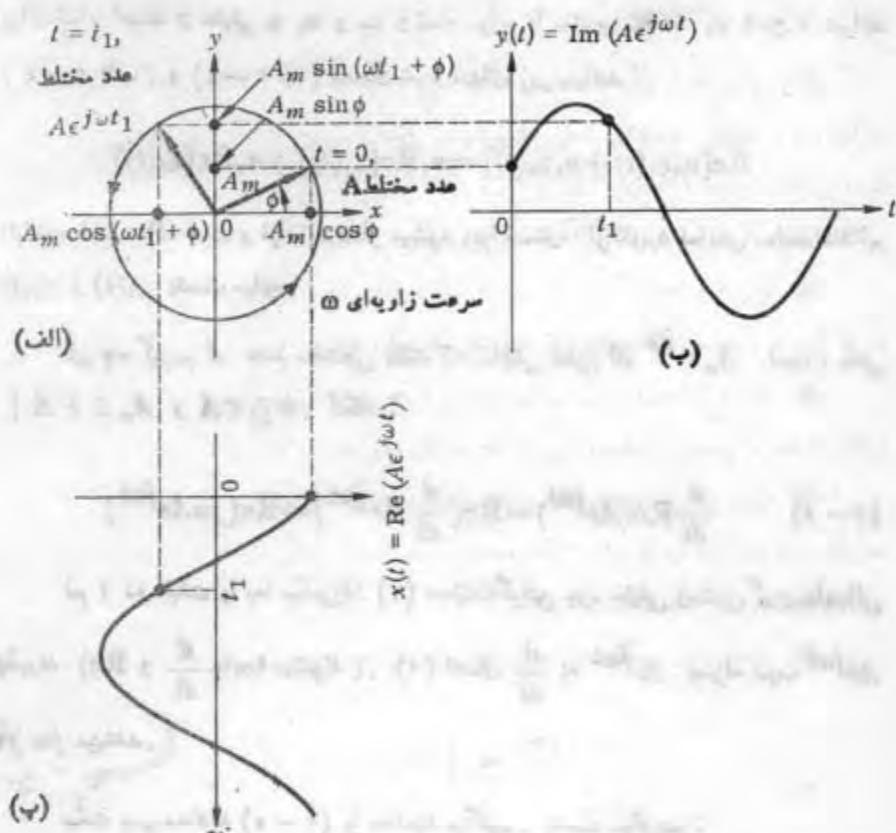
میتوان $(t)x$ را تصویر نقطه $Ae^{j\omega t}$ روی محور x دانست که این نقطه با سرعت زاویه‌ای ω رادیان بر ثانیه، روی دایره‌یی بشاع A_m در خلاف جهت عقربه‌های ساعت، چنانکه در شکل (۱ - ۲) نشان داده شده است دوران میکند و بدینجهت $Ae^{j\omega t}$ را میتوان پک فازور دوار نامید. بهمن ترتیب تصویر نقطه $Ae^{j\omega t}$ روی محور y ، $y(t)$ را خواهد داد.

کاربرد عمده نمایش فازوری سینوسی‌ها در محاسبه «جواب خاص معادلات دیفرانسیل خطی معمولی با ضرایب حقیقی ثابت»، درhaltی که تابع تحریک یک سینوسی است، میباشد. بعبارت دیگر، معادله دیفرانسیل دارای چنین شکلی است:

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = A_m \cos(\omega t + \Phi)$$

که در آن $a_0, a_1, \dots, a_n, A_m, \omega$ و Φ «ثابت‌های حقیقی» میباشند. در واقع بمحض قضیه‌ای که قبلاً بیان شد هرگاه بجای x یک سینوسی با فرکانس زاویه‌یی ω را در سمت چپ جایگزین کنیم، آنگاه تمام سمت چپ نیز معادل یک سینوسی با فرکانس ω خواهد بود و این درست همان است که سمت راست معادله لازم میدارد. بنابراین، تنها مسئله واقعی، محاسبه دامنه و فاز سینوسی است که جواب خاص میباشد. برای این کار از فازورها استفاده میکنیم و این روش را، روش فازوری^(۱) مینامند.

بجای اینکه مستقیماً وارد محاسبات شویم، ابتدا سه لم^(۲) را که نشان دهنده کارآیی روش فازوری میباشند بدقت بیان خواهیم کرد.



شکل ۷-۱ - نمایش فازور دوران $A e^{j \omega t}$ ، (الف) میتوان $A e^{j \omega t}$ را بصورت یک بردار دوران در مقابل جهت معتبرهای ساعت با فرکانس زاویه‌ای ω در نظر گرفت.

(ب) تصویر آن روی محور x . (پ) تصویر آن روی محور y .

лем ۱-۱ «جمع پذیر» و «همگن» است. بعبارت دیگر، گوییم z_1 و z_2 توابع دلخواه با مقادیر مختلطی از متغیر حقیقی t باشند و گیریم a یک عدد «حقیقی» باشد. «جمع پذیری» بدین معنی است که برای تمام چنین توابع z_1 و z_2 و تمام مقادیر a :

$$(1-1) \quad \text{Re}[z_1(t) + z_2(t)] = \text{Re}[z_1(t)] + \text{Re}[z_2(t)]$$

و «همگنی» بدین معنی است که برای تمام اعداد «حقیقی» a و تمام مقادیر t :

$$(1-2) \quad \text{Re}[az_1(t)] = a\text{Re}[z_1(t)]$$

نظریه اساسی مدارها و شبکه ها

برای تمام اعداد « حقیقی » a_1 و a_2 و تمام توابع با مقادیر مختلط z_1 و z_2 ، شرایط
 $(\epsilon - 2 \text{ الف})$ و $(\epsilon - 2 \text{ ب})$ معادل شرط تنها زیر میباشد :

$$\operatorname{Re}[a_1 z_1(t) + a_2 z_2(t)] = a_1 \operatorname{Re}[z_1(t)] + a_2 \operatorname{Re}[z_2(t)]$$

این اثبات مطلب صاده است و از آن صرف نظر نمیشود زیرا مستقیماً از کاربرد نمایش مختصات فائتمان $z_2(t)$ و $z_1(t)$ بدست میآید.

لم ۲- گیریم A عدد مختلطی باشد که نمایش قطبی آن $A_m e^{j\Phi}$ است ، یعنی
 $A \triangleq A_m e^{j\Phi}$. آنگاه :

$$(2-6) \quad \frac{d}{dt} \operatorname{Re}(A e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}\left(\frac{d}{dt} A e^{j\omega t}\right) = \operatorname{Re}(j\omega A e^{j\omega t})$$

لم ۲ دو حقیقت را بما میآموزد : (۱) عملیات گرفتن جزء حقیقی و مشتق گیری جابجایی $A e^{j\omega t}$ و $\frac{d}{dt} \operatorname{Re}(A e^{j\omega t})$ بازیگردند (۲) اعمال $\frac{d}{dt}$ به منزله ضرب $A e^{j\omega t}$ در $j\omega$ میباشد.

نمایش $\operatorname{Re}(A e^{j\omega t})$ معادله $(2-2)$ را محاسبه میکنیم. بدست میآوریم :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \operatorname{Re}(A e^{j\omega t}) &= \frac{d}{dt} \operatorname{Re}(A_m e^{j(\omega t + \Phi)}) \\ &= \frac{d}{dt} [A_m \cos(\omega t + \Phi)] \\ &= -\omega A_m \sin(\omega t + \Phi) \\ &= \operatorname{Re}(j\omega A_m e^{j(\omega t + \Phi)}) \\ &= \operatorname{Re}(j\omega A e^{j\omega t}) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{d}{dt} A e^{j\omega t}\right) \end{aligned}$$

لهم ۴- گیریم A و B اعداد مختلط بوده و ۵ یک فرکانس را ویدای باشد. تحت چنین شرایطی، رابطه:

$$(2-6) \quad \operatorname{Re}(Ae^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(Be^{j\omega t}) \quad \text{برای تمام مقادیر } t$$

لازم میدارد که $A=B$ و بر عکس $A=B$ لازم میدارد که:

$$\operatorname{Re}(Ae^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(Be^{j\omega t}) \quad \text{برای تمام مقادیر } t$$

« اثبات » این مطلب را پذو قسمت بخش میکنیم. برای قسمت اول فرض کنید که:

$$(2-7) \quad \operatorname{Re}(Ae^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(Be^{j\omega t}) \quad \text{برای تمام مقادیر } t$$

باید نشان داد که اعداد مختلط A و B برابر هستند. جزء های حقیقی و ایگاری A و B را بصورت زیر نشان میدهیم:

$$A \triangleq A_r + jA_i \quad B \triangleq B_r + jB_i$$

ابتدا حالت $t=0$ را در نظر میگیریم. چون $\left. e^{j\omega t} \right|_{t=0} = 1$ است، معادله (۲-۷) ملزم میدارد.

$$\operatorname{Re}(A) = \operatorname{Re}(B)$$

که چنین معنی میدهد:

$$(2-8) \quad A_r = B_r$$

حال فرض میشود $e^{j\omega t} \left|_{t=\frac{\pi}{2\omega}} = j \right.$. بنابراین $j = \frac{\pi}{2\omega}$

چنین میشود:

$$\operatorname{Re}(jA) = \operatorname{Re}(jB) \quad \text{یا} \quad \operatorname{Re}(jA_r - A_i) = \operatorname{Re}(jB_r - B_i)$$

بنابراین:

$$(2-9) \quad A_i = B_i$$

بالاخره بمحض تعریف تساوی اعداد مختلط، معادلات (۲-۸) و (۲-۹) بمعنای $A=B$ هستند.

نظیره اساسی مدارها و شبکه‌ها

اکنون حالت معکوس را اثبات می‌کنیم. دراینجا فرض چنین است که $A=B$ ، و باید نشان دهیم:

$$\operatorname{Re}(Ae^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(Be^{j\omega t}) \quad \text{برای تمام مقادیر } t$$

این نتیجه آنی است، چون $A=B$ لازم میدارد که:

$$Ae^{j\omega t} = Be^{j\omega t} \quad \text{برای تمام مقادیر } t$$

و بنابراین:

$$\operatorname{Re}(Ae^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(Be^{j\omega t}) \quad \text{برای تمام مقادیر } t$$

«اثبات قضیه اصلی» برای سهولت حالت خاصی از سه سینوسی را درنظر بگیرید:

$$x(t) \triangleq A_m \cos(\omega t + \Phi_1) = \operatorname{Re}(Ae^{j\omega t})$$

$$y(t) \triangleq B_m \cos(\omega t + \Phi_2) = \operatorname{Re}(Be^{j\omega t})$$

$$z(t) \triangleq C_m \cos(\omega t + \Phi_3) = \operatorname{Re}(Ce^{j\omega t})$$

بنابراین:

$$A \triangleq A_m e^{j\Phi_1} = A_r + jA_i$$

$$B \triangleq B_m e^{j\Phi_2} = B_r + jB_i$$

$$C \triangleq C_m e^{j\Phi_3} = C_r + jC_i$$

که A ، B و C سه تابعی هستند که پر ترتیب سینوسی‌های x ، y و z را نشان میدهند.

می‌خواهیم $(t) + y(t) + \frac{d}{dt} z(t)$ را محاسبه کنیم. این مجموع را $\sum(t)$ مینامیم. دراینجا بروزه:

$$\sum(t) = \operatorname{Re}(Ae^{j\omega t}) + \operatorname{Re}(Be^{j\omega t}) + \frac{d}{dt} \operatorname{Re}(Ce^{j\omega t})$$

از لم ۲ ، جمله سوم را میتوان چنین نوشت :

$$\operatorname{Re}(j\omega C e^{j\omega t})$$

با پکار بردن لم ۱ ، بدست میآید :

$$\sum(t) = \operatorname{Re}[(A + B + j\omega C)e^{j\omega t}]$$

بنابراین $\sum(t)$ یک سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω میباشد. همچنین $\sum(t)$ بشكل

$\operatorname{Re}(Se^{j\omega t})$ است که در آن :

$$S = S_m e^{j\angle S} = S_r + jS_i$$

S فازوری است که سینوسی $\sum(t)$ را نشان میدهد. مطابق لم ۳ ، عدد مختلط S با $S = A + B + j\omega C$ بیان میشود. معادله آخر چنین لازم میدارد : هرگاه جزء‌های حقیقی و انگاری را در نظر بگیریم ، بدست میآید :

$$S_r = A_r + B_r - \omega C_i$$

$$S_i = A_i + B_i + \omega C_r$$

$$S_m = \sqrt{(A_r + B_r - \omega C_i)^2 + (A_i + B_i + \omega C_r)^2}$$

$$\angle S = \tan^{-1} \frac{A_i + B_i + \omega C_r}{A_r + B_r - \omega C_i}$$

که در آن S مطابق قاعده‌ای که قبل از پیش شد در ربع انتخاب شده واقع است. روشی است که میتوان استدلال را برای مجموع هر تعداد سینوسی با فرکانس یکسان و هر تعداد مشتق آنها از هر مرتبه ، تعیین داد.

تمرین ۱ - با استفاده از فرمول‌های استاندارد مثلاً t نشان دهید :

$$A_m \cos \omega t + B_m \sin \omega t = \sqrt{A_m^2 + B_m^2} \cos(\omega t - \Phi)$$

که در آن Φ با $\tan \Phi = \frac{B_m}{A_m}$ تعیین میگردد و ریاضی که در آن قراردادهای باروابط زیر مشخص میگردد :

$$\cos \Phi = \frac{A_m}{\sqrt{A_m^2 + B_m^2}} \quad \sin \Phi = \frac{B_m}{\sqrt{A_m^2 + B_m^2}}$$

تمرین ۲- همین نتایج را با استفاده از فازورها بدست آورید.

۲-۲- کاربرد روش فازوری در معادلات دیفرانسیل

چنانکه در ابتدای این بخش گفته شد، روش فازوری راحت‌ترین روش برای پذست آوردن جواب خاص یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب حقیقی ثابت، وقتی که تابع تحريك سینوسی است، میباشد. معادله زیر را در نظر بگیرید:

(۲-۱۰)

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = A_m \cos(\omega t + \Phi)$$

که در ابتدای این بخش گفته شد، روش فازوری راحت‌ترین روش برای پذست آوردن جواب خاص یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب حقیقی ثابت، وقتی که تابع تحريك سینوسی است، میباشد. با کاربردن فازورها چنین آرامیدهیم:

$$(2-11) \quad A \triangleq A_m e^{j\Phi} \quad \text{و} \quad X \triangleq X_m e^{j\psi}$$

با جایگزین نمودن $\operatorname{Re}(X e^{j\omega t})$ بجای $x(t)$ در معادله دیفرانسیل بدست می‌آوریم:

$$a_0 \frac{d^n}{dt^n} \operatorname{Re}(X e^{j\omega t}) + \cdots + a_n \operatorname{Re}(X e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(A e^{j\omega t})$$

از لم ۱، میتوان نوشت:

$$\frac{d^n}{dt^n} \operatorname{Re}(a_0 X e^{j\omega t}) + \cdots + \operatorname{Re}(a_n X e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(A e^{j\omega t})$$

با کاربرد مکرر لم ۲، بدست می‌آوریم:

$$\operatorname{Re}[a_0(j\omega)^n X e^{j\omega t}] + \cdots + \operatorname{Re}(a_n X e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(A e^{j\omega t})$$

مجدداً با استفاده از لم ۱، داریم:

$$\text{Re}\{[a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n]X e^{j\omega t}\} \\ = \text{Re}(A e^{j\omega t})$$

لهم ۲، معادله جبری برای X را چنین بدست میدهد.

$$(12-2-\alpha) [a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n]X = A$$

با :

$$(12-2-\beta) X = \frac{A}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n}$$

بنابراین اندازه X چنین است:

$$(12-2-\gamma)$$

$$X_m = \frac{A_m}{[\underbrace{(a_n - a_{n-2}\omega^2 + \dots)}_{\text{توانهای زوج}} + \underbrace{(a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + \dots)}_{\text{توانهای فرد}}]^{\frac{1}{2}}}$$

و فاریز چنین خواهد بود:

$$(12-2-\delta) \psi = \Phi - \tan^{-1} \frac{a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + \dots}{a_n - a_{n-2}\omega^2 + \dots}$$

که در آن زاویه نشان داده شده با $\Phi = \tan^{-1}(0)$ مطابق قاعده‌ای که قبل از پیشنهاد شد در ربع انتخاب شده قرار دارد.

تبصره - معادله $(12-2-\alpha)$ را میتوان برای X حل نمود و جوابی را که در

معادله $(12-2-\beta)$ داده شده بدست آورد. با شرط اینکه ω چنان باشد که:

$$a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}j\omega + a_n \neq 0$$

اگر برای ω موردنظر این چند جمله‌ای صفر باشد، ω یک فرکانس طبیعی بوده و در نتیجه یک جواب خاص بصورت $t A \cos(\omega t + \Phi)$ باستی درنظر گرفت (بخش ۲-۲-۳ فرمیم Φ را بینید).

میتوان باسانی مطالب قبل را درمورد یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان با یک ورودی w ویک خروجی y چنانکه توسط معادله دیفرانسیل زیر توصیف میشود تعیین داد.

$$(2-14) \quad \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n y = b_0 \frac{d^m w}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} w}{dt^{m-1}} + \cdots + b_m w$$

که در آن $a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$ اعداد حقیقی هستند. اگر ورودی یک سینوسی بصورت داده شده زیر باشد:

$$(2-15) \quad w(t) = \operatorname{Re}(A e^{j\omega t}) = |A| \cos(\omega t + \Phi) \quad \text{که در آن:}$$

$$(2-16) \quad A \triangleq |A| e^{j\Phi}$$

آنگاه یک جواب خاص معادله (2-14) با بصورت است:

$$(2-17) \quad y(t) = \operatorname{Re}(B e^{j\omega t}) = |B| \cos(\omega t + \psi) \quad \text{که در آن:}$$

$$(2-18) \quad B \triangleq |B| e^{j\psi}$$

ارتباط میان ورودی که بر حسب فازور A بیان شده و قسمتی از خروجی (فقط جواب خاص) که با فازور B نشان داده شده را میتوان از معادله زیر بدست آورد.

$$(2-19) \quad [(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_n]B = [b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \cdots + b_m]A$$

معادله (2-19) با « تعویض مشتق k ام $w(t)$ توسط $(j\omega)^k A$ » برای $k=0$ تا m و « تعویض مشتق k ام $y(t)$ توسط $(j\omega)^k B$ » برای $k=0$ تا n از معادله (2-14) مستقیماً بدست آمده است. بنابراین در اصل، تعیین یک جواب خاص که بصورت معادله (2-19) بیان میشود بسهولت از معادله (2-17) انجام پذیر است. تنها کار لازم،

عملیاتی با اعداد مختلط است تا بتوان جواب را بشکل معادله (۱۶ - ۲) درآورد.

مثال ۳ - مدار RLC سری خطی تغییرناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (۲-۲) را درنظر بگیرید. گیریم ورودی، منع ولتاژ سینوسی زیر باشد:

$$e_s(t) = \operatorname{Re}(E e^{j\omega t}) = |E| \cos(\omega t + \Phi)$$

فرض کنید ولتاژ خروجی را ولتاژ دوسرخازن درنظر بگیریم. دراینصورت معادله دیفرانسیل برای تمام مقادیر t چنین است:

$$(۲-۱۸) \quad LC \frac{dv_C(t)}{dt} + RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = e_s(t)$$

ویک جواب خاص بشکل زیر است:

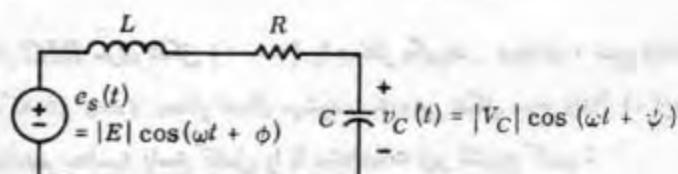
$$(۲-۱۹) \quad v_C(t) = \operatorname{Re}(V_C e^{j\omega t}) = |V_C| \cos(\omega t + \psi)$$

رابطه میان فازور خروجی V_C که بایستی تعیین گردد و فازور ورودی E که معلوم است بشکل زیر میباشد:

$$(۲-۲۰) \quad [LC(j\omega) + RC(j\omega) + 1] V_C = E$$

توجه کنید که معادله (۲-۲۰) با جایگذاری E و $v_C(t)$ ام $e_s(t)$ و مشتق k در معادله (۲-۱۸) بدست میآید. بنابراین:

$$(۲-۲۱) \quad V_C = \frac{E}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}$$



شکل ۲ - ۲ - مدار RLC سری در حالت دائمی سینوسی

و بنابراین اندازه فاز V_C چنین است:

$$|V_C| = \frac{|E|}{[(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\psi = \Phi - \tan^{-1} \frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC}$$

جواب $v_C(t)$ که بصورت یک تابع حقیقی از زمان بیان میشود بسهولت از عادله (۱-۲) بدست میآید.

۳ پاسخ کامل و پاسخ حالت دائمی سینوسی

۳-۱ پاسخ کامل

یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان، با ورودی سینوسی، پاسخ کاملی بشکل زیر دارد:

$$(3-1) \quad y(t) = y_h(t) + y_p(t) \quad \text{برای تمام مقادیر } t$$

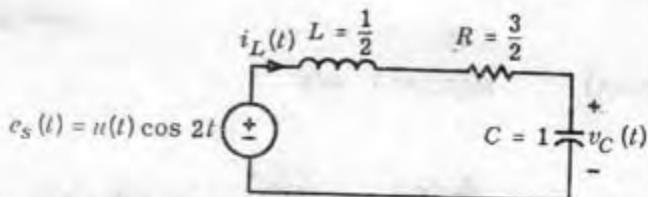
که در آن جواب خاص انتخاب شده (y_p) یک سینوسی است که دارای همان فرکانس ورودی میباشد و (y_h) جواب معادله دیفرانسیل همگن میباشد. با فرض اینکه تمام فرکانس های طبیعی مدار متمایز باشند (یعنی معادله مشخصه ریشه های مکرر نداشته باشد) داریم:

$$(3-2) \quad y_h(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{\lambda_i t}$$

که در آن λ_i ها فرکانس های طبیعی و k_i ها ثابت های دلخواه میباشند که بایستی از شرایط اولیه تعیین شوند. جواب خاص (y_p) از بکار بردن نمایش فازوری یک سینوسی مطابق روشنی که در بخش قبل نشان داده شد بسهولت بدست میآید. این گونه تجزیه پاسخ کامل توسط مثال زیر تشریح میگردد.

مثال ۱- مدار RLC سری شکل (۱-۲) را در نظر بگیرید. ورودی، منبع ولتاژ سینوسی $u(t) = u_0 \cos \omega t$ است که در $t=0$ بمدار اعمال میشود. خروجی شکل موج ولتاژ $v_C(t)$ خازن میباشد. میخواهیم محاسبه پاسخ کامل را با مشخصات زیر تشریح کنیم:

$$e_s(t) = u(t) \cos \omega t$$



شکل ۱-۳-۴- مدار RLC می‌ری که محاسبه پاسخ کامل را تشریح می‌کند. حالت اولیه با $v_C(0_-) = 1$ و $i_L(0_-) = 2$

$$C = 1 \text{ فاراد} \quad R = \frac{3}{2} \text{ اهم} \quad L = \frac{1}{2} \text{ هانزی}$$

$$i_L(0_-) = I_0 = 2 \text{ آمپر} \quad v_C(0_-) = V_0 = 1 \text{ ولت}$$

به تابع پله واحد (\cdot) u که بصورت فاکتوری در رابطه e_s وجود دارد توجه کنید. این فاکتور برای توصیف اینکه ورودی e_s در لحظه $t=0$ بمدار اعمال می‌شود ضروری است، یعنی، برای $t < 0$ ، $e_s(t) = 0$ می‌باشد.

ابتدا طرز نوشتن معادله دیفرانسیل و تعیین شرایط اولیه لازم را مرور می‌کنیم. از

داریم : KVL

$$(2-2) \quad L \frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t) + v_C(t) = e_s(t)$$

چون جریان i_L ، همان جریان درون خازن نیز می‌باشد داریم :

$$(2-3) \quad i_L(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

بنابراین، معادله $(2-3)$ چنین می‌شود :

$$LC \frac{d^2v_C}{dt^2} + RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = e_s(t)$$

و یا، با قراردادن مقادیر عددی،

$$(2-4) \quad \frac{1}{2} \frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{3}{2} \frac{dv_C}{dt} + v_C = u(t) \cos 2t$$

شرایط اولیه چنین است:

$$(3-6) \quad v_C(0_-) = 1 \quad \text{و ات}$$

و :

$$(3-7) \quad \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{i_L(t)}{G} = 2 \quad \text{ولت بر ثانیه}$$

معادلات (۳-۲) و (۳-۶) خروجی v_C را کاملاً توصیف می‌کنند. پاسخ کامل نیز بسهوالت بدست می‌آید. معادله مشخصه بصورت، $1 + \frac{3}{2}s + s^2 - 2 = 0$ میباشد و فرکانس‌های طبیعی $s_1 = -1$ و $s_2 = -2$ خواهد بود. بنابراین جواب معادله همگن بشکل زیر است:

$$(3-7) \quad v_h(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t}$$

راحت‌ترین جواب خاص چنین است:

$$(3-8) \quad v_p(t) = \operatorname{Re}(V e^{j\omega t}) = V \cos(2t + \psi)$$

که در آن V نمایشگر فازور متغیر خروجی بوده و فازور ولتاژ خروجی ناسیده می‌شود. ورودی را نیز بر حسب فازور ولتاژ E چنین نشان میدهیم:

$$e_s(t) = \operatorname{Re}(E e^{j\omega t}) = \cos 2t$$

که $E = e^{j\theta}$ میباشد. فازور ولتاژ V ، مطابق قاعده‌ای که در بخش قبل بیان شد، بسهوالت از معادله (۳-۲) بدست می‌آید [چایکزین کردن مشتق k ام v_C با V] با:

$$\left[\frac{1}{2} (j\omega)^2 + \frac{3}{4} (j\omega) + 1 \right] V = E$$

یا

$$(3-9) \quad V = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\omega^2 + j\frac{3}{4}\omega}$$

با $\omega = 2$

$$V = \frac{1}{-1+j\omega} = 0.316 e^{-j45^\circ}$$

از معادله (۸ - ۳) جواب خاص بدست می‌آید

$$(۹ - ۱۰) \quad v_p(t) = 0.316 \cos(2t - 10.84^\circ)$$

جواب کامل چنین است:

$$v_C(t) = v_h(t) + v_p(t)$$

$$(۹ - ۱۱) \quad = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t} + 0.316 \cos(2t - 10.84^\circ)$$

ثابت‌های k_1 و k_2 از معادلات (۶ - ۲ - a) و (۶ - ۲ - b) بدست می‌آیند. از (۱۱ - ۲ - a) و (۱۱ - ۲ - b) داریم:

$$v_C(0) = 1 = k_1 + k_2 + 0.316 \cos(-10.84^\circ)$$

با

$$k_1 + k_2 = 1$$

از معادلات (۶ - ۲ - b) و (۱۱ - ۲ - b) داریم

$$\frac{dv_C}{dt}(0) = 2 = -k_1 - 2k_2 + 0.316 \times 2 \sin(-10.84^\circ)$$

با

$$k_1 + 2k_2 = -1$$

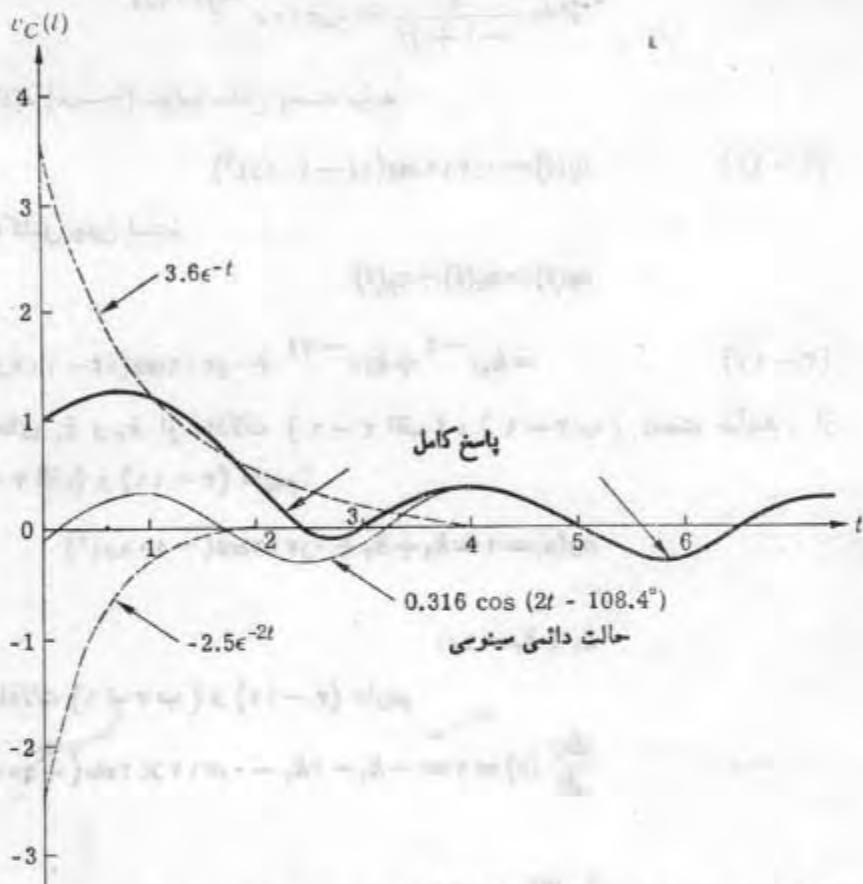
بنابراین:

$$k_1 = 2 \quad \text{و} \quad k_2 = -2$$

جواب کامل چنین است:

$$(۹ - ۱۲) \quad v_C(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t} + 0.316 \cos(2t - 10.84^\circ)$$

نمایش (t) در شکل (۲ - ۲) داده شده است. توجه کنید که پاسخ کامل را می‌توان بدو مولفه بجزای حالت گذرا و حالت دائمی تقسیم نمود. حالت گذرا همانند v_p از معادله (۲ - ۷) است و حالت دائمی همانند v_h از معادله (۱۰ - ۲) می‌باشد. همچنین توجه شود که برای $t > ۰$ پاسخ کامل اساساً، پاسخ حالت دائمی سینوسی می‌باشد.



شکل ۳-۷-پاسخ کامل ($v_C(t)$) (نشان داده شده توسط خط کلفت) برابر مجموع حالت دائی میتوسی (خط نازک) و جملات حالت گذرا (خطوط نقطه چین) میباشد

تبصر ۵- در بعضی مدارهای ساده میتوان حالت اولیه را چنان انتخاب نمود که پاسخ حالت دائی میتوسی بلافاصله پس از اعمال ورودی حاصل شود. عبارت دیگر، جمله حالت گذرا متعدد با صفر باشد. روش انتخاب حالت اولیه برای این مقصود بربایه دو واقعیت قراردادار (بخش های ۲ و ۴؛ فصل دوم را ببینید) : (۱) برای جریان کراندار، ولتاژ دو سر یک خازن نمیتواند بطور لحظه‌ای تغییر کند و (۲) برای ولتاژ کراندار جریان داخل یک سلف نمیتواند بطور لحظه‌ای تغییر کند.

تمرین ۱ - گریم در شکل (۱-۲) اندوکتانس L برای صفر باشد و بنابراین یک مدار RC سری بسته می‌آید. ولتاژ اولیه $v_{C(0)} = 0$ دوسرخازن را چنان انتخاب کنید که پس از اعمال ورودی i هیچ حالت گذراشی موجود نباشد.

تمرین ۲ - مدار شکل (۱-۳) را با $\frac{1}{L} = \frac{1}{i}$ هاری، مانند مثال ۱ درنظر بگیرید. آیا ممکن است حالت اولیه $v_{L(0)} = 0$ را چنان انتخاب نمود که پس از اعمال ورودی i هیچ حالت گذراشی موجود نباشد؟ اگرچنان است، حالت اولیه را تعیین کنید.

۴- پاسخ حالت دائمی سینوسی
مدار خطی تغییر ناپذیر با زمان دلخواه را که با یک متیع سینوسی تنها تحریک می‌شود در نظر می‌گیریم. فرض کنید یکی از متغیرهای خاص شبکه مثلاً i مورد توجه ما می‌باشد. پاسخ i به ورودی سینوسی و حالت اولیه مشخص شده بشکل زیر است:

$$(۴-۱۲) \quad i(t) = k_1 e^{\delta_1 t} + k_2 e^{\delta_2 t} + \dots + k_n e^{\delta_n t} + A_m \cos(\omega t + \psi)$$

که در آن، بمنظور سهولت فرض کردہ ایم که فرکانس‌های طبیعی ساده می‌باشند، و k_1, \dots, k_n ثابت‌هایی هستند که به حالت اولیه بستگی دارند و دامنه A_m و زاویه ψ جواب خاص، بسادگی از روش فازوری بسته می‌باشد.

مشاهده نکته زیر بسیار حائز اهمیت است. فرض کنید که تمام فرکانس‌های طبیعی در نیم صفحه باز چپ + فرکانس‌های مختلط قراردارند در اینصورت وقتی $t \rightarrow \infty$ در معادله (۴-۱۲) جملات $k_1 e^{\delta_1 t}, k_2 e^{\delta_2 t}, \dots, k_n e^{\delta_n t}$ بسته صفر می‌باشند. بعبارت دیگر، وقتی $t \rightarrow \infty$ ، $i(t)$ بر طور دلخواه به سینوسی $A_m \cos(\omega t + \psi)$ نزدیک می‌شود. این امر ما را مجاز میدارد که حقیقت بسیار مهم زیر را بیان کنیم:

+ نیم صفحه «باز» چپ، شامل نیم صفحه چپ مختصات مختلط می‌باشد که محور انگاری از آن «حذف شده» است. بعبارت دیگر، نیم صفحه باز چپ، شامل تمام نقاطی است که جزء حقیقی آنها منفی می‌باشد.

« صرف نظر از حالت اولیه و مشروط براینکه تمام فرکانس‌های طبیعی در نیم‌صفحه بازچپ واقع باشند، وقتی $\infty \rightarrow \pm$ ، پاسخ سینوسی خواهد شد. این پاسخ سینوسی را پاسخ حالت دائمی سینوسی می‌نامند. پاسخ حالت دائمی سینوسی را میتوان به‌هولت از روش فازوری محاسبه نمود ».

چنانکه در مثال ۱ دیده‌ایم، حالت دائمی سینوسی با فازور V در معادله $(\alpha - \beta)$ توصیف می‌گردد و پاسخ حالت دائمی سینوسی توسط جواب خاص پلست آمده از روش فازوری، یعنی، $V = Re(V e^{\pm j\omega t})$ داده می‌شود.

بررسی ملاحظات فوق، میتوان مانند فصل پنجم، بیان زیر را پذیرفت. وقتی تمام فرکانس‌های طبیعی یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان در « نیم‌صفحه بازچپ » باشند، گوئیم مدار پایدار مجانبی ^(۱) است. اگر یک یا چند فرکانس طبیعی آن در « نیم‌صفحه باز راست » واقع باشند گوئیم که مدار فاپایدار ^(۲) است. بنابراین وقتی $\infty \rightarrow \pm$ ، هر پاسخ ورودی صفریک مدار پایدار مجانبی بسته صفر می‌شود. برای مدارهای ناپایدار فقط میتوان بیان نمود که وقتی $\infty \rightarrow \pm$ ، برای بسیاری از حالت‌های اولیه، پاسخ ورودی صفر بسته بینهایت می‌شود.

بنابراین، نتیجه مهم اینست که برای مدارهای « پایدار مجانبی » که توسط یک ورودی سینوسی تنها تحریک می‌شوند، حالت اولیه هرچه باشد وقتی $\infty \rightarrow \pm$ ، هر تغییر مدار بسته حالت دائمی سینوسی مستقر می‌شود. این حقیقت را با این جمله بیان می‌کنیم « مدارهای پایدار مجانبی دارای پاسخ حالت دائمی سینوسی می‌باشند ».

تبصره ۵ - هرگاه مدار علاوه بر فرکانس‌های طبیعی واقع در نیم‌صفحه بازچپ، دارای فرکانس‌هایی از نوع انگاری خالص هم باشد، بازگاهی اوقات میتوان پاسخ حالت دائمی را تعریف نمود. برای درک این تبصره لازم است حل معادلات دیفرانسیل را که ریشه‌های مشخصه انگاری خالص ویا ریشه‌های سکردادرنده مرور نمود. برای تشریح این دو حالت متفاوت دو مثال زیر را بررسی می‌کنیم :

مثال ۲ - گیریم چند جمله‌ای مشخصه یک معادله دیفرانسیل بصورت زیر باشد.

$$(s^2 + \omega_0^2)^2 = s^2 + 2\omega_0 s + \omega_0^4$$

روشهای مشخصه $s_1 = s_2 = -j\omega_0$ و $s_3 = s_4 = j\omega_0$ میباشند. جواب معادله دیفرانسیل همگن چنین است:

$$y_h(t) = (k_1 + k_2 t)e^{j\omega_0 t} + (k_3 + k_4 t)e^{-j\omega_0 t}$$

که میتوان برحسب کسینوس بصورت زیر نیز نوشت:

$$y_h(t) = K_1 \cos(\omega_0 t + \Phi_1) + K_2 t \cos(\omega_0 t + \Phi_2)$$

که در آن، K_1 ، K_2 ، Φ_1 و Φ_2 ثابت‌های حقیقی میباشند. واضح است که وقتی t زیاد میشود، $y_h(t)$ مقدار پر دخواه بزرگی بخود میگیرد که نشان میدهد مدار تاپیدار است. برای مقدار بزرگ t ، درجواب کامل $y = y_h + y_p$ در مقابل y قابل صرفنظر میباشد. از این‌مثال نتیجه میگیریم که هرگاه مداری دارای فرکانس‌های طبیعی سکر باشد که روی محور افقی قرار گیرند، این مدار تاپیدار بوده و دارای پاسخ حالت دائمی سینوسی نیست.

مثال ۳- گیریم چند جمله‌ای مشخصه یک معادله دیفرانسیل بصورت $s^2 + \omega_0^2$ باشد، و روش‌های مشخصه $s_1 = s_2 = -j\omega_0$ میباشند. فرض کنید تابع تحریک یک سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ψ باشد که $\omega_0 \neq \psi$ است. آنگاه جواب کامل بصورت زیر است:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

که در آن:

$$y_h(t) = k_1 e^{j\omega_0 t} + k_2 e^{-j\omega_0 t} = K \cos(\omega_0 t + \Phi)$$

که K و Φ ثابت‌های حقیقی میباشند و جواب خاص که از روش فازوری بدست میآید به صورت زیر است:

$$y_p(t) = B \cos(\omega t + \psi)$$

B و ψ ثابت‌های حقیقی میباشند. توجه کنید که y نوسانی بوده و بنابراین نمیتواند

نظريه اساسی مدارها و شبکه‌ها

بعتوان قسمت گذراي پاسخ کامل درنظر گرفته شود. اما با این حال، هر یک سینوسی با همان فرکانس ورودی بوده و بنابراین میتواند بعتوان پاسخ حالت دائمی سینوسی تعریف شود، اگرچه پاسخ کامل شامل سینوسی دیگری با فرکانس متفاوت میباشد. این نوع پاسخ حالت دائمی سینوسی را میتوان با یک گیرنده تطبیق شده^(۱) مناسب آشکار نمود.

از طرف دیگر، هرگاه فرکانس زاویه‌ای ω ورودی بر $0.0001t + 0$ منطبق گردد، پاسخ کامل دارای جمله $A\cos(\omega t + \phi)$ خواهد بود که با زیاد شدن ω بهطور دلخواه زیاد میشود، و بنابراین پاسخ حالت دائمی وجود نخواهد داشت. از این مثال نتیجه میکریم که اگر مدار دارای یک فرکانس طبیعی انگاری مثلاً در 100Hz باشد که ریشه ماده معادله مشخصه است و اگر فرکانس زاویه‌ای ω ورودی سینوسی، مساوی 100Hz نباشد، آنگاه پاسخ حالت دائمی سینوسی بخوبی معین است.

بطور خلاصه، «یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان که تمام فرکانس‌های طبیعی آن در داخل نیم صفحه باز چپ صفحه فرکانس مختلط واقع باشد، وقتی که توسط یک ورودی سینوسی تحریک شود، دارای پاسخ حالت دائمی سینوسی خواهد بود. بعلاوه اگر مدار دارای فرکانس‌های طبیعی انگاری ساده‌ای باشد که با فرکانس زاویه‌ای سینوسی ورودی متفاوت باشند، پاسخ حالت دائمی بازهم وجود خواهد داشت».

«پاسخ حالت دائمی سینوسی همیشه همان فرکانس ورودی را داشته و میتواند به مناسب‌ترین وجهی از روش فازیابی بدست آید».

تصریح ۵- برای مدارهای خطی «تغییرناپذیر با زمان» و یا مدارهای «غیرخطی» پاسخ حالت دائمی یک ورودی سینوسی (اگر وجود داشته باشد) معمولاً سینوسی نخواهد بود. این پاسخ معکن است شامل چندین سینوسی باشد، حتی سینوسی‌هایی که فرکانس‌های آنها جزئی از فرکانس ورودی باشند (برای مثال، مسائل ۲، ۴ و ۶ این فصل را ببینید).

۳-۳ جمع آثار در حالت دائمی

حالی را در نظر بگیرید که در آن یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان که تمام فرکانس‌های طبیعی آن در نیم صفحه باز چپ قرار داردند توسط دو سینیج با فرکانس‌های «مختلف» تحریک

شود. بعنوان مثال، میتوان سوردی را در نظر گرفت که یک تقویت کننده صوتی^(۱) تک نت حاصل از یک فلوت را تقویت میکند. سینوسی‌ها، نت اصلی و هارمونیک‌های فلوت میباشند.

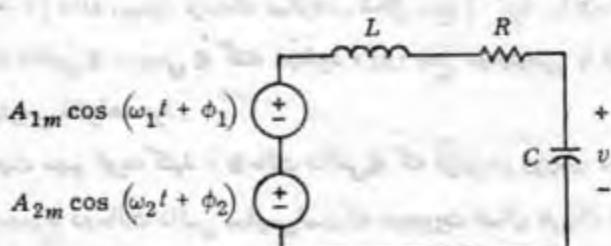
برای سهولت در انجام تجزیه و تحلیل، مدار RLC سری شکل (۲-۲) را در نظر میگیریم. معادله دیفرانسیل این مدار چنین است:

(۲-۱۴)

$$LC \frac{d^2v}{dt^2} + RC \frac{dv}{dt} + v = A_{1m} \cos(\omega_1 t + \Phi_1) + A_{2m} \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$$

که ولتاژ‌های ورودی بترتیب دارای دامنه‌های A_{1m} و A_{2m} ، فرکانس‌های ω_1 و ω_2 و فازهای Φ_1 و Φ_2 میباشند. جواب این معادله بصورت $v_p + v_h$ میباشد که v_h جواب معادله همگن است. برای بدست آوردن یک جواب خاص راحت v_p ، مشاهده میشود که اگر v جواب خاص محاسبه شده با روش فازوری، وقتی که سینوسی $A_{1m} \cos(\omega_1 t + \Phi_1)$ بتهابی مدار را تحریک میکند باشد، و اگر v_{p2} جواب متناظر برای وقتی که سینوسی $A_{2m} \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$ بتهابی مدار را تحریک میکند باشد، آنگاه $v_p = v_{p1} + v_{p2}$ است. در حقیقت طبق تعریف v_p ، داریم:

$$LC \frac{d^2v_{p1}}{dt^2} + RC \frac{dv_{p1}}{dt} + v_{p1} = A_{1m} \cos(\omega_1 t + \Phi_1)$$

و برطبق تعریف v_{p2} داریم:شکل ۲-۲-۳- مدار RLC سری که با دو منبع ولتاژ سینوسی تحریک میشود

$$LC \frac{d^{\tau} v_{p\tau}}{dt^{\tau}} + RC \frac{dv_{p\tau}}{dt} + v_{p\tau} = A_{\tau m} \cos(\omega_{\tau} t + \Phi_{\tau})$$

و با جمع کردن این دو معادله خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} LC \frac{d^{\tau}}{dt^{\tau}} (v_{p1} + v_{p\tau}) + RC \frac{d}{dt} (v_{p1} + v_{p\tau}) + (v_{p1} + v_{p\tau}) \\ = A_{1m} \cos(\omega_1 t + \Phi_1) + A_{\tau m} \cos(\omega_{\tau} t + \Phi_{\tau}) \end{aligned}$$

که از آن نتیجه میگیریم $v_{p1} + v_{p\tau}$ جواب خاص معادله (۱ - ۲) میباشد. با بکار بردن نتایج تجزیه و تحلیل فازوری میبینیم که :

$$(۱ - ۱۵) \quad v_p(t) = V_{1m} \cos(\omega_1 t + \Phi_1 + \theta_1) + V_{\tau m} \cos(\omega_{\tau} t + \Phi_{\tau} + \theta_{\tau})$$

که در آن :

$$V_{1m} e^{j(\theta_1 + \Phi_1)} \triangleq \frac{A_{1m} e^{j\Phi_1}}{1 - \omega_1^2 LC + j\omega_1 RC}$$

$$V_{\tau m} e^{j(\theta_{\tau} + \Phi_{\tau})} \triangleq \frac{A_{\tau m} e^{j\Phi_{\tau}}}{1 - \omega_{\tau}^2 LC + j\omega_{\tau} RC}$$

توجه کنید که در مخرج های این دو عبارت پتریپ فرکانس های ω_1 و ω_{τ} را بکار بردهیم. ما باستی فرکانس ورودی، سینوسی مناسب را بکار بریم. مشاهده این نکته بسیار مهم است که شرایط اولیه هرچه باشند وقتی $\infty \rightarrow 0$ ، ولتاژ v بطور دلخواه به مقدار v_0 که با معادله (۱ - ۳) داده میشود نزدیک میگردد. شکل سوچ (۱ - ۷) را «حالات دائمی» می نامند و حالات دائمی «سینوسی» گفته نمیشود، زیرا جمع دو سینوسی با فرکانس های مختلف دیگر سینوسی نخواهد بود.

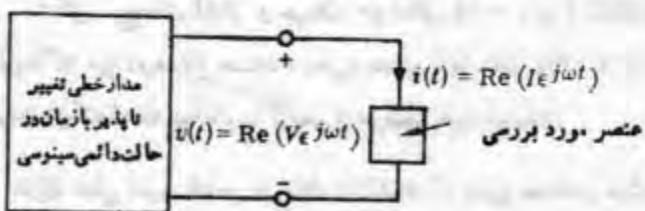
با این واقعیت مهم توجه کنید، «حالات دائمی» که از این دو ورودی سینوسی نتیجه میشود مساوی مجموع دو حالت دائمی سینوسی است که در صورت اعمال هر یک از دو سینوسی ورودی بطور جداگانه روی مدار بذست میباشد. اگرچه این نتیجه فقط برای مدار RLC شکل (۱ - ۳) اثبات گردید، ولی مشاهده اینکه این روش استدلال میتواند بهر مدار خطی تغییرناپذیر با زمان اعمال شود کار مشکلی نیست.

۴- مفهوم‌های امپدانس و ادمیتانس

در دو بخش گنسته نشان دادیم که پاسخ حالت دائمی سینوسی را میتوان به هولت با استفاده از تماش فازوری یک سینوسی بدست آورد. همچنین آموختیم که در تعیین پاسخ حالت دائمی سینوسی، بجای حل یک معادله دیفرانسیل، تنها لازم است که یک معادله جبری را حل کنیم. بجای جمع، تفریق یا مشتق گیری سینوسی‌ها، میتوان اعداد مختلط نمایش دهنده آنها را جمع و یا تفریق نمود. در این بخش خواص دیگری از تماش فازوری سینوسی‌ها را بررسی کرده و مفهوم‌های مهم «امپدانس»^(۱) و «ادمیتانس»^(۲) را بنیان گذاری خواهیم کرد. همچنین خواهیم دید که وقتی تنها پاسخ حالت دائمی سینوسی یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان را میخواهیم پدآئیم، میتوان از نوشتن معادلات دیفرانسیل صرف نظر نمود و بجای آن معادلات جبری خطی لازم را مستقیماً از یک شبکه بر حسب فازورهایی که نمایشگر ورودی، خروجی و سایر متغیرهای شبکه میباشد بدست آورد.

۱- ۴- روابط فازوری برای اجزاء مدار

توصیف ولتاژ - جریان اجزاء مدارهای ساده در فصل دوم بتفصیل مطالعه شد. برای اجزاء خطی «تغییرناپذیر با زمان» مدار، اگر تنها توجه ما روی پاسخ حالت دائمی سینوسی باشد، میتوان با استفاده از تماش فازوری ولتاژ و جریان، آنرا توصیف نمود. در این زیربخش توصیف سه جزء اصلی مدار یعنی مقاومت‌ها، خازن‌ها و سلف‌ها را بدست خواهیم آورد. در هر حالت فرض میکنیم که جزء مورد بررسی به یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان، چنانکه در شکل (۱-۴) نشان داده شده است متصل باشد و مدار در حالت دائمی سینوسی



شکل ۱-۴ - یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان در حالت دائمی سینوسی
جزء مورد بررسی را تحریک که میکند

با فرکانس زاویه‌ای ω قرار گرفته باشد. گیریم ولتاژ شاخه و جریان شاخه جزء مورد نظر در حالت دائمی سیستمی چنین باشد:

$$(4-1) \quad v(t) = \operatorname{Re}(V e^{j\omega t}) = |V| \cos(\omega t + \phi_V)$$

و:

$$(4-2) \quad i(t) = \operatorname{Re}(I e^{j\omega t}) = |I| \cos(\omega t + \phi_I)$$

بیخواهیم رابطه میان فازور ولتاژ V و فازور جریان I را برای هریک از سه جزء بدست آوریم:

«متاوومت» یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان، با مقاومت R و بارسانایی $G = \frac{1}{R}$

چنین مشخص می‌شود:

$$(4-3) \quad v(t) = R i(t) \quad i(t) = G v(t)$$

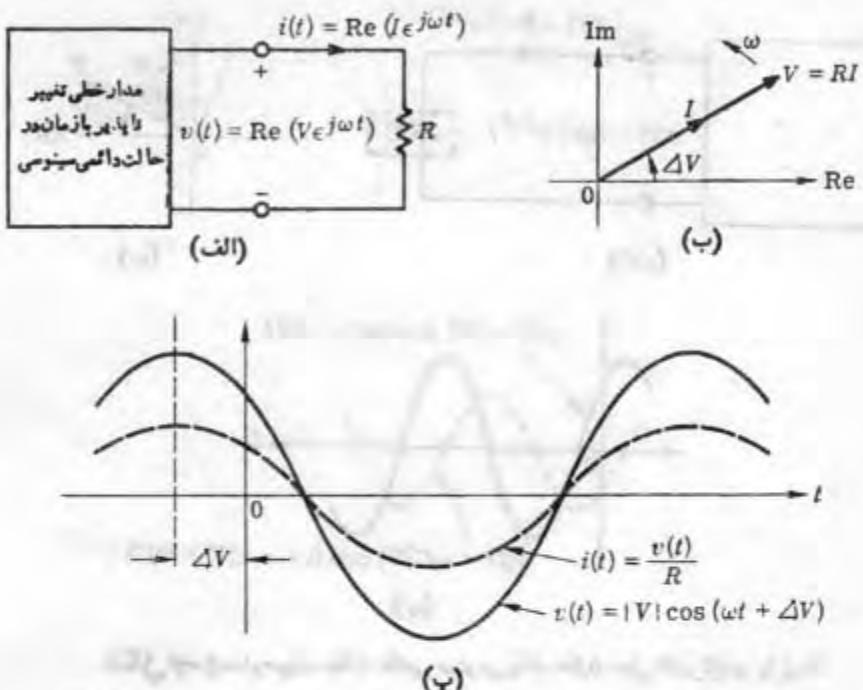
برای بدست آوردن رابطه میان فازور ولتاژ و فازور جریان، معادلات (4-1) و (4-2) را در معادله (4-3) جایگزین می‌کنیم و با استفاده از لام ۳ بخش ۲ بدست می‌آوریم:

$$(4-4) \quad V = RI \quad I = GV$$

اگرچه مقاومت و رسانایی یک مقاومت همیشه اعداد حقیقی هستند، ولی فازور ولتاژ V و فازور جریان I معمولاً اعداد مختلط می‌باشند. رسم فازور ولتاژ و فازور جریان در صفحه مختلط مطابق شکل نشان داده شده در (4-4 ب) آموخته است. چون R یک عدد حقیقی است اعداد مختلط V و I هم امتداد (4-4 ب) بوده و باستی دارای یک زاویه باشند، یعنی $V = I \angle \phi$. شکل سوچهای ولتاژ و جریان در شکل (4-4 ب) نشان داده شده‌اند. اصطلاحاً گویند که این دو هم‌فاز هستند، یعنی، منحنی آنها محور زمان را در یک لحظه قطع کرده و هردو در یک لحظه بقدار ماگزین و می‌نیم خود می‌برند.

«خازن» یک خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان با ظرفیت C چنین مشخص می‌شود:

$$(4-5) \quad i = C \frac{dv}{dt}$$

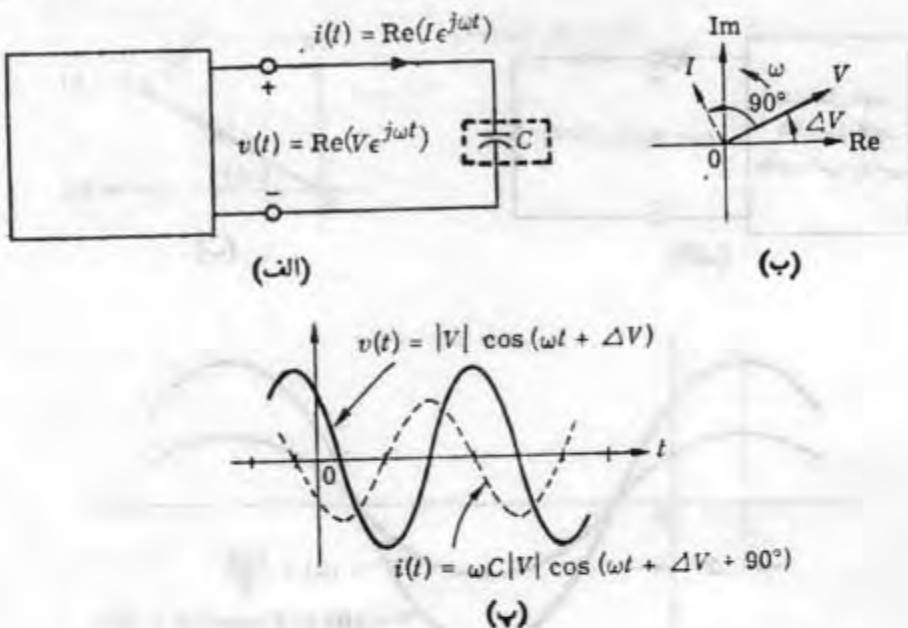


شکل ۲-۴- توصیف حالت دائمی سینوسی یک مقاومت خطی تغیرنایپایدار با زمان

با استفاده از نمایش فازوری i و v در معادلات (۱-۴) و (۲-۴) وجا گذربند کردن آنها در (۰-۴)، بدست می‌آوریم:

$$(4-1) \quad I = j\omega CV \quad \text{یا} \quad V = \frac{1}{j\omega C} I$$

در نتیجه آوردن (۶-۴)، از لم ۲ بخش ۲ (یعنی اعمال $\frac{d}{dt}$ به $V e^{j\omega t}$)، معادل ضرب $V e^{j\omega t}$ در $j\omega C$ می‌باشد) استفاده شده است. بعلت وجود ضریب $j\omega$ در معادله (۶-۴)، فازور جریان I و فازور ولتاژ V وقتی در صفحه مختلط رسم شوند مطابق شکل (۲-۴-ب) دارای 90° اختلاف فاز خواهند بود. فازور جریان از فازور ولتاژ «جلو»^(۱) می‌افتد زیرا $I = j\omega CV$ و $I = \angle V + 90^\circ$ است. در شکل (۲-۴-ب)، شکل موج‌های ولتاژ و جریان رسم شده‌اند و شکل موج جریان بمیزان یک چهارم «یکل بر فازور ولتاژ پیشی دارد.



شکل ۳-۴- توصیف حالت دائمی سینوسی یک خازن خطی تغیرناپذیر با زمان

با استی خاطرنشان کرد که برخلاف مورد مقاومت، رابطه میان فازور جریان و فازور ولتاژ در اینجا به دو کانتس زاویه‌ای ΔV بستگی دارد.

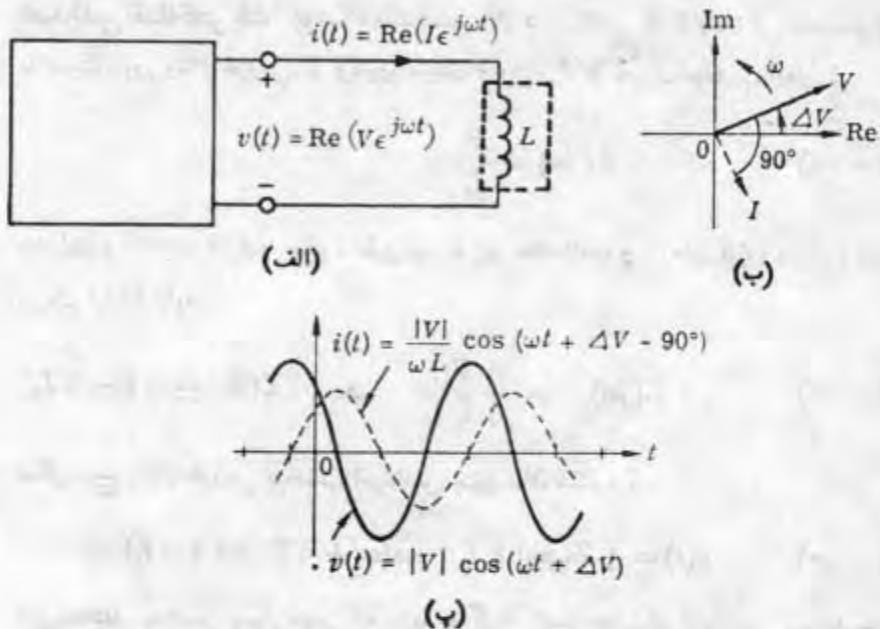
«ملف» یک سلف خطی تغیرناپذیر با زمان با اندوکتانس L چنین مشخص می‌شود:

$$(t - v) \quad v = L \frac{di}{dt}$$

مثل مورد خازن، روابط زیر را میان فازور ولتاژ و فازور جریان بدست می‌آوریم (برای یک سلف).

$$(4-8) \quad V = j\omega LI \quad I = \frac{1}{j\omega L} V$$

در این مورد، فازور جریان از فازور ولتاژ بمقدار 90° «عقب»^(۱) می‌افتد، که معنی آن اینست که شکل موج جریان ب Mizan یک چهارم سیکل از شکل موج ولتاژ عقب‌تر است. این فازورها



شکل ۴-۴- توصیف حالت دائمی سینوسی برای یک ملف خطی تغیرناپذیر با زمان

در شکل (۴-۴ ب و پ) تشریح شده‌اند. در اینجا نیز مثل سورد خازن، رابطه میان فازورهای جریان و ولتاژ به فرکانس بستگی دارد.

۲-۴- تعریف امپدانس و ادمیتانس

بحث روابط فازوری برای اجزاء مدار را میتوان برای شبکه‌های یک قطبی کلی با اجزاء خطی تغیرناپذیر با زمان، تعیین داد. مدار شکل (۴-۴ الف) را در نظر بگیرید که در آن شبکه یک قطبی N از هم پوستن دلخواه اجزاء خطی تغیرناپذیر با زمان تشکیل شده است. ورودی یک منبع جریان سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω میباشد. بنابراین:

$$(4-9) \quad i_s(t) = \operatorname{Re}(I_s e^{j\omega t}) = |I_s| \cos(\omega t + \angle I_s)$$

گیریم پاسخ ولتاژ حالت دائمی سینوسی بصورت زیر باشد.

$$(4-10) \quad v(t) = \operatorname{Re}(V e^{j\omega t}) = |V| \cos(\omega t + \angle V)$$

نظریه اساسی مدارها و شبکهای

امپدانس نقطه تحریک^(۱) «شبکه یک قطبی N در فرکانس ω یا بسادگی امپدانس را، با نسبت فازور ولتاژ خروجی V بر فازور جریان ورودی I_s » تعریف میکنیم، یعنی:

$$(4-11) \quad Z(j\omega) \triangleq \frac{V}{I_s}$$

بنابراین، اندازه و فاز امپدانس، طبق روابط زیر به اندازه ها و فازهای فازور ولتاژ و فازور جریان ارتباط دارد.

$$(4-12) \quad |Z(j\omega)| = \frac{|V|}{|I_s|} \quad \text{و} \quad \angle Z(j\omega) = \angle V - \angle I_s$$

شکل موج ولتاژ خروجی بر حسب امپدانس چنین بیان میشود:

$$(4-13) \quad v(t) = |Z(j\omega)| I_s \cos(\omega t + \angle Z(j\omega) + \angle I_s)$$

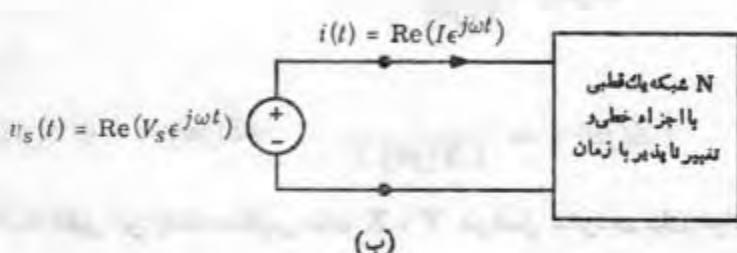
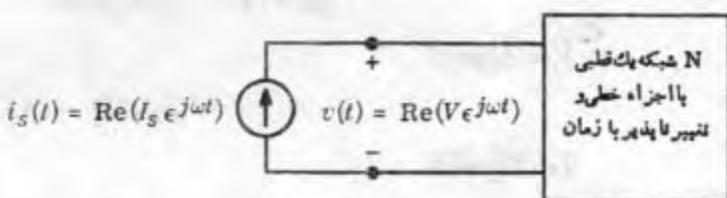
این معادله به نتایج بسیار مهمی که پایه هرگونه تعبیر محاسبات امپدانس میباشد منجر میگردد. بنابراین:

«اگر شبکه یک قطبی N دارای امپدانس نقطه تحریک $Z(j\omega)$ بوده و جریان ورودی آن $I_s \cos(\omega t + \angle I_s)$ باشد، آنگاه در حالت دائمی سینوسی، ولتاژ قطب آن یک سینوسی با اندازه $|Z(j\omega)| I_s$ و فاز $\angle Z(j\omega) + \angle V = \angle Z(j\omega) + \angle I_s$ خواهد بود». بعارت دیگر، برای بدست آوردن دامنه ولتاژ سینوسی، دامنه جریان را در اندازه امپدانس (محاسبه شده در فرکانس مناسب) «ضرب» میکنیم و برای بدست آوردن فاز ولتاژ سینوسی، فاز $Z(j\omega)$ امپدانس را به فاز جریان «میافزاییم» (با ذهن محاسبه شده در فرکانس مناسب). در شکل (۴-۴) ورودی یک منبع ولتاژ سینوسی است:

$$(4-14) \quad v_s(t) = \operatorname{Re}(V_s e^{j\omega t}) = |V_s| \cos(\omega t + \angle V_s)$$

و جریان نه پاسخ حالت دائمی سینوسی است که چنین بیان میشود:

$$(4-15) \quad i(t) = \operatorname{Re}(I e^{j\omega t}) = |I| \cos(\omega t + \angle I)$$



شکل ۵-۴ - شبکه یک قطبی N که از اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده،
 (الف) به یک منبع جریان سینوسی، (ب) به یک منبع ولتاژ سینوسی وصل شده است.

ادمیتانس نقطه تحریک شبکه «یک قطبی N در فرکانس ω » (با بسادگی ادمیتانس) را با نسبت «فازور جریان خروجی I بر فازور ولتاژ ورودی V » تعریف میکنیم یعنی:

$$(t-16) \quad Y(j\omega) \triangleq \frac{I}{V_s}$$

بنابراین، اندازه فاز ادمیتانس $Y(j\omega)$ طبق روابط زیر به اندازه ها و فازهای فازور ولتاژ و فازور جریان ارتباط دارد.

$$(t-17) \quad |Y(j\omega)| = \frac{|I|}{|V_s|}, \quad \angle Y(j\omega) = \angle I - \angle V_s$$

تبصره - اگر منبع ولتاژ شکل (ه - ب) طوری تنظیم شود که فازور V آن مساوی فازور ولتاژ خروجی V در شکل (ه - الف) باشد. میتوان انتظار داشت که فازور پاسخ جریان I در شکل (ه - ب) مساوی فازور منبع جریان I در شکل (ه - الف) گردد.

بنابراین از $(t - 1)$ داریم:

$$(t - 18) \quad V = Z(j\omega)I$$

از $(t - 4)$ داریم:

$$(t - 19) \quad I = Y(j\omega)V$$

از معادلات $(t - 18)$ و $(t - 19)$ واضح است که برای تمام مقادیر ω :

$$(t - 20) \quad Z(j\omega) = \frac{1}{Y(j\omega)}$$

و:

$$(t - 21) \quad |Z(j\omega)| = \frac{1}{|Y(j\omega)|} \quad \angle Z(j\omega) = -\angle Y(j\omega)$$

اثبات دقیق این رابطه معکوس میان Z و Y در فصل شانزدهم بیان خواهد شد.

تمرین= قاعده‌ای را که اندازه و فاز جریان را بر حسب اندازه و فاز ولتاژ و $Y(j\omega)$ بدست میدهد دریک عبارت جمله‌ای بیان کنید.

از تعاریف گفته شده در سوره اپیدانس و ادمیتانس، پسرعت سیتوان اپیدانس‌ها و ادمیتانس‌های اجزاء R و L و C را بدست آورد:

فرکانس زاویه‌ای ω	$(\text{اپیدانس}) Z$	$(\text{ادمیتانس}) Y$
مقاومت پامقاومت R	R	$G = \frac{1}{R}$
خازن با ظرفیت C	$\frac{1}{j\omega C}$	$j\omega C$
سلف با اندرکانس L	$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega L}$

۵- تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی مدارهای ساده

قوانین کمیرشیف بیان میدارند که در هر لحظه از زمان، جمع جبری ولتاژ‌های شاخه‌های میهنی و یا جمع جبری جریانهای شاخه‌های معینی صفر می‌باشند. اگر تنها حالت دائمی سینوسی موردن توجه بوده و اگر تنها لازم باشد که با شکل موجه‌ای سینوسی با فرکانس یکسان

مواجه شویم ، میتوان پجای اینکه معادلات را برحسب خود سینوسی‌ها بنویسیم ، آنها را برحسب فازورها بیان کنیم . بنابراین « درحالت دائمی سینوسی ، معادلات کیرشفر را میتوان مستقیماً برحسب فازورهای ولتاژ و فازورهای جریان نوشت ». بعنوان مثال گیریم معادله یک مش چنین نوشته شود :

$$v_1(t) + v_\tau(t) + v_r(t) = 0$$

وفرض کنید که هریک از ولتاژها یک سینوسی با فرکانس « یکسان » و باشد . در اینصورت داریم :

$$\begin{aligned} V_{1m}\cos(\omega t + \Phi_1) + V_{\tau m}\cos(\omega t + \Phi_\tau) + V_{rm}\cos(\omega t + \Phi_r) \\ = \operatorname{Re}(V_1 e^{j\omega t}) + \operatorname{Re}(V_\tau e^{j\omega t}) + \operatorname{Re}(V_r e^{j\omega t}) \\ = \operatorname{Re}[(V_1 + V_\tau + V_r)e^{j\omega t}] = 0 \end{aligned}$$

از لم ۲ بخش ۲ میتوان بلا فاصله یک معادله هم ارز برحسب فازورهای ولتاژهای V_1 ، V_τ و V_r نوشت . بنابراین :

$$V_1 + V_\tau + V_r = 0$$

البته ، با دانستن فازور و فرکانس و همیشه میتوان توابع سینوسی زمانی را بدست آورد . بعنوان مثال ، اگر فازور ولتاژ در فرکانس زاویه و توسط V داده شده باشد ، تابع سینوسی بسادگی چنین خواهد بود ،

$$v(t) = \operatorname{Re}(V e^{j\omega t}) = V_m \cos(\omega t + \Phi)$$

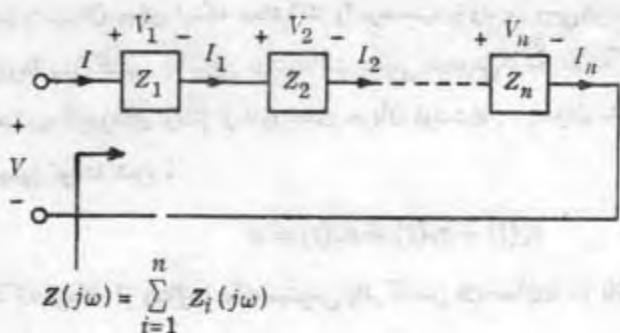
که در آن :

$$V \triangleq V_m e^{j\Phi}$$

بطریق مشابه ، میتوان معادلات گره را برحسب فازورهای جریان نوشت .

۱ - ۵ - بهم پیوستنای سری - موازی

درابتدا ، اتصالات سری و اتصالات موازی را درنظر میگیریم . در شکل (۱ - ۰) اجزاء مدار که بطور سری بهم وصل شده‌اند دیده میشود . درحالت دائمی سینوسی در فرکانس



شکل ۱-۵ - امپدانس‌های سری

داده شده (۱)، هر جزء با یک امپدانس مشخص می‌شود. با نوشتن یک KCL در هر گره بلا فاصله مشاهده می‌کنیم که جریانها برای تمام اجزاء یکسان هستند. بر حسب فازورها داریم:

$$I_1 = I_2 = \dots = I_n = I$$

با استفاده از KVL و با نمایش فازوری ولتاژها، داریم:

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

چون:

$$V_i = Z_i I_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

داریم:

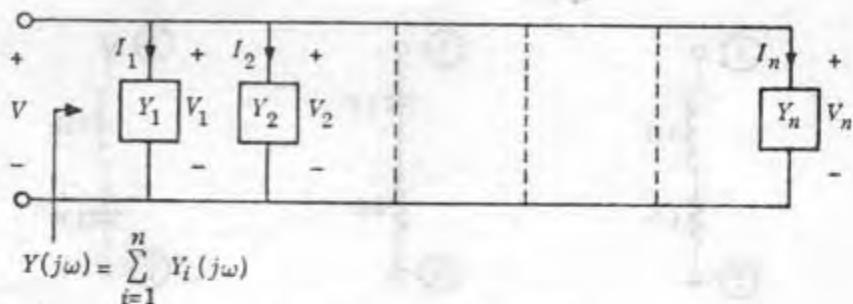
$$Z(j\omega) = \sum_{i=1}^n Z_i(j\omega)$$

که در آن $Z = \frac{V}{I}$ امپدانس شبکه یک قطبی نشان داده شده در شکل (۱-۵) می‌باشد.

بطریق مشابه، در شکل (۲-۵) اجزاء ساده مدار که بطور موازی بهم وصل شده‌اند دیده می‌شود. هر جزء توسط امپدانس و یا ادمیتانس خود مشخص می‌شود. با استفاده از KVL داریم:

$$V_1 = V_2 = \dots = V_n = V$$

بنابراین ولتاژ‌های تمام شاخه‌ها یکسان می‌باشند. با استفاده از KCL داریم:



شکل ۲ - ۵ = ادمیتانس‌های موازی

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

چون :

$$I_i = Y_i V_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

داریم :

$$Y(j\omega) = \sum_{i=1}^n Y_i(j\omega)$$

که در آن $\frac{I}{V} = Y$ ادمیتانس شبکه یک قطبی نشان داده شده در شکل (۲ - ۵) می‌باشد.

تمرین ۱ = ایدیانس‌های نقطه تحریک را بصورت توابعی از ω ، برای شبکه‌های یک قطبی نشان داده شده در شکل (۲ - ۵) تعیین کنید.

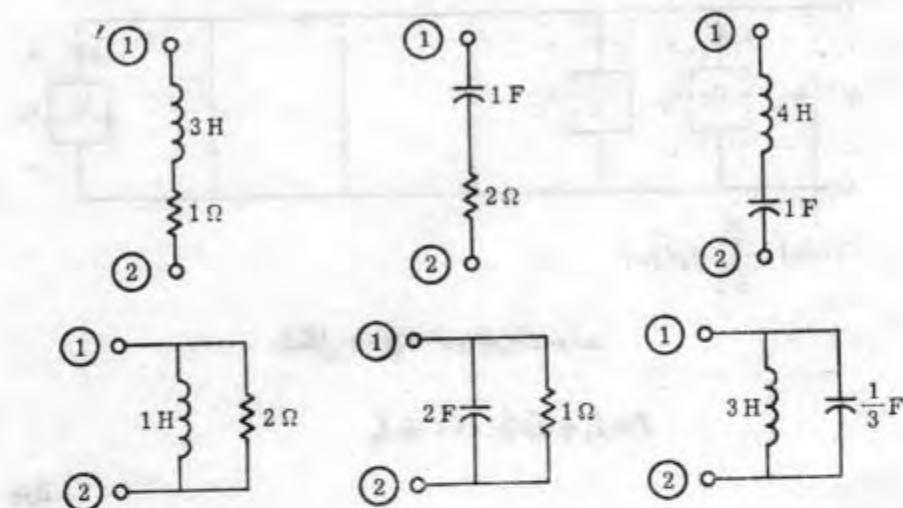
تمرین ۲ = برای هریک از ایدیانس‌ها، اندازه و فاز را بمحاسبه ω تعیین کنید.

تمرین ۳ = بفرض اینکه یک منبع جریان i به هریک از شبکه‌های یک قطبی وصل شود، باستخواه و لذتزا حالت دائمی (در دوسرگرهای ① و ②) را برای ω های زیر تعیین کنید:

$$\text{الف - } i_r = \cos \omega t$$

$$\text{ب - } i_r = \cos 2\omega t$$

واضح است که مدارهای پیچیده‌تر را می‌توان با ترکیب اجزاء بصورت سری و موازی



شکل ۳-۵- امپدانس‌های نقطه تحریک برای شبکهای یک قطبی که بایستی تعیین شوند

تجزیه و تحلیل نمود. بعنوان مثال، در مدار شکل (۴-۵) که معمولاً «مدار تردبانی» (۱) گفته می‌شود، امپدانس نقطه تحریک را می‌توان چنین بیان کرد:

$$(4-5) \quad Z = Z_1 + \frac{1}{Y_T + \frac{1}{Z_T + \frac{1}{Y_\xi + \frac{1}{Z_0}}}}$$

که می‌توان آنرا مجددآ چنین نوشت:

$$Z = Z_1 + \frac{1}{Y_T + \frac{1}{Z_T + \frac{Z_0}{1 + Y_\xi Z_0}}}$$

$$= Z_1 + \frac{1}{Y_T + \frac{1 + Y_\xi Z_0}{Z_0 + Z_T(1 + Y_\xi Z_0)}}$$

$$= Z_1 + \frac{Z_0 + Z_2(1 + Y_4 Z_0)}{1 + Y_4 Z_0 + Y_2 [Z_0 + Z_2(1 + Y_4 Z_0)]}$$

$$= \frac{Z_1[1 + Y_4 Z_0 + Y_2 Z_0 + Y_2 Z_2(1 + Y_4 Z_0)] + Z_0 + Z_2(1 + Y_4 Z_0)}{1 + Y_4 Z_0 + Y_2 [Z_0 + Z_2(1 + Y_4 Z_0)]}$$

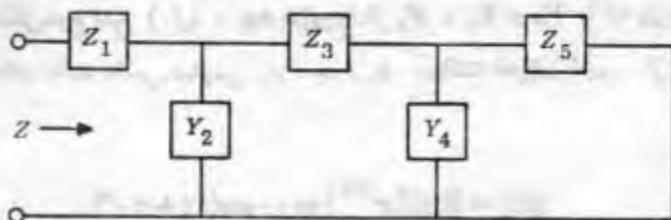
معادله (۱ - ه) «گسترش کسرهای متوالی»^(۱) نامیده میشود. این گسترش در ترکیب^(۲) مدارها مفید میباشد.

تمرین - امپدانس های نقطه تحریک برای شبکه های یک قطبی نشان داده شده در شکل (ه - ه) را تعیین کنید.

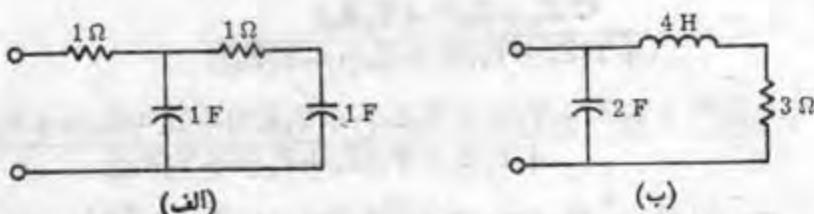
از مثالهای فوق مشاهده میشود که در تجزیه و تحلیل شبکه هایی که از اتصال سری و موازی اجزاء مدار درست شده اند تنها لازم است که اجزاء سری را با جمع امپدانس های تمام شاخه هایی که بطور سری هستند ترکیب نمود و اجزاء موازی را با جمع ادمیتانس های تمام شاخه هایی که بطور موازی هستند ترکیب کرد. چون امپدانس نقطه تحریک بسادگی معکوس ادمیتانس نقطه تحریک میباشد، بنابراین در انتخاب امپدانس و یا ادمیتانس، برحسب اینکه در یک مورد خاصی کدامیک مناسبتر هستند، میتوان انعطاف پذیر بود. در ترکیب موازی شکل (۲ - ه) ادمیتانس را انتخاب میکنیم و در شبکه نرdbanی نشان داده شده در شکل (۴ - ه) متناظر آمپدانس و ادمیتانس را بکار میبریم.

۵-۲- تجزیه و تحلیل گره و مش در حالت دائمی سینوسی

برای مدارهای خطی تغییرناپذیر یا زبان که بشکل اتصال سری - موازی اجزاء مدار نیستند، میتوان از دو روش عمومی تجزیه و تحلیل مدار یعنی تجزیه و تحلیل گره و



شکل ۴ - ۵ یک شبکه نرdbanی ساده



شکل ۵-۵-امپدانس‌های نفعه تحریک برای شبکه‌های یک قطبی که بایستی تعیین شوند

تجزیه و تحلیل مش استفاده نمود. ابتدا لازم است مجددآ تأکید شود که «تنها تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی مورد بررسی ما می‌باشد». بنابراین می‌توان از فازورهای ولتاژها، فازورهای جریانها، امپدانس‌ها و دیپتانس‌ها درنوشتن معادلات KVL و KCL استفاده کرد. نوع معادلات حاصل، معادلات جبری خطی بوده و می‌توان آنها را توسط قاعده کرامر حل نمود. برای تشریح روشها دو مثال ذکر می‌گردد.

مثال ۱- گیریم در مدار شکل (۶-۱) ورودی متبع جریان زیر باشد:

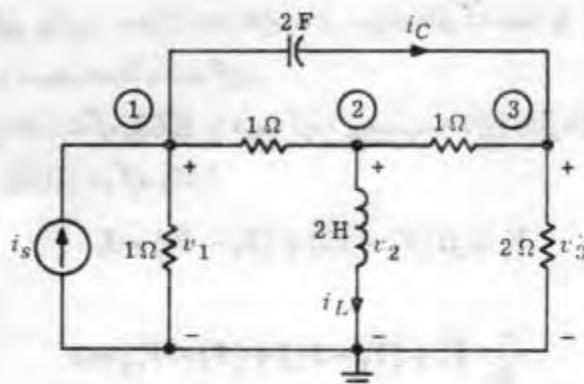
$$(۶-۱) \quad i_s(t) = 10 \cos(2t + 20^\circ)$$

میخواهیم ولتاژ حالت دائمی سینوسی v_1 را در دو سر مقاومت ۲ اهمی پیدا کنیم. ما از تجزیه و تحلیل گره استفاده خواهیم کرد. گیریم گره مبنا را بصورت نشان داده شده در شکل انتخاب کرده و ولتاژهای گرهها نسبت به مبنا را v_1 ، v_2 و v_3 بنامیم. چون روی هر چهار گره در مدار وجود دارد، می‌توان سه معادله KCL برای آنها نوشت. بنابراین سه معجهول ما را، سه ولتاژ گره نسبت به مبنا تشکیل می‌دهند که می‌توان آنها را از روی سه معادله KCL تعیین کرد. قبل از شروع بنویشن این معادلات، میخواهیم فازور متبع جریان i_s نمایشگر شکل موج متبع $(0-1)$ ، و سه فازور ولتاژ v_1 ، v_2 و v_3 را که پتریف نشان دهنده ولتاژهای حالت دائمی سینوسی v_1 ، v_2 و v_3 می‌باشند تعریف کنیم. از (۶-۱) داریم:

$$i_s(t) = \operatorname{Re}(I_s e^{j2t}) = 10 \cos(2t + 20^\circ)$$

و یا:

$$(۶-۲) \quad I_s \triangleq 10 e^{j20^\circ}$$



شکل ۶-۵ - مثال ۱ : تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی
که بربایه تجزیه و تحلیل گره قرار دارد

توجه کنید که فرکانس زاویه‌ای $\omega = 2\pi f$ رادیان بر ثانیه می‌باشد. گیریم فازورهای ولتاژها با معادلات زیر تعریف شوند :

$$v_1(t) = \operatorname{Re}(V_1 e^{j\omega t})$$

$$(+) - (-) \quad v_2(t) = \operatorname{Re}(V_2 e^{j\omega t})$$

$$v_3(t) = \operatorname{Re}(V_3 e^{j\omega t})$$

بیاد آورید که برای بدست آوردن فازور جریان ، فازور ولتاژ را در ادبیات آن جزء ضرب می‌کنیم. یعنوان مثال ، گیریم جریان در سلف L بوده که توسط فازور جریان I_L نشان داده می‌شود. اگر V_2 داده شده باشد ، می‌توان I_L را چنین بدست آورد :

$$I_L = Y_L V_2 = \frac{1}{j\omega L} V_2 = \frac{1}{j\omega} V_2$$

بطریق مشابه ، گیریم جریان خازن C بوده که توسط فازور جریان I_C نشان داده می‌شود . با توجه باینکه ولتاژ دوسر خازن $v_3 - v_1$ می‌باشد ، بر حسب فازورها بدست می‌آوریم :

$$I_C = Y_C (V_1 - V_3) = j\omega C (V_1 - V_3) = j\omega (V_1 - V_3)$$

با تعقیب این روش، میتوان تمام فازورهای جریان‌های شاخه‌ها را بر حسب فازورهای ولتاژهای گره نسبت به مبنای پدست آورد.

سپس معادلات گره KCL را در سه گره، بر حسب سه فازور ولتاژهای گره نسبت به مبنای مینویسیم. بنابراین در گره یک:

$$V_1 + j\zeta(V_1 - V_2) + (V_1 - V_3) = I_s$$

در گره دو:

$$\frac{1}{j\zeta} V_2 + (V_2 - V_1) + (V_2 - V_3) = 0$$

و در گره سه:

$$\frac{1}{\gamma} V_3 + j\zeta(V_3 - V_1) + (V_3 - V_2) = 0$$

با مرتب کردن مجدد معادلات، پدست می‌آوریم:

$$(2 + j\zeta)V_1 - V_2 - j\zeta V_3 = I_s$$

$$-V_1 + \left(2 + \frac{1}{j\zeta}\right)V_2 - V_3 = 0$$

$$-j\zeta V_1 - V_2 + \left(\frac{\gamma}{\gamma} + j\zeta\right)V_3 = 0$$

این نتایج، دسته‌ای از سه معادله جبری خطی با ضرایب مختلف را تشکیل میدهند. فازور ولتاژ مطلوب V_3 را میتوان از قاعده کرامر پدست آورد. بنابراین:

$$V_3 = \frac{(2 + j\zeta)(-\gamma) - I_s}{\begin{vmatrix} 2 + j\zeta & -1 & -j\zeta \\ -1 & 2 + \frac{1}{j\zeta} & 0 \\ -j\zeta & -1 & -j\zeta \end{vmatrix}} = \frac{2 + j\zeta}{1 + j11.20} I_s$$

چون $I_s = 10e^{j30^\circ}$ است :

$$V_s = 6e^{j45^\circ}$$

بنابراین ، ولتاژ حالت دائمی میتوسی خروجی چنین است :

$$v_o(t) = 6 \cos(2t + 45^\circ)$$

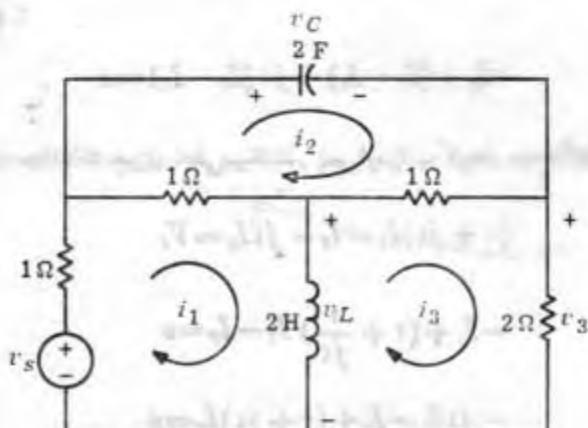
مثال ۲ - میخواهیم با استفاده از تجزیه و تحلیل مش ، همان مسئله را حل کنیم .
ابتدا با استفاده از مدار معادل نرتن ، منبع جریان را بهمنج ولتاژ تبدیل میکنیم . مدار پدست آمده در شکل (۷-۵) نشان داد شده و منج ولتاژ چنین است :

$$v_s(t) = 10 \cos(2t + 40^\circ)$$

و بنابراین فازور نشان دهنده v_o چنین است :

$$V_o = 10e^{j40^\circ}$$

در تجزیه و تحلیل مش ، جریانهای مشها را بعنوان متغیرهای شبکه پکارمی بریم .
این جریانها i_1 ، i_2 و i_3 بصورت نشان داده شده در شکل (۷-۵) میباشند . تعایش های فازوری برای i_1 ، i_2 و i_3 بصورت زیر تعریف میشوند .



شکل ۷-۵ - مثال ۲ : همان مدار شکل (۶-۵) با این تفاوت که بمنظور سهولت در تجزیه و تحلیل مش منج جریان با منج ولتاژ معادل تعویض شده است .

$$i_1(t) = \operatorname{Re}(I_1 e^{j\omega t})$$

$$i_2(t) = \operatorname{Re}(I_2 e^{j\omega t})$$

$$i_3(t) = \operatorname{Re}(I_3 e^{j\omega t})$$

معادلات مشاه را با استفاده از KVL بر حسب فازورهای I_1 ، I_2 ، I_3 و V_s خواهیم نوشت. ابتدا لازم است که تمام فازورهای ولتاژهای شاخه هارا بر حسب فازورهای جریانهای مشاه I_1 ، I_2 و I_3 بیان کنیم. برای اینکار، فازورهای جریانهای شاخه هارا در امپدانس شاخه ها ضرب میکنیم. بعنوان مثال، فازور ولتاژ V_C برای خازن مساوی $\frac{1}{j\omega}$ میباشد.

بهینه ترتیب فازور ولتاژ V_L برای سلف مساوی $(I_1 - I_2)$ است. سپس معادلات KVL بر حسب فازورهای جریانهای مشاه نوشته میشوند. بنابراین برای مش ۱:

$$I_1 + (I_1 - I_2) + j\omega(I_1 - I_2) = V_s$$

برای مش ۲:

$$\frac{1}{j\omega} I_2 + (I_2 - I_3) + (I_2 - I_1) = 0$$

و برای مش ۳:

$$2I_3 + (I_3 - I_2) + j\omega(I_3 - I_2) = 0$$

این سه معادله، معادلات جبری خطی میباشند. پس از مرتب کردن مجدد آنها خواهیم داشت:

$$(2 + j\omega)I_1 - I_2 - j\omega I_2 = V_s$$

$$-I_1 + (2 + \frac{1}{j\omega})I_2 - I_3 = 0$$

$$-j\omega I_1 - I_2 + (2 + j\omega)I_3 = 0$$

با استفاده از قاعده کرامر، I_3 را پیدا میکنیم. بنابراین:

$$I_r = \frac{\begin{vmatrix} 2+jt & -1 & V_s \\ -1 & 2+\frac{1}{jt} & 0 \\ -jt & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+jt & -1 & -jt \\ 2+jt & -1 & -jt \\ -1 & 2+\frac{1}{jt} & -1 \end{vmatrix}} = \frac{2+j8}{12+j22} V_s$$

چون $V_s = 10e^{j30^\circ}$ و $I_r = 2V_s$ داریم:

$$V_r = 6e^{j44^\circ}$$

با:

$$v_r(t) = 6(4 + j4) \cos(2t + 44^\circ)$$

این جواب البته با آنچه توسط تجزیه و تحلیل گرده بست آمد مطابقت دارد.

تمرین ۱ - معادلات حلقه برای مدار تردبانی نشان داده شده در شکل (۸-۰) را

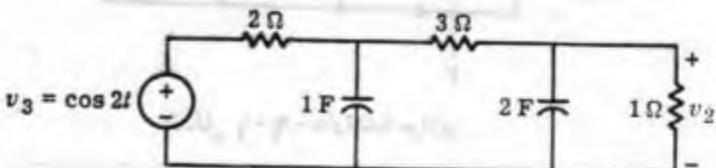
بنویسید. فرض میشود که مدار در حالت دائمی سینوسی قراردارد.

تمرین ۲ - معادلات را برای ولتاژ حالت دائمی سینوسی v_2 در دو سر مقاومت ا اهمی

حل کنید.

تمرین ۳ - منبع ولتاژ را به منبع جریان تبدیل کرده و معادلات گرده را بر حسب فازورها بنویسید.

تمرین ۴ - معادلات را برای ولتاژ حالت دائمی سینوسی v_2 برایه تجزیه و تحلیل گرده حل کنید.



شکل ۸-۵ = یک مدار تردبانی در حالت دائمی سینوسی

۱-۶-۲- مدارهای تشدید

برای تشریح بیشتر تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی و مقاومات فازور، امپدانس، ادمیتانس و یک مفهوم جدید که «تابع شبکه»^(۱) گفته می‌شود از یک مدار تشدید استفاده خواهیم کرد. برای نشان دادن بسیاری از خواص مدارهای تشدید، نمایش‌های ترمیمی گوناگونی ارائه خواهد شد. این روش‌های ترمیمی برای تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی مدارهای پیچیده‌تر مفید خواهند بود.

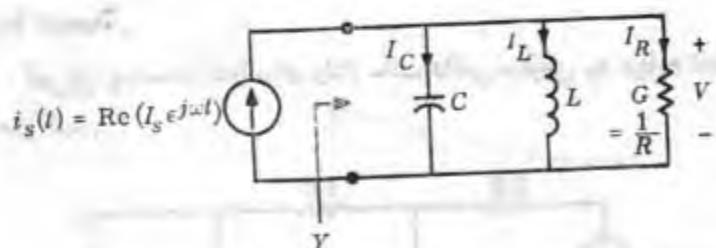
در عمل، دونوع مدار تشدید، یعنی مدار تشدید سری و مدار تشدید موازی حایز اهمیت سیاستند. ما مدار تشدید RLC موازی شکل (۱-۶) را تجزیه و تحلیل خواهیم کرد. مدار تشدید سری دوگان مدار تشدید موازی است و چون مفهوم دوگانی را مختصرآ بحث کرده‌ایم از تشریح جزئیات مدارهای تشدید سری صرف نظر می‌گردد. معهذا، بمنظور مراجعه، زتاب برای هر دو نوع مدار درج دول (۱-۷) در آخر این بخش خلاصه شده است.

۱-۶-۱- امپدانس، ادمیتانس و فازورها

مدار تشدید شکل (۱-۶) را که توسط یک منبع جریان سینوسی زیر تحریک می‌شود در نظر گیرید:

$$(1-1) \quad i_s(t) = \operatorname{Re}(I_s e^{j\omega t}) = |I_s| \cos(\omega t + \angle I_s)$$

ادمیتانس شبکه یک قطبی در فرکانس زاویده‌ای ω چنین است:



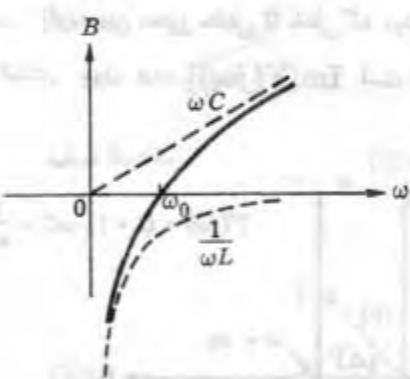
شکل ۱-۶-۱- مدار تشدید موازی

$$(6-2) \quad Y(j\omega) = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \\ = G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

بنابراین، جزء حقیقی $Y(j\omega)$ یک ثابت و جزء انگاری آن تابعی از ω میباشد. جزء انگاری یک ادمیتانس، سوپتانس^(۱) خواهد شده و یا B مشخص میگردد. درنتیجه:

$$(6-3) \quad B(\omega) = \omega C - \frac{1}{\omega L}$$

سوپتانس تابعی از ω بوده و در شکل (۶-۲) بر حسب ω رسم شده است. در فرکانس f_0 سوپتانس صفر بوده و گفته میشود که مدار در حالت تشدید است. فرکانس f_0 را فرکانس تشدید مینامند. اهمیت کلمه «تشدید» بعداً در این بخش بحث خواهد شد.



شکل ۶-۷- منحنی سوپتانس یک مدار تشدید موازی، $B(\omega)$ بر حسب ω .

توجه کنید که در فرکانس زاویه‌ای تشدید $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ رادیان بر ثانیه

$$\omega_0 = \omega$$
 میباشد.

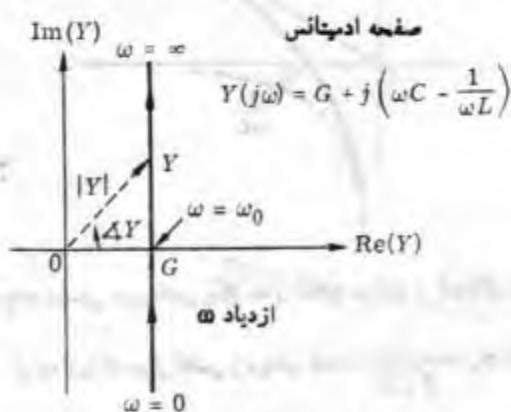
نظریه اسامی مدارها و شبکهای

«صفحه‌های امپدانس و ادمیتانس» معادله (۲-۶) نشان میدهد که ادمیتانس، تابع فرکانس زاویه‌ای ω میباشد. با جدا کردن معادله (۲-۶) باجزاء حقیقی و ایگاری بدست میآوریم:

$$(4-6 \text{ الف}) \quad \operatorname{Re}[Y(j\omega)] = G$$

$$(4-6 \text{ ب}) \quad \operatorname{Im}[Y(j\omega)] = B(\omega) = \omega C - \frac{1}{\omega L}$$

وقتار مشخصه ادمیتانس $(j\omega) Y$ را میتوان بصورت ترسیمی توصیف کرد. برای هر ω معین، میتوان $(j\omega) Y$ را بصورت یک نقطه در صفحه مختلط که در این مورد صفحه ادمیتانس نامیده میشود رسم نمود. وقتی ω تغییر میکند، نقطه $(j\omega) Y$ تغییر کرده و معادلات (۴-۶ الف) و (۴-۶ ب) معادلات پارامتری منحنی طی شده توسط $(j\omega) Y$ را تشکیل میدهند (شکل ۴-۶ را ببینید). این منحنی مکان $(j\omega) Y$ نامیده میشود. چون درحال مورد بررسی ما طول G ثابت است، مکان خط مستقیمی بموازات محور ایگاری بوده که محور حقیقی را در G قطع میکند. فاصله بین $(j\omega) Y$ تا مبدأ ساوه اندازه $|Y|$ میباشد. زاویه بین محور حقیقی تا خطی که مبدأ را به $(j\omega) Y$ وصل میکند، فاز $(j\omega) Y$ است. چون $\operatorname{Im}[Y(j\omega_0)] = 0$ است، پس $Y(j\omega_0) = G$



شکل ۴-۶ - مکان Y در صفحه ادمیتانس

تجزیه و تحلیل حالت دائمی میتوسی

میباشد. بنابراین در حالت تشید (۱-۵) ، ادمیتانس « می نیم » بوده و فاز آن « صفر » است. تذکر این نکته غالب توجه است که ادمیتانس مدار تشید موازی در حالت « تشید » مساوی ادمیتانس مقاومت تنها میباشد. یعنی ترکیب خازن و سلف مثل یک مدار باز رفتار میکند.

تمرین ۱- یک مدار تشید موازی با $L = 1$ هانری ، $C = 1$ فاراد و $R = 100$ اهم را در نظر بگیرید. مکان Y را رسم کنید. پویزه نقطه نظر:

$$\omega = 0, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, \dots$$

رادیان بر ثانیه را مشخص نمایید.

امپدانس مدار تشید موازی چنین است :

$$Z(j\omega) = \frac{1}{Y(j\omega)} = \frac{1}{G + jB(\omega)} = \frac{1}{G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})} \\ (۱-۶) \quad = \frac{G}{G' + B'(\omega)} + j \frac{-B(\omega)}{G' + B'(\omega)}$$

بطریق مشابه ، میتوان امپدانس را در « صفحه امپدانس » مختلط رسم کرد. از معادله (۱-۶) داریم :

$$(۱-۶) \quad \text{Re}[Z(j\omega)] = \frac{G}{G' + B'(\omega)} \quad \text{و:}$$

$$(۱-۶) \quad \text{Im}[Z(j\omega)] \triangleq X(\omega) = \frac{-B(\omega)}{G' + B'(\omega)}$$

جزء انکاری یک امپدانس ، راکتانس^(۱) نامیده شده و معمولاً با $X(\omega)$ مشخص میشود. معادلات (۱-۶) الف) و (۱-۶) ب) را میتوان عنوان معادلات پارامتری یک منحنی در صفحه امپدانس درنظر گرفت. این منحنی مکان Z نامیده میشود.

تمرین ۱- مکان Z را برای مدار RLC موازی با $L = 1$ هانری ، $C = 1$ فاراد و $R = 100$ اهم رسم کنید.

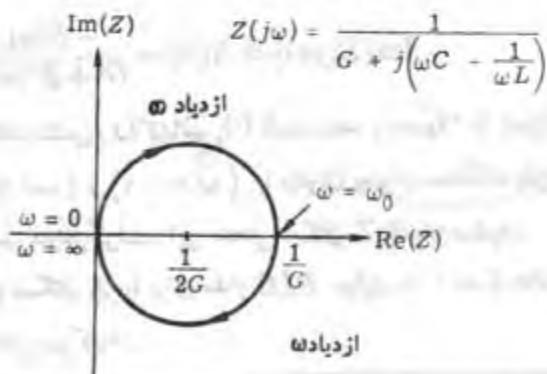
تمرین ۲- ثابت کنید که مکان Z در صفحه امپدانس مختلط برای هر مدار RLC

موازی یک دایره است که مرکز آن در $(\frac{1}{2G}, 0)$ واقع شده و شعاع آن $\frac{1}{2G}$ می‌باشد، چنانکه در شکل (۴-۶) نشان داده شده است. راهنمایی: معادله دایره چنین است:

$$(4-7) \quad [Re(Z) - \frac{1}{2G}]^2 + [Im(Z)]^2 = \left(\frac{1}{2G}\right)^2$$

اهمیت تشدید با بررسی مکان Z در شکل (۴-۶) و یا مکان Z در شکل (۴-۶) روش خواهد شد. اندازه امپدانس $|Z(j\omega)|$ بصورت قابعی از ω ، پایه ω_0 از مقدار صفر شروع شده، بصورت یکنوا افزایش یافته و در تشدید $(\omega = \omega_0)$ به مقدار «ماکسیمم» میرسد. درحال تشدید، راکتانس $X(\omega_0)$ صفر بوده و گفته می‌شود که $Z(j\omega_0)$ مقاومت خالص است. برای $\omega > \omega_0$ ، $|Z(j\omega)|$ بصورت یکنوا کاهش یافته و وقتی $\omega \rightarrow \infty$ ، پس از صفر میل می‌کند. از لحاظ فیزیکی درحال تشدید، تمام جریان منبع جریان از مقاومت گذشته و جمع جریانهای خازن و سلف صفر می‌باشد. در فرکانس‌های بالاتر ($\omega \gg \omega_0$) قسمت اعظم جریان از درون سلف می‌گذرد. در فرکانس‌های بالا ($\omega \gg \omega_0$) قسمت اعظم جریان از درون خازن می‌گذرد.

صفحه امپدانس



شکل ۴-۶- مکان Z در صفحه امپدانس

حال فاژورهای ولتاژهای شاخه‌ها و جریان‌هان شاخه‌ها را در نظر بگیریم. فاژور ولتاژ V چنین بیان می‌شود:

$$(6-8) \quad V = ZI_s$$

« دیاگرام فاژوری » گیریم فاژورهای جریان برای شاخه‌های مقاومت، سلف و خازن بر ترتیب I_R ، I_L و I_C باشند. آنگاه:

$$(6-9) \quad I_R = GV \quad I_L = \frac{1}{j\omega L} V \quad I_C = j\omega CV$$

واضح است که:

$$(6-10) \quad I_R + I_L + I_C = I_s$$

برای روشن شدن روابط فوق گیریم داشته باشیم:

$$i_s(t) = \cos t = \operatorname{Re}(I_s e^{j\omega t})$$

یعنی:

$$I_s = 1 e^{j0^\circ} \quad \text{آمپر} \quad \omega = 1 \quad \text{رادیان بر ثانیه}$$

گیریم مقادیر اجزاء چنین داده شده باشند:

$$R = 1 \quad \text{اهم} \quad L = \frac{1}{4} \quad \text{هانری} \quad C = 1 \quad \text{فاراد}$$

ادمیتانس مدار تشدید (برحسب مفهوم) در قرکائنس زاویه‌ای $\omega = 1$ رادیان بر ثانیه چنین است.

$$Y(j_1) = 1 + j(1 - t) = 1 - j^2 = \sqrt{1+1} e^{-j71.6^\circ}$$

بنابراین امپدانس (برحسب اهم) چنین است:

$$Z(j_1) = \frac{1}{Y(j_1)} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} e^{j71.6^\circ}$$

و فازور ولتاژ (بر حسب ولت) چنین می باشد :

$$V = Z(j\omega) I_s = \frac{1}{\sqrt{1+}} e^{j71.6^\circ}$$

از معادله (۶ - ۹) با $\omega = ۱$ داریم (بر حسب آمپر)

$$I_R = \frac{1}{\sqrt{1+}} e^{j71.6^\circ} \quad I_L = \frac{1}{\sqrt{1+}} e^{-j18.4^\circ} \quad I_C = \frac{1}{\sqrt{1+}} e^{j161.6^\circ}$$

فازورهای ولتاژ V و جریانها در شکل (۶ - ۶) رسم شده اند. مشاهده می شود که :

$$I_R + I_L + I_C = I_s$$

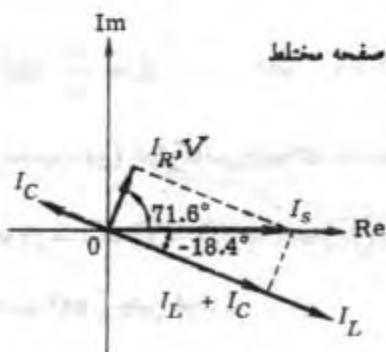
حال فرض کنید در فرکانس تشدید $\omega = ۲$ رادیان بر ثانیه ، یک ورودی

سینوسی بمدار اعمال شود. گیریم ورزدی چنین باشد :

$$i_s(t) = \cos \omega t = \operatorname{Re}(I_s e^{j\omega t})$$

: یعنی

$$I_s = ۱ e^{j0} \quad \text{آمپر} \quad \omega = ۲ \text{ رادیان بر ثانیه}$$



شکل ۶-۵ = ترسیم فازورهای ولتاژ و جریان در صفحه مختلط
(I_s جریان منع امت)

ورودی دارای فرکانس مساوی فرکانس تشددید مدار است. دیده میشود که ادمیتانس چنین میباشد.

$$Y(j\omega) = 1 \text{ مه}^{-1}$$

بنابراین، فازور ولتاژ چنین است:

$$V = 1 \text{ ولت}$$

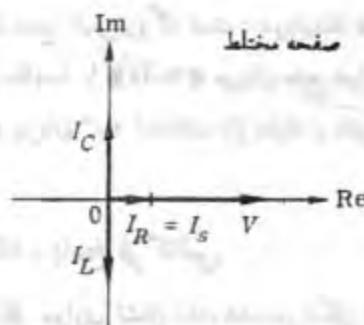
$$I_R = 1 \text{ آمپر} \quad I_L = 2e^{-j90^\circ} \text{ آمپر} \quad I_C = 2e^{+j90^\circ} \text{ آمپر}$$

فازورها در شکل (۶-۶) رسم شده‌اند. تذکر این نکته جالب توجه است که اندازه‌های جریان‌های شاخه‌ها در سلف و خازن دو برابر اندازه جریان ورودی میباشند. این امر تعجب‌آور نیست زیرا معادله (۶-۱۰) معادله‌ای با اعداد مختلط میباشد و در مورد اخیر I_L و I_C پتریب -90° و $+90^\circ$ با I_s اختلاف فاز دارد.

مشاهده اثر مقاومت در رفتار کلی مدار تشددید نیز مطلب قابل توجهی میباشد. به عنوان مثال هرگاه در حالت بالا، بجای مقاومت ۱ اهمی بیک مقاومت ۲۵۰ اهمی را قرار دهیم و مقادیر خازن و سلف بدون تغییر بمانند، باز هم فرکانس تشددید ۲ رادیان بر ثانیه بوده و:

$$Y(j\omega) = 2e^{+j90^\circ} \text{ مه}^{-1} \quad Z(j\omega) = 2e^{+j90^\circ} \text{ اهم}$$

بنابراین با همان جریان ورودی، یعنی $I_s = 1 \text{ آمپر}$ ، بدست می‌آوریم:



شکل ۶-۶ - ترسیم فازورهای ولتاژ و جریان در حالت تشددید

$$V = ۲۰۰ \text{ ولت}$$

$$I_C = j_{0,0} = ۰,۰ e^{j90^\circ} \text{ آمپر}$$

$$I_L = -j_{0,0} = ۰,۰ e^{-j90^\circ} \text{ آمپر}$$

$$I_R = ۱ \text{ آمپر}$$

این جریانها و ولتاژها را میتوان چنین توجیه کرد: یک جریان بزرگ $۰,۰$ آمپری در میان LC جاری شده و جریان یک آمپری منبع از مقاومت میگذرد. در حقیقت، نسبت اندازه جریان در سلف (یا خازن) به اندازه جریان منبع در «حال تشدید» مساوی ضریب کیفیت Q مدار تشدید است. یعنی:

$$\frac{|I_L|}{|I_s|} = \frac{|I_C|}{|I_s|} = Q$$

با خاطر داشتن یادیده است که هنگام اندازه‌گیری جریانها و ولتاژهای یک مدار تشدید باستی دقت نمود. بنابراین مثال در یک مدار تشدید «سری» که دارای ورودی منبع ولتاژ با دامنه فقط چند ولت میباشد، ولتاژ دوسر سلف پا خازن ممکن است دامنه‌ای در حدود چند صد ولت داشته باشد!

توصیر ۵ - در تمام بحث‌های این بخش ما منحصرآ حالت دائمی میتوسی را که در آن تمام ولتاژهای شاخه‌ها و تمام جریانهای شاخه‌ها در فرکانس یکسان بطور میتوسی با زمان تغییر میکنند در نظر گرفتیم. بنابراین مثال، وقتی میگوییم در حالت تشدید $۱ \gg Q$ ، جریان سلف در مقایسه با جریان منبع خیلی بزرگ است، در حقیقت «متظور» اینست که «دامنه» جریان میتوسی سلف در مقایسه با «دامنه» جریان منبع خیلی بزرگ میباشد. در حقیقت، در حالت تشدید، این دو جریان $۰,۰$ اختلاف فاز دارند و وقتی یکی از آنها ماسکیم است، دیگری صفر میباشد.

۶-۲- قابع شبکه، پاسخ فرکانس

با زهم مدار RLC موازی نشان داده شده در شکل (۱-۶) مورد نظر ما است. اکنون فرض میکنیم که خروجی واقعی مورد توجه برای مدار تشدید، جریان حالت دائمی

در مقاومت، یعنی $i_R(t) = \operatorname{Re}(I_R e^{j\omega t})$ باشد. در این حالت نیز ورودی همان منبع جریان میتوسی $I_s e^{j\omega t} = \operatorname{Re}(I_s e^{j\omega t})$ است. تابع شبکه «با نسبت نازور خروجی به فازور ورودی» تعریف میشود. گیریم تابع شبکه را با H مشخص کنیم؛ در این صورت تابع شبکه H که در $j\omega$ حساب شده است چنین میباشد.

$$H(j\omega) = \frac{I_R}{I_s} = \frac{GV}{I_s} = GZ(j\omega) = \frac{1}{1 + jR(\omega C - \frac{1}{\omega L})}$$

$$(1-11) \quad = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

که در آن:

$$(1-12) \quad Q \triangleq \frac{\omega_0}{\tau_a} = \omega_0 CR \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

توجه کنید که توابع شبکه معمولاً به ترکانس زاویه‌ای ω بستگی دارند و این امر در معادله $(1-1)$ برای H دیده میشود. اندازه تابع شبکه H چنین است.

$$(1-13) \quad |H(j\omega)| = \frac{1}{\left[1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

و فاز آن چنین است:

$$\angle H(j\omega) = -\tan^{-1} Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

: ۴

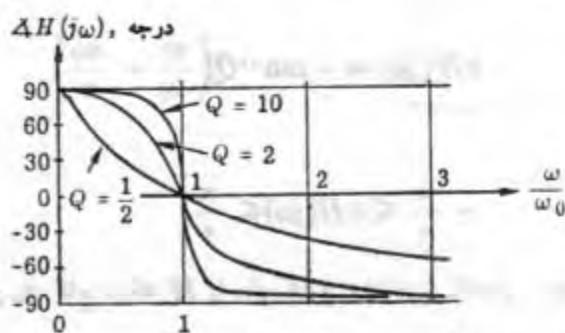
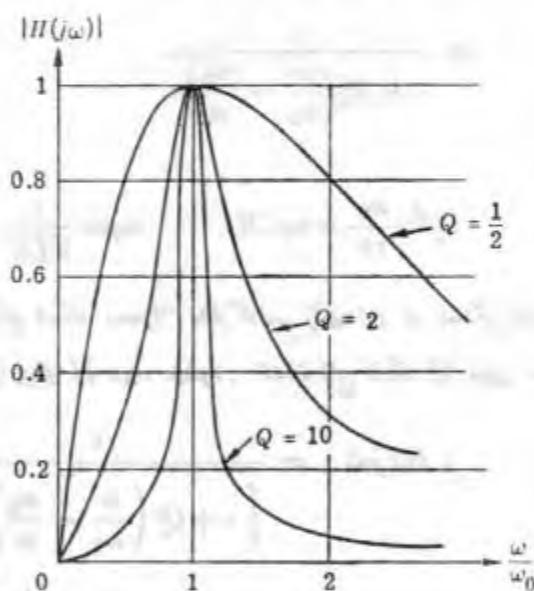
$$(1-14) \quad -\frac{\pi}{2} \leq \angle H(j\omega) \leq \frac{\pi}{2}$$

دو پارامتر Q و ω_0 تابع شبکه H را بطور کامل مشخص میکنند. در شکل $(1-1)$ اندازه و فاز H را بر حسب $\frac{\omega}{\omega_0}$ درحالیکه Q بصورت یک پارامتر است رسم میکنیم.

نظریه اساسی مدارها و شبکهای

این دو دسته متغیرها، یعنی اندازه و فاز بمحاسبه پسیار مقید میباشند چونکه در تمام فرکانس‌ها همه اطلاعات لازم برای هر مدار تشخیص را بدست میدهند. برای پیدا کردن پاسخ حالت دائمی میتوانی i_R ناشی از ورودی $I_s e^{j\omega t} = \text{Re}(I_s e^{j\omega t})$ را تنها لازم است که اندازه و فاز $H(j\omega)$ را از روی دسته متغیرها پیدا کنیم. چون $I_R = H(j\omega) I_s e^{j\omega t}$

$$(1-15) \quad i_R(t) = \text{Re}[H(j\omega) I_s e^{j\omega t}] \\ = |H(j\omega)| I_s \cos[\omega t + \angle H(j\omega)]$$



شکل ۷-۷ - پاسخ فرکانس مدارهای تشخیص

تبصره ۱ - امپدانس و ادمیتانس نقطه تحریک‌گاهات‌های خاصی از مفهوم کلی توابع شبکه می‌باشند. اگر معادله (۱۶-۶) را با معادله (۱۳-۴) مقایسه کنیم، مشاهده می‌شود که برای پیدا کردن شکل موج خروجی حالت دائمی مینوسی از روی شکل موج ورودی مینوسی و تابع شبکه قواعد یکسانی حکمران است.

تبصره ۲ - دسته متحنی‌های شکل (۷-۶)، برای مدار تشید سری نشان داده شده در شکل (۸-۶) تیز صادر است و تنها لازم است که تعریف مناسبی برای Q را بکار برد یعنی $Q \triangleq \frac{\omega_0 L}{R_s}$ (جدول ۱-۶ را ببینید). تابع شبکه برای یک مدار سری با

$$\text{رابطه } H = \frac{V_R}{V_s} \text{ تعریف می‌شود.}$$

تمرین - گیریم منبع جریان ورودی با $I_R(t) = \cos(\omega t)$ مشخص شود. فازورهای جریان I_R را در مدارهای RLC موازی که با $\omega_0 = ۱$ وadian بر ثانیه و ترتیب با $Q = \frac{1}{\omega_0} = ۱, ۲, ۳$ مشخص می‌شوند تعیین کنید.

«پاسخ فرکانس» چون $(j\omega)H$ تمام اطلاعات لازم مربوط به پاسخ حالت دائمی مینوسی را شامل می‌باشد، متحنی‌های اندازه و فاز $H(j\omega)$ (برحسب ω یا $\log \omega$) را پاسخ فرکانس مدار برای آن ورودی و خروجی مشخص شده گویند (در مورد مدارهای تشید سری، ورودی و خروجی پتریت I و I_R می‌باشند) برای بدست آوردن یک تعبیر فیزیکی از پاسخ فرکانس، پاسخ حالت دائمی مینوسی مدار را برای چندین مقدار فرکانس زاویه‌ای مگرفت. مثل حالت فوق گیریم $I_R(j\omega)$ نمایش فازوری جریان ورودی در فرکانس زاویه‌ای ω باشد. در اینصورت فازور خروجی که پاسخ حالت دائمی مینوسی را در فرکانس زاویه‌ای ω نشان میدهد، $I_R(j\omega)$ بوده و از تعریف تابع شبکه داریم:

$$(۱۶-۶\alpha) \quad I_R(j\omega) = H(j\omega)I_s(j\omega)$$

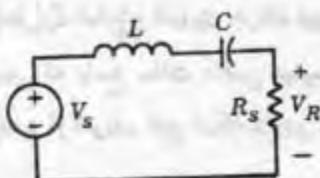
بنابراین، اندازه فازور خروجی با رابطه زیر به اندازه فازور ورودی مربوط است:

$$(۱۶-۶\beta) \quad |I_R(j\omega)| = |H(j\omega)| |I_s(j\omega)|$$

بطریق مشابه، فاز فازور خروجی با رابطه زیر به فاز فازور ورودی مربوط است.

$$(6-6) \quad \dot{I}_R(j\omega) = \dot{I}_s(j\omega) + H(j\omega)$$

بهخصوص، اگر $H(j\omega) = 0$ باشد، فازور خروجی همانند فازور ورودی است. اگر $H(j\omega) \neq 0$ باشد، فازور خروجی صفر است. معادله (6-11) نشان میدهد که برای مدار تشیدد، تابع شبکه H دور فرکانس تشیدد مساوی ۱ و در $\omega = \omega_0$ و $\omega = \infty$ مساوی صفر است. بنابراین گویند که یک مدار تشیدد، دور فرکانس تشیدد سیگنال‌ها را عبور داده و در فرکانس‌های صفر و بینهایت مانع عبور آنها می‌شود. در سایر فرکانس‌ها اندازه و فاز سیگنال‌ها طبق منحنی‌های شکل (6-7) تغییر می‌کنند. بنابراین درست در تزدیکی‌های فرکانس تشیدد، سیگنال‌های ورودی با کاهش کوچکی در اندازه و تغییر مختصری در فاز آنها از مدار عبور می‌کنند. در فرکانس‌های پائین ($\omega < \omega_0$) و در فرکانس‌های بالا ($\omega > \omega_0$) دامنه خروجی بمقدار قابل سلاحفه‌ای کاهش می‌باید. بخاطر همین حقیقت، یک مدار تشیدد را یک فیلتر «میان‌گذر»^(۱) می‌نامیم. مدار تشیدد تنها سیگنال‌های را که فرکانس آنها در مجاورت فرکانس تشیدد است از خود عبور میدهد. شکل منحنی‌های اندازه و فاز یک مدار تشیدد به ضریب کیفیت Q بستگی دارد. یک Q بزرگتر، باند گذر بازیکتری را بوجود می‌آورد. یک فیلتر میان‌گذر ایده‌آل دارای منحنی اندازه‌ای بصورت نشان داده شده در شکل (6-9) می‌باشد. در حالت ایده‌آل، تمام سیگنال‌های داخل باند گذر^(۲)، بدون هیچگونه تغییری در فاز و اندازه عبور می‌کنند و در خارج از باند گذر خروجی بطور یکنواخت صفر است. معهذا، منحنی اندازه شکل (6-9) را از نظر فیزیکی نمیتوان بدست آورد.



شکل ۶-۸ - مدار تشیده سری با $\frac{1}{VLC}$

برای یک مدار فیلتر عملی (مثل مدار تشذید) باندگذر را میتوان بطرق مختلفی تعریف کرد، متداول ترین تعریفی که بکار میرود، باندگذر $db = -3$ میباشد^۱ و آن بدین معنی است که در لبه های باند عبور، $|H(j\omega)|$ مساوی $\frac{1}{\sqrt{2}}$ برابر مقدار ماگزینم باندگذر است. از معادله (۱۳ - ۶) دیده میشود که اندازه ماگزینم $|H(j\omega)|$ در $\omega = \omega_0$ بوده و مقدار آن مساوی ۱ است. با قراردادن $H(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ داریم :

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\left[1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

با :

+ کلمه db برای مخفف دسیبل (۱) بکار میرود. ولتاژها و جریانها را میتوان با فرمول های زیر بر حسب دسیبل بیان کرد.

$$\text{بر حسب ولت} |V_{out}| = 2 \cdot \log |V_{in}| \quad (\text{بر حسب دسیبل})$$

(و بطریق مشابه برای جریان). تابع انتقال H که نسبت جریانها میباشد نیز بر حسب دسیبل چنین بیان میشود :

$$|H(j\omega)| = 2 \cdot \log |H(j\omega)| \quad (\text{بر حسب دسیبل})$$

چون در حالت مورد بررسی $H(j\omega_0) = 1$ ، پس تابع انتقال در ω_0 و 0 db میباشد. چون $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -3$ است، اگر برای فرکانس ω_1 ، $|H(j\omega_1)|$ مساوی -3 db باشد بدین معنی است که :

$$\frac{|H(j\omega_1)|}{|H(j\omega_0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

$$Q^r \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^r = 1$$

از حل معادله بالا برای مقادیر مشتت ω بر حسب Q ، بدست می آید:

$$(1-17) \quad \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \pm \frac{1}{2Q}$$

در صورت مقادیر بزرگ Q ($Q \gg 1$)، با استفاده از:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots$$

بنابراین:

$$(1-18) \quad \frac{\omega}{\omega_0} \approx 1 \pm \frac{1}{2Q}$$

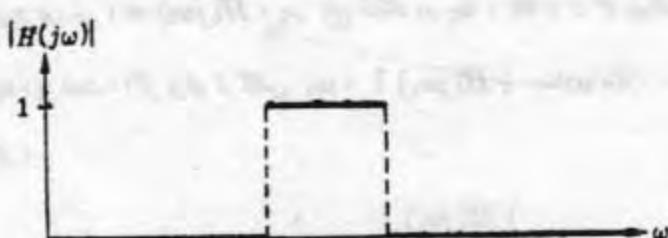
بنابراین باند عبور را میتوان بصورت باند بین فرکانس های ω_1 و ω_2 تعریف نمود که در آن:

$$(1-19) \quad \omega_1 \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q} \right) \quad \omega_2 \approx \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q} \right) \quad Q \gg 1 \quad \text{برای } 1$$

فرکانس های:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}, \quad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$$

فرکانس های قطع (^(۱)) -dB نامیده میشوند و $f_2 - f_1 = \Delta f$ را نیز به نای باند (^(۲)) -dB گند و بر حسب هرتز چنان بیان میشود:



شکل ۹-۹ - منحنی اندازه برای یک فیلتر میانگذر ایده‌آل

$$(۶-۲۰) \quad \Delta f = f_2 - f_1 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} \approx \frac{\omega_0}{2\pi Q} = \frac{f_0}{Q} = \frac{a}{\pi}$$

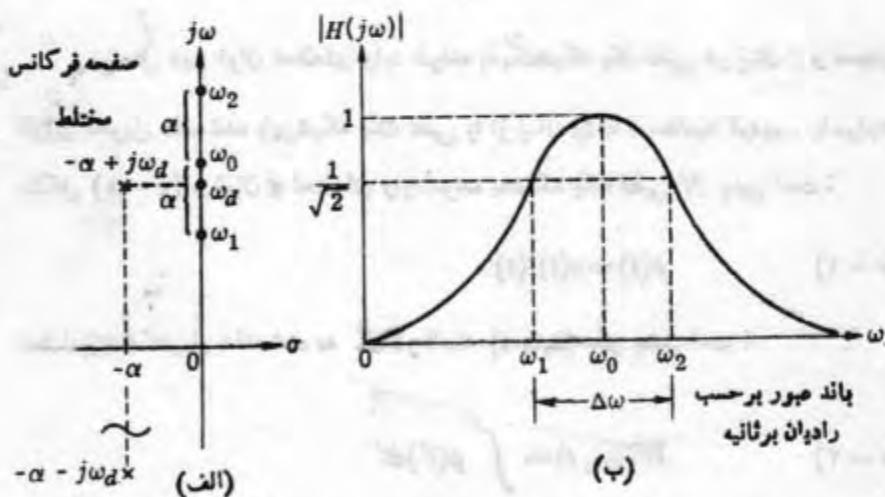
در فصل ۶، مدارهای مرتبه دوم را بر حسب قرار گرفتن فرکانس‌های طبیعی آنها در صفحه فرکانس مختلط و با بر حسب مقدار ضریب کیفیت Q طبقه‌بندی کردیم. برای $Q > \infty$ ، مدار را میرای ضعیف نامیده و فرکانس‌های طبیعی آنرا چنین مشخص کردیم:

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{Bmatrix} = -a \pm j\omega_d$$

که در آن:

$$a = \frac{\omega_0}{2Q}$$

: ۹



شکل ۶-۱۰-(الف) فرکانس‌های طبیعی در صفحه فرکانس مختلط و باند عبور

نظیر آن برای یک مدار تشیده با Q بزرگ. (ب) منحنی اندازه (برای $Q \gg 1$ ، $\Delta\omega \approx \frac{\omega_0}{Q}$)

$$(6-21) \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}$$

صفحه فرکانس مختلط و همچنین منحنی اندازه در شکل (۱۰-۶) نشان داده شده‌اند تا بسیاری از روابط جالب میان محل‌های فرکانس‌های طبیعی دوره $j\omega \pm \alpha$ ، فرکانس تشدید ω_0 ، پهنه‌ای باند ω_1 و ω_2 و فرکانس‌های قطع ω_1 و ω_2 نشان داده شوند. شکل (۱۰-۶) برای حالت که Q بزرگ می‌باشد رسم شده است. برای $1 \gg Q$ ، با حذف جملات $\frac{1}{Q^2}$ از معادلات (۱۹-۶) و (۶-۲۱) روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$(6-42) \quad \omega_d \approx \omega_0 \quad \omega_1 \approx \omega_0 - \alpha \quad \omega_2 \approx \omega_0 + \alpha$$

نتایج اصلی مدارهای تشدید سری و موازی را برای راحتی در جدول (۱-۷) خلاصه می‌کنیم.

۷- توان در حالت دائمی سینوسی

در فصل دوم توان لحظه‌ای وارد شونده به یک شبکه یک قطبی در زمان t و همچنین انرژی تحویل داده شده باین شبکه یک قطبی را از زمان t_0 تا t محاسبه کردیم. با مراجعه بشکل (۱-۷) «توان» لحظه‌ای وارد شونده به شبکه یک قطبی N چنین است:

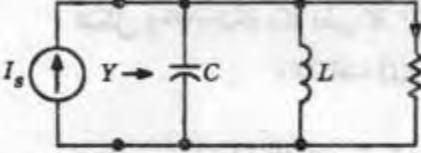
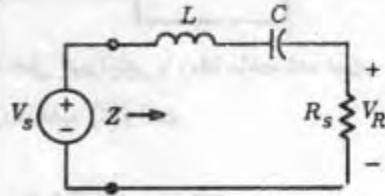
$$(7-1) \quad p(t) = v(t)i(t)$$

و «انرژی» تحویل داده شده به N در فاصله $(t_0$ و $t)$ نیز چنین است:

$$(7-2) \quad W(t_0, t) = \int_{t_0}^t p(t') dt'$$

در این بخش معادلات فوق را برای محاسبه توان و انرژی در حالت دائمی سینوسی بکار خواهیم برد.

جدول ۱ - ۷ - خواص حالت دائمی سینوسی مدارهای تشدید

مدار تشدید موازی	مدار تشدید سری
 $Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha} = \omega_0 CR = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{R}{\sqrt{L/C}}$ $\alpha = \frac{1}{2RC}$ $H(j\omega) \triangleq \frac{I_R}{I_s}; \quad Y(j\omega) = \frac{1}{RH(j\omega)}$	 $Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\omega_0 L}{R_s} = \frac{\sqrt{L/C}}{R_s}$ $\alpha = \frac{R_s}{2L}$ $H(j\omega) \triangleq \frac{V_R}{V_s}; \quad Z(j\omega) = \frac{R_s}{H(j\omega)}$

$$\omega_0 \triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

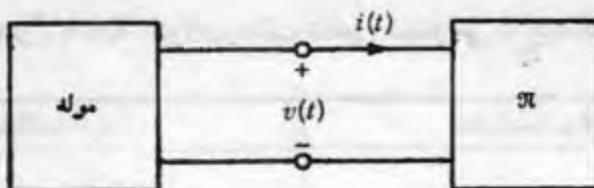
اگر $\frac{1}{4}Q > 1$ (حالت میرای غصیف) فرکانس‌های طبیعی برابر و هستند که در آنجا $\omega_d \triangleq \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_0 \sqrt{1 - 1/4Q^2}$. If $Q > 1$, $\omega_d \approx \omega_0$.

فرکانس‌های قطع زاره ۳-db

$$\begin{cases} \omega_1 \approx \omega_0 - \alpha = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q} \right) \\ \omega_2 \approx \omega_0 + \alpha = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q} \right) \end{cases}$$

$$\text{رادیان بر ثانیه} \quad \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \approx 2\alpha = \frac{\omega_0}{Q}$$

$$\Delta f = f_2 - f_1 \approx \frac{f_0}{Q} \quad \text{Hz}$$



شکل ۱-۷-۱- شبکه یک قطبی N از اجزا خطی تغییرنایدیر با زمان ساخته شده است.
ولتاژ قطب $v(t)$ و جریان قطب $i(t)$ است

۱-۷-۱- توان لحظه‌ای، توان متوسط و توان مختلف

فرض کنید که درحالت دائمی سینوسی، ولتاژ قطب شبکه یک قطبی N چنین باشد:

$$(۱-۷-۲) \quad v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_V) = \operatorname{Re}(V e^{j\omega t})$$

که در آن:

$$(۱-۷-۳) \quad V \triangleq V_m e^{j\phi_V} \quad V_m = |V|$$

فرض کنید که جریان قطب شبکه چنین باشد:

$$(۱-۷-۴) \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_I) = \operatorname{Re}(I e^{j\omega t})$$

که در آن:

$$(۱-۷-۵) \quad I \triangleq I_m e^{j\phi_I} \quad I_m = |I|$$

آنگاه از معادله (۱-۷-۴)، « توان لحظه‌ای » وارد شوند، به N چنین است:

$$\begin{aligned} (۱-۷-۶) \quad p(t) &= v(t)i(t) \\ &= V_m I_m \cos(\omega t + \phi_V) \cos(\omega t + \phi_I) \\ &= \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_V - \phi_I) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \phi_V + \phi_I) \end{aligned}$$

جریان i ، ولتاژ v و توان لحظه‌ای p در شکل (۱-۷-۶) رسم شده‌اند. جمله اول در رابطه توان در معادله (۱-۷-۶) یک ثابت بوده در حالیکه جمله دوم یک سینوسی با فرکانس زاویه‌ای 2ω

میباشد. هرگاه توان متوسط را در طول یک پریود $T = \frac{2\pi}{\omega}$ محاسبه نمائیم، جمله دوم همیشه مساوی صفر خواهد بود (زیرا مقدار متوسط هر سینوسی در طول هر پریوب صحیحی از پریود آن صفر است). بنابراین با نشان دادن «توان متوسط» بصورت P_{av} بدست میآریم:

$$(6-7\text{a}) \quad P_{av} \triangleq \frac{1}{T} \int_0^T p(t') dt'$$

بنابراین:

$$(6-7\text{b}) \quad P_{av} = \frac{1}{4} V_m I_m \cos(\angle V - \angle I)$$

تبصره ۱- زاویه $I - V$ که آرگومان کسینوس در معادله (۶-۷ ب) میباشد عبارت از اختلاف فاز بین ولتاژ سینوسی و جریان سینوسی است. چون $V = ZI$

$Z = V/I$ است. یعنی $I = V/Z$ مساوی زاویه اپدیانس شبکه یک قطعی مورد بررسی نیز میباشد. بنابراین میتوان با تغییر دادن زاویه اپدیانس و در عین حال ثابت نگاه داشتن دامنه آن، توان متوسط دریافت شده توسط یک شبکه یک قطعی را تغییرداد.

تبصره ۲- P_{av} عبارت از مقدار متوسط توان لحظه‌ای (\cdot) که در «طول یک پریود» وارد شبکه یک قطعی میشود میباشد. شکل نمونه‌ای از \cdot بر حسب زمان در شکل (۶-۷) نشان داده شده است. در بیشتر موارد، شبکه یک قطعی N تنها شامل اجزاء پسیو میباشد؛ یعنی تمام مقاومتها، سلف‌ها و خازن‌ها مثبت هستند. درنتیجه سلف‌ها و



شکل ۶-۷- شکل موجه‌ای ولتاژ و جریان حالت دائمی سینوسی، و توان لحظه‌ای و متوسط

نظریه اساسی مدارها و شبکهای

خازن‌ها انرژی ذخیره نموده و مقاومت‌ها انرژی تلف می‌کنند. بعوچب اصل بقاء^(۱) انرژی، توان متوسط وارد شونده به شبکه یک قطبی N در حالت دائمی سینوسی باستی نامتناهی (≥ 0) باشد. این حقیقت که توان «متوسط» همیشه بزرگتر و یا مساوی صفر است، ملزم نمیدارد که برای تمام مقادیر $t \geq 0$ باشد. چنانکه در شکل (۲-۷) نشان داده شده است توان لحظه‌ای (t) می‌تواند در هر پریود، در فواصلی از زمان منفی باشد.

تبصره ۳۵- ساده‌ترین راه برای محاسبه توان متوسط که به شبکه یک قطبی N تحويل داده می‌شود بقرار زیر است. در حالت دائمی سینوسی عبارت:

$$P \triangleq \frac{1}{2} \bar{VI}$$

را بعنوان توان مختلط تحويل داده شده به شبکه یک قطبی N تعریف می‌کنیم. در اینجا از تیره بالای I بمنظور مشخص کردن مزدوج مختلط استفاده شده است. در اینصورت:

$$P = \frac{1}{2} |V \parallel I| e^{j(\angle V - \angle I)}$$

$$= \frac{1}{2} |V \parallel I| \cos(\angle V - \angle I) + j \frac{1}{2} |V \parallel I| \sin(\angle V - \angle I)$$

بعوچب معادله (۶-۷)، جزء حقیقی توان مختلط P مساوی توان متوسط می‌باشد:

$$(۷-۷) \quad P_{\text{av}} = \text{Re}(P) = \text{Re}\left(\frac{1}{2} \bar{VI}\right)$$

تبصره ۴- گیریم $Z(j\omega)$ و $Y(j\omega)$ پر ترتیب امپدانس نقطه تحریک و ادمیتانس نقطه تحریک شبکه یک قطبی در فرکانس ω باشند. چون $V = ZI$ و $V = YV$ ، معادله (۷-۷ الف) چنین می‌شود:

$$(۷-۷ ب) \quad P_{\text{av}} = \frac{1}{2} |I|^2 \text{Re}[Z(j\omega)] = \frac{1}{2} |V|^2 \text{Re}[Y(j\omega)]$$

معادله (۷-۷ ب) به تتجه مهمی متجر می‌شود. فرض کنید شبکه یک قطبی از اجزاء

«پسیو» ماخته شده باشد. دراینصورت کاملاً واضح است که P_{av} بایستی نامنفی باشد⁺. بنابراین امپدانس «قطه تحریک» Z و ادمیتانس «قطه تحریک» Y «هر» شبکه یک قطبی که از اجزاء «پسیو» ماخته شده باشد ناسعادلات زیر را برمسیاورد.

$$\text{برای تمام مقادیر } \omega \quad \text{Re}[Z(j\omega)] \geq 0 \quad \text{Re}[Y(j\omega)] \geq 0 \quad (7-8)$$

ویا از معادله $(6-7)$ ، $\cos(\angle V - \angle I) \geq 0$ که معادل است با:

$$\text{برای تمام مقادیر } \omega \quad |Z(j\omega)| \leqslant 1 \quad \text{و} \quad |Y(j\omega)| \leqslant 1 \quad (7-8)$$

معادلات $(7-8)$ (الف) و $(7-8)$ (ب) بقدرتی مهم میباشند که در فصل نهم آنها را بروشن دیگری نیز بدست خواهیم آورد.

۷-۲- خاصیت جمع پذیری توان متوسط

فرض کنید که شبکه یک قطبی N با یک ورودی v که مجموع چندین سینوسی با فرکانس های «متفاوت» میباشد تحریک میشود و گیریم که شبکه یک قطبی در حالت دائمی باشد. دراینصورت هر ورودی سینوسی، یک خروجی سینوسی با همان فرکانس ایجاد کرده و خروجی کل از مجموع این سینوسی ها تشکیل میشود فرض کنید جریان ورودی چندین باشد.

$$i(t) = I_{1m} \cos(\omega_1 t + \psi_1) + I_{2m} \cos(\omega_2 t + \psi_2)$$

و امپدانس ورودی نیز تابع معالم $Z(j\omega)$ باشد. آنگاه در حالت دائمی:

$$v(t) = I_{1m} + Z(j\omega_1) + \cos[\omega_1 t + \psi_1 + \angle Z(j\omega_1)] \\ + I_{2m} + Z(j\omega_2) + \cos[\omega_2 t + \psi_2 + \angle Z(j\omega_2)]$$

برای سهولت $v(t)$ را باین شکل مینویسیم:

$$v(t) = V_{1m} \cos(\omega_1 t + \Phi_1) + V_{2m} \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$$

که در آن:

⁺ این مطلب در فصل نهم اثبات خواهد شد.

$$\Phi_1 \triangleq \psi_1 + \dot{\phi} Z(j\omega_1)$$

$$\Phi_2 \triangleq \psi_2 + \dot{\phi} Z(j\omega_2)$$

توان لحظه‌ای که وارد شبکه یک قطبی N می‌شود چنین است :

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{1}{\gamma} V_{1m} I_{1m} \cos(\Phi_1 - \psi_1)$$

$$+ \frac{1}{\gamma} V_{2m} I_{2m} \cos(\Phi_2 - \psi_2) + \frac{1}{\gamma} V_{1m} I_{1m} \cos(2\omega_1 t + \Phi_1 + \psi_1)$$

$$+ \frac{1}{\gamma} V_{2m} I_{2m} \cos(2\omega_2 t + \Phi_2 + \psi_2)$$

$$+ \frac{1}{\gamma} V_{1m} I_{1m} \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \Phi_1 + \psi_2]$$

$$+ \frac{1}{\gamma} V_{2m} I_{2m} \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \Phi_1 - \psi_2]$$

$$+ \frac{1}{\gamma} V_{1m} I_{1m} \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \psi_1 + \Phi_2]$$

$$(v-1) \quad + \frac{1}{\gamma} V_{2m} I_{2m} \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \psi_1 - \Phi_2]$$

معادله (۱ - ۷) نشان میدهد که «توان لحظه‌ای» مساوی مجموع توانهای لحظه‌ای، ناشی از جریانها با فرکانس‌های ω_1 و ω_2 که بتهائی روی مدار اثر کنند «نیست». در حقیقت مجموع فقط از چهار جمله اول سمت راست معادله (۱ - ۷) تشکیل می‌شود، از طرف دیگر «توان متوسط +» مساوی مجموع توان متوسط در ω_1 و توان متوسط در ω_2 می‌باشد. در حقیقت وقتی

+ محاسبه مقدار متوسط سمت راست معادله (۱ - ۷) همیشه کار ساده‌ای نیست. موردی را در نظر بگیرید که فقط یک سینوسی تنها وجود دارد (معادله ۱ - ۷) در این مورد سمت راست یک

تابع تناوبی بوده و پریود آن $T \triangleq \frac{2\pi}{\omega}$ می‌باشد. بنابراین توان متوسط با (۱ - ۷ الف)



مقدار متوسط گرفته شود تنها دو جمله اول سمت راست باقی میمانند. بعبارت دیگر، در حالت دائمی خاصیت جمع آنار^(۱) هرای توان «متوسط» پشرط ایکه فرکانس‌ها متفاوت باشند برقرار است.

تعوین - با یک مثال نشان دهد که اگر دو متوجه سینوسی دارای فرکانس «پکسان» بوده و هردو به یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان توان تحویل دهند، توان متوسط داده شده به مدار وقتی که هردو منبع باهم عمل میکنند، الزاماً مساوی مجموع توانهای متوسط

داده میشود. حالت معادله (۶ - ۷) بعراگاه فرکانس‌های ω_1 و ω_2 بطور هارمونیک بهم مربوط باشند، یعنی «اعداد درست»^(۲) n_1 و n_2 طوری وجود داشته باشند که $n_1\omega_1 = n_2\omega_2$ ، ماده است.

کوچکترین مضرب مشترک n_1 و n_2 را در نظر گرفت و آنرا n بنامید. گیریم $p_1 \triangleq \frac{n}{n_1}$ و $p_2 \triangleq \frac{n}{n_2}$

باشند که p_1 و p_2 اعداد درست اند. در اینصورت سینوس‌های با فرکانس‌های ω_1 و ω_2 ، $T_c = p_1 + \omega_2$ باشند که T_c اعداد درست اند.

و $\omega_1 - \omega_2$ دارای پریود «مشترک» $T_c = p_1 \left(\frac{2\pi}{\omega_1} \right) = p_2 \left(\frac{2\pi}{\omega_2} \right)$ میباشد و در نتیجه

سمت راست (۶ - ۷) تناوبی با پریود T_c خواهد بود و بنابراین توسط معادله (۶ - ۷ الف) محاسبه شده که در آن بجای T مقدار T_c جایگزین میشود و نتایج داده شده درمن در متن بالا فاصله حاصل میگردند. اگر فرکانس‌های ω_1 و ω_2 بطور هارمونیک بهم مربوط نباشند (مثلًاً اگر $\omega_1 = 1$ رادیان بر ثانیه و $\omega_2 = \sqrt{2}$ رادیان بر ثانیه) آنگاه سمت راست معادله (۶ - ۷) یک تابع تناوبی نبوده و نیازمن برای محاسبه آن از معادله (۶ - ۷ الف) استفاده نمود. اما مفهوم توان متوسط را بازهم میتوان با یک رابطه حدی پسخ زیر تعریف کرد.

$$P_{av} \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} p(t) dt$$

نتایج بیان شده درمن درس، اگرچه به محاسبات طولانی احتیاج دارند، مستقیماً از این تعریف اصلاح شده پدیده میآیند.

دومین وقتی که هر یک بتهائی روی مدار عمل نیکنند تغواهد بود. امپدانس نقطه تحریک مدار را در فرکانس موردنظر Z بنامید.

۷-۳- مقادیر مؤثر و یا ریشه مقدار متوسط توان دوم

پاسخ حالت دائمی سینوسی یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان، با مقاومت R را در نظر بگیرید. از معادله (۱-۷) داریم:

$$p(t) = v(t)i(t) = RI'(t) = RI_m \cos(\omega t + \psi)$$

از معادله (۶-۷) یا (۷-۷) توان متوسط چنین است:

$$P_{av} = \frac{1}{2} I_m^2 R = \frac{1}{2} I_m V_m$$

گیریم مقدار مؤثر^(۱) یک شکل موج سینوسی از تقسیم دامنه و یا مقدار نوک^(۲) آن بر $\sqrt{2}$ تعریف شود. بنابراین:

$$(7-10) \quad I_{eff} \triangleq \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad V_{eff} \triangleq \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

و آنکاه:

$$(7-11) \quad P_{av} = I_{eff}^2 R = I_{eff} V_{eff}$$

بعنوان مثال، ولتاژ معمولی خانگی ۲۲۰ ولت مؤثر است، که داشته نظیر آن $\sqrt{2} \times 220$ ولت میباشد. بطريق مشابه در بسیاری از ولتاژها و آبیرمترها، مقادیر مؤثر خوانده میشوند. برای بدست آوردن دامنه و یا مقدار نوک، بایستی مقدار مؤثر را در $\sqrt{2}$ ضرب نمود. برای یک شکل «موج تناوبی» اما غیرسینوسی، مقدار مؤثر را میتوان بر حسب انتگرال های زیر تعریف نمود.

$$(7-12) \quad I_{eff} \triangleq \left[\frac{1}{T} \int_0^T i'(t) dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(v-12) \quad V_{\text{eff}} \triangleq \left[\frac{1}{T} \int_0^T v^*(t) dt \right]^{\frac{1}{r}}$$

که در آن $(v-12)$ و $(v-12)$ توابع تنایی با پریود T میباشند. اهمیت تعاریف $(v-12)$ و $(v-12)$ در این است که توان متوسط تحویل شده بوسیله یک تابع تنایی به یک مقاومت با مقاومت R مساویست با :

$$(v-13) \quad P_{av} = I_{\text{eff}}^2 R = \frac{V_{\text{eff}}^2}{R} = I_{\text{eff}} V_{\text{eff}}$$

این موضوع واضح است زیرا طبق تعریف داده شده در معادله $(v-12)$ P_{av} چنین است:

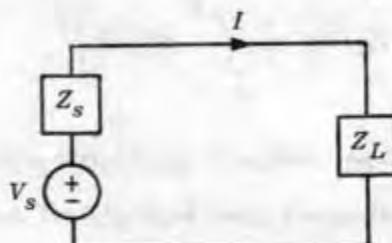
$$(v-14) \quad P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t) dt \\ = \frac{1}{T} \int_0^T R i^*(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{v^*(t)}{R} dt$$

با مقایسه معادلات $(v-12)$ و $(v-14)$ معادله $(v-12)$ پلا فاصله حاصل میشود. در معادله $(v-12)$ مقادیر مؤثر، بر حسب ریشه دوم مقدار متوسط توان دوم مقادیر و اثراز و جریان تعریف شده‌اند و بنابراین نام «ریشه - مقدار متوسط - توان دوم»^(۱) مصدقاق پیدا میکند.

۴-۷- قضیه انتقال توان ماکسیمم

مسائله‌ای با اهمیت عملی بسیار زیاد در شکل $(v-12)$ تشریح شده است. در این مدار Z نشان دهنده یک امپدانس پسیو «داده شده» و V نمایش فازوری متبع ولتاژ میتوسی «داده شده» در فرکالس زاویه‌ای میباشد. بنابراین :

$$v_s(t) = \text{Re}(V_m e^{j\omega t})$$



شکل ۷-۳ - مداری که انتقال توان از یک منبع به یک بار را نشان میدهد

امپدانس Z_L ، یک امپدانس باریسو را نشان میدهد که مقدار آن باستی چنان انتخاب شود تا توان متوجهی که وارد امپدانس بار Z_L (در حالت دائمی سینوسی) میگردد ماکسیمم باشد. بعنوان مثال، ممکن است منظور طبقه اول یک دستگاه رادار^(۱) و یا تلسکوپ^(۲) رادیویی باشد. منبع ولتاژ V_s امواج الکترومغناطیسی ورودی را نشان میدهد و امپدانس Z_s ، امپدانس فضای آزاد^(۳)، کابل‌ها^(۴) موج برها^(۵) وغیره است که به مرحله اول متنه میشود. مسئله انتخاب بهترین امپدانس ورودی Z_L برای طبقه اول است بطوریکه بالاترین توان ممکن باین طبقه تحويل شود.

قضیه انتقال توان ماکسیمم بیان میدارد که «آبیتم مقدار امپدانس بار Z_{L0} مساوی مزدوج مختلط Z_L »، یعنی، $Z_{L0} = \bar{Z}_L$ میباشد.

«اثبات» تمام محاسباتی که ذیلاً انجام میشود شامل امپدانس هادرفر کانس زاویه‌ای^(۶) منبع میباشدند. به منظور سادگی طرز نمایش، Z_L را به جای $Z_L(j\omega)$ بکارخواهیم برد. توان متوسط تحويل شده به Z_L بر حسب فازور جریان I چنین است.

$$P_{av} = \frac{1}{4} |I|^2 \operatorname{Re}(Z_L)$$

چون :

$$I = \frac{V_s}{Z_s + Z_L}$$

نتیجه میشود که :

$$P_{av} = \frac{1}{2} |V_s|^2 \frac{\operatorname{Re}(Z_L)}{|Z_s + Z_L|^2}$$

گیریم، جزء‌های حقیقی و انتگاری Z_L و Z_s و R_L و R_s و X_L و X_s باشند.
داریم :

$$P_{av} = \frac{1}{2} |V_s|^2 \frac{R_L}{(R_L + R_s)^2 + (X_L + X_s)^2}$$

دراینجا V_s و R_s و X_s داده شده‌اند و مقادیر R_L و X_L با بد چنان انتخاب شوند تا P_{av} ماکسیمم گردد. چون راکتانس X_L میتواند مشبّت و بامنفی باشد، میتوان $X_L = -X_s$ انتخاب نمود تا جمله $(X_L + X_s)^2$ درخرج کسر مساوی صفر شود. بعنوان مثال، گیریم Z_s اتصال سری یک مقاومت و یک سلف با اندوکتانس ۱ هاتری بوده و $= 2\pi f R_d$ برابر باشد. آنگاه $X_s = \omega L = 2\pi f L$ اهم خواهد بود. X_L مورد نیاز مساوی ۲ است که میتوان توسط یک خازن با ظرفیت $\frac{1}{4}$ فاراد بدست آورد. با این انتخاب X_L و R_L میشود :

$$(7-10) \quad P_{av} = \frac{1}{2} |V_s|^2 \frac{R_L}{(R_L + R_s)^2}$$

اکنون با استی مقادیر آهیم R_L را تعیین نمود. باگرفتن مشتق جزئی از P_{av} نسبت به R_L بدست میآوریم:

$$(7-11) \quad \frac{\delta P_{av}}{\delta R_L} = \frac{1}{2} |V_s|^2 \frac{(R_L + R_s)^2 - (R_L + R_s)R_L}{(R_L + R_s)^4}$$

برای آهیم گردن P_{av} را مساوی صفر قرار میدهیم و درنتیجه از $(7-11)$ برای آهیم گردن $\frac{\delta P_{av}}{\delta R_L}$ را مساوی صفر قرار میدهیم و درنتیجه از $(7-11)$ پهن است :

$$(v - 17) \quad \max P_{av} = \frac{|V_s|^2}{\tau R_s}$$

و در شرایطی بدست می‌آید که داشته باشیم:

$$(v - 18) \quad Z_{L0} = R_s - jX_s = \bar{Z}_s$$

وقتی این شرط برقرار باشد گویند اپیدانس بار با اپیدانس منبع بطور مزدوج تطبیق شده^(۱) است و با عبارت ساده‌تر گویند که بار با منبع تطبیق شده است.

معادله (v - 17) توان متوسط ساکسیم را که به بار تحویل می‌شود بدست میدهد. جالب توجه است که این توان را با توان متوسطی که توسط منبع تحویل داده می‌شود مقایسه کنیم واضح است که توان متوسط تحویل داده شده توسط منبع چنین است:

$$(v - 19) \quad P_s = \frac{1}{2} |I| \operatorname{Re}(Z_s + Z_L)$$

در تحت شرایط تطبیق شده مزدوج (v - 18) داریم:

$$I = \frac{V_s}{Z_{L0} + Z_s} = \frac{V_s}{\tau R_s}$$

بنابراین معادله (v - 19) چنین می‌شود:

$$(v - 20) \quad P_s = \frac{1}{2} \frac{|V_s|^2}{\tau R_s} = \frac{|V_s|^2}{\tau R_s}$$

می‌توان «بهره»^(۲) مدار را با نسبت توان متوسط تحویل شده به بار به توان متوسط تحویل داده شده توسط منبع تعریف نمود. با مقایسه معادلات (v - 17) و (v - 20) ملاحظه می‌کنیم که بهره مدار تطبیق شده مزدوج مساوی ۰ درصد است. برای رادارها و رادیو-تلسکوپ‌ها این حقیقت هیچ اهمیت ندارد، زیرا انرژی موجود در امواج الکترومغناطیسی ورودی اگر توسط طبقه اول جذب نشود از میان خواهد رفت. برای مهندسین نیرو وضع کاملاً بر عکس است. انرژی تحویل داده شده توسط منبع ارزش بولی داشته و شرکت‌های تولید نیرو به ازدیاد بهره بشدت علاقمند هستند و بیخواهند توان متوسط تولید شده آنها

هرچه بیشتر به بار (یعنی سنتری) تحویل داده شود . نتیجاً آلتراناتورهای بزرگ هیچگاه بطور مزدوج تطبیق شده نیستند .

۷-۵ یک مدار تشدید

در اینجا یک تعبیر انرژی از ضریب کیفیت Q یک مدار تشدید را بیان خواهیم داشت . برای مدار تشدید موازی نشان داده شده در جدول (۱ - ۷) داریم :

$$Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha} = \omega_0 CR$$

اگر V فازور ولتاژ در « حالت تشدید » باشد . میتوان نوشت :

$$(7-21) \quad Q = \omega_0 \frac{\frac{1}{2} C |V|^2}{\frac{1}{2} G |V|^2}$$

عبارت $\frac{1}{2} G |V|^2$ در مخرج کسر ، توان متوسط تلف شده در مقاومت را در حالت تشدید نشان میدهد . برای تعبیر عبارت صورت کسر ، بخاطر آورید که دو قصل دوم نشان دادیم که

انرژی الکتریکی ذخیره شده در یک خازن خطی چنین است :

$$(7-22) \quad \xi_E(t) = \frac{1}{2} Cv^2_C(t)$$

و انرژی مغناطیسی ذخیره شده در یک سلف خطی چنین است :

$$(7-23) \quad \xi_M(t) = \frac{1}{2} Li^2_L(t)$$

برای مدار تشدید در فرکانس تشدید ولتاژ دو سر خازن چنین است :

$$(7-24) \quad v_C(t) = \operatorname{Re}(Ve^{j\omega_0 t}) = |V| \cos(\omega_0 t + \angle V)$$

و جریان داخل سلف نیز چنین میباشد .

$$i_L(t) = \operatorname{Re}\left(\frac{V}{j\omega_0 L} e^{j\omega_0 t}\right) = \frac{|V|}{\omega_0 L} \cos(\omega_0 t + \angle V - 90^\circ)$$

$$(7-25) \quad = \frac{|V|}{\omega_0 L} \sin(\omega_0 t + \angle V)$$

از معادلات (۷-۲۲) تا (۷-۲۵) انرژی کل ذخیره شده چنین است:

$$g(t) = g_E(t) + g_M(t)$$

$$= \frac{1}{2} C |V|^2 \cos(\omega_0 t + \phi_V) + \frac{1}{2} L \frac{|V|}{\omega_0 L}^2 \sin(\omega_0 t + \phi_V)$$

چون ω_0 است، بدست می‌آوریم:

$$(7-26) \quad g(t) = \frac{1}{2} C |V|^2$$

بنابراین، در حالت تشیده انرژی کل ذخیره شده « ثابت » است، یعنی انرژی کل ذخیره شده (t) به t بستگی ندارد. از معادله (۷-۲۱)، Q را میتوان چنین تعبیر کرد: « در حالت تشیده »:

$$(7-27) \quad Q = \omega_0 \frac{\text{انرژی ذخیره شده}}{\text{توان متوسط تلف شده در مقاومت}}$$

این فرمول برای مدار RLC سری در حالت تشیده نیز برقرار می‌باشد.

تمرین - نشان دهید که برای مدار RLC موازی، در حالت تشیده:

$$(7-28) \quad Q = \frac{1}{2\pi} \frac{\text{انرژی ذخیره شده}}{\text{انرژی تلف شده در یک سیکل}}$$

توجه کنید که در حالت تشیده، پریود تمام شکل موجها $\frac{2\pi}{\omega_0}$ ثانیه است.

* ۸- فرمالیزه کردن امپدانس و فرکانس

مدارهای تشیدی که در بخش ۶ بررسی کردیم دارای سه پارامتر یعنی مقاومت، اندوکتانس و ظرفیت می‌باشند. این چنین مدارهای تشید معمولاً « بعنوان فیلتر مورد استفاده قرار می‌گیرند ». یک نمونه سواله طرح مسکن است بصورت زیر باشد: یک مدار تشید سری طرح کنید که دارای سطح امپدانس Z_0 (یعنی، امپدانس در حالت تشیده)، فرکانس تشیده ω_0 و پهنای پاله $3-\text{db}$ باشد که در آن Z_0 ، ω_0 و Δf مقادیر هدی تعبیه شده هستند. برای نوشتن روابط بین اقلام تعیین شده و مقادیر اجزاء R و L و C برای مدار تشید سری از جدول (۱-۷) استفاده می‌گذیم و بدست می‌آوریم:

$$(۱-۸\text{-الف}) \quad Z_0 = R \quad \text{سطح امپدانس}$$

$$(۱-۸\text{-ب}) \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{فرکانس زاویه‌ای تشیدید}$$

$$(۱-۸\text{-ج}) \quad \Delta\omega = \Delta\omega_0 = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$

برای پیدا کردن L ، $(۱-۸\text{-ب})$ را پکار برد و بدست می‌آوریم:

$$(۱-۸\text{-د}) \quad L = \frac{R}{\Delta\omega}$$

برای پیدا کردن C ، $(۱-۸\text{-ب})$ را پکار برد و بدست می‌آوریم:

$$(۱-۸\text{-ز}) \quad C = \frac{\Delta\omega}{\omega_0 R}$$

روش دیگری برای طرح وجود دارد که معمولاً طراحان مجبوب آنرا ترجیح می‌دهند.

این روش با طرح یک مدار تشیدید سری «نرمالیزه»^(۱) ، یعنی یک مدار تشیدید سری با یک سطح امپدانس مساوی ۱ اهم ، یک فرکانس تشیدید زاویه‌ای مساوی ۱ رادیان بر ثانیه و بهنای پاندکسری زیر شروع می‌شود:

$$(۱-۸\text{-۱}) \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

گیریم L_0 ، R_0 و C_0 مقادیر اجزاء مدار نرمالیزه باشند. از معادلات $(۱-۸\text{-الف})$ و $(۱-۸\text{-ب})$ داریم:

$$(۱-۸\text{-۲}) \quad R_0 = 1 \quad L_0 = Q \quad C_0 = \frac{1}{Q}$$

برای بدست آوردن مقادیر اجزاء مدار مورد نظر بایستی دو تصحیح انجام گیرد. ابتدا سطح امپدانس را به Z_0 میرسانیم و آنگاه فرکانس تشیدید را به ω_0 تغییر میدهیم. میتوان نشان

داد که مقاومت مطلوب با ضرب R_0 در Z_0 ، اندوکتانس با ضرب L_0 در $\frac{Z_0}{\omega_0}$ و ظرفیت

مطلوب با ضرب C_0 در $\frac{1}{Z_0 \omega_0}$ بدست می‌آید. بالاخره خواهیم داشت:

$$(۱-۸-الف) \quad R = Z_0$$

$$(۱-۸-ب) \quad L = \frac{Q Z_0}{\omega_0} = \frac{Z_0}{\Delta \omega}$$

$$(۱-۸-پ) \quad C = \frac{1}{Q \omega_0 Z_0} = \frac{\Delta \omega}{Z_0 \omega_0^2}$$

البته ، نتایج نهایی با معادلات (۱-۸) و (۲-۸) توافق دارند.

برای عمومیت طرح‌های نرمالیزه دو دلیل وجود دارد. اول اینکه هرگاه مهندسی در پایگانی^(۱) خود طرح نرمالیزه یک فیلتر میان‌گذر را داشته باشد (با مشخصات مطلوب خاص)، او در حقیقت مقادیر اجزاء را برای هر فیلتر میان‌گذری از این نوع با هرسطح اپیدانس دلخواه و با هر فرکانس میانی دلخواه بسهولت در اختیار دارد. دلیل دوم ساده بودن محاسبات عددی است زیرا جمع ، تفريح ، ضرب و تقسیم اعدادی که اندازه آنها کسری از واحد است بسیار ساده‌تر می‌باشند. بعلاوه خطاهای ناشی از روند کردن^(۲) اعداد که همیشه در محاسبات اتفاق می‌افتد بسیار کم اهمیت‌تر خواهد بود. مدارهایی که در عمل پانها برخورد می‌کنیم اخاب دارای مقاومتها بی درحدود چند صد اهم ، ظرفیت‌هایی در حدود چند پیکوفاراد و اندوکتانس‌هایی در حدود چند میکروهانتری و فرکانس‌هایی در حدود مگاهرتز هستند. میتوان نشان داد که در نتیجه نرمالیزاسیون اپیدانس و فرکانس ، این مقادیر اجزاء به حدود مقدار واحد رسیده و پناهاین محاسبات طولانی و خسته کننده تسبیتاً ساده‌تر می‌شوند.

اکنون می‌خواهیم قاعده عمومی را که با اعمال آن میتوان مقادیر اجزاء R و L و C و مطلوب یک شبکه دلخواه را از روی مقادیر اجزاء نرمالیزه N_r بدست آورد بیان کنیم. گیریم^(۲) خوب نرمالیزاسیون اپیدانس باشد و با عبارت دقیق تر گیریم:

$$r_n \triangleq \frac{\text{سطح امپدانس مطلوب}}{\text{سطح امپدانس طرح نرمالیزه شده}}$$

و گیریم Ω ضریب نرمالیزاسیون فرکانس باشد و یا عبارت دقیق‌تر گیریم:

$$\Omega_n \triangleq \frac{\text{فرکانس نمونه مطلوب}}{\text{فرکانس نمونه طرح نرمالیزه شده}}$$

دراینصورت، مقادیر اجزاء مطلوب چنین داده می‌شوند:

$$(8-1) \quad R = r_n R_0$$

$$(8-2) \quad L = \frac{r_n}{\Omega_n} L_0$$

$$(8-3) \quad C = -\frac{C_0}{r_n \Omega_n}$$

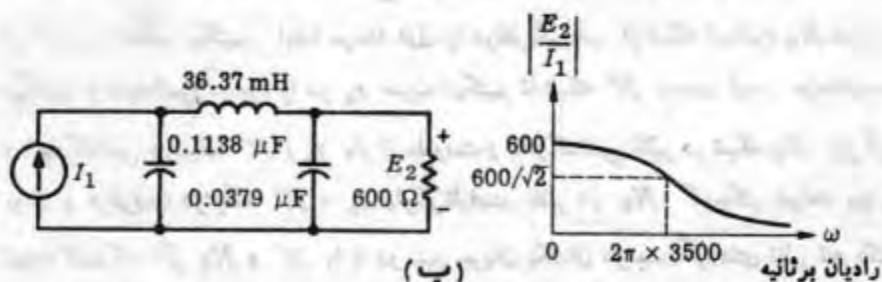
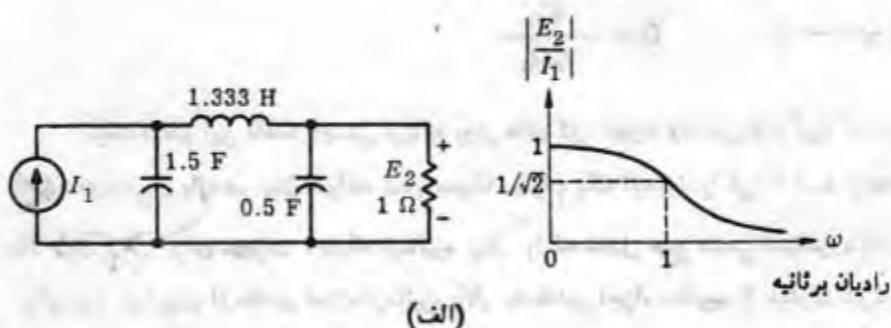
ایبات منظم این قاعده پایستی برباید روش‌های کلی تجزیه و تحلیل قرار گیرد که در فصل‌های دهم و یازدهم بیان خواهد شد. معهداً می‌توان یک توجیه ادراکی^(۱) از سه رابطه بالا بیان کرد. برای سهولت، شبکه نرمالیزه N_0 را که شامل هیچ متبعی نمی‌باشد در نظر می‌گیریم. پیش روی از مقادیر اجزاء نرمالیزه N_0 به مقادیر اجزاء مطلوب را می‌توان در دو مرحله انجام داد. در مرحله اول، سطح امپدانس را میزان میکنیم و در مرحله دوم مقیاس فرکانس را تنظیم میکنیم. ابتدا مرحله اول را در نظر بگیرید. از شبکه نرمالیزه N_0 شروع میکنیم و امپدانس هر جزء را در π ضرب میکنیم تا شبکه N' بدست آید. هر مقاومت و اندوکتانس در شبکه N' ، π بار از مقاومت و اندوکتانس نظیر در شبکه N_0 بزرگتر بوده و هر ظرفیت در شبکه N' ، π بار از ظرفیت نظیر در N_0 کوچکتر خواهد بود. توجه کنید که اگر N_0 و N' را با دو منبع جریان یکسان درجهت گره‌های نظیر تحریک کنیم آنگاه ولتاژ گره‌های N مساوی π برابر ولتاژ گره‌های نظیر در N_0 خواهد بود. مرحله دوم میزان کردن فرکانس می‌باشد. شبکه N' از تقسیم تمام اندوکتانس‌ها

نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها

و ظرفیت‌های شبکه N' بر Ω_0 بست می‌آید. توجه کنید که امپدانس هرشاخه شبکه N' در فرکانس ω_0 هنوز مساوی ω_0 برابر امپدانس شاخه نظیر شبکه N_0 در فرکانس ω_0 می‌باشد که در آن $\Omega_0 = \frac{\omega_0}{\omega}$ است. بنابراین هرگاه دو شبکه N' و N_0 درجهت گره‌های نظیر، بترتیب با دو منع جریان سینوسی با فرکانس‌های ω_0 و ω تحریک شوند و اگر هردو شبکه در حالت دائمی سینوسی باشند، آنگاه هر لتاژ جفت گردد N' با فازوری نمایش داده می‌شود که مساوی ω_0 برابر فازور نمایش دهنده ولتاژ جفت گرده نظیر در شبکه N_0 است.

مثال - شکل (۱ - ۸ الف) یک فیلتر پائین گذری^(۱) را نشان میدهد که امپدانس

$$\text{انتقالی}^{(۲)}(\omega) \text{ آن که با } \frac{E_2(j\omega)}{I_1(j\omega)}$$



شکل ۱ - ۸ - فیلتر پائین گذر که فرمالیزاسیون امپدانس و فرکانس را مشخص می‌کند.

(الف) طرح فرمالیزه شده (ب) طرح واقعی

$$\left| \frac{E_2}{I_1} \right|^2 = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

بعارت دیگر، ضریب تقویت فیلتر یعنی $\left| \frac{E_2}{I_1} \right|$ در $\omega = 0$ برابر یک و در $\omega = \infty$ برابر $\frac{1}{\sqrt{2}}$ بوده و هنگامیکه $\omega \rightarrow \infty$ ، بطوریکنواخت بسمت صفرمیل میکند، بهمین دلیل مدار یک فیلتر پائین گذر نامیده میشود. از روی شکل واضح است که امپدانس ورودی فیلتر ($\omega = 0$) برابر ۱ اهم است زیرا در حقیقت در فرکانس صفر امپدانس خازن‌ها بینهایت بوده (مدار باز) و امپدانس سلف‌ها صفر است (مدار اتصال کوتاه). فرض کنید میخواهیم در فرکانس $2\pi f = 100$ اهم و $\left| \frac{E_2}{I_1} \right|$ را مساوی $\frac{1}{\sqrt{2}}$ داشته باشیم. در اینصورت $\omega = 10^4$ و $2\pi \times 10^4 = 2 \times 10^3 \times 10^4 = 2 \times 10^7$ را مطلوب خواهد بود. مقادیر اجزاء مطلوب بسهولت از معادله $(6 - 8)$ بدست میابند. فیلتر مطلوب و پاسخ آن در شکل $(1 - 8)$ ب) نشان داده شده است.

با بیان نرماییزاسیون امپدانس، اولین مطالعه خود را درباره حالت دائمی سینوسی کامل کرده‌ایم. در فصل‌های بعد مرتبآ از روش‌های این فصل استفاده کرده و خواص توابع مدار را بررسی خواهیم کرد.

خلاصه

● یک شکل موج سینوسی (با فرکانس زاویده ω)

$$x(t) = A_m \cos(\omega t + \Phi)$$

را میتوان با یک فازور نمایش داد:

$$A \triangleq A_m e^{j\Phi}$$

که مطابق آن:

$$x(t) = \operatorname{Re}(A e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(A_m e^{j(\omega t + \Phi)})$$

- بالعکس، با داشتن فازور $A = A_m e^{j\Phi}$ و فرکانس زاویده‌ای ω ، میتوان شکل موج سینوسی $x(t)$ را بطور یکتا تعیین نمود. بنابراین:

$$\begin{aligned}x(t) &= \operatorname{Re}(A e^{j\omega t}) \\&= A_m \cos(\omega t + \Phi)\end{aligned}$$

- برای مدارهای خطی تغییر ناپذیر با زمان، اگر تمام فرکانس‌های طبیعی در نیمه پاژچهار صفحه فرکانس مختلط واقع باشند، گویند که مدار پایدار سجانی است.
- برای مدارهای خطی تغییر ناپذیر با زمان پایدار سجانی، پاسخ حالت دائمی سینوسی با پاسخ مدار به یک ورودی سینوسی وقتی $\omega \rightarrow 0$ تعریف می‌شود. حالت دائمی سینوسی به حالت اولیه مدار بستگی ندارد. پاسخ حالت دائمی سینوسی همان فرکانس سینوسی ورودی را دارد.

- تابع شبکه برای یک مدار خطی تغییر ناپذیر با زمان در حالت دائمی سینوسی با نسبت «فازور خروجی» به «فازور ورودی» تعریف می‌شود.
- امپدانس نقطه تحریک Z یک شبکه یک قطبی با اجزاء خطی تغییر ناپذیر با زمان، عبارت از تابع شبکه نظری برای یک ورودی منبع جریان و پاسخ ولتاژ می‌باشد و بنابراین مساوی نسبت فازور ولتاژ خروجی به فازور منبع جریان است.
- ادمیتانس نقطه تحریک Y یک شبکه یک قطبی با اجزاء خطی تغییر ناپذیر با زمان، عبارت از تابع شبکه نظری برای یک ورودی منبع ولتاژ و پاسخ جریان می‌باشد و بنابراین مساوی نسبت فازور جریان خروجی به فازور منبع ولتاژ است.
- ادمیتانس نقطه تحریک G یک شبکه یک قطبی N مساوی معکوس امپدانس نقطه تحریک Z شبکه N خواهد بود.
- امپدانس‌ها و ادمیتانس‌های نقطه تحریک برای اجزاء اصلی مدار چنین است:

	$Z(j\omega)$	$Y(j\omega)$
مقارمت	R	G
سلف	$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega L}$
خازن	$\frac{1}{j\omega C}$	$j\omega C$

● «ابیدانس» یک اتصال «سری» از شبکه‌های یک قطبی، مساوی مجموع ابیدانس‌های تک‌تک شبکه‌های یک قطبی می‌باشد. «ادمیتانس» یک اتصال «موازی» از شبکه‌های یک قطبی مساوی مجموع ادمیتانس‌های تک‌تک شبکه‌های یک قطبی است.

● با داشتن تابع شبکه $H(j\omega) = \frac{V_0}{I_s}$ ، اگر ورودی شکل موج سینوسی

$v_0(t) = |H(j\omega)| I_s \cos(\omega t + \Phi)$ باشد آنگاه پاسخ حالت دائمی سینوسی چنین است:

$$v_0(t) = |H(j\omega)| I_s \cos[\omega t + \Phi + \angle H(j\omega)]$$

یعنی، دامنه خروجی از ضرب کردن دامنه ورودی در اندازه تابع شبکه بدست می‌آید و فاز خروجی از اضافه کردن فاز تابع شبکه به فاز ورودی بدست می‌آید.

● برای ورودی مشخص منحنی‌های اندازه و فاز بمحاسبه ϕ را پاسخ فرکانس یک مدار گویند.

● در حالت دائمی سینوسی، اگر ولتاژ قطب و جریان قطب یک شبکه یک قطبی N چنین باشند:

$$v(t) = \operatorname{Re}(V e^{j\omega t})$$

$$i(t) = \operatorname{Re}(I e^{j\omega t})$$

آنگاه توان «متوسط» تحویل داده شده به شبکه یک قطبی چنین است:

$$P_{av} = \frac{1}{\pi} |V| |I| \cos(\angle V - \angle I)$$

$$= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re}(VI)$$

$$= \frac{1}{\pi} |I| \cdot \operatorname{Re}[Z(j\omega)]$$

$$= \frac{1}{\pi} |V| \cdot \operatorname{Re}[Y(j\omega)]$$

که در آن $Z(j\omega)$ و $Y(j\omega)$ بترتیب ابیدانس و ادمیتانس نقطه تحریک شبکه N می‌باشند.

نظریه اساس مدارها و شبکه‌ها

- در یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان درحالت دائمی، توان «متوسط» کل که توسط چند متبع سینوسی با فرکانس‌های «متناویت» بآن تحویل داده شود مساوی مجموع توانهای متوفی است که هر متبع اگر بتهابی مدار را تحریک می‌کرد بآن تحویل میداد.

مسائل

- ۱- نمایش‌های فازوری فازورهایی را که نشان‌دهنده توابع زمانی با مقدار حقیقی زیر می‌باشند، تعیین کنید:

$$10 \cos(2t + 20^\circ) + 8 \sin 2t \quad (\text{الف})$$

$$\sin(2t - 40^\circ) + \cos(2t + 40^\circ) \quad (\text{ب})$$

$$\cos t + \cos(t + 20^\circ) + \cos(t + 60^\circ) \quad (\text{پ})$$

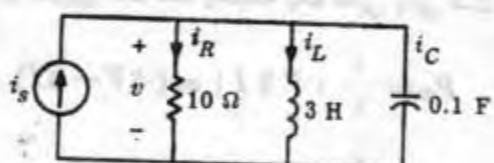
- ۲- محاسبه فازوری مدار خطی تغییرناپذیر با زمان نشان‌دهنده در شکل (مسئله ۲-۷) درحالت دائمی سینوسی است:

- (الف) فازورهای نشان‌دهنده توابع سینوسی از زمان زیر را محاسبه کنید:

$$v(t), i_R(t), i_L(t), i_C(t), I, I_R, I_L, I_C \quad (\text{V و } I)$$

- (ب) عبارتهای برای توابع زمانی با مقدار حقیقی $i_s(t)$ ، $i_R(t)$ ، $i_L(t)$ و $i_C(t)$

بنویسید و آنها را با مقیاس مناسب رسم کنید:



$$i_s(t) = 1 \cdot \cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$$

شکل (مسئله ۲-۷)

- ۳- مقاومت غیرخطی و هارمونیکها گیریم ۷ ولتاژ دوسریک مقاومت

غیرخطی با شخصیت زیر باشد:

$$v = 4 + 2i^2$$

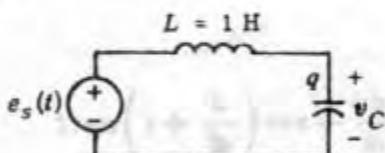
وقتی پیکتجریان $E = 155277 \text{ A}$ را = از داخل مقاومت غیرخطی میگذرد و لذت τ را محاسبه کنید (نتیجه را بر حسب مجموع میتوسی ها بیان کنید). چه فرکانس هایی در خروجی وجود دارند؟

۴ - خازن غیرخطی و هارمونیکهای فرعی مدار غیرخطی تغییرپذیر با زمان سولد هارمونیک فرعی^(۱) را که در شکل (مسئله ۴-۷) نشان داده شده است در نظر بگیرید. سلف خطی بوده و خازن دارای مشخصه زیر است:

$$v_c = \frac{1}{18} q + \frac{2}{27} q^3$$

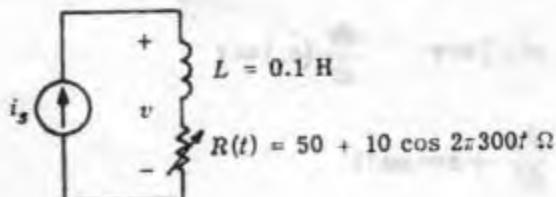
(الف) - تحقیق کنید که برای یک ورودی $e_s(t) = \frac{1}{4} \cos \omega t$ ولت، یک پاسخ بصورت $v_c(t) = 0.008 \left(\frac{t}{\tau} \right)^2$ کولم ب معادله دیفرانسیل را برمیآورد (توجه کنید که نوسان پار با «یک سوم» فرکانس منبع صورت میگیرد).

(ب) - برای پار پدست آمده در قسمت (الف) جریان درون منبع را محاسبه کنید.



شکل (مسئله ۴-۷)

۵ - مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان مدار خطی تغییرپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (مسئله ۴-۷) را در نظر بگیرید. وقتی جریان:



شکل (مسئله ۴-۷)

نظریه^۱ اساسی مدارها و شبکه‌ها

$$i_s(t) = 1 \cdot -\cos \left[2\pi \cdot t + \left(\frac{\pi}{4} \right) \right]$$

آمپر از مدار عبور می‌کند و تناز v را محاسبه کنید (نتیجه را بر حسب مجموع سینوسی‌ها بیان کنید).

۳- فازورها و معادلات دیفرانسیل جواب‌های حالت دائمی معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 1 \cdot x = \cos(2t + 45^\circ) \quad (\text{الف})$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 1 \frac{dx}{dt} + 1 \cdot x = \sin 2t \quad (\text{ب})$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 1 \frac{dx}{dt} + x = \left(\frac{d}{dt} + 1 \right) \cos 2t \quad (\text{پ})$$

۴- معادلات دیفرانسیل، جواب کامل و جواب حالت دائمی جواب کامل معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید. نشان دهید که آیا جواب حالت دائمی برای هر سورد وجود دارد.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = \left(\frac{d}{dt} + 1 \right) \cos 2t \quad (\text{الف})$$

$$x(0_-) = 1 \quad \frac{dx}{dt}(0_-) = -1 \quad (\text{ب})$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + x = \sin 2t \quad (\text{پ})$$

$$x(0_-) = 1 \quad \frac{dx}{dt}(0_-) = 2 \quad (\text{الف})$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \cos 2t \quad (\text{ب})$$

$$x(0_-) = 1 \quad \frac{dx}{dt}(0_-) = 0 \quad (\text{پ})$$

$$\frac{dx}{dt} + x = \cos t \quad (ت)$$

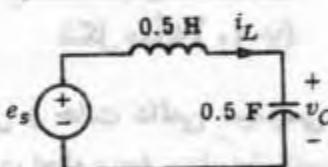
$$x(0_-) = 1 \quad \frac{dx}{dt}(0_-) = 0$$

$$\frac{dx}{dt} - \tau \frac{dx}{dt} + \tau x = \cos t \quad (ث)$$

$$x(0_-) = 1 \quad \frac{dx}{dt}(0_-) = -1$$

۸- فرکانس‌های طبیعی انتگاری و پاسخ حالت دائمی مدار نشان داده

شده در شکل (مسئله ۸-۷) از اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده است. ورودی e_s و پاسخ مدار v_C می‌باشد. با دانستن اینکه $m_1 = m_2 t = (i_1 - i_2) \omega$ ولت و در لحظه $t = 0$ ، حالت مدار $i_L = 2$ آمپر و $v_C = 1$ ولت است. پاسخ کامل را محاسبه کنید.



شکل (مسئله ۸-۸)

۹- امپدانس نقطه تحریک مدار نشان داده شده در شکل (مسئله ۹-۷)

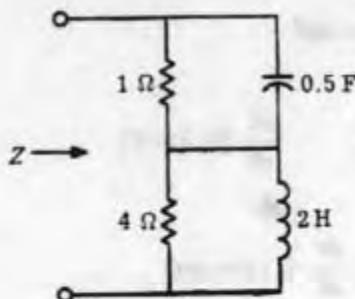
دارای اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان است.

(الف) - امپدانس نقطه تحریک $Z(j\omega)$ را تعیین کنید.

(ب) - مقادیر امپدانس را برای $\omega = 0$ و $\omega = 1$ رادیان بر ثانیه حساب کنید.

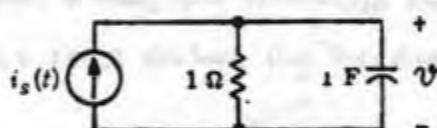
(امپدانس را بر حسب اندازه و زاویه مشخص کنید).

(ج) - با استدلال فیزیکی مقادیر امپدانس در $\omega = 0$ و $\omega = \infty$ را توضیح دهید.



شکل (مسئله ۷-۹)

- ۱۰ - جمع آثار در حالت دائمی برای مدار شکل (مسئله ۱۰-۷) ، با دانستن اینکه برای تمام مقادیر $t = 1 + 2\cos 2t$ میباشد ، ولتاژ حالت دائمی v را تعیین کنید .



شکل مسئله (۷-۱۰)

- ۱۱ - پاسخ کامل و حالت دائمی سینوسی کریم یک ولتاژ سینوسی $v_s(t) = 2\cos 1 \cdot 10^6 t$ ولت در لحظه $t=0$ بمدار خطی تغییرناپذیر با زمان LC نشان داده شده در شکل (مسئله ۱۱-۷) اعمال شود .

الف - با دانستن $i(0) = 1mA$ و $v(0) = 0$ برای $t \geq 0$ ، $i(t)$ را محاسبه و رسم کنید .

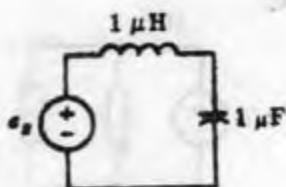
ب - فرض کنید که ماسکنترل فاز Φ سولد ولتاژ v را داشته باشیم یعنی فرض کنید:

$$v_s(t) = 2\cos(1 \cdot 10^6 t + \Phi)$$

مقدار مناسب Φ را اگر وجود داشته باشد چنان پیدا کنید که پاسخ بصورت زیر باشد :

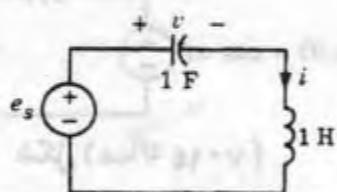
$$i(t) = 1 \cdot 10^{-4} \cos 1 \cdot 10^6 t + A \sin 1 \cdot 10^6 t$$

که در آن A مقدار ثابتی است .



شکل (مسأله ۷-۱۱)

۱۲ - مدار بی اتلاف و پاسخ حالت دائمی
مدار خطی تغیرناپذیر با زمان LC سری نشان داده شده در شکل (مسأله ۷-۱۲) را که در آن ورودی سینوسی $e_s(t) = E_m \cos(\omega t + \Phi)$ میباشد در نظر بگیرید. معادله دیفرانسیلی برای $v(t)$ را تشکیل داده و نشان دهید که ولتاژ v بصورت $v(t) = \text{Re}(V e^{j\omega t})$ نمیباشد که در آن V فازور نمایش دهنده (t) است توضیح دهد.



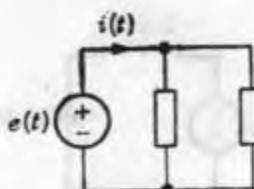
شکل (مسأله ۷-۱۲)

۱۳ - پاسخ حالت دائمی سینوسی برای تمام مقادیر t ولتاژ و جریان زیر داده شده اند.

$$e(t) = e \cdot \sin\left(1 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$$

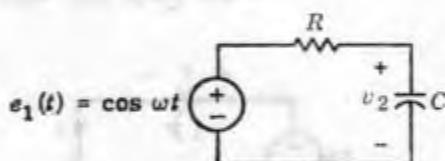
$$i(t) = i_0 \cdot \cos\left(1 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$$

اجزاء مناسب مدار خطی تغیرناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (مسأله ۷-۱۳) را پیدا کرده و مقادیر آنها را بر حسب اهم، هائزی و یا فاراد مشخص سازید.



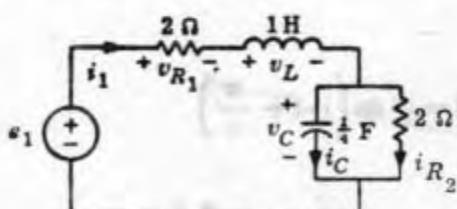
شکل (مسئله ۱۳ - ۷)

۱۴ - تابع شبکه و پاسخ حالت دائمی مدار نشان داده شده در شکل (مسئله ۱۴ - ۷) خطی و تغییرناپذیر با زمان بوده و در حالت دائمی سینوسی است. فرکانس ω که در آن $v_2(t)$ نسبت به $e_1(t)$ ، 45° عقب می‌افتد، بر حسب مقادیر R و C پیدا کنید. دامنه $(v_2(t))$ را در آن فرکانس بدست آورید.



شکل (مسئله ۱۴ - ۷)

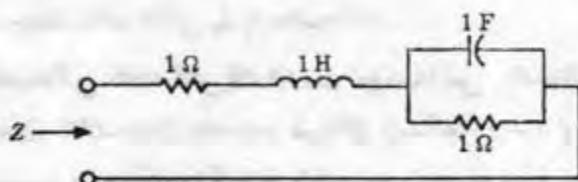
۱۵ - پیگرام فازوری با فرض $v_C(t) = \cos 2t$ ، یک دیاگرام فازوری بسازید که تمام ولتاژها و جریانهای مشخص شده در شکل (مسئله ۱۵ - ۷) را نشان دهد. ولتاژ حالت دائمی $(e_1(t))$ را پیدا کنید. (آنرا بصورت تابعی حقیقی از زمان نشان دهید).



شکل (مسئله ۱۵ - ۷)

۱۶ - اتصال سری امپدانسها امپدانس نقطه تحریک $Z(j\omega)$ مدار نشان داده شده در شکل (مسئله ۱۶ - ۷) را تعیین کنید. اگر یک منبع ولتاژ سینوسی

$v_0(t) = 1 + 0.0082t$ بديک شبکه يك قطبی اعمال شود ، جريان قطب را در حالت دائمی سینوسی تعیين کنيد.



شکل (مسأله ۱۶ - ۷)

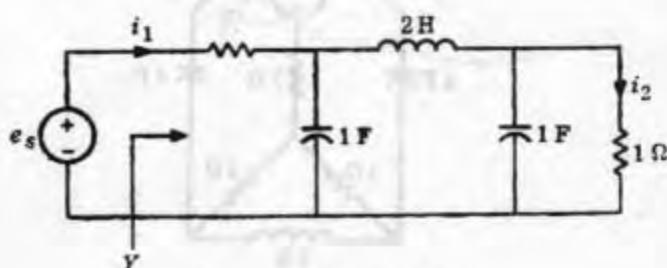
۱۷ - پاسخ فرکانس اندازه و فاز امپدانس نقطه تحریک $Z(j\omega)$ مدار شکل (مسأله ۱۶ - ۷) را بر حسب ω رسم کنيد. اگر منبع جريان $i_s(t) = 1 + \cos t + \cos 2t$ ب شبکه يك قطبی اعمال شود ، ولتاژ حالت دائمی قطب را پیدا کنيد.

۱۸ - مکان های امپدانس و ادمیتانس جزء های حقیقی و انگاری امپدانس $Z(j\omega)$ مدار شکل (مسأله ۱۶ - ۷) را تعیین کنيد. سوپتانس را به صورت تابعی از ω تعیین نموده و رسم کنيد. مکان امپدانس و مکان ادمیتانس شبکه يك قطبی را رسم نمایند.

۱۹ - مدار فردبانی و توابع شبکه برای مدار نزدبانی نشان داده شده در شکل (مسأله ۱۹ - ۷) :

(الف) - ادمیتانس نقطه تحریک $Y(j\omega)$ را تعیین کنيد.

(ب) - جريان حالت دائمی i_1 ، ناشی از منبع ولتاژ سینوسی $v_s(t) = 2\cos 2t$ را محاسبه کنيد.



شکل (مسأله ۱۹ - ۷)

(ب) - ادمیتانس انتقالی $Y_{21}(j\omega) = \frac{I_2}{E_s} = \frac{I_2}{E_s}$ را که در آن I_2 و E_s بترتیب

فازورهای نشان دهنده جریان سینوسی \dot{I}_2 و ولتاژ سینوسی \dot{E}_s میباشند تعیین کنید.

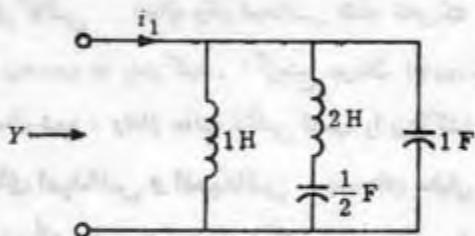
(ت) - جریان حالت دائمی \dot{I}_2 را محاسبه کنید.

۴۰ - ادمیتانس نقطه تحریک و رسم سوپیتانس ادمیتانس نقطه تحریک

$(j\omega)$ مدار بدون اتصال نشان داده شده در شکل (مساله ۲۰-۷) را تعیین کنید.

سوپیتانس را بر حسب ω رسم کنید اگر منبع ولتاژ سینوسی $e_s = \cos \omega t$ به شبکه یک قطبی

اعمال شود، درباره جریان i_1 در $0, 2, \infty, 1, \omega = 0$ چه میتوانید بگویید؟

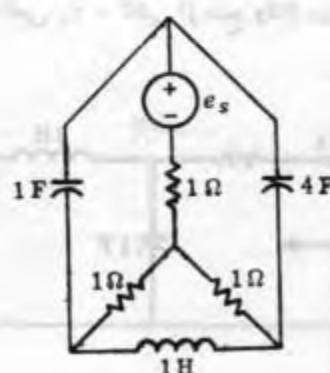


شکل (مساله ۲۰-۷)

۴۱ - مدار دوگان مدار دوگان نشان داده شده در شکل (مساله ۲۰-۷)

را تعیین کنید.

۴۲- تجزیه و تحلیل مش برای مدار نشان داده شده در شکل (مساله ۲۲-۷)



شکل (مساله ۲۲-۷)

تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی

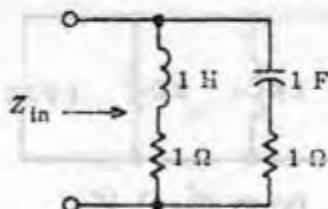
۴۵۳

جریان حالت دائمی سینوسی در سلف و ولتاژ حالت دائمی سینوسی در دو سرخازن ۱ فارادی را تعیین کنید. منبع ولتاژ ورودی $E = 50\sin \omega t$ میباشد.

۷۳ - تجزیه و تحلیل گره اتصال سری منبع ولتاژ و مقاومت شکل (مسئله ۲۲ - ۷) را به اتصال موازی یک منبع جریان و مقاومت تبدیل کنید. با استفاده از تجزیه و تحلیل گره، جریان حالت دائمی سینوسی در سلف و ولتاژ حالت دائمی سینوسی در دو سرخازن ۱ فارادی را بدست آورید.

۷۴ - امپدانس نقطه تحریک و توان (الف) - امپدانس ورودی Z_{in} را در فرکانس ω پیدا کنید.

(ب) - اگر ولتاژ ورودی $E = 100\sin \omega t$ بوده و مدار در حالت دائمی سینوسی باشد، توان لحظه‌ای ورودی به مدار (بصورت تابعی از زمان) چیست؟ (به شکل مسئله (۷ - ۲۴) رجوع شود).



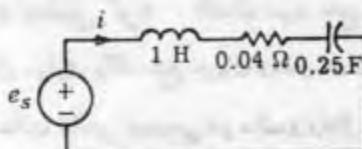
شکل (مسئله ۷ - ۲۴)

۷۵ - فازور، انرژی و توان مدار RLC سری نشان داده شده در شکل (مسئله ۷ - ۷) از اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده است.

الف - با استفاده از روش فازوری پاسخ حالت دائمی سینوسی θ را به ورودی $E = 50\sin \omega t$ ولت برای مقادیر $\omega = 200$ ، 400 و 2000 رادیان برثانیه حساب کنید. هرنتیجه را بر حسب تابع حقیقی از زمان نشان دهید.

ب - انرژی‌های ذخیره شده در سلف M و در سلف M را بصورت توابعی از زمان برای $\omega = 200$ و 400 رادیان برثانیه محاسبه کنید.

پ - توان متوسط تلف شده در مقاومت را برای $\omega = 2\pi \times 200$ رادیان برثانیه حساب کنید.

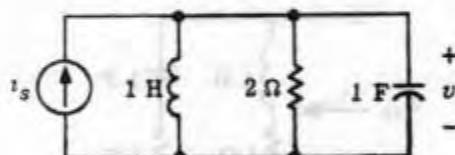


شکل (مسأله ۷-۲۵)

۷-۲۶- امپدانس، پاسخ زمانی و جمع آثار اجزاء مدار نشان داده شده در شکل

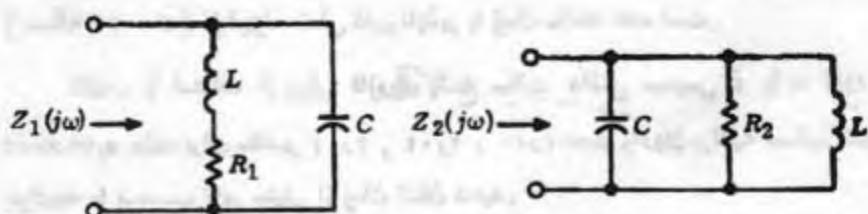
$$(مسأله ۷-۲۶) i_s = 2 \sin t + \cos \left(2t + \frac{\pi}{4} \right)$$

ولتاژ حالت دائمی v را بصورت تابعی از زمان محاسبه و رسم کنید. ایده اصلی روش خود را توضیح دهید.



شکل (مسأله ۷-۲۶)

۷-۲۷- پاسخ‌های فرکانس مدارهای تشذید شبکه‌های یک قطبی نشان داده شده در شکل (مسأله ۷-۲۷) را در نظر بگیرید. امپدانس‌های $Z_1(j\omega)$ و $Z_2(j\omega)$



$$\begin{aligned} L &= 10^{-3} \text{ H} & R_1 &= 10 \Omega \\ C &= 10^{-9} \text{ F} & R_2 &= 10^5 \Omega \end{aligned}$$

شکل (مسأله ۷-۲۷)

را محاسبه کنید. اگر تنها فرکانس هایی که در فاصله بین فرکانس تشدید و دو برابر آن قراردارند مورد نظر باشند، درباره مشکل های نسبی متغیری های $Z_1(j\omega)$ و $Z_2(j\omega)$ و منحنی های $Z_1(j\omega)$ و $Z_2(j\omega)$ چه میتوان گفت؟

۲۸ - مدار تشدید، Q و پاسخ فرکانس شبکه یک قطبی نشان داده شده در شکل (مسأله ۲۸-۷) از اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده است.

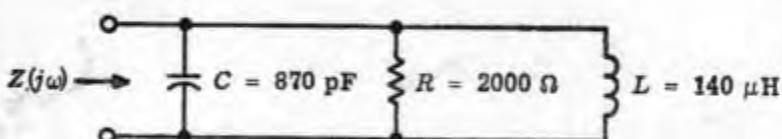
(الف) - فرکانس تشدید ω_0 و مقدار Q را محاسبه کنید.

(ب) - امپدانس نقطه تحریک $Z(j\omega)$ را حساب کنید.

(پ) - اندازه و زاویه فاز امپدانس را بطور ترسیمی برای این مقادیر $\frac{\omega}{\omega_0}$ محاسبه کنید:

$$\text{کنید: } 0, \frac{1}{1 + \frac{1}{2Q}}, \frac{1}{1 - \frac{1}{2Q}}, 1 + \frac{3}{2Q}, 1 - \frac{3}{2Q}$$

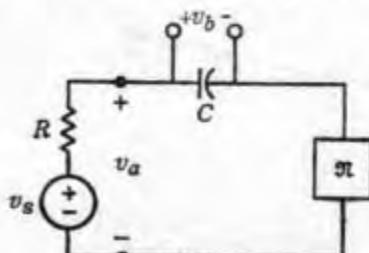
(ت) - از نتایج قسمت (پ) $Z(j\omega)$ را بر حسب $\frac{\omega}{\omega_0}$ و مقدار Q را محاسبه کنید.



شکل (مسأله ۲۸)

۲۹ - دیاگرام فازوری و توان مدار نشان داده شده در شکل (مسأله ۲۹-۷)

در حالت دائمی سینوسی کار میکند. مقادیر $(1000t + 60^\circ)$ و $v_a = 1000v_s = 6$ تعیین شده اند. اندازه امپدانس خازن در این فرکانس ۱۰ است

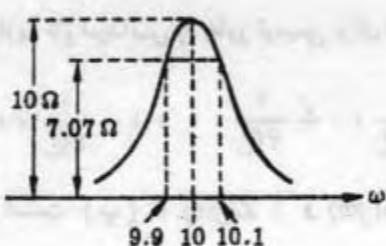


شکل (مسأله ۲۹)

امپانس (Z) شبکه یک قطبی N و توان ستوسط تحویل داده شده به N را تعیین کنید.

۳۰- پهنهای باند مدار تشدید ، طرح (الف) در شکل (ساله ۳۰ - ۷) منحنی تشدید $Z(j\omega)$ بر حسب اهم نسبت به ω بر حسب رادیان بر ثانیه [یک مدار RLC موازی نشان داده شده است. R و C و L را پیدا کنید.

(ب) - همین رفتار تشذید در نزدیکی های فرکانس مرکزی 20 kHz مورد نظر است و حداً کثر $|Z(j\omega)|$ باید $M\Omega$ باشد. مقادیر جدید R و L و C را بدست آورید.



شكل (مسائله ۷-۳۰)



مدارهای سه فاز

هدف از این فصل نشان دادن آن است که چرا مولدها و خطوط انتقال سه فاز در مدارهای سیستم‌های قدرت به کار برده می‌شوند. دلایل متعددی موجب برتری سیستم‌های سه فاز بر سیستم‌های تک فاز می‌شود. یک دلیل مهم این است که در یک سیستم تک فاز توان لحظه‌ای تحويل داده شده به یک بار ثابت نبوده و نوسان می‌کند؛ در حالی که در یک سیستم سه فاز این نوسانات توان، به مقدار قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد. دلیل مهم دیگر آن است که تولید انرژی الکتریکی به صورت سه فاز به مرتب راحت‌تر از تولید آن به صورت تک فاز است. به این دلایل و به دلایل متعدد دیگر، مدارهای سه فاز متعادل را در این فصل مختصرآ مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱- ملاحظات کلی

منتظر از این بخش توضیح آن است که چرا اکثر خطوط انتقال انرژی که در جاده‌های بین شهری دیده می‌شود دارای مشخصه‌های زیر است:

الف - ولتاژ بالا

ب - سه فاز (دارای سه سیم)

پ - تغذیه شده به وسیله مولدهای ac (در مقابل مولدهای dc)
کار با مولدهای جریان متناوب نسبت به مولدهای جریان دائم به مرتب راحت‌تر است، زیرا می‌توان به کمک ترانسفورماتورها، ولتاژهای ac را افزایش یا کاهش داد. به علاوه ترانسفورماتورها در فرکانس ۵۰ هرتز بسیار کارآمد بوده، عمل نگهداری چندانی لازم ندارند. ولتاژ تولید شده در مراکز تولید نیرو در حدود ۱۰ تا ۳۰ کیلوولت است. برای مسافت‌های طولانی، این مقدار توسط ترانسفورماتورها به چندین صد کیلوولت افزایش داده می‌شود و در مراکز مصرف مانند کارخانجات، ادارات و منازل مجدداً پایین آورده می‌شود.

در انتقال نیرو از ولتاژ بالا استفاده می‌شود، زیرا اتلاف توان متوسط در یک خط با امپدانس $P = \frac{1}{\pi} V_m I_m \cos(\phi) V - RI_m^2$ است. توان متوسط انتقال داده شده برابر $P = R + jX$ است. بنابراین برای یک توان انتقال داده شده P ، می‌توان توان تلف شده به صورت حرارت در خطوط انتقال را به سادگی با حذف I_m میان دو رابطه بالا به صورت زیر به دست آورد:

$$P_L = \frac{2RP^r}{V_m^r \cos^r(V - \Phi I)} \quad (1-1)$$

بنابراین برای یک خط انتقال مشخص (با R معین) و برای انتقال توان داده شده (با P معین) می‌توان با انتخاب مقدار بزرگی برای V_m (معمولًاً تاحد ۷۶۵ کیلوولت) و نزدیک نگهداشتن ضریب توان ($\cos(\Phi V - \Phi I)$ به عدد ۱، اتلاف توان را کاهش داد و بدیهی است هر چه مقدار V_m بالاتر باشد، اتلاف توان کمتر خواهد بود.

به دو دلیل اصلی، ساختن مولدہای ac در عمل راحت‌تر از ساختن مولدہای dc است:

الف - سیم‌پیچی‌های ولتاژ بالا و جریان بالا روی استاتور که ثابت است، قرار می‌گیرند.

ب - ولتاژ القا شده در استاتور طبعاً نوسانی است و با تغییر شکل دادن قطبها و/یا طراحی سیم‌پیچی‌ها می‌توان ولتاژ القا شده را تقریباً به صورت سینوسی درآورد.

سرانجام، مدارهای سه فاز به دلایل اقتصادی و مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند. از جمله این دلایل عبارتند از:

الف - تحت بار متعادل، گشتاور روی مولد ثابت است و بنابراین ارتعاشی وجود ندارد.

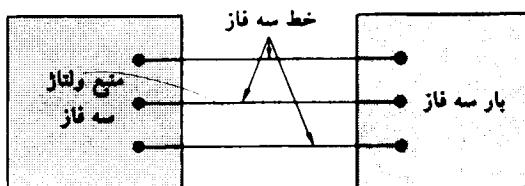
ب - ایجاد میدان مغناطیسی دوران با سه فاز راحت‌تر است و بنابراین امکان ساختن موتورهای القایی ارزان‌تر فراهم می‌شود.

پ - با سیستم سه فاز ac می‌توان در مقدار آلومینیوم خطوط انتقال صرفه‌جویی کرد. تحت بارهای متعادل مشاهده خواهیم کرد که به جای شش سیم فقط سه سیم مورد نیاز است.

این سه مشاهده اخیر در بخش‌های بعدی مورد بحث قرار خواهند گرفت.

۲- مدارهای سه فاز متعادل

تولید، انتقال، توزیع و مصرف حجم زیادی از انرژی الکتریکی، توسط مدارهای سه فاز صورت می‌گیرد. تحلیل جامع سیستم‌های سه فاز خود درس جداگانه‌ای است و نمی‌توان امیدوار شد که در یک فصل به طور کامل بیان شود. خوشبختانه، تنها درک رفتار حالت دائمی سینوسی مدارهای سه فاز متعادل برای مهندسینی که نمی‌خواهند متخصص قدرت شوند، کاملاً کافی است می‌کند. در قسمتهای بعدی بحث، منظور خود را از مدارهای متعادل بیان خواهیم کرد. عجالتاً متذکر می‌شویم که به دلایلی بحث خود را به مدارهای متعادل محدود کرده‌ایم. نخست اینکه به دلایل اقتصادی، سیستم‌های سه فاز چنان طراحی می‌شوند که در حالت متعادل کار کنند. بدین معنی که تحت شرایط کار طبیعی، این مدارهای سه فاز به مدارهای متعادل بسیار نزدیک هستند و به دست آوردن جوابی که متعادل بودن کامل را فرض می‌کند قابل توجیه است. دلیل دوم اینکه، می‌توان مسائلی را که متناسبن نوعی شرایط عملکردی نامتعادل است با روشنی که به اصطلاح روش مولفه‌های متقاضی گفته می‌شود حل کرد، که این امر بستگی کاملی به درک عمیق عملکرد سیستم‌های متعادل دارد. گرچه ما در مورد روش مولفه‌های متقاضی بحث نخواهیم



شکل ۱-۲ مدار سه فاز اساسی.

کرد، درک عملکرد متعادل، به عنوان نقطه آغازین برای روش‌های پیشرفت، در تحلیل نوع خاصی از شرایط نامتعادل به کار می‌رود.

ساختار اساسی یک سیستم سه فاز، مرکب از منابع ولتاژی است که از طریق ترانسفورماتور و خطوط انتقال به بارها وصل می‌شوند. می‌توان مسئله را به تحلیل مداری که شامل یک منبع ولتاژ وصل شده به یک بار از طریق یک خط انتقال است، تقلیل داد. حذف ترانسفورماتور به عنوان یک عنصر در سیستم، بدون آنکه درک اساسی محاسبات موجود را به مخاطره بیندازد، بحث راساده‌تر می‌نماید. مدار اساسی در شکل (۱-۲) نشان داده شده است. برای آنکه تحلیل مداری از این نوع را آغاز کنیم باید مشخصات یک دسته از ولتاژهای سینوسی سه فاز متعادل را درک کنیم.

۱-۲ ولتاژهای سه فاز متعادل

دسته‌ای از ولتاژهای سه فاز متعادل مشتمل بر سه ولتاژ سینوسی است که دارای فرکانس و اندازه یکسانی بوده، اماً دقیقاً اختلاف فازی به مقدار 120° با یکدیگر دارند. در مطالعه مدارهای سه فاز روال عادی این است که به سه فاز، با a ، b و c اشاره کنیم. همچنین فاز a اغلب به عنوان فاز مبدأ به کار گرفته می‌شود. به سه ولتاژی که دسته سه فاز را تشکیل می‌دهند ولتاژ فاز a ، ولتاژ فاز b و ولتاژ فاز c گفته می‌شود.

از آنجایی که ولتاژهای فاز با یکدیگر 120° اختلاف فاز دارند، دو رابطه فازی می‌تواند میان ولتاژ فاز a و ولتاژهای فازهای b و c وجود داشته باشد. یک امکان آن است که ولتاژ فاز b به مقدار 120° از ولتاژ فاز a عقب بیفتد که در این صورت ولتاژ فاز c باید به مقدار 120° از ولتاژ فاز a جلو بیفتد. این رابطه فازی را دنباله فازی abc یا دنباله فازی مثبت گویند. تنها امکان نوع دیگر آن است که ولتاژ فاز b از ولتاژ فاز a به اندازه 120° جلو بیفتد که در این صورت ولتاژ فاز c باید به مقدار 120° از ولتاژ فاز a عقب بیفتد. این رابطه فازی را دنباله فازی acb یا دنباله فازی منفی گویند. در نمایش فازوری، دو دسته ممکن از ولتاژهای سه فاز متعادل عبارتند از:

$$\begin{aligned} V_a &= V_m \angle 0^\circ \\ V_b &= V_m \angle -120^\circ \\ V_c &= V_m \angle +120^\circ \end{aligned} \quad (1-2)$$

و:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_a &= V_m \angle 0^\circ \\ \mathbf{V}_b &= V_m \angle +120^\circ \\ \mathbf{V}_c &= V_m \angle -120^\circ \end{aligned} \quad (2-2)$$

دنباله فازی و لتاژهای داده شده در معادلات (۱-۲) دنباله فازی abc یا مثبت می‌باشد. دنباله فازی و لتاژهای داده شده در معادلات (۲-۲) دنباله فازی acb یا منفی است. نمایش دیاگرام فازوری دسته و لتاژهای داده شده در معادلات (۱-۲) و (۲-۲) در شکل (۲-۲) نشان داده شده است. با حرکت روی شکل در جهت عقربه‌های ساعت، می‌توان دنباله فازی را با توجه به ترتیب زیرنویسها تعیین کرد. این حقیقت که یک مدار سه فاز می‌تواند یکی از دو حالت دنباله فازی را داشته باشد، مشخصه مهمی است که وقتی دو مدار جداگانه، به طور موازی به هم وصل می‌شوند باید در نظر گرفته شود.

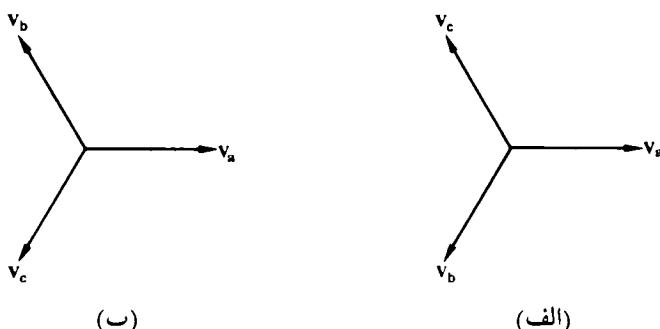
مشخصه مهم دیگر یک دسته و لتاژ سه فاز متعادل این است که مجموع و لتاژها برابر صفر است. بنابراین با به کار بردن معادلات (۱-۲) یا (۲-۲) داریم:

$$\mathbf{V}_a + \mathbf{V}_b + \mathbf{V}_c = 0 \quad (3-2)$$

به دلیل این که مجموع فازورهای و لتاژها برابر صفر است، مجموع و لتاژهای لحظه‌ای نیز برابر صفر است. یعنی:

$$v_a + v_b + v_c = 0 \quad (4-2)$$

مشاهده قابل توجه دیگر این است که اگر ما دنباله فازی و یکی از و لتاژهای دسته را بدانیم، تمام و لتاژهای دسته را می‌دانیم. بنابراین در یک سیستم سه فاز متعادل، می‌توان برروی محاسبه و لتاژ (یا جریان) یک فاز مرکز نمود. زیرا هنگامی که کمیت یک فاز را بدانیم، به طور خودکار کمیت متناظر را در دو فاز دیگر می‌دانیم.



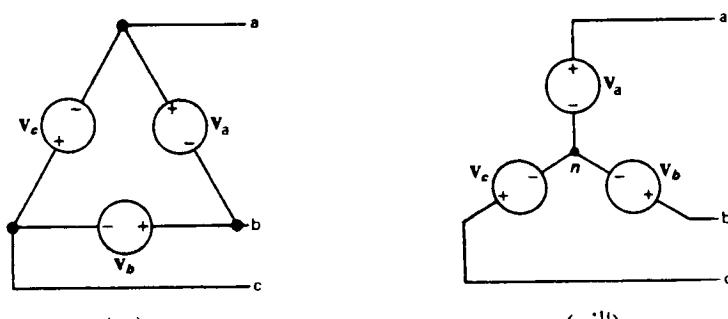
شکل ۲-۲. دیاگرام فازوری یک دسته و لتاژهای سه فاز متعادل: (الف) دنباله abc یا دنباله مثبت؛ (ب) دنباله acb یا دنباله منفی.

۴-۲ منابع ولتاژ سه فاز

منابع ولتاژ سه فاز مرکب از مولدهایی است که سیم‌پیچی جداگانه توزیع شده بر روی اطراف استاتور دارند. هر سیم‌پیچ یک فاز مولد را تشکیل می‌دهد. روتور مولد، یک آهنربای الکتریکی است که با سرعت همزمان توسط یک گرداننده اصلی مانند توربین بخار یا گازی چرخانده می‌شود. وقتی که آهنربای الکتریکی ضمن دوران از مقابله سر سیم‌پیچ می‌گذرد، یک ولتاژ سینوسی در هر سیم‌پیچ القا می‌شود. سیم‌پیچ‌های فاز چنان طراحی شده‌اند که ولتاژ سینوسی القا شده در آنها از لحاظ اندازه یکسان بوده و دقیقاً اختلاف فازی به مقدار 120° دارند. چون سیم‌پیچ‌های فاز در مقابل آهنربای الکتریکی دوار ساکن هستند، فرکانس ولتاژ القا شده در هر سیم‌پیچ یکسان است.

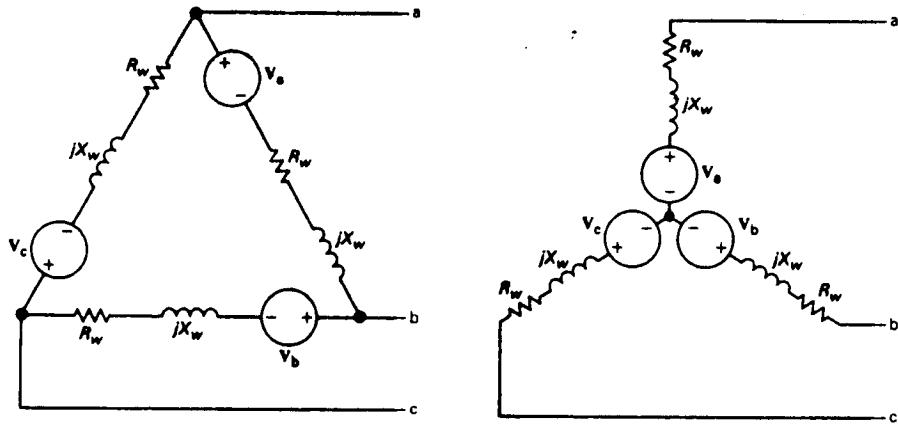
معمولآً امپدانس هر سیم‌پیچ فاز در یک مولد سه فاز، در مقایسه با سایر امپدانس‌های موجود در مدار بسیار کوچک است. از این‌رو هر سیم‌پیچ فاز را می‌توان در یک مدار الکتریکی به طور تقریبی به صورت یک منبع ولتاژ سینوسی ایده‌آل، مدل‌سازی نمود. برای تشکیل منبع سه فاز دو راه برای به هم پیوستن سیم‌پیچ‌های فاز جداگانه وجود دارد. سیم‌پیچ‌ها را می‌توان یا به صورت اتصال ستاره یا وا (Y) یا به صورت اتصال مثلث یا دلتا (Δ) به هم وصل کرد. اتصالات Y و Δ در شکل (۳-۲) نشان داده شده است، که در آن برای مدل‌سازی سیم‌پیچ‌های فاز یک مولد سه فاز، از منابع ولتاژ ایده‌آل استفاده شده است. گره مشترک در اتصال منابع به صورت Y در شکل (۳-۲ الف) با علامت n نشان داده شده است و به عنوان سر خنثی منبع گفته می‌شود. برای اتصالات خارجی ممکن است سر خنثی در دسترس باشد یا نباشد.

اگر امپدانس هر سیم‌پیچ فاز قابل صرفنظر نباشد، منبع سه فاز با اضافه کردن امپدانس سیم‌پیچ به طور سری با منابع ولتاژ سینوسی ایده‌آل، مدل‌سازی می‌شود. از آنجایی که تمام سیم‌پیچ‌های ماشین ساختمان یکسانی دارند، فرض می‌کنیم که امپدانس سیم‌پیچ‌ها یکسان باشد. امپدانس سیم‌پیچ مولدهای سه فاز القایی است. مدل یک منبع سه فاز شامل امپدانس‌های سیم‌پیچ در شکل (۴-۲) نشان داده شده است که در آن R_w مقاومت سیم‌پیچ و X_w راکتانس القایی سیم‌پیچ است.



شکل ۳-۲ دو اتصال اصلی منابع ولتاژ سه فاز ایده‌آل: (الف) منبع وصل شده به صورت Y ؛

(ب) منبع وصل شده به صورت Δ .



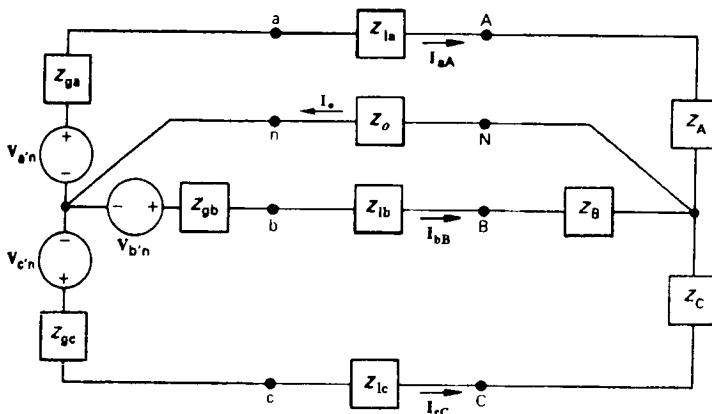
شکل ۴-۲ مدلی از یک منبع سه فاز با امپدانس‌های سیم پیچی: (الف) منبع وصل شده به صورت Δ ؛ (ب) منبع وصل شده به صورت Y .

به علت اینکه یک منبع ولتاژ سه فاز می‌تواند به صورت Y یا به صورت Δ وصل شده باشد و بار سه فاز نیز می‌تواند به صورت Y یا Δ وصل شده باشد، مدار اساسی شکل (۱-۲) می‌تواند چهار صورت متفاوت به خود بگیرد. چهار ترتیب ممکن عبارتند از: (۱) منبع وصل شده به صورت Y و بار وصل شده به صورت Y ؛ (۲) منبع وصل شده به صورت Y و بار وصل شده به صورت Δ ؛ (۳) منبع وصل شده به صورت Δ و بار وصل شده به صورت Y ؛ (۴) منبع وصل شده به صورت Δ و بار وصل شده به صورت Δ .

ما تحلیل مدارهای سه فاز را به صورت اول آغاز می‌کنیم. پس از تحلیل مدار $Y-Y$ ، نشان خواهیم داد که چگونه در مدارهای متعادل، صورتهای دیگر را می‌توان به مدار معادل به صورت $Y-Y$ تبدیل کرد. به عبارت دیگر، تحلیل مدار $Y-Y$ کلید حل تمام صورتهای سه فاز متعادل دیگر است.

۳-۲ تحلیل مدار $Y-Y$

تحلیل خود را از مدار $Y-Y$ با فرض نامتعادل بودن آن آغاز می‌کنیم! این کار را عمدآً انجام می‌دهیم تا نشان دهیم که منظور ما از متعادل بودن مدار سه فاز چیست و نتایج متعادل بودن در تحلیل مدار چگونه است. مدار کلی $Y-Y$ در شکل (۵-۲) نشان داده شده است که در آنجا سیم چهارمی هم گره خنثی منبع را به گره خنثی بار وصل می‌کند. سیم چهارم تنها در ترکیب $Y-Y$ امکان‌پذیر است. همچنین برای سهولت رسم دیاگرام‌ها، اتصالات Y را به صورت T ‌های خوابیده نشان داده‌ایم. در شکل (۵-۲)، Z_{ga} ، Z_{gb} و Z_{gc} نشان دهنده امپدانس‌های درونی متناظر با هر فاز سیم پیچی منابع ولتاژ هستند. Z_{la} ، Z_{lb} و Z_{lc} نشان دهنده امپدانس‌های درونی متناظر با هر فاز سیم پیچی منابع ولتاژ هستند.



شکل ۵-۲ یک سیستم سه فاز Y.

و Z_{lc} نشان دهنده امپدانس هر سیم خط فازی است که منبع را به بار وصل می‌کند. Z_o امپدانس سیم خنثی است که گره خنثی منبع را به گره خنثی بار وصل می‌کند. Z_A ، Z_B و Z_C نشان دهنده امپدانس هر فاز بار هستند.

مدار شکل (۵-۲) را می‌توان با یک معادله ولتاژ گره تنها توصیف کرد. با به کار بردن گره خنثی منبع به عنوان گره مینا و با فرض V_N به عنوان ولتاژ گره میان گره‌های N و n معادله ولتاژ گره را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\frac{V_N}{Z_o} + \frac{V_N - V_{a'n}}{Z_A + Z_{la} + Z_{ga}} + \frac{V_N - V_{b'n}}{Z_B + Z_{lb} + Z_{gb}} + \frac{V_N - V_{c'n}}{Z_C + Z_{lc} + Z_{gc}} = 0. \quad (5-2)$$

قبل از تحلیل بیشتر معادله (۵-۲)، اندکی مکث کرده و ملاحظه کنید که روش‌های تحلیل مدار بحث شده در فصلهای قبل مستقیماً به مدارهای سه فاز قابل اعمال هستند. از این‌رو معرفی روش‌های تحلیلی جدید برای تحلیل مدارهای سه فاز لازم نیست. لیکن به طوری که در بقیه این فصل خواهیم دید، اگر یک مدار سه فاز، متعادل باشد، می‌توان بعضی روش‌های تحلیلی میان بر مهم بررسی رفتار سیستم ارائه داد.

مدار شکل (۵-۲) یک مدار سه فاز متعادل است، اگر تمام شرایط زیر برقرار باشد:

$V_{b'n}$ ، $V_{c'n}$ و $V_{a'n}$ یک دسته ولتاژهای سه فاز متعادل تشکیل دهنند. -۱

$$Z_{ga} = Z_{gb} = Z_{gc} \quad -2$$

$$Z_{la} = Z_{lb} = Z_{lc} \quad -3$$

$$Z_A = Z_B = Z_C \quad -4$$

هیچ محدودیتی بر روی امپدانس سیم خنثی (Z_o) وجود ندارد. مقدار آن هیچ تاثیری بر روی متعادل بودن یا نامتعادل بودن سیستم ندارد.

اگر سیستم متعادل باشد معادله (۵-۲) بیان می‌کند که V_N باید برابر صفر باشد. برای نشان دادن این مطلب فرض کنید:

$$Z_\phi = Z_A + Z_{la} + Z_{ga} \quad (6-2)$$

در این صورت معادله (۵-۲) را دوباره به صورت زیر می‌نویسیم:

$$V_N \left(\frac{1}{Z_\phi} + \frac{3}{Z_\phi} \right) = \frac{V_{a'n} + V_{b'n} + V_{c'n}}{Z_\phi} \quad (7-2)$$

سمت راست معادله (۷-۲) برابر صفر است زیرا بنابراین فرض، صورت آن یک دسته ولتاژهای سه فاز متعادل بوده و Z_ϕ برابر صفر نمی‌باشد. تنها مقدار V_N که در معادله (۷-۲) صدق می‌کند، صفر است. از این رو برای یک مدار سه فاز متعادل داریم:

$$V_N = 0 \quad (8-2)$$

معادله (۸-۲) یک نتیجهٔ فوق العاده مهم است. اگر V_N صفر باشد، هیچ اختلاف پتانسیلی میان گره خنثی منبع (n) و گره خنثی بار (N) وجود ندارد. از این‌رو جریان گذرنده از سیم خنثی برابر صفر است. بنابراین می‌توان سیم خنثی را از یک مدار $\Sigma - \Sigma$ متعادل حذف نمود ($I_a = I_b = 0$) یا اینکه آن را با یک سیم اتصال کوتاه کامل میان گره‌های n و N جایگزین کرد ($V_N = 0$). در مدل‌سازی مدارهای سه فاز متعادل هر دو روش را به راحتی به کار می‌بریم.

اکنون توجه خود را به این مطلب معطوف می‌کنیم که شرط متعادل بودن مدار چه تأثیری بر روی سه جریان خط می‌گذارد. مستقیماً از شکل (۵-۲) نتیجه می‌شود که اگر سیستم متعادل باشد، سه جریان خط چنین خواهد بود:

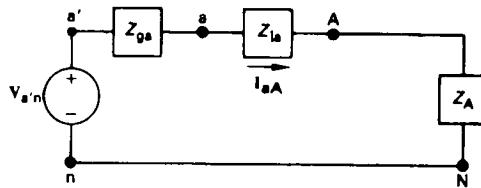
$$I_{aa} = \frac{V_{a'n} - V_N}{Z_A + Z_{la} + Z_{ga}} = \frac{V_{a'n}}{Z_\phi} \quad (9-2)$$

$$I_{bb} = \frac{V_{b'n} - V_N}{Z_B + Z_{lb} + Z_{gb}} = \frac{V_{b'n}}{Z_\phi} \quad (10-2)$$

$$I_{cc} = \frac{V_{c'n} - V_N}{Z_C + Z_{lc} + Z_{gc}} = \frac{V_{c'n}}{Z_\phi} \quad (11-2)$$

از این معادلات نتیجه می‌گیریم که در یک سیستم سه فاز متعادل، سه جریان خط، یک دسته جریانهای سه فاز متعادل تشکیل می‌دهند. یعنی جریان در هر خط از لحظه دامنه و فرکانس یکسان بوده و دقیقاً به اندازه 120° با دو جریان دو خط دیگر اختلاف فاز خواهد داشت. بنابراین اگر جریان I_{aa} را محاسبه کنیم، می‌توانیم جریانهای خط I_{bb} و I_{cc} را بدون محاسبات اضافی بنویسیم. با این بیان اظهار می‌داریم که دنبالهٔ فاز نیز معلوم است.

با به کار بردن معادله (۹-۲) می‌توان مدار متعادل تک فاز مدار سه فاز متعادل $\Sigma - \Sigma$ را رسم کرد. از معادله (۹-۲) نتیجه می‌شود که جریان در فاز a به سادگی برابر ولتاژ ایجاد شده در فاز a می‌بیچ



شکل ۶-۲ مدار معادل تک فاز.

مولد تقسیم بر امپدانس کل فاز a مدار است. از این رو معادله (۶-۲)، مدار ساده شکل (۶-۲) را توصیف می‌کند که در آن سیم خنثی توسط یک مدار اتصال کوتاه کامل جایگزین شده است. تذکر یک نکته احتیاطی در اینجا لازم است. جریان در سیم خنثی در شکل (۶-۲) برابر جریان در سیم خنثی در مدار سه فاز متعادل نیست. جریان در سیم خنثی چنین است:

$$I_e = I_{aA} + I_{bB} + I_{cC} \quad (۱۲-۲)$$

در حالی که جریان در سیم خنثی در شکل (۶-۲) برابر I_{aA} است. از این رو مدار شکل (۶-۲) مقدار درست جریان خط را به دست می‌دهد، لیکن تنها مولفه فاز a جریان سیم خنثی را مشخص می‌کند. هر موقع که مدار معادل تک فاز شکل (۶-۲) قابل اعمال باشد، جریانهای خط، یک دسته سه فاز متعادل تشکیل داده، سمت راست معادله (۱۲-۲) مجموعی برابر صفر دارد.

وقتی که ما جریانهای خط در شکل (۵) را بدانیم، محاسبه هر ولتاژ مورد نظر در آن شکل کار نسبتاً ساده‌ای است. کمیتهای مورد نظر ولتاژ خط نسبت به خط دیگر و ولتاژ خط نسبت به خنثی می‌باشند. ما این روابط را در سرهای بار به دست خواهیم آورد؛ اما نتایج به دست آمده، در سرهای منبع نیز قابل اعمال خواهد بود. ولتاژ خط به خط در سرهای بار بر حسب ولتاژ خط به خنثی در سرهای بار چنین است:

$$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{AN} - \mathbf{V}_{BN} \quad (۱۳-۲)$$

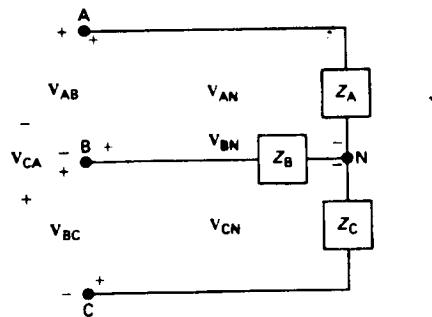
$$\mathbf{V}_{BC} = \mathbf{V}_{BN} - \mathbf{V}_{CN} \quad (۱۴-۲)$$

و:

$$\mathbf{V}_{CA} = \mathbf{V}_{CN} - \mathbf{V}_{AN} \quad (۱۵-۲)$$

طرز نمایش دو زیرنویس در معادلات ولتاژ نشان دهنده افت ولتاژ از زیرنویس اول تا زیرنویس دوم می‌باشد. روابط داده در معادلات (۱۳-۲) تا (۱۵-۲) در شکل (۷-۲) نشان داده شده است. از آنجایی که ما علاقه‌مند به حالت متعادل هستیم، سیم خنثی را از شکل حذف کردیم.

برای نشان دادن ارتباط میان ولتاژهای خط به خط و خط به خنثی، یک دنباله فازی مثبت یا دنباله abc را فرض می‌کنیم. به طور دلخواه، ولتاژ خط به خنثی فاز a را به عنوان مرجع انتخاب می‌کنیم. از این رو:



شکل ۷-۲ ولتاژهای خط به خط و خط به خنثی.

$$V_{AN} = V_\phi \angle 0^\circ \quad (16-2)$$

$$V_{BN} = V_\phi \angle -120^\circ \quad (17-2)$$

و:

$$V_{CN} = V_\phi \angle +120^\circ \quad (18-2)$$

که در آن V_ϕ نشان دهنده اندازه ولتاژ خط به خنثی است. با جایگزینی معادلات (۱۶-۲) تا (۱۸-۲) به ترتیب در معادلات (۱۳-۲) تا (۱۵-۲) به دست می‌آوریم:

$$V_{AB} = V_\phi \angle 0^\circ - V_\phi \angle -120^\circ = \sqrt{3} V_\phi \angle 30^\circ \quad (19-2)$$

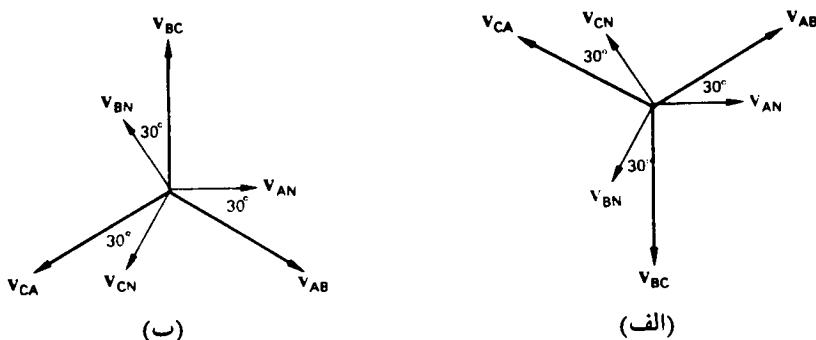
$$V_{BC} = V_\phi \angle -120^\circ - V_\phi \angle 120^\circ = \sqrt{3} V_\phi \angle -90^\circ \quad (20-2)$$

و:

$$V_{CA} = V_\phi \angle 120^\circ - V_\phi \angle 0^\circ = \sqrt{3} V_\phi \angle 150^\circ \quad (21-2)$$

معادلات (۱۹-۲) تا (۲۱-۲) نشان می‌دهند که: (۱) اندازه ولتاژ خط به خط $\sqrt{3}$ برابر اندازه ولتاژ خط به خنثی است. (۲) ولتاژهای خط به خط یک دسته ولتاژهای سه فاز متعادل تشکیل می‌دهند. (۳) دسته ولتاژهای خط به خط از دسته ولتاژهای خط به خنثی 30° جلو می‌افتد. این موضوع را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم که نشان دهد برای یک دنباله فازی منفی یا دنباله acb تنها تغییر این است که دسته ولتاژهای خط به خط از دسته ولتاژهای خط به خنثی به مقدار 30° عقب می‌افتد. در دیاگرام‌های فازوری شکل (۸-۲) این روابط خلاصه شده‌اند. بنابراین در یک سیستم متعادل اگر ولتاژ خط به خنثی در نقطه‌ای از مدار معلوم باشد، ولتاژ خط به خط نیز در همان نقطه مدار معلوم است و برعکس.

قبل از تشریح محاسبات سه فاز متعادل با یک مثال عددی، بعضی توضیحات اضافی درباره اصطلاحات را بیان می‌کنیم. در یک سیستم Y - Y ولتاژ خط به خنثی ولتاژ فاز نیز خوانده می‌شود و برای اختصار ولتاژ خط به خط ولتاژ خط نیز خوانده خواهد شد. جریان فاز به صورت جریان در هر فاز بار، یا در سرهای منبع مدار، جریان در هر فاز مولد تعریف می‌شود. جریان خط به صورت جریان در هر



شکل ۸-۲ دیاگرام فازوری نشان دهنده ارتباط میان ولتاژهای خط به خط و خط به خنثی در یک سیستم متعادل: (الف) دنباله abc، (ب) دنباله acb.

فاز خط تعریف می‌شود. برای ساختار Y - Y جریان فاز و جریان خط یکسان است. از آنجایی که سیستم‌های سه فاز برای کار کردن با توانهای الکتریکی با حجم بالا طراحی می‌شوند، تمام مشخصات ولتاژها و جریانها و محاسبات آنها بر حسب مقادیر rms بیان می‌شود. بنابراین هنگامی که یک خط انتقال سه فاز به صورت 345 kV بیان می‌شود، مقدار نامی rms ولتاژ خط به خط برابر 34500 V ولت است. دراین فصل تمام ولتاژها و جریانها بر حسب rms بیان می‌شوند. بالاخره حرف یونانی ϕ برای مشخص کردن کمیت هر فاز به مقدار زیادی در نوشته‌ها به کار می‌رود. بنابراین V_ϕ ، I_ϕ ، Z_ϕ و Q_ϕ به ترتیب به صورت ولتاژ فاز، جریان فاز، امپدانس فاز، توان فاز و توان راکتیو فاز تعییر می‌شوند.

مثال ۱ نشان می‌دهد که برای حل مدار سه فاز Y - Y متعادل، چگونه باید مطالب بیان شده تاکنون را به کار برد.

مثال ۱ یک مولد سه فاز با دنباله مثبت وصل شده به صورت Y دارای امپدانس $5 + j20 \Omega$ اهم بر فاز است. ولتاژ درونی هر فاز مولد برابر 120 V است. این مولد یک بار سه فاز متعادل وصل شده به صورت Y را تغذیه می‌کند که دارای امپدانس $28 + j39 \Omega$ است. امپدانس خطی که مولد را به بار وصل می‌کند برابر $1.5 + j1.8 \Omega$ است. ولتاژ درونی فاز a مولد به عنوان فاز مینا مشخص می‌شود.

الف - مدار معادل تک فاز این سیستم سه فاز را رسم کنید.

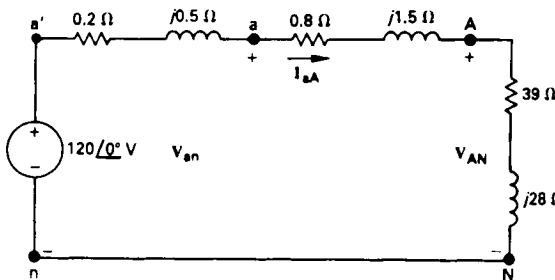
ب - سه جریان خط I_{aA} ، I_{bB} و I_{cC} را محاسبه کنید.

پ - سه ولتاژ خط به خنثی را در سرهای بار حساب کنید: یعنی V_{AN} ، V_{BN} و V_{CN} .

ت - سه ولتاژ خط V_{AB} ، V_{BC} و V_{CA} را در سرهای بار حساب کنید.

ث - ولتاژهای خط به خنثی را در سرهای مولد حساب کنید: یعنی V_{an} ، V_{bn} و V_{cn} .

- ج - ولتاژهای خط V_{ab} ، V_{bc} و V_{ca} را در سرهای مولد حساب کنید.
- ج - قسمتهای (الف) تا (ج) را با فرض دنباله فاز منفی تکرار کنید.
- حل - الف - مدار معادل تک فاز در شکل (۹-۲) نشان داده شده است.



شکل ۹-۲ مدار معادل تک فاز برای مثال ۱.

ب - جریان خط فاز a چنین است:

$$\begin{aligned} I_{aA} &= \frac{120\angle 0^\circ}{(0.2 + 0.8 + 39) + j(0.5 + 1.5 + 28)} \\ &= \frac{120\angle 0^\circ}{40 + j39} = 2.4 \angle -36.87^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

برای یک دنباله فازی مثبت داریم:

$$I_{bB} = 2.4 \angle -156.87^\circ \text{ A}$$

$$I_{cC} = 2.4 \angle 83.13^\circ \text{ A}$$

پ - ولتاژ خط به خنثی در سر A بار چنین است:

$$\begin{aligned} V_{AN} &= (39 + j28)(2.4 \angle -36.87^\circ) \\ &= 115.22 \angle -119^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

برای یک دنباله فازی مثبت داریم:

$$V_{BN} = 115.22 \angle -121.19^\circ \text{ V}$$

$$V_{CN} = 115.22 \angle +118.81^\circ \text{ V}$$

ت - برای یک دنباله فازی مثبت، ولتاژهای خط به خط از ولتاژهای خط به خنثی 30° جلو می‌افتد.

بنابراین:

$$V_{AB} = (\sqrt{3} \angle 30^\circ) V_{AN}$$

$$= 199,58 \angle 28,81^\circ V$$

$$V_{BC} = 199,58 \angle -91,19^\circ V$$

$$V_{CA} = 199,58 \angle 148,81^\circ V$$

ث - ولتاژ خط به خنثی در سر a منبع چنین است:

$$V_{an} = 120 - (0,2 + j0,5)(2,4 \angle -36,87^\circ)$$

$$= 120 - 1,29 \angle 31,33^\circ$$

$$= 118,90 - j0,67$$

$$= 118,90 \angle -0,32^\circ V$$

برای دنباله فازی مثبت داریم:

$$V_{bn} = 118,90 \angle -120,32^\circ$$

$$V_{cn} = 118,90 \angle 119,68^\circ V$$

ج - ولتاژ خط به خط در سرهای منبع چنین است:

$$V_{ab} = (\sqrt{3} \angle 30^\circ) V_{an}$$

$$= 205,94 \angle 29,68^\circ V$$

$$V_{bc} = 205,94 \angle -90,32^\circ V$$

$$V_{ca} = 205,94 \angle 149,68^\circ V$$

ج - تغییر دنباله فازی تاثیری بر روی مدار معادل تک فاز ندارد. سه جریان خط چنین هستند:

$$I_{aA} = 2,4 \angle -36,87^\circ A$$

$$I_{bB} = 2,4 \angle 83,13^\circ A$$

$$I_{cC} = 2,4 \angle -156,87^\circ A$$

ولتاژهای خط به خنثی در سرهای بار عبارتند از:

$$V_{AN} = 115,22 \angle -1,19^\circ V$$

$$V_{BN} = 115,22 \angle 118,81^\circ V$$

$$V_{CN} = 115,22 \angle -121,19^\circ V$$

برای دنباله فازی منفی، ولتاژهای خط به خط 30° از ولتاژهای خط به خنثی عقب می‌افتد:

$$\begin{aligned} V_{AB} &= (\sqrt{3} \angle -30^\circ) V_{AN} \\ &= 199,58 \angle -31,19^\circ V \end{aligned}$$

$$V_{BC} = 199,58 \angle 88,81^\circ V$$

$$V_{CA} = 199,58 \angle -101,19^\circ V$$

ولتاژهای خط به خنثی در سرهای مولد عبارتند از:

$$V_{an} = 118,90 \angle -0,32^\circ V$$

$$V_{bn} = 118,90 \angle 119,68^\circ V$$

$$V_{cn} = 118,90 \angle -120,32^\circ V$$

ولتاژهای خط به خط در سرهای مولد عبارتند از:

$$\begin{aligned} V_{ab} &= (\sqrt{3} \angle -30^\circ) V_{an} \\ &= 205,94 \angle -30,32^\circ V \end{aligned}$$

$$V_{bc} = 205,94 \angle 89,68^\circ V$$

$$V_{ca} = 205,94 \angle -150,32^\circ V$$

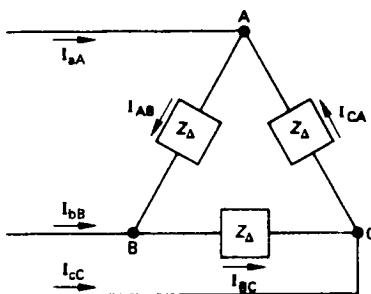
در مثال ۱ توجه کنید که وقتی کمیت فاز a محاسبه شد، مقادیر متناظر فازهای b و c را می‌توان به سادگی با انتقال فاز a به مقدار 120° به دست آورد. برای دنباله فازی مشبّت، فاز b، 120° از فاز a عقب می‌افتد در حالی که فاز c 120° از فاز a جلو می‌افتد. برای یک دنباله فازی منفی، فاز b از فاز a به مقدار 120° جلو می‌افتد و فاز c از فاز a به مقدار 120° عقب می‌افتد. بنابراین محاسبه ولتاژ خط به خط، با داشتن ولتاژ خط به خنثی بسیار ساده است.

۲-۴- تحلیل مدار Δ - Δ

اگر در یک مدار سه فاز بار به صورت دلتا وصل شده باشد، می‌توان با به کار بردن تبدیل دلتا به وای (مثلث به ستاره) آن را به وای تبدیل کرد. وقتی که بار متعادل باشد، امپدانس هر بازوی اتصال وای برابر یک سوم امپدانس هر بازوی اتصال دلتا است. بنابراین:

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3} \quad (22-2)$$

وقتی که بار Δ توسط بار معادل Δ جایگزین شود، مدار سه فاز را می‌توان با یک مدار معادل تک فاز شکل (۲-۶) مدل‌سازی کرد.



شکل ۱۰-۲ مدار به کار رفته برای برقراری روابط میان جریانهای خط و جریانهای فاز در یک بار متعادل Δ .

پس از آنکه مدار متعادل تک فاز را برای محاسبه جریانهای خط به کار بردیم، می‌توان جریان هر بازوی بار Δ اصلی را به سادگی از تقسیم جریان خط بر $\sqrt{3}$ و انتقال آن به جلو به میزان 30° به دست آورد. این روابط میان جریانهای خط و جریانهای فاز در اتصال Δ را می‌توان با به کار بردن شکل (۱۰-۲) به دست آورد.

وقتی که باری یا منبعی به صورت دلتا وصل شود، جریان در هر بازوی دلتا برابر جریان فاز و ولتاژ میان دوسر هر بازو، ولتاژ فاز است. از شکل (۱۰-۲) می‌بینیم که در یک اتصال Δ ولتاژ فاز دقیقاً مساوی ولتاژ خط است.

برای نشان دادن ارتباط میان جریان فاز و جریان خط، یک دنباله مثبت فرض کرده و فرض می‌کنیم I_ϕ نشان دهنده اندازه جریان فاز باشد. در این صورت:

$$I_{AB} = I_\phi \angle 0^\circ \quad (23-2)$$

$$I_{BC} = I_\phi \angle -120^\circ \quad (24-2)$$

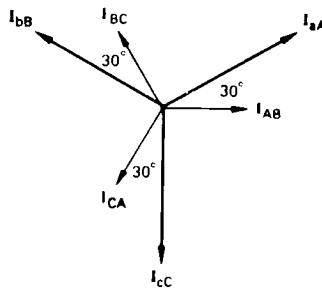
$$I_{CA} = I_\phi \angle +120^\circ \quad (25-2)$$

در نوشتن این معادلات ما به دلخواه I_{AB} را به صورت فاز مبنا انتخاب کردیم. می‌توان با اعمال مستقیم قانون کیرشف جریان خط را برحسب جریان فاز نوشت. در این صورت داریم:

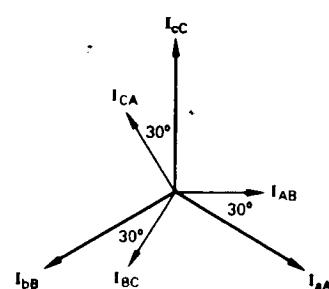
$$\begin{aligned} I_{aA} &= I_{AB} - I_{CA} = I_\phi \angle 0^\circ - I_\phi \angle 120^\circ \\ &= \sqrt{3} I_\phi \angle -30^\circ \end{aligned} \quad (26-2)$$

$$\begin{aligned} I_{bB} &= I_{BC} - I_{AB} = I_\phi \angle -120^\circ - I_\phi \angle 0^\circ \\ &= \sqrt{3} I_\phi \angle -150^\circ \end{aligned} \quad (27-2)$$

$$\begin{aligned} I_{cC} &= I_{CA} - I_{BC} = I_\phi \angle 120^\circ - I_\phi \angle -120^\circ \\ &= \sqrt{3} I_\phi \angle 90^\circ \end{aligned} \quad (28-2)$$



(ب)



(الف)

شکل ۱۱-۲ دیاگرام فازوری نشان دهنده ارتباط میان جریانهای خط و جریانهای فاز در یک بار وصل شده به صورت ۵ : (الف) دنباله فازی مثبت؛ (ب) دنباله فازی منفی.

مقایسه معادلات (۲۶-۲) تا (۲۸-۲) با معادلات (۲۳-۲) تا (۲۵-۲) نشان می‌دهد که اندازه جریان خط $\sqrt{3}$ برابر اندازه جریان فاز بوده و دسته جریانهای خط 30° از دسته جریانهای فاز عقب می‌افتد. تایید این مطلب را به عهده خواننده می‌گذاریم که برای یک دنباله فازی منفی، جریان خط $\sqrt{3}$ برابر جریان فاز بوده و 30° از آن جلو می‌افتد.

ارتباط میان جریانهای خط و جریانهای فاز یک بار وصل شده ۵ در شکل (۱۱-۲) خلاصه شده است.

مثال ۲ محاسبات مربوط به تحلیل یک مدار سه فاز متعادل شامل منبع وصل شده به صورت Y و بار وصل شده به صورت Δ را نشان می‌دهد.

مثال ۲ مبنع وصل شده به صورت Y در مثال ۱، یک بار وصل شده به صورت Δ را از طریق یک خط توزیع با امپدانس $9 + j3\Omega$ اهم بر فاز تغذیه می‌کند. امپدانس بار برابر $85,8 + j118,5\Omega$ اهم بر فاز است. ولتاژ درونی فاز a مولده را به عنوان فاز مبدأ به کار ببرید.

الف - مدار معادل تک فاز سیستم سه فاز را رسم کنید.

ب - جریانهای خط I_{aA} ، I_{bB} ، I_{cC} را محاسبه کنید.

پ - ولتاژهای فاز را در سرهای بار محاسبه کنید.

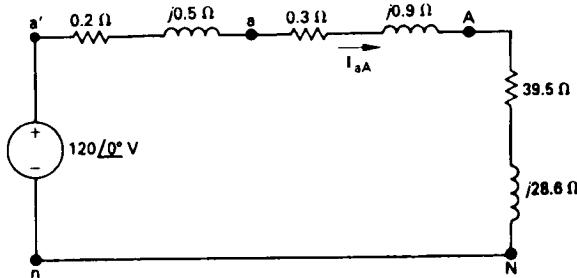
ت - جریانهای فاز بار را محاسبه کنید.

ث - ولتاژهای خط را در سرهای منبع محاسبه کنید.

حل الف - مدار معادل تک فاز در شکل (۱۲-۲) نشان داده شده است. امپدانس بار اتصال معادل Y چنین است:

$$\left(\frac{1}{3}\right)(118,5 + j85,8) = 39,5 + j28,6 \Omega/\phi$$

ب - جریان خط فاز a چنین است:



شکل ۱۲-۲ مدار معادل تک فاز مثال ۲.

$$I_{aA} = \frac{120 \angle 0^\circ}{(0.2 + 0.3 + 39.5) + j(0.5 + 0.9 + 28.6)} = \frac{120 \angle 0^\circ}{40 + j30} = 2.4 \angle -36.87^\circ A$$

بنابراین مستقیماً نتیجه می‌شود:

$$I_{bB} = 2.4 \angle -106.87^\circ A$$

$$I_{cC} = 2.4 \angle 83.13^\circ A$$

پ - چون بار به صورت Δ وصل شده است، ولتاژهای فاز همان ولتاژهای خط است. برای محاسبه ولتاژ خط ابتدا V_{AN} را محاسبه می‌کنیم:

$$V_{AN} = (39.5 + j28.6)(2.4 \angle -36.87^\circ) = 117.04 \angle -0.96^\circ V$$

چون دنباله فازی مثبت است، ولتاژ خط V_{AB} چنین است:

$$V_{AB} = \sqrt{3} \angle 30^\circ V_{AN} = 202.72 \angle 29.04^\circ V$$

بنابراین:

$$V_{BC} = 202.72 \angle -90.96^\circ V$$

$$V_{CA} = 202.72 \angle 129.04^\circ V$$

ت - جریانهای فاز بار را می‌توان مستقیماً از جریانهای خط محاسبه کرد:

$$I_{AB} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ\right) I_{aA} = 1.39 \angle -6.87^\circ A$$

وقتی که I_{AB} را بدانیم، جریانهای فاز بار دیگر را می‌دانیم:

$$I_{BC} = 1.39 \angle -126.87^\circ A$$

$$I_{CA} = 1.39 \angle 112.13^\circ A$$

توجه کنید که می‌توان محاسبه I_{AB} را با به کار بردن مقادیر محاسبه شده قبلی V_{AB} و امپدانس بار وصل شده Δ بررسی کرد. یعنی:

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_\phi} = \frac{202.72 \angle 29.04^\circ}{118.5 + j85.8} = 1.39 \angle -6.87^\circ A$$

(روشهای محاسبه نوع دیگر از لحاظ حذف اشتباه بسیار سودمند هستند و ما استفاده از آنها را در تمام کارها شامل طراحی و تجلیل شدیداً توصیه می‌کنیم.)

ث - برای محاسبه ولتاژ خط در سرهای منبع، ابتدا V_{an} را محاسبه می‌کنیم. از شکل (۱۲-۲) ملاحظه می‌کنیم که V_{an} برابر افت ولتاژ در دوسر امپدانس خط و دوسر امپدانس بار است. از این رو:

$$V_{an} = \sqrt{3} \angle 30^\circ V_{ab} = 118.90 \angle -32^\circ V$$

بنابراین ولتاژ خط V_{ab} چنین است:

$$V_{ab} = \sqrt{3} \angle 30^\circ V_{an} = 205.94 \angle 29.68^\circ V$$

بنابراین:

$$V_{bc} = 205.94 \angle -90.32^\circ V$$

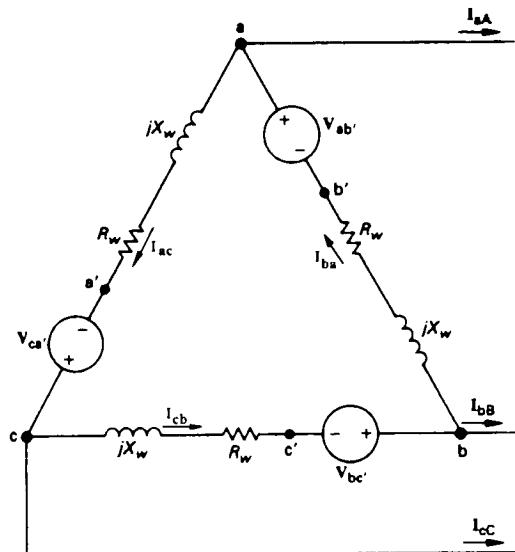
$$V_{ca} = 205.94 \angle 149.68^\circ V$$

۲-۵-۳ تحلیل مدار Δ

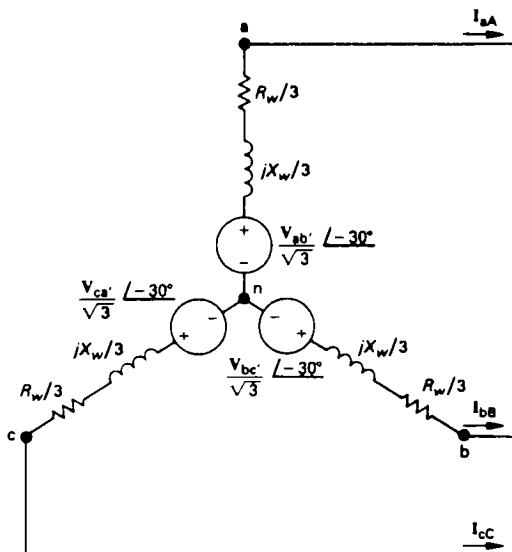
در مدار سه فاز Δ ، منبع به صورت دلتا و بار به صورت وای وصل شده است. می‌توان مدار معادل تک فاز را با جایگزین کردن منبع وصل شده به صورت Δ با یک منبع معادل Y به دست آورد. می‌توان منبع معادل Y را از تقسیم ولتاژ فاز درونی منبع Δ بر $\sqrt{3}$ و انتقال این دسته ولتاژهای سه فاز به میزان 30° - در صورت مثبت بودن دنباله فازی و 30° + در صورت منفی بودن دنباله فازی، به دست آورده. امپدانس درونی معادل Y برابر یک سوم امپدانس درونی منبع Δ است. مدار معادل Y یک منبع وصل شده به صورت Δ با دنباله فازی مثبت در شکل (۱۳-۲) نشان داده شده است.

برای دنباله فازی مثبت، دسته جریانهای فازی منبع Δ (I_a ، I_{cb} و I_{ca}) در شکل (۱۳-۲)) از دسته جریانهای خط I_{cA} ، I_{cB} و I_{cC} به میزان 30° جلو می‌افتد. اندازه جریان فاز $\frac{1}{\sqrt{3}}$ برابر اندازه جریان خط است. برای دنباله فازی منفی، جریانهای فازی در منبع از جریانهای خط عقب می‌افتد.

برای نشان دادن اینکه منبع Y شکل (۱۳-۲) (الف) معادل منبع Δ شکل (۱۳-۲) است، لازم است تنها نشان داده شود که دو مدار شرایط سرهای یکسانی برای هر اتصال خارجی متعادل وصل شده به سرهای a ، b و c فراهم می‌آورند. دو شرط آزمایشی که اثبات آنها راحت‌ترین است مدارهای باز و مدارهای اتصال کوتاه است. برای شرایط مدار باز سه جریان خط برابر صفر بوده دو مدار معادل هستند اگر ولتاژهای یکسانی میان سرهای a ، b و c تحويل دهند. برای یک اتصال کوتاه خارجی که سرهای a ، b و c را وصل می‌کند، ولتاژهای خط صفر بوده و دو مدار معادل هستند، اگر جریان خط یکسانی تحويل دهند. اثبات اینکه این دو مدار معادل هستند به خواننده واگذار می‌شود.



(الف)



(ب)

شکل ۱۳-۲ معادل Δ یک منبع سه فاز متعادل، وصل شده به صورت Δ (دبالت فازی ثابت): (الف) منبع Δ ؛ (ب) Δ معادل.

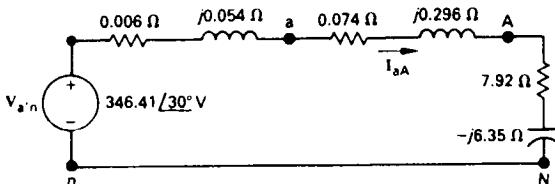
مثال ۳ یک منبع متعادل وصل شده به صورت Δ با دنباله فازی مستقیم، دارای امپدانس درونی $162 + 18j\Omega$ ، اهم بر فاز است. در حالت بدون بار، اندازه ولتاژ سر منبع 60 ولت است. این منبع به یک بار وصل شده به صورت Δ ، وصل می شود که امپدانس آن $35 + 6j\Omega$ است. امپدانس خط توزیع برابر $296 + 74j\Omega$ است.

- الف - مدار معادل تک فاز سیستم را رسم کنید و V_{ab} را به عنوان فاز مبنا به کار ببرید.
- ب - اندازه ولتاژ خط را در سرهای بار حساب کنید.
- پ - سه جریان خط I_{aA} ، I_{bB} و I_{cC} را محاسبه کنید.
- ت - جریانهای فاز I_{ba} ، I_{cb} و I_{ac} منبع را محاسبه کنید.
- ث - اندازه ولتاژ خط را در سرهای بار حساب کنید.

حل الف - در حالت بی‌بار، ولتاژ سر معادل ولتاژ درونی منبع است. بنابراین اندازه ولتاژ درونی منبع Δ ، 600 ولت است. با به کار بردن V_{ab} به عنوان فاز مبنا، ولتاژ درونی فاز a منبع معادل \bar{Y} را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$V_{a'n} = \frac{V_{ab'}}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ = \frac{600}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ \cong 346.41 \angle 30^\circ V$$

امپدانس درونی مولد معادل \bar{Y} برابر $(162 + j18 + j0.054) \Omega$ (یا $162 + j0.054 + j0.006 \Omega$) است. بنابراین مدار معادل تک فاز مطابق شکل (۱۴-۲) است.



شکل ۱۴-۲ مدار معادل تک فاز مثال ۳.

ب - از مدار شکل (۱۴-۲) مستقیماً نتیجه می‌شود که:

$$I_{aA} = \frac{346.41 \angle 30^\circ}{8.00 - j6.00} = 34.64 \angle 66.87^\circ A$$

و:

$$V_{AN} = (V_{a'n} - j6.35)(34.64 \angle 66.87^\circ) = 351.65 \angle 28.15^\circ V$$

اندازه ولتاژ خط در سرهای بار چنین است:

$$|V_{AB}| = \sqrt{3} |V_{AN}| = 609.08 V$$

پ - با به کار بردن نتایج قسمت (ب) جریانهای خط را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$I_{aA} = 34.64 \angle 66.87^\circ A$$

$$I_{bB} = 34.64 \angle 186.87^\circ A$$

$$I_{cC} = 34.64 \angle -53.13^\circ A$$

ت - جریانهای فاز مولد را می‌توان مستقیماً از جریانهای خط محاسبه کرد. چون دنباله فازی منفی

است، داریم:

$$I_{ba} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ \right) I_{aA} = 20 \angle 26.87^\circ A$$

$$I_{cb} = 20 \angle 156.87^\circ A$$

$$I_{ac} = 20 \angle -83.13^\circ A$$

ث - از مدار شکل (۱۴-۲) داریم:

$$\begin{aligned} V_{an} &= (V_{994} - j6054) I_{aA} \\ &= (V_{994} - j6054) 34.64 \angle 66.87^\circ \\ &= 347.37 \angle 29.73^\circ V \end{aligned}$$

اندازه ولتاژ خط در سرهای منبع چنین خواهد بود:

$$|V_{ab}| = \sqrt{3} |V_{an}| = 601.66 V$$

۴-۶ تحلیل مدارهای Δ - Δ

در مدار Δ - Δ هم منبع و هم بار به صورت Δ وصل شده‌اند. مدار تک فاز معادل یک سیستم Δ - Δ متعادل با جایگزین کردن منبع و بار با اتصال‌های معادل Δ آنها به دست می‌آید. مانند قبل، مدار معادل Δ برای حل جریانهای خط و ولتاژ خط به ختنی به کار می‌رود. وقتی که جریانهای خط را بدانیم، می‌توانیم جریانهای فاز را در بار و منبع با به کار بردن روش بیان شده در بخش‌های ۴-۲ و ۵-۲ به دست آوریم. ولتاژهای خط به ختنی را می‌توان مانند بخش ۳-۲ به ولتاژهای خط به خط تبدیل کرد. تمام این روشها را در مثالهای ۱، ۲ و ۳ تشریح کردیم.

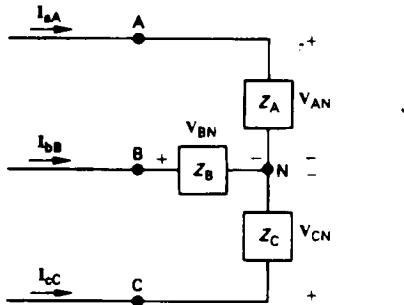
۳-۱ محاسبه توان در مدارهای سه فاز متعادل

تاکنون تحلیل مدارهای سه فاز متعادل را به تعیین ولتاژها و جریانها در یک مدار داده شده محدود کردیم. اکنون محاسبات توان سه فاز را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مطلب را با بحث توان متوسط تحویل داده شده به یک بار متعادل وصل شده به صورت Δ آغاز می‌کنیم.

۳-۲ توان متوسط در یک بار Δ متعادل

یک بار وصل شده به صورت Δ همراه با جریانها و ولتاژهای مربوط در شکل (۱-۳) نشان داده شده است. توان متوسط مربوط به هر فاز را می‌توان با به کار بردن روش‌های معرفی شده در فصل ۷ محاسبه کرد. توان متوسط متناظر با فاز a بار به صورت زیر بیان می‌شود:

$$P_A = |V_{AN}| |I_{aA}| \cos(\theta_{vA} - \theta_{iA}) \quad (1-3)$$



شکل ۱-۳ یکبار ۶ متعادل به کار رفته برای معرفی محاسبه توان متوسط در یک مدار سه فاز.

که در آن θ_{vA} و θ_{iA} به ترتیب زاویه‌های فازی V_{AN} و I_{aA} هستند. با به کار بردن طرز نمایش معرفی شده در معادله (۱-۳)، توان متناظر با فازهای b و c عبارتند از:

$$P_B = |V_{BN}| |I_{bB}| \cos(\theta_{vB} - \theta_{iB}) \quad (۲-۳)$$

$$P_C = |V_{CN}| |I_{cC}| \cos(\theta_{vC} - \theta_{iC}) \quad (۳-۳)$$

در معادلات (۱-۳) تا (۳-۳) تمام فازورهای جریان و ولتاژ بر حسب مقادیر rms توابع سینوسی متناظر آنها نوشته شده‌اند.

در یک سیستم سه فاز متعادل، اندازه همه ولتاژهای خط به خشی یکسان بوده، همچنین اندازه جریانهای فاز نیز یکسان است. آرگومان تابع کسینوسی نیز برای هر سه فاز یکسان است. برای تأکید این ملاحظات، طرز نمایش زیر را که سادگی‌های بیشتری در بحث محاسبات توان در مدارهای سه فاز متعادل فراهم می‌آورد، معرفی می‌کنیم:

$$V_\phi = |V_{AN}| = |V_{BN}| = |V_{CN}| \quad (۴-۳)$$

$$I_\phi = |I_{aA}| = |I_{bB}| = |I_{cC}| \quad (۵-۳)$$

و:

$$\theta_\phi = \theta_{vA} - \theta_{iA} = \theta_{vB} - \theta_{iB} = \theta_{vC} - \theta_{iC} \quad (۶-۳)$$

به علاوه، توان تحویل شده به هر فاز بار در یک سیستم متعادل یکسان است و از این‌رو:

$$P_A = P_B = P_C = P_\phi = V_\phi I_\phi \cos \theta_\phi \quad (۷-۳)$$

که در آن P_ϕ توان متوسط هر فاز را نشان می‌دهد.

توان متوسط کل تحویل شده به یک بار متعادل وصل شده به صورت ۶، به سادگی سه برابر توان هر فاز است، یعنی:

$$P_T = ۳P_\phi = ۳V_\phi I_\phi \cos \theta_\phi \quad (۸-۳)$$

همچنین سودمند است که توان کل را بر حسب مقادیر rms اندازه ولتاژ خط و مقادیر rms اندازه جریان خط بیان کنیم. اگر V_L نشان دهنده مقدار rms اندازه ولتاژ خط و I_L نشان دهنده مقدار rms اندازه جریان خط باشد، در این صورت می‌توان معادله (۸-۳) را به صورت زیر اصلاح کرد:

$$\begin{aligned} P_T &= 3 \left(\frac{V_L}{\sqrt{3}} \right) I_L \cos \theta_\phi \\ &= \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta_\phi \end{aligned} \quad (9-3)$$

در به دست آوردن معادله (۹-۳) از این حقیقت استفاده کردیم که برای یک بار متعادل وصل شده به صورت Y ، اندازه ولتاژ فاز برابر اندازه ولتاژ خط تقسیم بر $\sqrt{3}$ است و اندازه جریان خط مساوی اندازه جریان فاز است. در به کار بردن معادله (۹-۳) برای محاسبه توان کل تحويل شده به بار، مهم است که به یاد داشته باشیم که θ_ϕ زاویه فاز میان ولتاژ فاز و جریان فاز است.

۳-۲ توان مختلط در یک بار Δ متعادل

با به کار بردن روش‌های معرفی شده در فصل ۷، می‌توان توان مختلط و توان راکتیو متناظر با هر فاز یک بار متعادل وصل شده به صورت Δ را محاسبه کرد. برای یک بار متعادل، عبارتهای توان راکتیو چنین است:

$$Q_\phi = V_\phi I_\phi \sin \theta_\phi \quad (10-3)$$

$$Q_T = 3Q_\phi = \sqrt{3} V_L I_L \sin \theta_\phi \quad (11-3)$$

معادله $S = V_{eff} I_{eff}^* = P + jQ = P + jQ_\phi = V_\phi I_\phi^* \sin \theta_\phi$ مبنای بیان توان مختلط متناظر با هر فاز است. برای یک بار متعادل داریم:

$$S = V_{AN} I_{aA}^* = V_{BN} I_{bB}^* = V_{CN} I_{cC}^* = V_\phi I_\phi^* \quad (12-3)$$

که در آن V_ϕ نشان دهنده ولتاژ فاز و جریان فاز همان فاز است. بنابراین در حالت کلی داریم:

$$S_\phi = P_\phi + jQ_\phi = V_\phi I_\phi^* \quad (13-3)$$

$$S_T = 3S_\phi = \sqrt{3} V_L I_L \sin \theta_\phi \quad (14-3)$$

۳-۳ محاسبات توان در یک بار Δ متعادل

در صورتی که بار به صورت Δ وصل شده باشد، محاسبه توان – توان راکتیو یا توان مختلط – اساساً مشابه حالت بار وصل شده به صورت Y است. یک بار وصل شده به صورت دلتا به همراه جریانها و ولتاژهای مربوط در شکل (۲-۳) نشان داده شده است که از آن توانهای متناظر با هر فاز به صورت زیر به دست می‌آید:

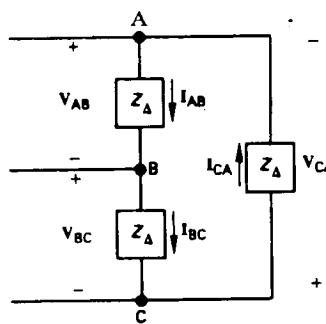
$$P_A = |V_{AB}| |I_{AB}| \cos(\theta_{vAB} - \theta_{iAB}) \quad (15-3)$$

$$P_B = |V_{BC}| |I_{BC}| \cos(\theta_{vBC} - \theta_{iBC}) \quad (16-3)$$

$$P_C = |V_{CA}| |I_{CA}| \cos(\theta_{vCA} - \theta_{iCA}) \quad (17-3)$$

برای یک بار متعادل داریم:

$$|V_{AB}| = |V_{BC}| = |V_{CA}| = V_\phi \quad (18-3)$$



شکل ۲-۳ بار وصل شده به صورت Δ به کار رفته در بحث محاسبات توان.

$$|I_{AB}| = |I_{BC}| = |I_{CA}| = I_\phi \quad (۱۹-۳)$$

$$\theta_{vAB} - \theta_{iAB} = \theta_{vBC} - \theta_{iBC} = \theta_{vCA} - \theta_{iCA} = \theta_\phi \quad (۲۰-۳)$$

و:

$$P_A = P_B = P_C = P_\phi = V_\phi I_\phi \cos \theta_\phi \quad (۲۱-۳)$$

قابل ذکر است که معادله (۲۱-۳) همان معادله (۷-۳) است. این مطلب معادل با این بیان است "که در یک بار متعادل، توان متوسط هر فاز برابر حاصلضرب مقادیر rms ولتاژ فاز و rms جریان فاز و کسینوس زاویه میان ولتاژ فاز و جریان فاز است".

توان کل تحویل شده به یک بار متعادل وصل شده به صورت Δ چنین است:

$$\begin{aligned} P_T &= ۳P_\phi = ۳V_\phi I_\phi \cos \theta_\phi \\ &= ۳V_L \left(\frac{I_L}{\sqrt{۳}} \right) \cos \theta_\phi \\ &= \sqrt{۳} V_L I_L \cos \theta_\phi \end{aligned} \quad (۲۲-۳)$$

توجه کنید که معادله (۲۲-۳) همان معادله (۹-۳) است.

عبارت‌های مربوط به توان راکتیو و توان مختلط نیز دارای همان صورت به دست آمده برای بار وصل شده به صورت Y است:

$$Q_\phi = V_\phi I_\phi \sin \theta_\phi \quad (۲۳-۳)$$

$$Q_T = ۳Q_\phi = ۳V_\phi I_\phi \sin \theta_\phi \quad (۲۴-۳)$$

$$S_\phi = P_\phi + jQ_\phi = V_\phi I_\phi \quad (۲۵-۳)$$

$$S_T = ۳S_\phi = \sqrt{۳} V_L I_L / \theta_\phi \quad (۲۶-۳)$$

مثالهای ۴ تا ۶ محاسبه توان را در یک مدار سه فاز متعادل تشریح می‌کنند.

مثال ۴ الف - توان متوسط هر فاز را که به بار وصل شده به صورت Y مثال ۱ تحویل داده می‌شود، حساب کنید.

ب - کل توان متوسط تحویل داده شده به بار را حساب کنید.

- پ - کل توان متوسط تلف شده در خط را حساب کنید.
 ت - کل توان متوسط تلف شده در مولد را حساب کنید.
 ث - کل تعداد ولت آمپرهای راکتیو مغناطیس کننده جذب شده توسط بار را حساب کنید.
 ج - کل توان مختلط تحویل داده شده توسط منبع را حساب کنید.

حل الف - از مثال ۱ داریم: $\theta_\phi = -119^\circ$, $I_\phi = 24A$, $V_\phi = 115\sqrt{2}V$ و $35,68^\circ = 224,64^\circ$ بنابراین:

$$P_\phi = (115\sqrt{2})(24) \cos 35,68^\circ = 224,64 \text{ وات}$$

توان هر فاز را می‌توان از رابطه $P_\phi = R_\phi I_\phi^2$ نیز حساب کرد:

$$P_\phi = (39)(24)^2 = 224,64 \text{ وات}$$

ب - کل توان متوسط تحویل داده شده به بار برابر $P_T = 3P_\phi = 3 \times 224,64 = 673,92 W$ است. چون ولتاژ خط را در مثال ۱ حساب کردیم، بنابراین می‌توان معادله $(9-3)$ را نیز به کار برد:

$$P_T = (\sqrt{3})(199,58)(24) \cos 35,68^\circ = 673,92 W$$

پ - کل توان تلف شده در خط چنین است:

$$P_{خط} = (3)(24)^2(0,8) = 13,824 W$$

ت - کل توان متوسط تلف شده در مولد چنین است:

$$P_{مولد} = (3)(0,2)^2 = 3,456 W$$

ث - کل ولت آمپر راکتیو مغناطیس کننده که توسط بار جذب می‌شود، چنین است:

$$Q_T = (\sqrt{3})(199,58)(24) \sin 35,68^\circ = 483,84 VAR$$

ج - کل توان مختلط مربوط به منبع چنین است:

$$\begin{aligned} S_T &= 3S_\phi = -3(120)(24) / 26,87^\circ \\ &= -691,20 - j518,40 VA \end{aligned}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که توان درونی و توان راکتیو مغناطیس کننده، به مدار تحویل می‌شود. می‌توان نتیجه را با محاسبه کل توان و توان راکتیو جذب شده توسط مدار مطابقت داد. بنابراین:

$$\begin{aligned} P &= 673,92 + 13,824 + 3,456 \\ &= 691,20 W \quad (\text{مطابقت دارد}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= 483,84 + 3(24)^2(1,5) + 3(24)^2(0,5) \\ &= 483,84 + 25,92 + 8,64 \\ &= 518,40 VAR \quad (\text{مطابقت دارد}) \end{aligned}$$

مثال ۵ الف - کل توان مختلط تحویل داده شده به بار وصل شده به صورت Δ مثال ۲ را حساب کنید.

ب - چند درصد از توان متوسط ارسالی مولد به بار تحویل داده می‌شود؟

حل الف - با به کار بردن مقادیر فاز a از حل مثال ۲ داریم:

$$V_\phi = V_{AB} = ۲۰۲,۷۲ \angle ۲۹,۰۴^\circ V$$

$$I_\phi = I_{AB} = ۱,۳۹ \angle -۶,۸۷^\circ A$$

با به کار بردن معادلات (۲۵-۳) و (۲۶-۳) داریم:

$$S_T = ۳(۲۰۲,۷۲ \angle ۲۹,۰۴^\circ)(۱,۳۹ \angle ۶,۸۷^\circ)$$

$$= ۶۸۲,۵۶ + j۴۹۴,۲۰۸ VA$$

ب - کل توان ارسالی مولد برابر مجموع توان کل تحویل داده شده به بار به اضافه توان کل تلف شده در خط است. بنابراین:

$$P = ۶۸۷,۷۴۴ W \quad \text{وروودی}$$

درصدی از توان متوسط در ورودی خط توزیع که به بار تحویل داده می‌شود برابر $\frac{۶۸۲,۵۶}{۶۸۷,۷۴۴} \times ۱۰۰\% = ۹۹,۲۵\%$ است.

مثال ۶ یک بار متعادل سه فاز، ۴۸۰ کیلووات با ضریب توان پس فاز $۸,۰$ نیاز دارد. بار از خطی با امپدانس $۰,۰۵ + j۰,۰۵$ اهم بر فاز تغذیه می‌شود. ولتاژ خط در سرهای بار برابر ۶۰۰ ولت است.

الف - مدار معادل تک فاز سیستم را رسم کنید.

ب - اندازه جریان خط را محاسبه کنید.

پ - اندازه ولتاژ خط را در سر ارسالی آن محاسبه کنید.

ت - ضریب توان را در سر ارسالی خط محاسبه کنید.

حل الف - مدار شکل (۳-۳) مدار معادل تک فاز را نشان می‌دهد. ما به دلخواه ولتاژ خط به خشی را در سر بار به عنوان مینا انتخاب می‌کنیم.

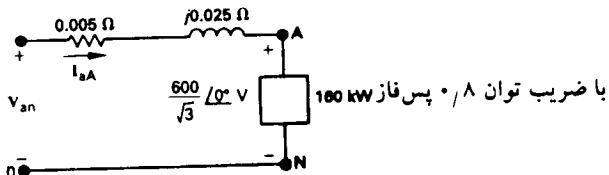
ب - جریان خط I_{aA} عبارت است از:

$$\left(\frac{۶۰۰}{\sqrt{۳}}\right) I^*_{aA} = (۱۶۰ + j۱۲۰) ۱۰^3$$

یا:

$$I^*_{aA} = ۵۷۷,۳۵ \angle ۳۶,۸۷^\circ A$$

بنابراین $A = I_{aA} = ۵۷۷,۳۵ \angle -۳۶,۸۷^\circ A$. اندازه جریان خط برابر اندازه I_{aA} است:



شکل ۳-۳ مدار معادل نک فاز مثال ۶.

$$I_L = 577.35 \text{ A}$$

برای I_L راه حل دیگری با استفاده از عبارت زیر به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} P_T &= \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta_p \\ &= \sqrt{3} (600) (I_L) (0/8) = 480,000 \text{ W} \end{aligned}$$

$$I_L = \frac{480,000}{\sqrt{3} (600) (0/8)} = \frac{1000}{\sqrt{3}} = 577.35 \text{ A}$$

پ - برای محاسبه اندازه ولتاژ خط در سرهای ارسالی آن، نخست V_{an} را حساب می کنیم. از شکل (۳-۳) داریم:

$$\begin{aligned} V_{an} &= V_{AN} + Z_L I_{aA} \\ &= \frac{600}{\sqrt{3}} + (0,005 + j0,025)(577.35) \angle -36.87^\circ \\ &= 357.51 \angle 1.57^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

بنابراین:

$$V_L = \sqrt{3} |V_{an}| = 619.23 \text{ V}$$

ت - ضریب توان در سر ارسالی خط برابر کسینوس زاویه فاز میان V_{an} و I_{aA} است:

$$\begin{aligned} pf &= \cos[1.57^\circ - (-36.87^\circ)] \\ &= \cos 38.44^\circ = 0.783 \end{aligned}$$

راه دیگر محاسبه ضریب توان آن است که ابتدا توان مختلط را در سر ارسالی خط محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} S_\phi &= (160 + j120) 10^3 + (577.35)^2 (0,005 + j0,025) \\ &= 161,67 + j128,33 \text{ kVA} \\ &= 206,41 \angle 38.44^\circ \text{ kVA} \end{aligned}$$

ضریب توان چنین است:

$$pf = \cos 38.44^\circ = 0.783$$

بالاخره، اگر کل توان مختلط را در سر ارسالی خط حساب کنیم، پس از آنکه ابتدا اندازه جریان خط را حساب کردیم، می توانیم این مقدار را برای محاسبه V_L به کار ببریم. یعنی:

$$\sqrt{3} V_{LI_L} = ۳(۲۰۶,۴۱) \times ۱۰^۳$$

$$V_L = \frac{۳(۲۰۶,۴۱) \times ۱۰^۳}{\sqrt{3} (۵۷۷,۳۵)} = ۶۱۹,۲۳ \text{ V}$$

۳- توان لحظه‌ای در مدارهای سه فاز

اگرچه ما اساساً به محاسبات توان متوسط، راکتیو و مختلط علاقه‌مند هستیم، محاسبه کل توان لحظه‌ای نیز اهمیت دارد. کل توان لحظه‌ای در یک مدار سه فاز متعادل یک خاصیت قابل توجه دارد: این توان با زمان تغییر نمی‌کند!

برای نشان دادن این خاصیت، فرض کنید ولتاژ لحظه‌ای خط به خنشی v_{AN} به عنوان مبدأ انتخاب شود و مانند قبل θ_ϕ زاویه فاز $A - \theta_\phi$ باشد. در این صورت، برای دنباله فازی مثبت توان لحظه‌ای در هر فاز چنین است:

$$P_A = v_{AN} i_{aA} = V_\phi I_\phi \cos \omega t \cos(\omega t - \theta_\phi)$$

$$P_B = v_{BN} i_{bB} = V_\phi I_\phi \cos(\omega t - 120^\circ) \cos(\omega t - \theta_\phi - 120^\circ)$$

و:

$$P_C = v_{CN} i_{cC} = V_\phi I_\phi \cos(\omega t + 120^\circ) \cos(\omega t - \theta_\phi + 120^\circ)$$

که در آن V_ϕ و I_ϕ به ترتیب نشان دهنده مقادیر rms ولتاژ خط به خنشی و جریان خط هستند. کل توان لحظه‌ای برابر مجموع توانهای لحظه‌ای فاز است که به صورت $P_T = P_A + P_B + P_C = 1,5 V_\phi I_\phi \cos \theta_\phi$ ساده می‌شود. یعنی:

$$P_T = P_A + P_B + P_C = 1,5 V_\phi I_\phi \cos \theta_\phi$$

به دست آوردن این رابطه ساده شده به عنوان تعریف به خواننده واگذار می‌شود.

یک خاصیت مهم مدارهای سه فاز آن است که کل توان لحظه‌ای ثابت است. بنابراین گشتاور ایجاد شده بر روی محور یک موتور سه فاز ثابت است و این بدین معناست که ارتعاشات در ماشین‌آلاتی که به وسیله موتورهای سه فاز تغذیه می‌شوند، کمتر است.

۴- کاربرد اسپایس در حل مدارهای سه فاز

برنامه تحلیل مدار اسپایس را می‌توان برای تحلیل مدارهای فازوری سه فاز نیز به کار برد. برای به دست آوردن فازور جریانهای خط و فاز منبع و بار، منابع ولتاژ صفر ولتی را می‌توان به عنوان آمپر متر در مدار قرار داد. اما باید مقادیر عناصر مداری که هر فاز بار را تشکیل می‌دهند معلوم باشند؛ یعنی بجای اینکه امپدانس خالص هر فاز را بدانیم باید عناصر RLC مداری و ترکیب آنها را بدانیم. البته این مطلب معمولاً مشکلی ایجاد نمی‌کند، زیرا اگر مقادیر امپدانس خالص هر فاز هم داده شده باشند، می‌توان

مدارهای ساده RC یا RL سری را چنان ترکیب کرد که این امپدانس‌ها را به دست دهنده در حقیقت می‌توان امپدانس‌های منبع را هم در هر فاز مولد قرار داد بدون آنکه مشکلی از لحاظ حل به وجود بیاید.

مثال ۷ با استفاده از برنامه اسپایس، توان متوسط کل تحويل داده شده به بار سه فاز نامتعادل نشان داده شده در شکل (۱-۴ الف) را به دست آورید. مولد سه فاز با امپدانس درونی هر فاز شامل مقاومت $15\ \Omega$ و سری با خود القابی $8\ \text{میلی هانزی}$ مدل‌سازی شده است.

حل برای آنکه توان متوسط کل تحويل داده شده به بار را تعیین کنیم، از برنامه اسپایس برای تعیین فازورهای جریان هر فاز بار یعنی \hat{I}_A ، \hat{I}_B و \hat{I}_C استفاده می‌کنیم. سپس توان متوسط تلف شده در مقاومتهای فاز را با هم جمع می‌کنیم:

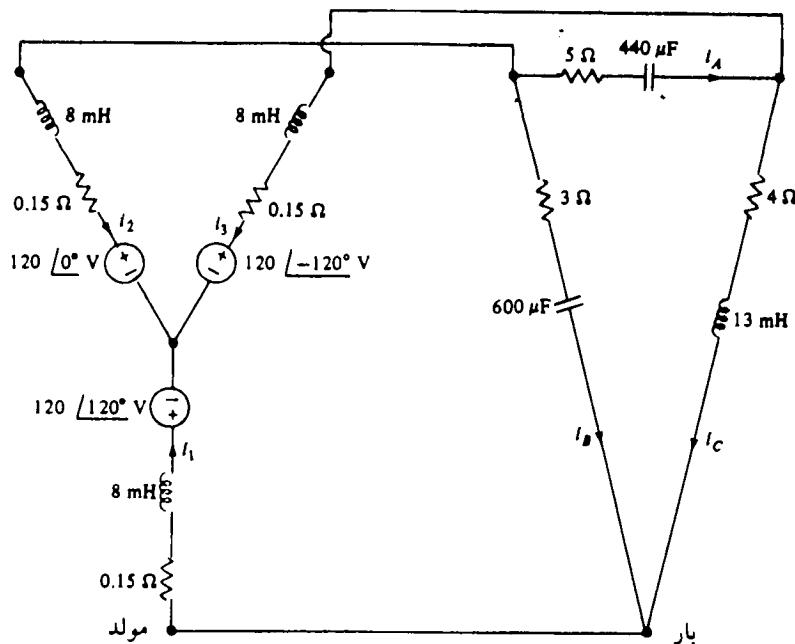
$$P_{\text{ave}} = \bar{I}^2 \times 4 + |\hat{I}_A|^2 \times 3 + |\hat{I}_B|^2 \times 5 + |\hat{I}_C|^2 \times 2$$

مدار آماد شده اسپایس در شکل (۲-۴ ب) نشان داده شده است، که از آن برنامه اسپایس را به دست می‌آوریم:

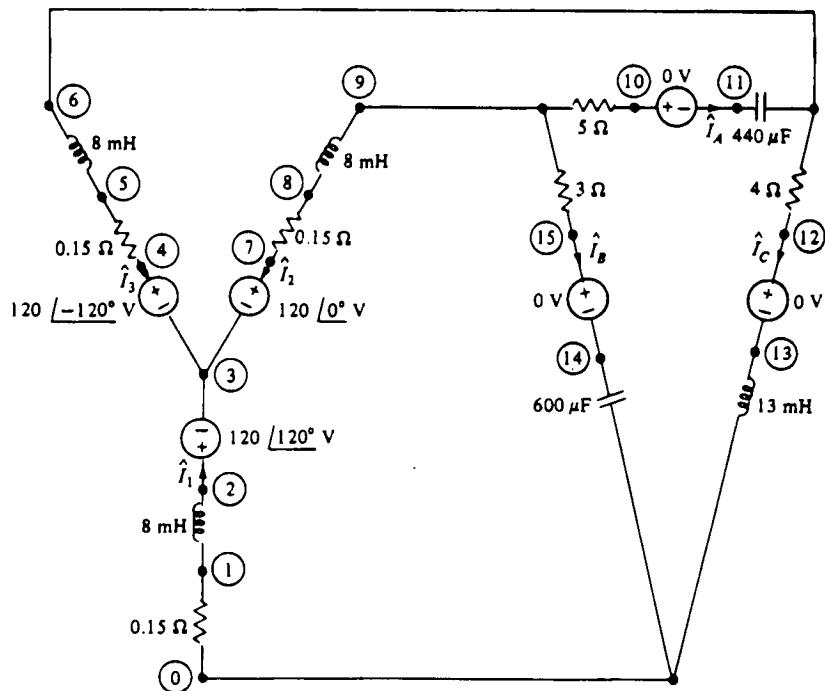
Example Three-phase Circuit

R1	0	1	0.15
L1	1	2	8M
V1	2	3	AC 120 120
R2	7	8	0.15
L2	8	9	8M
V2	7	3	AC 120
R3	4	5	0.15
L3	5	6	8M
V3	4	3	AC 120 -120
RB	9	15	3
VB	15	14	
CB	14	0	600U
RA	9	10	5
VA	10	11	
CA	11	6	440U
RC	6	12	4
VC	12	13	
LC	13	0	13M
.AC	DEC	1	60 60
.PRINT	AC	IM(VA)	IP(VA) IM(VB) IP(VB) IM(VC) IP(VC)
.END			

نتایج اسپایس عبارتند از:



(الف)



(ب)

شکل ۴-۱ حل مسئله سه فاز نامتعادل با استفاده از اسپايس. (الف) مدار اصلی؛ (ب) مدار اسپايس.

$$\hat{I}_A = 15,29 \angle -34,01^\circ$$

$$\hat{I}_B = 45,95 \angle -51,49^\circ$$

$$\hat{I}_C = 22,62 \angle -177,2^\circ$$

بنابراین توان متوسط کل تلف شده در بار چنین است:

$$P_{ave} = (15/29)^2 \times 3 + (45/95)^2 \times 5 + (22/62)^2 \times 4 \\ = 9549,79 \text{ وات}$$

جریانهای وارد شونده به سرهای مثبت منابع ولتاژ مولد را نیز می‌توان با قرار دادن دستور زیر در برنامه بالا به دست آورد:

```
.PRINT AC IM(V1) IP(V1) IM(V2) IP(V2) IM(V3) IP(V3)
نتایج عبارتند از:
```

$$\hat{I}_1 = 37,55 \angle -80,78^\circ$$

$$\hat{I}_2 = 60,71 \angle 132,9^\circ$$

$$\hat{I}_3 = 36,05 \angle -11,92^\circ$$

بنابراین توان متوسط کل تحويل داده شده به وسیله منابع مولد چنین است:

$$P_{ave} = -\operatorname{Re}(\hat{V}_1 \hat{I}_1^*) - \operatorname{Re}(\hat{V}_2 \hat{I}_2^*) - \operatorname{Re}(\hat{V}_3 \hat{I}_3^*) \\ = -\operatorname{Re}(120 \angle 120^\circ \times 37,55 \angle 80,78^\circ) - \operatorname{Re}(120 \angle 0^\circ \times 60,71 \angle 132,9^\circ) \\ - \operatorname{Re}(120 \angle -120^\circ \times 36,05 \angle -11,92^\circ) \\ = 10514,62 \text{ وات}$$

اختلاف $P_{ave} - P_{ave}$ بار مولد توان مصرف شده در مقاومتهای 15Ω مولد است:

$$P_{ave} = |\hat{I}_1|^2 \times 0,15 + |\hat{I}_2|^2 \times 0,15 + |\hat{I}_3|^2 \times 0,15 \\ = 959,3 \text{ W}$$

مثال ۷ مطلبی را که تا به حال باید بدیهی بوده باشد، نشان داده است: برنامه‌های تحلیل مدار مانند اسپایس را می‌توان برای تحلیل مداری بسیار پیچیده به کار برد، اما هنوز باید مفاهیم اصلی و اصول تحلیل مدار را درک کنیم تا بتوانیم این برنامه‌ها را صحیح‌تر و موثرتر به کار گیریم.

خلاصه

■ میانبرهای تحلیلی: کلید تمام میانبرهای تحلیلی تبدیل مدار سه فاز متعادل به ساختار Y-Y و سپس جایگزینی ساختار Y-Y با یک مدار معادل تک فاز است.

■ مدار معادل تک فاز: مدار معادل تک فاز برای محاسبه جریان خط و ولتاژ خط به خشی در ساختار $\text{Y}-\text{Y}$ تک فاز به کار می‌رود. فاز a معمولاً به عنوان فاز مینا انتخاب می‌شود.

■ انتقال دادن محاسبات تک فاز: جریان خط و هر ولتاژ خط به خشی را که از فاز a مدار معادل تک فاز محاسبه می‌شود، می‌توان برای یافتن هر جریان یا ولتاژ در مدار سه فاز متعادل بر مبنای حقایق زیر به کار گرفت:

۱- در یک سیستم متعادل جریانها و ولتاژهای فاز b و c با جریان و ولتاژ متناظر فاز a یکسان هستند به جز آنکه 120° درجه انتقال فاز دارند. در مدارهای با دنباله فازی مثبت، کمیت فاز b از کمیت فاز a به اندازه 120° عقب می‌افتد و کمیت فاز c از کمیت فاز a به اندازه 120° جلو می‌افتد. برای مدارهای با دنباله فازی منفی فازهای b و c نسبت به فاز a جایه‌جا می‌شوند.

۲- دسته ولتاژهای خط نسبت به دسته ولتاژهای خط به خشی 30° ± اختلاف فاز دارند. علامت + یا - به ترتیب متناظر با دنباله فازی مثبت و منفی است.

۳- اندازه ولتاژ خط $\sqrt{3}$ برابر اندازه ولتاژ خط به خشی است.

۴- دسته جریانهای خط نسبت به دسته جریانهای فاز در منابع و بارهای وصل شده به صورت Δ به مقدار 30° ± اختلاف فاز دارند. علامت - یا + به ترتیب متناظر با دنباله فازی مثبت و منفی است.

۵- اندازه جریان خط $\sqrt{3}$ برابر اندازه جریان فاز در منبع یا بار وصل شده به صورت Δ است.

محاسبات توان در مدارهای سه فاز مشتمل بر روش‌های زیر است:

■ توان هر فاز: روش‌های محاسبه توان متوسط، توان راکتیو و توان مختلط هر فاز با روش‌های فصل ۷ یکسان هستند.

■ توان کل: توان کل حقیقی، راکتیو و مختلط را می‌توان یا با ضرب کردن توان متناظر هر فاز در 3 و یا با استفاده از عبارتهای مربوط به جریان خط و ولتاژ خط داده شده در معادلات $(3-9)$ ، $(3-11)$ و $(3-14)$ تعیین کرد.

■ توان لحظه‌ای: توان لحظه‌ای کل در یک مدار سه فاز متعادل ثابت بوده و مساوی $1/5$ برابر توان متوسط هر فاز است.

مسائل

۱- عبارتهای حوزه زمانی ولتاژهای خط به خشی در سرهای بار وصل شده به صورت Y چنین هستند:

$$v_{AN} = 310 \cos(\omega t + 60^\circ)$$

$$v_{BN} = 310 \cos(\omega t + 180^\circ)$$

فصل هشتم

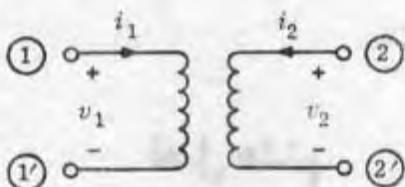
عناصر تزویج کننده و مدارهای تزویج شده

در فصل دوم سه نوع اصلی عناصر مدار، که مقاومت، خازن و سلف میباشد را معرفی کردیم. تمام این عناصر دارای دوسر میباشد (یا یک قطبی هستند) و بنابراین بر سرمه روابطی که ولتاژ شاخه‌آنها را به جریان شاخه مربوط میکنند مشخص می‌شوند. در فصلهای سوم تا هفتم مدارهای خاصی که شامل چنین عناصر دو سری بودند را تجزیه و تحلیل نمودیم. حال، قبل از ارائه روش‌های کلی تجزیه و تحلیل مدار، می‌خواهیم بعضی دیگر از عناصر مقید مدار، مانند سلفهای تزویج شده^(۱) ترانسفورماتور ایده‌آل، و متایع کترول شده (یا متایع وابسته) را معرفی کنیم. تقاضات این عناصر با مقاومت، سلف و خازن در آنست که این عناصر بیش از یک شاخه دارند و جریان و ولتاژ یک شاخه به ولتاژها و جریانهای شاخه‌های دیگر مربوط است. بهمین جهت آنها عناصر تزویج کننده^(۲) نامیده می‌شوند. در این فصل، مشخصه‌ها و خواص این عناصر را خواهیم دید. علاوه بر آن، بمنظور نشان دادن بعضی روش‌های تجزیه و تحلیل برای مدارهای که شامل عناصر تزویج کننده میباشند، مثالهایی بیان خواهیم کرد.

۱- سلفهای تزویج شده

دو سیم ییچی که در مجاورت یکدیگر قرار دارند، مطابق شکل (۱-۱)، را در نظر بگیرید. برای منظورهای کنونی، این موضوع که سیم ییچی‌ها بدور یک هسته از ماده مقنایطی‌ییچیده شده باشندیانه، هیچگونه اهمیتی ندارد. معهذا، ارض میکنیم که سیم ییچی‌ها نسبت بیکدیگر، و یا نسبت به هسته‌ای که ممکن است بدور آن ییچیده شده باشند، حرکت نمیکنند.

برای ولتاژ جریان «جهت‌های قراردادی» را مطابق شکل (۱-۱) انتخاب میکنیم.



شکل ۱۰۱- سیم پیچی های تزویج شده و جهت های قرار دادی آنها

توجه کنید که این جهت های قرار دادی، «جهت های قرار دادی متناظر» برای هر سیم پیچی میباشدند. این جهت ها در برآ راه جهت های واقعی ولتاژ و جریان، و یا ولتاژ نسبی سرها هیچگونه اطلاعاتی بمناسبت نمیدهند. جهت های قرار دادی تنها برای معین کردن علامت کمیاتی که پدیده واقعی را تعایش میدهند لازم میباشدند.

بمنظور استفاده های بعدی باید توجه کرد که اگر در مدار مغناطیسی دو سیم پیچی، ماده فرو مغناطیسی داشته باشیم، وقتیکه مقادیر جریانها بالاندازه کافی بزرگ باشند، روابط سیان شارهای Φ_1 و Φ_2 و جریانهای i_1 و i_2 دیگر خطی نمیباشند. در این مورد، معادلات بصورت زیر میباشند:

$$\Phi_1 = f_1(i_1, i_2)$$

$$\Phi_2 = f_2(i_1, i_2)$$

که در آن f_1 و f_2 توابعی غیر خطی از جریانهای i_1 و i_2 میباشند. بموجب قانون فاراده:

$$v_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{\delta f_1}{\delta i_1} \frac{di_1}{dt} + \frac{\delta f_1}{\delta i_2} \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} = \frac{\delta f_2}{\delta i_1} \frac{di_1}{dt} + \frac{\delta f_2}{\delta i_2} \frac{di_2}{dt}$$

دراینجا باید تأکید نمود که چهار مشتق جزئی بالا توابعی از i_1 و i_2 میباشند. واضح است که وقتی چنین معادلات «غیرخطی» بین شار و جریان داریم مسأله بسیار پیچیده است، و ما تا فصل هفدهم، بیش از این سیم پیچی های تزویج شده غیر خطی را در نظر نخواهیم گرفت.

۱-۱- توصیف سلفهای تزویج شده خطی تغییر ناپذیر با زمان

فرض کنید یک جفت سلف تزویج شده خطی تغییر ناپذیر با زمان داشته باشیم*. چون سلف‌ها خطی میباشند، هر شار باستی تابع خطی جریانها باشد، و چون سلف‌ها تغییر ناپذیر با زمان میباشند، ضرایب این توابع خطی باستی مقادیر ثابت باشند (یعنی صریحاً بزمان بستگی نداشته باشند). بنابراین میتوان نوشت:

$$\Phi_1(t) = L_{11}i_1(t) + M_{12}i_2(t)$$

$$\Phi_2(t) = M_{21}i_1(t) + L_{22}i_2(t)$$

که در آن ثابت‌های L_{11} ، L_{22} ، M_{12} و M_{21} به زمان و به جریان‌های i_1 و i_2 بستگی ندارند. L_{11} ضریب خود القای^(۱) سلف ۱ و L_{22} ضریب خود القای سلف ۲ است. M_{12} و M_{21} ضرایب القاء متقابل^(۲) برای سلفهای تزویج شده ۱ و ۲ نامیده می‌شوند. اگر جریانها بر حسب آمیر و شاره‌ها بر حسب ویریان شوند، L_{11} ، L_{22} ، M_{12} و M_{21} بر حسب هائز اندازه گیری می‌شوند. و فیزیک، از بروزی انرژی آموختیم که دو ضریب القاء متقابل همیشه برابرند، یعنی $M_{12} = M_{21}$. اگر مقدار مشترک آنها را M بنامیم میتوان نوشت:

$$(1-1) \quad \Phi_1 = L_{11}i_1 + Mi_2$$

$$(1-2) \quad \Phi_2 = Mi_1 + L_{22}i_2$$

از معادلات قانون فاراده بالا فاصله نتیجه می‌شود:

$$(1-3) \quad v_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

* ما لفظ «سلف» را بجای «سیم پیچی» بکار می‌بریم تا نشان دهیم که با مدل‌های مدار سروکار داریم. سیم پیچی‌ها عناصر فیزیکی را مشخص میکنند که معمولاً «دارای مقادیر اتفاقی اثری و ظرفیت پراکنده» میباشند. میتوان سیم پیچی‌ها را از ترکیب سلف‌ها، مقاومتها و خازنها مدل سازی نمود.

$$(1-4) \quad v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt}$$

در حالت دائمی سینوسی، اگر ولتاژها و جریانهای سینوسی v_1, v_2, i_1, i_2 را پر ترتیب با فازورهای متناظرشان، I_1, I_2, V_1, V_2 نشان دهیم، این معادلات بصورت زیر درسی آیند:

$$(1-5) \quad V_1 = j\omega L_{11} I_1 + j\omega M I_2$$

$$(1-6) \quad V_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_{22} I_2$$

که در آن ω فرکانس زاویه‌ای است.

تبصره - هرچند ضرایب خود القاء L_{11} و L_{22} همواره اعداد مثبتی هستند، ضریب القاء متقابل M ، بسته به اینکه سیم‌پیچی‌ها چگونه پیویشده شده باشند، میتواند مثبت و یا منفی باشد.

«علامت ضریب القاء متقابل» علامت ضریب القاء متقابل M را تنها میتوان با درنظر گرفتن دقیق وضع فیزیکی وجهات قراردادی تعیین نمود. فرض کنید سلف دوم ①' را مدار باز کنیم، یعنی جریان i_2 متعدد با صفر است. معادلات (1-2) و (1-4) بصورت زیر درسی آیند:

$$\Phi_2 = M i_1$$

و:

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt}$$

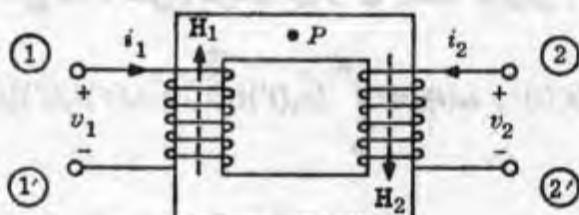
اگر یک جریان «افزاشی» از سر ① وارد سلف ۱ شود، دراینصورت $i_1 > 0$ میباشد و چون $v_2 = M \left(\frac{di_1}{dt} \right)$ واضح است که علامت v_2 با علامت M یکسان میباشد. مثلاً، ممکن است پتانسیل سر ① سلف ۲ از پتانسیل سر ①' بیشتر باشد. دراین حالت، جهت قراردادی ما لازم میدارد که $i_2 < 0$ ، و بنابراین $M > 0$ باشد. بنابراین، علامت M هم به وضع فیزیکی «و هم» به جهات قراردادی انتخاب شده بستگی دارد.

اکنون مسأله تعیین علامت M را با توجه به انرژی بروزی می‌کنیم. یک جفت سلف تزویج شده مشخص با جهات قرار دادی برای ولتاژ و جریان داده شده است. (شکل ۱-۲) را ببینید. فرض می‌کنیم که نفوذ پذیری مغناطیسی^(۱) هسته خلی بیشتر از نفوذ پذیری مغناطیسی فضای آزاد باشد. تحت این شرایط، تقریباً تمام انرژی مغناطیسی در هسته ذخیره می‌شود. حال، می‌خواهیم براساس این داده‌ها، تعیین کنیم که علامت M در معادلات (۱-۲) و (۱-۴) باستی مشتبه باشد یا منفی.

بادرنظر گرفتن انرژی مغناطیسی ذخیره شده در موقعی که $\theta = \frac{\pi}{2}$ است، به یک قاعده برای انتخاب علامت خواهیم رسید. در فیزیک آموختیم که هرگاه \vec{H} بردار میدان مغناطیسی در یک نقطه P از هسته مغناطیسی باشد، در اینصورت انرژی ذخیره شده در جزء حجم dv که شامل نقطه P است برابر $\frac{\mu}{2} |\vec{H}|^2 dv$ است. که در آن μ نفوذ پذیری مغناطیسی هسته می‌باشد. فرض کنید با استفاده از مولدهای مناسبی، جریانهای ثابت و مشتبه i_1 و i_2 را داشته باشیم و گیریم \vec{H}_1 میدان مغناطیسی ناشی از i_1 تنها، و \vec{H}_2 میدان مغناطیسی ناشی از i_2 تنها باشد. آنگاه انرژی مغناطیسی ذخیره شده در dv چنین است:

$$\frac{\mu}{2} |\vec{H}_1 + \vec{H}_2|^2 dv = \left(\frac{\mu}{2} |\vec{H}_1|^2 + \mu \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2 + \frac{\mu}{2} |\vec{H}_2|^2 \right) dv$$

که در آن \vec{H}_1 و \vec{H}_2 نمایشگر حاصلضرب عددی دو بردار i_1 و i_2 می‌باشد.

شکل ۱-۲- تشریح تعیین علامت M

دراین معادله $\frac{d\psi}{dt} + \frac{\mu}{2} \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2$ ارزی مغناطیسی ذخیره شده ناشی از جریان i_1 تنها است و $\frac{d\psi}{dt} + \frac{\mu}{2} \vec{H}_2 \cdot \vec{H}_1$ ارزی مغناطیسی ذخیره شده ناشی از جریان i_2 تنها است. پس، جمله $\frac{\mu}{2} \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2 dt$ ارزی مغناطیسی ذخیره شده ناشی از وجود توأم i_1 و i_2 است. بنابراین اگر $\vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2$ مشتب باشد (یعنی، قدر مطلق زاویه بین میدانهای مغناطیسی \vec{H}_1 و \vec{H}_2 از 90° کمتر باشد تا کسینوس آن مشتب گردد)، ارزی ذخیره شده در dt وقتیکه i_1 و i_2 همزمان «جاری شوند از مجموع ارزیهای ذخیره شده در dt وقتیکه هریک از i_1 و i_2 بنهایی جریان داشته باشند بزرگتر است. بنوان مثال، در شکل (۱-۲)، قانون دست راست نشان میدهد که $\vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2$ جهت‌های یکسان دارند؛ بنابراین ارزی ذخیره شده در dt وقتیکه هردوی i_1 و i_2 جریان داشته باشند، از مجموع ارزی‌های ذخیره شده وقتیکه i_1 و i_2 بنهایی جریان داشته باشند «بزرگتر» است.

اکنون ارزی ذخیره شده را بدون درنظر گرفتن میدان و با درنظر گرفتن مدار محاسبه میکنیم. برای سادگی فرض کنید $i_1 = i_2 = i$ و $t = 0$. بنابراین، بموجب معادلات (۱-۱) و (۱-۲)، در $t = 0$ شارها برای صفر است و در لحظه $t = 0$ هیچ ارزی ذخیره نشده است. ارزی ذخیره شده تابعی از مقادیر لحظه‌ای i_1 و i_2 است و ما ارزی ذخیره شده در لحظه t را بصورت $[i_1(t), i_2(t)]$ مینویسیم. جهات قراردادی متناقض لازم میدارند که (t, i_1, i_2) ، توان لحظه‌ای داده شده «بوسیله» محیط خارج («به») سلفی با سرهای ۱ و ۲ بوده، و (i_1, i_2, t) ، توان لحظه‌ای داده شده «بوسیله» محیط خارج («به») سلفی با سرهای ۳ و ۴ باشد. بنابراین:

$$\delta[i_1(t), i_2(t)] = \int_0^t [v_1(t')i_1(t') + v_2(t')i_2(t')] dt'$$

از معادلات (۱-۳) و (۱-۴) بدست می‌آوریم که:

$$\mathcal{E}[i_1(t), i_2(t)] = \int_0^t \left[L_{11} i_1 \frac{di_1}{dt'} + M \left(i_1 \frac{di_2}{dt'} + i_2 \frac{di_1}{dt'} \right) + L_{22} i_2 \frac{di_2}{dt'} \right] dt'$$

چون (۱) و (۰) مساوی صفر فرض شده‌اند پذست می‌آوریم که :

$$(1-7) \quad \mathcal{E}[i_1(t), i_2(t)] = \frac{1}{\tau} L_{11} i_1(t) + M i_1(t) i_2(t) + \frac{1}{\tau} L_{22} i_2(t)$$

این رابطه را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$(1-8) \quad \mathcal{E}(i_1, i_2) = \mathcal{E}(i_1, 0) + M i_1 i_2 + \mathcal{E}(0, i_2)$$

که در آن $\mathcal{E}(i_1, 0)$ انرژی ذخیره شده در حالتی است که $i_2 = 0$ باشد و جریان i_1 در سلف ۱ جاری شود، و $\mathcal{E}(0, i_2)$ انرژی ذخیره شده در حالتی است که $i_1 = 0$ باشد و جریان i_2 در سلف ۲ جاری شود. از معادله (۱-۸) نتیجه می‌گیریم که اگر i_1 و i_2 مثبت بوده و $M > 0$ باشد، انرژی کل ذخیره شده از مجموع انرژیهای ذخیره شده در حالتها بیکاری که بترتیب جریان i_1 بنهایی و جریان i_2 بنهایی جاری شود، بزرگتر است. بدین ترتیب، صحبت قاعده زیر را برای تعیین علامت M بررسی کردیم:

«یک جفت سلف تزویج شده را درنظر گرفته جهات قرار دادی برای ولتاژها و جریانها را چنان انتخاب می‌کنیم که توان داده شده به سلفها از محیط خارج مساوی $(i_1(t) + i_2(t))$ باشد. (انتخاب جهات قرار دادی مستلزم این مطلب را تضمین می‌کند). اگر یک جریان یک آمپری در هر سلف در جهت قرار دادی عبور کند و اگر انرژی ذخیره شده در این شرایط از مجموع انرژیهای ذخیره شده در حالتها که هر یک از جریانها یک آمپری بنهایی عبور نمی‌کند بزرگتر باشد، ضریب القاء متناظر M مثبت است.»

در دیاگرامهای مدار، اغلب از نقطه‌ها^(۱) بعنوان یک قرار داد برای نشان دادن

علامت M استفاده نمیشود. این قرارداد چنین است:

«ابدا، برای هرسلف از جهات قرار دادی متناظر استفاده کنید. سپس، به یک سر از هرسلف یک نقطه تخصیص دهید بقسمی که وقتی جهات قرار دادی L_{11} و L_{22} هردو از مرنتطه دار وارد سیم‌بیچی بشوند (یا از آن خارج گردند)، M مشتبه باشد».

دروضع نشان داده شده درشکل (۱-۲)، برای جهات قرار دادی داده شده به L_{11} و L_{22} ، ضریب القاء متناظر M مشتبه است و بایستی دونقطه در دوسر (۱) و (۲)، با دوسر (۱) و (۲) گذاشته شود.

۱-۲- ضریب تزویج

برای توصیف روابط میان جریانها و شارها در سلفهای تزویج شده خطی و تغیر ناپذیر با زبان با دو سیم‌بیچی (۱)، به مه پارامتر L_{11} ، L_{22} و M نیاز داریم. میدانیم که ضرایب خود القاء L_{11} و L_{22} همیشه مشتبه هستند درحالیکه ضریب القاء متناظر M میتواند مشتبه یا منفی باشد. نسبت قدر مطلق ضریب القاء متناظر به واسطه هندسی دو ضریب خود القاء، منجشی برای درجه تزویج میباشد. بنابراین، ضریب تزویج (۲) سلفهای تزویج شده با دو سیم‌بیچی را با رابطه زیر تعریف میکنیم:

$$k \triangleq \frac{|M|}{\sqrt{L_{11}L_{22}}}$$

ضریب k یک عدد «نامتناهی» است که به جهات قرار دادی انتخاب شده برای جریانهای سلفها بستگی ندارد. اگر دو سلف در فاصله زیادی از یکدیگر در فضا قرار داشته باشند، ضریب القاء متناظر بسیار کوچک است و k نزدیک صفر میباشد. اگر دو سلف شدیداً تزویج شده باشند، مانند حالتیکه دو سیم‌بیچی بروی یک هسته پیچیده شده است، قسمت اعظم شار مغناطیسی برای دو سلف مشترک میباشد، و k نزدیک واحد است. با بروزی ارزی ذخیره شده در سلفها نشان خواهیم داد که ضریب تزویج k که در بالا تعریف شد،

عناصر تزویج کننده و مدارهای تزویج شده

همواره کوچکتر یا برابر واحد است. اگر این ضریب برابر واحد باشد، گویند که سلفها کاملاً تزویج شده‌اند^(۱).

اکنون عبارت انرژی ذخیره شده را که در معادله (۷-۱) داده شده است بررسی می‌کنیم.

از روش جبری کامل کردن مربعات استفاده خواهیم کرد، دراینصورت:

$$\begin{aligned} g(i_1, i_2) &= \frac{1}{\tau} L_{11} i_1 + M i_1 i_2 + \frac{1}{\tau} L_{22} i_2 \\ &= \frac{1}{\tau} L_{11} \left(i_1 + \frac{M}{L_{11}} i_2 \right)^2 + \frac{1}{\tau} \left(L_{22} - \frac{M^2}{L_{11}} \right) i_2^2 \end{aligned}$$

توجه کنید که برای هر مقدار i_1 و i_2 ، جمله $\left(i_1 + \frac{M}{L_{11}} i_2 \right)^2$ همواره نامنفی است. به خاطر پیاویرید که انرژی (i_1, i_2) ذخیره شده در سلفهای تزویج شده بایستی برای «هر» انتخاب i_1 و i_2 نامنفی باشد. بنابراین، نتیجه می‌شود که $L_{22} - \frac{M^2}{L_{11}}$ بایستی نامنفی باشد. اثبات این مطلب بطريقه برهان خلف^(۲) می‌باشد.

فرض کنید $L_{22} - \frac{M^2}{L_{11}}$ منفی باشد و گیریم که $i_1 = 1$ و $i_2 = 0$. دراین صورت $\left(L_{22} - \frac{M^2}{L_{11}} \right) i_2^2$ صفر می‌شود و $i_1 + \frac{M}{L_{11}} i_2$ منفی است، و سا به نتیجه غیر ممکن $g(1, 0) < 0$ می‌رسیم. وبالنتیجه این شرط را خواهیم داشت:

$$L_{22} - \frac{M^2}{L_{11}} \geq 0$$

و این رابطه با $L_{11}, L_{22} \geq M^2$ معادل است، و یا:

$$(1-9) \quad k = \frac{|M|}{\sqrt{L_{11} L_{22}}} \leq 1$$

بطور خلاصه، بررسی انرژی لازم میدارد که ضرایب خود القاء یک چفت سلف خطی تزویج

شده مثبت بوده و ضریب تزویج آنها کوچکتر یا برابر واحد باشد.

۱-۳ - سلفهای با چند سیم پیچی و ماتریس ضرایب القاء آنها

اگر یک از دو سلف خطی تغییر ناپذیر با زمان باشد یک تزویج شوند، مانند آنچه در شکل (۱-۳) نشان داده شده است، رابطه میان جریانها و شارها بوسیله یک دسته از معادلات خطی، بصورت زیر داده می‌شود:

$$\Phi_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2 + L_{13}i_3$$

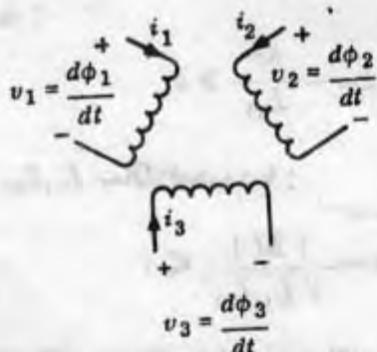
$$(1-10\text{ - الف}) \quad \Phi_2 = L_{21}i_1 + L_{22}i_2 + L_{23}i_3$$

$$\Phi_3 = L_{31}i_1 + L_{32}i_2 + L_{33}i_3$$

در معادلات (۱-۱۰ الف)، L_{11} ، L_{22} و L_{33} بترتیب ضرایب خود القاء سلفهای ۱، ۲ و ۳ می‌باشند. $L_{12} = L_{21}$ و $L_{13} = L_{31}$ ضرایب القاء متقابل هستند. بعبارت دقیق‌تر، ضرایب القاء متقابل بین سلف ۱ و سلف ۲ را نشان میدهد. گاهی راحت‌تر است که معادله (۱-۱۰ الف) را بصورت ماتریسی زیرنویسیم:

$$(1-10\text{ - ب}) \quad \Phi = Li$$

که در آن Φ بردار شار و L بردار جریان نامیده می‌شود، و i یک ماتریس مرتبی



شکل ۱-۳ - سلفهای با سه سیم پیچی

است که ماتریس ضرایب القاء^(۱) نامیده میشود. بنابراین :

$$(1-10) \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} \quad i = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}$$

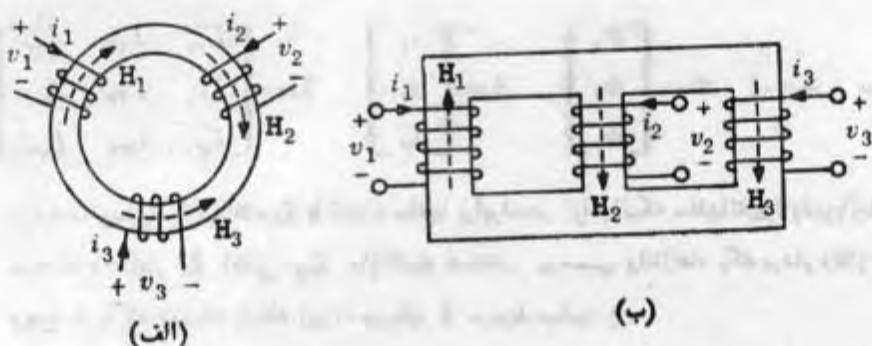
مرتبه ماتریس ضرایب القاء L با تعداد سلنهای برای است. از آنجاییکه سلفهای تغیرناپذیر با زمان میباشند، عناصر L (یعنی L_{ij} ها) ثابت هستند. بر حسب ولتاژها، یک بردار ولتاژ v وجود دارد که بوسیله رابطه زیر به جریان i مربوط میشود :

$$(1-11) \quad v = L \frac{di}{dt}$$

از آنجاییکه ماتریس ضرایب القاء L عمواره متقارن است ($L_{12} = L_{21}$ و غیره)، دستهای از سلفهای تزویج شده با سه میم پیچی، بعای نه پارامتر، بوسیله شش پارامتر مشخص میشوند. علامتهاي ضرایب القاء متقابل L_{12} ، L_{13} و L_{23} را میتوان با بررسی جهت میدان مغناطیسوی القاء شده تعیین کرد.

مثال ۱ - شکل (۱-۱) (الف) سه سلف را که روی یک هسته آهنی پیچیده شده‌اند نشان میدهد. جهات قراردادی ولتاژ و جریان برای این سه سلف را مطابق شکل انتخاب میکنیم. جهت میدانهای مغناطیسی ایجاد شده در اثر جریانهای مشتبی که از سلفها میگذرند را میتوان بوسیله قانون دست راست تعیین نمود. بعنوان مثال، پیکان مشخص شده با علامت \vec{H}_1 جهت میدان مغناطیسی ایجاد شده در اثر جریان مشتبی را واقعیکه \vec{H}_2 و \vec{H}_3 است نشان میدهد. چنانکه در شکل نشان داده شده است H_1 و H_2 دارای جهات پیکان هستند ولی \vec{H}_3 جهت مخالف دارد. بنابراین L_{12} مشبت میباشد درحالیکه L_{13} و L_{23} منفی هستند.

تمرین - در سلفهای تزویج شده با سه میم پیچی شکل (۱-۱) (ب)، علامتهاي ضرایب القاء متقابل L_{12} ، L_{13} و L_{23} را تعیین کنید.



شکل ۱-۴- مثالهایی از سلفهای تزویج شده با سیم‌بیچی

دراینجا مقید است که یک ماتریس ضرایب القاء معکوس^(۱) را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$\Gamma \triangleq \mathbf{L}^{-1}$$

با این تعریف، معادله (۱-۱۰ ب) بدین صورت درست آید:

$$(1-12) \quad \mathbf{i} = \Gamma \Phi$$

بعنوان مثال، معادلات اسکالار برای سلفهای تزویج شده با دو سیم‌بیچی بر حسب عناصر ماتریس ضرایب القاء معکوس چنین می‌باشند:

$$(1-12) \quad \begin{cases} i_1 = \Gamma_{11}\Phi_1 + \Gamma_{12}\Phi_2 \\ i_2 = \Gamma_{21}\Phi_1 + \Gamma_{22}\Phi_2 \end{cases}$$

که در آن، از تعریف یک ماتریس معکوس و یا از قاعده کرامر، داریم:

$$(1-13) \quad \text{(الف)} \quad \Gamma_{11} = \frac{L_{22}}{\det \mathbf{L}}, \quad \Gamma_{22} = \frac{L_{11}}{\det \mathbf{L}}$$

$$(1-14) \quad \text{(ب)} \quad \Gamma_{12} = \Gamma_{21} = \frac{-L_{12}}{\det \mathbf{L}}$$

عناصر ترویج کننده و مدارهای تزویج شده

۴۶۹

که در آن $\det \mathbf{L}$ نشان دهنده دترمینان ماتریس ضرایب القاء \mathbf{L} میباشد. i_j ها ضرایب القاء معکوس نامیده میشوند. معادله (۱-۱۳) بر حسب ولتاژها چنین میشود:

$$i_1(t) = \Gamma_{11} \int_0^t v_1(t') dt' + \Gamma_{12} \int_0^t v_2(t') dt' + i_1(0)$$

(۱-۱۰ الف)

$$i_2(t) = \Gamma_{21} \int_0^t v_1(t') dt' + \Gamma_{22} \int_0^t v_2(t') dt' + i_2(0)$$

این معادلات، در هر لحظه t ، جریانهای سلفها را بر حسب ولتاژها و جریانهای اولیه بیان میکنند. با این دلیل، در تعزیزی و تحلیل گره، ماتریس ضرایب القاء معکوس از ماتریس ضرایب القاء منفیدتر است.

در حالت دائمی سینوسی، میتوان فازورهای جریان I_1 و I_2 را بر حسب فازورهای

ولتاژ V_1 و V_2 بدین صورت نوشت:

$$I_1 = \frac{\Gamma_{11}}{j\omega} V_1 + \frac{\Gamma_{12}}{j\omega} V_2$$

(۱-۱۰ ب)

$$I_2 = \frac{\Gamma_{21}}{j\omega} V_1 + \frac{\Gamma_{22}}{j\omega} V_2$$

که در آن ω فرکانس زاویه‌ای است.

تبصره - بعنوان آخرین مطلب، بایستی تأکید نمود که ماتریس ضرایب القاء بخودی خود رفتار ولتاژ جریان شاخه‌ها را بطور کامل مشخص نمیکند، ویرای آنکه بتوان معادلات شبکه را بطور صحیح نوشت باشد ماتریس ضرایب القاء وجهات قراردادی جریانهای سلفها، «هردو»، را بدانیم. وجهات قراردادی ولتاژها از قرارداد قبلی ما درباره اینکه هر وقت وجهات قراردادی مستاند را پکار برمی‌توان داده شده «بوسیله» محیط خارج «به» سلفها، مساوی $i_1(t) + i_2(t)$ میباشد، نتیجه میشود.

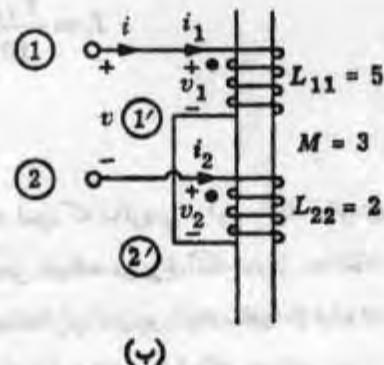
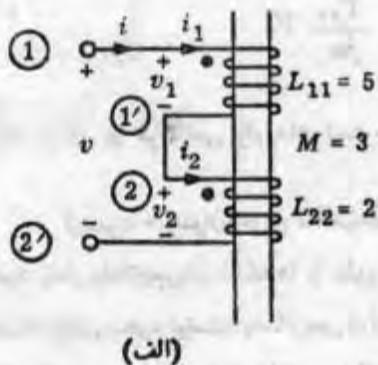
۴-۱-۶- اتصال سری و موازی سلفهای تزویج شده

اکنون توجه خود را به مسئله محاسبه ضریب القاء^(۱) معادل دو سلف خطی تزویج شده که بطور سری یا موازی بهم وصل شده‌اند معطوف میداریم.

مثال ۲- شکل (۱-۵ الف) دو سلف تزویج شده که بطور سری بهم متصل شده‌اند را نشان میدهد. برای تعیین ضریب القاء بین سرهای ۱ و ۱'، ابتدا علامت ضریب القاء متناظر را تعیین میکنیم. از جهت‌های قراردادی انتخاب شده برای دو جریان ۱ و ۱' مشاهده میشود که میدانهای مغناطیسی \vec{H}_1 و $\vec{H}_{1'}$ ، پتریب ناشی از جریانهای ۱ و ۱'، هم‌جهت هستند و این موجب مثبت بودن M میگردد. (قرارداد نقطه را هم میتوان بکاربرد چون هر دو جریان ۱ و ۱' از سرتقطه‌دار وارد سلف نظیر خود میشوند، M مثبت است). از معادلات جریان و شار، داریم:

$$(1-11) \quad \begin{aligned} \Phi_1 &= L_{11}i_1 + Mi_2 = 1i_1 + 2i_2 \\ \Phi_2 &= Mi_1 + L_{22}i_2 = 2i_1 + 1i_2 \end{aligned}$$

که در آن ضرایب القاء بر حسب هاتری بیان شده‌اند. چون دو سلف بطور سری بهم متصل شده‌اند، KCL لازم میدارد که:



شکل ۱-۵- اتصال سری سلفهای تزویج شده

$$i = i_1 = i_2$$

KVL لازم میدارد که $v_1 = \frac{d\Phi_1}{dt}$ و $v_2 = v_1 + v_2$ ، و قانون فاراده بیان میدارد که $v = \frac{d\Phi}{dt}$ بنابراین ، اگر Φ شاری باشد که $v = \frac{d\Phi}{dt}$. $v_2 = \frac{d\Phi_2}{dt}$ می‌آید :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi_1}{dt} + \frac{d\Phi_2}{dt}$$

و اگر شارهای اولیه برابر صفر باشند ، با انتگرال گیری بدست می‌آید :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

و از معادله (۱-۱۶) داریم :

$$\Phi = 8i_1 + 9i_2 = 12i$$

بنابراین ، ضریب القاء اتصال سری چنین است :

$$L = \frac{\Phi}{i} = 13 \quad \text{هانزی}$$

اکنون فرض کنید که دو سلف را مطابق شکل (۱-۵ ب) بهم وصل کنیم . سر' سلف اول به سر' سلف دوم وصل شده است . برای تعیین ضریب القاء اتصال سری بین سرهای ۱ و ۲ ، از KCL مشاهده میکنیم که :

$$i = i_1 = -i_2$$

KVL لازم میدارد که $v_2 = \frac{d\Phi_2}{dt}$ و $v_1 = \frac{d\Phi_1}{dt}$. از آنجائیکه $v = v_1 - v_2$. با قرار دادن $v = \frac{d\Phi}{dt}$ بدست خواهیم آورد :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi_1}{dt} - \frac{d\Phi_2}{dt}$$

مجددآ فرض میکنیم که شارهای اولیه برابر صفر باشند . با انتگرال گیری بدست می‌آید :

$$\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = 2i_1 + i_2 = i$$

بنابراین ضریب القاء اتصال سری در شکل (۱-۵ ب) چنین است :

$$L = \frac{\Phi}{i} = 1 \quad \text{هانزی}$$

«در نتیجه»، ضریب القاء اتصال سری دو سلف تزویج شده بسادگی با قاعدة زیر بدست می آید :

$$L = L_{11} + L_{22} \pm 2 | M |$$

که در آن، علامت مثبت وقتی برقرار است که شارهای ایجاد شده در اثر چریان مشترک در هر سلف جهات یکسان داشته باشند، و علامت منفی وقتی برقرار است که این شارها جهات مخالف داشته باشند.

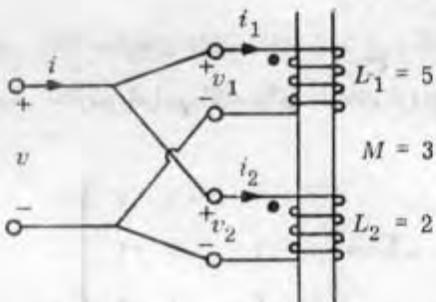
مثال ۳- در شکل (۱-۶)، دو سلف را بطور موازی وصل میکنیم. برای تعیین ضریب القاء اتصال موازی ساده تر است که ضریب القاء معکوس سلفهای تزویج شده را بدست آوریم تا ضریب القاء معکوس اتصال موازی را از روی آنها محاسبه کنیم. ضرایب القاء معکوس، از معادله (۱-۱۴)، چنین هستند :

$$\Gamma_{11} = -\frac{2}{\det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}} = 2 \quad \Gamma_{22} = \frac{0}{\det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}} = 0$$

ضریب القاء متقابل معکوس با Γ_{12} نشان داده میشود و مقدار آن چنین است :

$$\Gamma_{12} = \frac{-2}{\det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}} = -2$$

معادلات چریان و شار چنین هستند :



شکل ۱-۶ - مثال ۲ : اتصال موازی سلفهای تزویج شده

$$i_1 = \Gamma_{11}\Phi_1 + \Gamma_{12}\Phi_2 = 2\Phi_1 - 2\Phi_2$$

$$i_2 = \Gamma_{21}\Phi_1 + \Gamma_{22}\Phi_2 = -2\Phi_1 + 0\Phi_2$$

با مراجudem به شکل (۱-۱) مشاهده نیکنیم که KVL لازم میدارد :

$$v_1(t) = v_2(t) \quad \text{برای همه } t$$

اگر فرض کنیم : $i_2(0) = \Phi_2(0) = 0$ و $i_1(0) = \Phi_1(0) = 0$ باشد ، با انتگرال گیری ولتاژها بدست می آید :

$$\Phi_1(t) = \Phi_2(t) \quad \text{برای همه } t$$

اگر مقدار مشترک Φ_1 و Φ_2 را بنامیم ، از روابط میان شار و جریان داریم :

$$i = i_1 + i_2 = -\Phi_1 + 2\Phi_2 = \Phi$$

بنابراین ، ضریب القاء اتصال موازی شکل (۱-۶) چنین است :

$$L = \frac{\Phi}{i} = 1 \quad \text{هانری}$$

«درنتیجه» ، ضریب القاء معکوس اندیال موازی دو سلف تزویج شده باقاعدۀ زیر داده

میشود :

$$\boxed{\Gamma = \Gamma_{11} + \Gamma_{22} \pm 2\sqrt{\Gamma_{12}}}$$

که در آن علامت مشبت و قطبی برقرار است که شارهای بوجود آمده از جریان هرسلف (ناشی از ولتاژ مشترک v) جهت‌های مخالف داشته باشند ، و علامت منفی و قطبی برقرار است که این شارها جهت‌های یکسان داشته باشند .

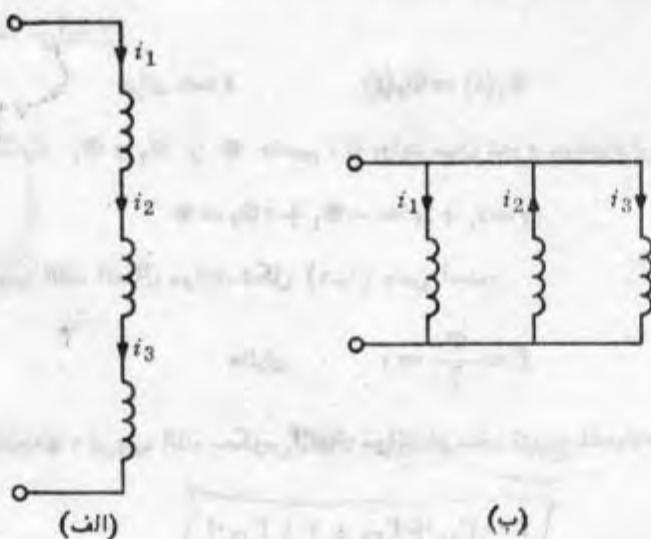
تمرین - خرایب القاء مدارهای نشان داده شده در شکل‌های (۱-۷ الف) و (۱-۷ ب) را محاسبه کنید. ماتریس خرایب القاء برای سلفهای تزویج شده با سه سیم‌بیچی چنین است :

$$L = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

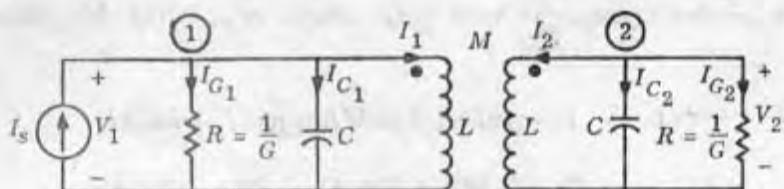
۱-۵- مدار تطبیق شده مضاعف

یک مدار بسیار مفید که در سیستمهای ارتباطی بکار می‌رود مدار تطبیق شده مضاعف (۱-۸) شکل (۱-۸) می‌باشد. ما تجزیه و تحلیل ساده شده‌ای از این مدار را بیان خواهیم کرد تا طرز بکار بردن تجزیه و تحلیل گره در یک مدار با سلفهای تزویج شده را نشان دهیم و همچنین مفهومهای حالت دائمی فصل هفتم را مرور کنیم.

دو مدار تشدید موازی بطور مغناطیسی تزویج شده‌اند. برای سادگی فرض می‌کنیم



شکل ۱-۷- اتصالهای سری و موازی سلفهای تزویج شده با سه سیم‌بیچی



شکل ۱-۸ - مدار تطبیق شده مقابله

که دومدار تشذید همانند باشد، ماتریس ضرایب القاء سلفهای تزویج شده بصورت زیر داده شده است:

$$(1-17) \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & L \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{bmatrix}$$

که در آن k ضریب تزویج، و M ثابت است (داده های شکل ۱-۸) را بینید). در تجزیه و تحلیل گره ساده تر است که از ماتریس ضرایب القاء عکوس استفاده شود:

$$(1-18) \quad \Gamma = \mathbf{L}^{-1} = \frac{1}{(1-k)L} \begin{bmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 \end{bmatrix}$$

اگر فرض کنیم ورودی یک سینوسی باشد:

$$i_s(t) = \operatorname{Re}(I_s e^{j\omega t})$$

در این صورت، خروجی حالت دائمی سینوسی، یک ولتاژ $v_2(t)$ بصورت زیر خواهد بود:

$$v_2(t) = \operatorname{Re}(V_2 e^{j\omega t})$$

میخواهیم برای تمام ω ، پامخ حالت دائمی سینوسی را تعیین کنیم. یعنی میخواهیم تابع شبکه را تعیین نمائیم:

$$(1-19) \quad H(j\omega) = \frac{V_2}{I_s}$$

در تجزیه و تحلیل حالت دائمی، ما از نمایش فازوری برای تمام جریانها و ولتاژهای شاخه ها استفاده می کنیم. از معادلات (۱-۵) و (۱-۶)، رابطه بین فازورهای

نظریه اساسی مدارها و شبکهای

جريان و فازورهای ولتاژ، برای سلفهای تزویج شده با دو سیم بینی، بسادگی چنین است:

$$(1-20) \quad V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_\tau = j\omega L I_1 + j\omega L k I_\tau$$

$$(1-20) \quad V_\tau = j\omega M I_1 + j\omega L_\tau I_\tau = j\omega L k I_1 + j\omega L I_\tau$$

که در آن V_1 و V_τ فازورهای ولتاژ در دوسر دو مدار تشید میباشند، و I_1 و I_τ فازورهای جریان داخل سلفها هستند. با استفاده از معادلات (1-۱۸) (۱-۱۹) ب) و (۱-۲۰) ب) بر حسب ضرایب القاء معکوس بدست می آوریم:

$$(1-21)$$

$$I_1 = \frac{1}{j\omega} \Gamma_{11} V_1 + \frac{1}{j\omega} \Gamma_{12} V_\tau = \frac{1}{j\omega L(1-k)} (V_1 - kV_\tau)$$

$$(1-21) \quad (b)$$

$$I_\tau = \frac{1}{j\omega} \Gamma_{21} V_1 + \frac{1}{j\omega} \Gamma_{22} V_\tau = \frac{1}{j\omega L(1-k)} (-kV_1 + V_\tau)$$

در تجزیه و تحلیل گره در حالت دائمی، دو فازور ولتاژ گره V_1 و V_τ را بعنوان متغیرهای شبکه انتخاب میکنیم و معادلات KCL را بر حسب فازورهای جریان در دو گره ۱ و ۲ بینویسیم. در گره ۱ داریم:

$$I_{G_1} + I_{C_1} + I_1 = I_s$$

که در آن:

$$I_{G_1} = GV_1 \quad I_{C_1} = j\omega CV_1$$

و I_1 توسط معادله (1-۲۱) الف) داده شده است. بر حسب فازورهای ولتاژ داریم:

$$(1-22) \quad \left[G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L(1-k)} \right] V_1 - \frac{k}{j\omega L(1-k)} V_\tau = I_s$$

و در گره ۲ داریم:

$$I_\tau + I_{C_2} + I_{G_2} = 0$$

که در آن :

$$I_{C_1} = j\omega C V_1 \quad I_{G_1} = G V_1$$

و I_2 توسط معادله (۱-۲۱ ب) داده شده است. بر حسب فازورهای ولتاژ داریم :

$$(1-22) \quad -\frac{k}{j\omega L(1-k)} V_1 + \left[G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L(1-k)} \right] V_2 = 0$$

بنابراین دو معادله خطی جبری با ضرایب مختلط (۱-۲۲) و (۱-۲۳) را بر حسب دو مجهول V_1 و V_2 داریم. فازور ولتاژ خروجی V_2 را میتوان ، پلا فاصله ، طبق قاعده کرامر ، بر حسب فازور جریان ورودی I_1 حل نمود. با وجود این ، بعلت متقارن بودن مدار و معادلات ، روش ساده تری برای حل این معادلات وجود دارد. دو متغیر جدید را چنین تعریف می کنیم :

$$(1-24) \quad V_+ = V_1 + V_2 \quad V_- = V_1 - V_2 \quad \text{با :}$$

$$(1-25) \quad V_1 = V_+ + V_- \quad V_2 = V_+ - V_-$$

با جمع کردن معادلات (۱-۲۲) و (۱-۲۳) بدست می آید :

$$(1-26) \quad \left[G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L(1+k)} \right] V_+ = \frac{I_1}{2}$$

با تفریق کردن (۱-۲۶) از (۱-۲۲) بدست می آید :

$$(1-27) \quad \left[G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L(1-k)} \right] V_- = \frac{I_1}{2}$$

معادلات (۱-۲۶) و (۱-۲۷) درست بهمان صورت معادلات دو مدار تشددید RLC موازی تنها ، پر ترتیب با ضرایب القاء $(1+k)$ و $L(1-k)$ ، می باشند. از آنجا که فازور ولتاژ خروجی $V_2 = V_+ - V_-$ است ، میتوان آنرا بعنوان اختلاف دو فازور خروجی دو مدار تشددید مختلف که تزویج نشده اند در نظر گرفت.

اکنون ، برای ساده کردن نتایج ، فرکانس های تشددید و ضرایب کیفیت دو مدار تشددید تنها را معرفی می کنیم. گیریم :

$$(1-28) \quad \omega_+ = \frac{1}{LC(1+k)} \quad \omega_- = \frac{1}{LC(1-k)}$$

که در آن $\omega_- < \omega_+$ است. گیرید:

$$(1-29) \quad Q_+ = \omega_+ CR \quad Q_- = \omega_- CR$$

در این صورت، از (1-26) و (1-27) نتیجه میشود که:

$$(1-30) \quad V_+ = \frac{1}{\gamma} I_s R \frac{1}{1 + jQ_+ \left(\frac{\omega}{\omega_+} - \frac{\omega_+}{\omega} \right)}$$

و

$$(1-31) \quad V_- = \frac{1}{\gamma} I_s R \frac{1}{1 + jQ_- \left(\frac{\omega}{\omega_-} - \frac{\omega_-}{\omega} \right)}$$

بنابراین، فازور ولتاژ خروجی چنین است:

$$(1-32)$$

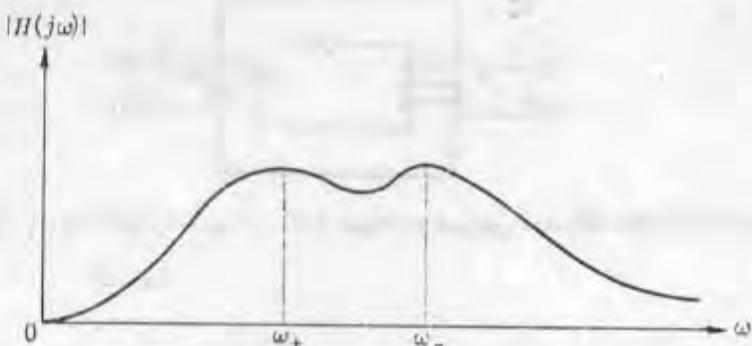
$$V_\tau = \frac{1}{\gamma} I_s R \left[\frac{1}{1 + jQ_+ \left(\frac{\omega}{\omega_+} - \frac{\omega_+}{\omega} \right)} - \frac{1}{1 + jQ_- \left(\frac{\omega}{\omega_-} - \frac{\omega_-}{\omega} \right)} \right]$$

و تابع شبکه چنین است:

$$(1-33)$$

$$H(j\omega) = \frac{V_\tau}{I_s} = \frac{1}{\gamma} R \left[\frac{1}{1 + jQ_+ \left(\frac{\omega}{\omega_+} - \frac{\omega_+}{\omega} \right)} - \frac{1}{1 + jQ_- \left(\frac{\omega}{\omega_-} - \frac{\omega_-}{\omega} \right)} \right]$$

اگر ضرایب کیفیت Q_+ و Q_- بزرگتر از واحد بوده و ضریب تزویج کوچک باشد، تابع شبکه داده شده در معادله (1-33) را میتوان بازهم ساده تر نمود. معهدها، برای بدست آوردن فرمولهای ساده شده اندامی نخواهیم کرد، تنها میخواهیم خاطرنشان کنیم که مدار تطبیق شده مضاعف میتواند پهنای باند عریض قری از مدار تشذیبی که در



شکل ۱-۹- منحنی اندازه نوعی یک مدار تطبیق شده مضامن

فصل قبل برسی کردیم ایجاد نماید. منحنی اندازه نوعی $|H(j\omega)|$ در شکل (۱-۹) نشان داده شده است. نوکهای منحنی تقریباً متناظر با ω_+ و ω_- ، دو مدار تشدید تها، که در معادله (۱-۲۸) تعریف شدند، میباشند.

۲- ترانسفورماتورهای ایده‌آل

ترانسفورماتور ایده‌آل نمایش ایده‌آلی ترانسفورماتورهای فیزیکی است که در بازار موجود است. با توجه به چنین ترانسفورماتورهای فیزیکی، ترانسفورماتور ایده‌آل با مه فرض ایده‌آل سازی زیر مشخص میشود:

(۱) ترانسفورماتور ایده‌آل انرژی تلف نمیکند.

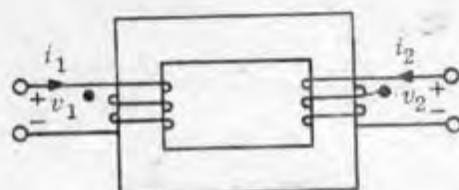
(۲) دارای هیچگونه شارنشتی^(۱) نیست، یعنی ضریب تزویج برابر واحد است.

(۳) ضریب خود القاء هر سیم پیچی بینهایت است.

ترانسفورماتور ایده‌آل مدل پیچاره‌قیدی از نظر محاسبات مدار میباشد چون با وصل کردن چند عنصر اضافی (R ، L ، C) به سرهای آن میتوان با دقت مناسبی رفتار سرهای ترانسفورماتور فیزیکی را نمایش داد.

۲-۱- ترانسفورماتور ایده‌آل با دو سیم پیچی

اکنون بطور حسی نشان میدهیم که چگونه از پیچیدن دو سیم پیچی بر روی یک هسته مغناطیسی، مطابق شکل (۲-۱)، و با بینهایت قراردادن ضریب نفوذ مغناطیسی، یک ترانسفورماتور ایده‌آل بدست می‌آید. فرض میکنیم که سیم پیچی هادرایی اتلاف و ظرفیت



شکل ۷-۹ = یک ترانسفورماتور که از پیچیدن دو سیم‌بیچی روی یک هسته مشترک بدست آمده است.

براکنده (۱) باشند. برای ساده کردن بررسی های بعدی ، جهات قرار دادی برای جریانها را طوری اختیار میکنیم که ضریب القاء متقابل ثابت باشد. اگر ضریب نفوذ مغناطیسی هسته بینهایت باشد ، در این صورت تمام میدان مغناطیسی در هسته محبوس خواهد بود و هر خط القاء مغناطیسی که از یک حلقه سیم‌بیچی ۱ گذرد ، از یکایک حلقه های سیم‌بیچی ۲ خواهد گذشت. بنابراین ، اگر Φ شارگذرنده از یک سیم‌بیچی با یک حلقه که در محلی دلخواه روی هسته قرار دارد باشد ، و n_1 و n_2 بترتیب تعداد دورهای سیم‌بیچی های ۱ و ۲ باشند ، در این صورت شارکل Φ_1 و Φ_2 که بترتیب ، از سیم‌بیچی های ۱ و ۲ میگذرد چنین است:

$$\Phi_1 = n_1 \Phi \quad \text{و} \quad \Phi_2 = n_2 \Phi$$

چون $v_1 = \frac{d\Phi_1}{dt}$ و $v_2 = \frac{d\Phi_2}{dt}$ است ، برای تمام زمانهای t و تمام ولتاژهای v_1 و v_2 داریم :

(۲-۱)

$$\boxed{\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{n_1}{n_2}}$$

اکنون به محاسبه Φ بر حسب «نیروی محرکه مغناطیسی (۱) (mmf) و رلوکتانس مغناطیسی (۲) » توجه کنید. مشابه قانون اهم برای یک مقاومت خطی ، رلوکتانس R_m

نیروی محرکه مغناطیسی و شار Φ را با رابطه زیر بهم ارتباط میدارد :

$$mmf = R\Phi$$

با توجه به فرض ما در مورد انتخاب جهات قراردادی برای جریانهای i_1 و i_2 ، $mmf = n_1 i_1 + n_2 i_2$ برابر است، و بنابراین :

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 = R\Phi$$

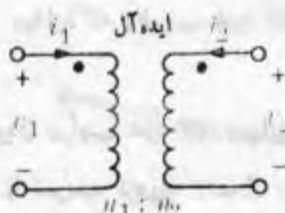
اکنون اگر نفوذ پذیری مغناطیسی بینهایت شود، $R\Phi$ صفر میگردد، چون روکتانس با n_1 تناسب معکوس دارد. واضح است که .

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 = 0$$

یا، برای تمام t و تمام جریانهای i_1 و i_2 :

$$(2-2) \quad \boxed{\frac{i_1(t)}{i_2(t)} = -\frac{n_2}{n_1}}$$

معادلات (۲-۱) و (۲-۲) بعنوان معادلات «تعریف کننده» دو سرترانسفورماتور ایده‌آل انتخاب می‌شوند. بنابراین، هر موقع که اصطلاح ترانسفورماتور ایده‌آل با دو سیم پیچی را بکار میبریم، منظور ما یک دستگاه دو قطبی خواهد بود که معادلات ولتاژ و جریان آن (۲-۱) و (۲-۲) میباشند. بخصوص، به علامت منفی در (۲-۲) توجه کنید. در دیاگرام‌های مداری، ترانسفورماتورهای ایده‌آل با مدار نشان داده شده در شکل (۲-۲) نمایش داده میشود.



شکل ۲-۲- ترانسفورماتور ایده‌آل، مطابق تعریف :

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{و} \quad \frac{i_1}{i_2} = -\frac{n_2}{n_1}$$

تبصره ۱- چون معادلات (۲-۱) و (۲-۲) را میتوان بصورت «توابع خطی» که v_1 را برحسب i_1 و v_2 را برحسب i_2 بیان میکنند تعبیر نمود و چون ضرایب v_1 و v_2 به زمان بستگی ندارند، از این جهت ترانسفورماتور ایده‌آل یک عنصر مدار «خطی تعبیر ناپذیر با زمان» میباشد.

تبصره ۲- از (۲-۱) و (۲-۲)، برای تمام جریانها و ولتاژها و برای تمام k دارایم:

$$(2-2) \quad v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = 0$$

بنابراین، در تمام لحظات، مجموع توانهای ورودی از هرقطب برابر صفر است. همچویی از v_1 ذخیره نمیشود، و همچویی از v_2 تلف نمیگردد. همانقدر توان که از یک جفت سر وارد ترانسفورماتور میشود، از جفت سر دیگر خارج میگردد. این حقایق، اغلب با گفتن اینکه ترانسفورماتور ایده‌آل یک عنصر «بی اتصال و بدون ذخیره انرژی» است، و بنابراین بدون حافظه میباشد، مشخص میشوند. توجه کنید که خازن‌ها و سلف‌ها و جفت‌هایی از سلفها با تزویج متقابل، (حتی وقتیکه $k=1$ است) نیز عناصر بی اتصال میباشند، ولی، انرژی ذخیره «میکنند».

تبصره ۳- از (۲-۱)، ولتاژ v_1 دوسریم پیچی ۱ به i_1 یا به v_2 بستگی ندارد و تنها به i_2 بستگی دارد. بطريق مشابه، از (۲-۲)، جریان i_2 تنها به v_1 بستگی دارد، و از v_1 و v_2 مستقل است. بخصوص، اگر میخواستیم ضریب خود القاء سلف ۱ را اندازه‌گیری کنیم (بس سلف ۲ مدار باز بوده، بنابراین $=0$ است)، آنکاه معادله (۲-۲) لازم میدارد که ولتاژ v_1 اعمال شده به سلف ۱ هرچقدر که باشد، بطrior متحده $=0$ باشد. این حقیقت لازم میدارد که «ضریب خود القاء هرسلف یک ترانسفورماتور ایده‌آل بینهایت باشد».

تبصره ۴- علاوه بر دارا بودن ضرایب خود القاء بینهایت، یک ترانسفورماتور ایده‌آل با دوسریم پیچی، یک جفت سلف با ضریب تزویج $k=1$ میباشد. انرژی ذخیره شده برای سلفهای تزویج شده را میتوان بصورت زیر نوشت: (معادله (۱-۷) را بینمیدیم):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(i_1, i_2) &= \frac{1}{\gamma} (L_{11}i_1 + \gamma \sqrt{L_{11}L_{22}} i_1 i_2 + L_{22}i_2) \\ &\quad + \left(\frac{|M|}{\sqrt{L_{11}L_{22}}} - 1 \right) \sqrt{L_{11}L_{22}} i_1 i_2 \\ &= \frac{1}{\gamma} (\sqrt{L_{11}} i_1 + \sqrt{L_{22}} i_2) + (k-1) \sqrt{L_{11}L_{22}} i_1 i_2 \end{aligned}$$

در نتیجه معادله (۲-۳)، برای یک ترانسفورماتور ایده‌آل، ع متحدد با صفر است. بنابراین:

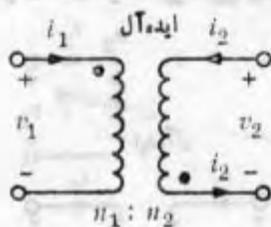
$$(2-4) \quad k = 1$$

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{\sqrt{L_{22}}}{\sqrt{L_{11}}}$$

توجه کنید که معادله آخر با (۲-۲) مازگار است چون L_{11} و L_{22} بترتیب با n_1^2 و n_2^2 متناسب هستند.

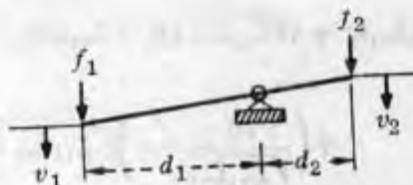
تیصره ۵. در نتیجه انتخاب جهات قراردادی سا، معادلات (۲-۱) و (۲-۲) دارای علاوه‌های نشان‌داده شده هستند. اگر ماجهات قراردادی را مطابق شکل (۲-۳) انتخاب کنیم (توجه کنید که از طرف سرتقطه گذاری شده از سیم پیچی خارج می‌شود)، معادلات چنین می‌شوند:

$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{n_1}{n_2} \quad \text{و} \quad \frac{i_1}{i_2} = \frac{n_2}{n_1}$$



شکل ۲-۳ - ترانسفورماتور ایده‌آل، با توجه به محل نقطه ا

$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{n_1}{n_2} \quad \text{و} \quad \frac{i_1}{i_2} = \frac{n_2}{n_1}$$



شکل ۴-۲- تشابه مکانیکی یک ترانسفورماتور آیده‌آل با

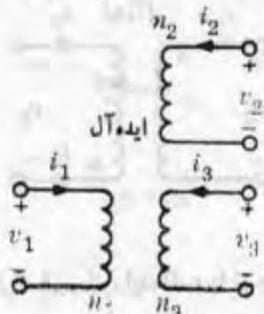
$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{d_1}{d_2} \quad \text{و} \quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

تبصره ۶- ترانسفورماتور آیده‌آل مشابه الکتریکی یک اهرم مکانیکی است که از یک نولای بدون مالش و یک میله بی‌جرم و فوق العاده سخت تشکیل شده باشد. (شکل ۴-۴) را بینید). واضح است که با چنین فرضهایی، روابط میان نیروهای f و سرعتهای v چنین است:

$$\frac{f_1(t)}{f_2(t)} = \frac{d_2}{d_1} \quad \frac{v_1(t)}{v_2(t)} = -\frac{d_1}{d_2}$$

نداشتن مالش متناظر با نبودن اتلاف انرژی در ترانسفورماتور آیده‌آل بیاید. فوق العاده سخت بودن میله با فرض نداشتن ظرفیت پراکنده در ترانسفورماتور آیده‌آل متناظر است، و بی‌جرم بودن میله متناظر با نداشتن انرژی مغناطیسی ذخیره شده در ترانسفورماتور آیده‌آل بیاید.

تبصره ۷- بعنوان آخرین توضیح، بایستی تذکر داد که میتوان ترانسفورماتورهایی با چندسیم پیچی در نظر گرفت. بعنوان مثال، ترانسفورماتور یک هسته و سه سیم پیچی شکل (۴-۰)



شکل ۴-۵- یک ترانسفورماتور آیده‌آل با سه سیم پیچی

عناصر تزوج کننده و مدارهای تزوج شده
را درنظر بگیرید. معادلات آن چنین هستند:

$$\frac{v_1}{n_1} = \frac{v_2}{n_2} = \frac{v_3}{n_3} \quad n_1 i_1 + n_2 i_2 + n_3 i_3 = 0$$

این ترانسفورماتور ایده‌آل با یک هسته و سه سیم پیچی، بازهم یک عنصر «خطی تغییر ناپذیر با زمان، و بی‌اتلاف و بدون ذخیره انرژی است».

۲-۲- خواص تغییر دهنده‌گی امپدانس

۱- یک بار مقاومتی^(۱) پامقاویت R_L که به سیم پیچی ثانویه^(۲) یک ترانسفورماتور ایده‌آل، مطابق شکل (۲-۶)، متحمل است را درنظر بگیرید. مقاومت ورودی چنین است:

$$R_{in} = \frac{v_1}{i_1} = \frac{\left(\frac{n_1}{n_3}\right)v_r}{-\left(\frac{n_3}{n_1}\right)i_r} = \left(\frac{n_1}{n_3}\right)^r \left(-\frac{v_r}{i_r}\right)$$

اما:

$$v_r = -R_L i_r$$

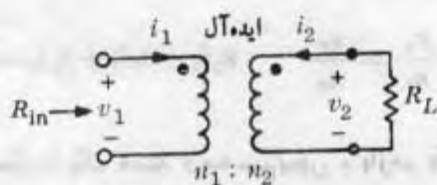
بنابراین:

$$(2-6) \quad R_{in} = \left(\frac{n_1}{n_3}\right)^r R_L$$

۲- آکنون فتا رحالت دائمی سینوسی مدار خطی تغییر ناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (۲-۷) را درنظر می‌گیریم. بار، یک امپدانس یک قطبی $Z_L(j\omega)$ است،

$$(2-7) \quad Z_{in}(j\omega) = \frac{V_1}{I_1} = \left(\frac{n_1}{n_3}\right)^r \left(-\frac{V_r}{I_r}\right) = \left(\frac{n_1}{n_3}\right)^r Z_L(j\omega)$$

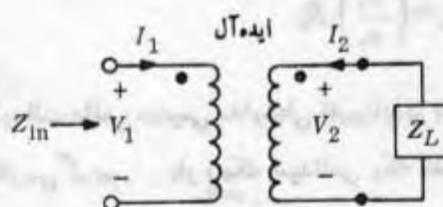
معادلات (۲-۵) و (۲-۶) تعبیر جالبی دارند. بدین معنی، که ترانسفورماتورهای



شکل ۲-۶- مقاومت ورودی یک ترانسفورماتور ایده‌آل ختم شده با :

$$R_{in} = \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 R_L$$

ایده‌آل امپدانس ظاهری (۱) یک بار را تغییر میدهد و میتوان آنها را برای تطبیق امپدانس مدارهای با امپدانس متفاوت بکار برد. بعنوان مثال، امپدانس ورودی یک بلندگو معمولاً در حدود ۸ اهم است که برای اتصال مستقیم به بسیاری از تقویت‌کننده‌هایی که با لامپ‌خلاء و یا ترانزیستور کار میکنند، و امپدانس خروجی مثلاً ۸۰۰۰ اهم دارند، مقدار بسیار کوچکی است. اگر یک ترانسفورماتور بین خروجی تقویت‌کننده قدرت و ورودی بلندگو قرار داده شود، و نسبت دورها چنان انتخاب گردد که تفاوت امپدانس بین خروجی تقویت‌کننده و ورودی بلندگو را ترمیم کند، تقویت‌کننده امپدانس مناسبی برای بکار



شکل ۲-۷- امپدانس ورودی یک ترانسفورماتور ایده‌آل ختم شده با :

$$Z_{in} = \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 Z_L$$

انداختن بلند گو خواهد داشت. نسبت دورهای لازم برابر $10 = \sqrt{\frac{800}{8}}$ میباشد.

تمرین ۶ - نشان دهید که اگر در شکل (۲-۷) بجای سربالابی ثانویه، سربالابی آن « نقطه گذاری » شده باشد، روابط (۲-۵) و (۲-۶) باز هم معتبر خواهند بود.

تمرین ۷ - مدار شکل (۲-۸) را در نظر بگیرید، که در آن یک ترانسفورماتور ایده‌آل به دو سلف خطی تغییر ناپذیر با زمان پاسراایب خود القاء L_a و L_b ، مطابق شکل نشان داده شده، متصل میباشد. ثابت کنید که این مدار دو قطبی معادل یک چفت سلف تزویج شده با ماتریس ضرایب القاء زیر میباشد:

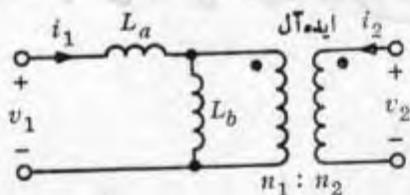
$$\begin{bmatrix} L_a + L_b & \frac{n_2}{n_1} L_b \\ \frac{n_2}{n_1} L_b & \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 L_b \end{bmatrix}$$

تمرین فوق این حقیقت مهم را نشان میدهد که سلفهای تزویج شده را میتوان با سلفهای تزویج نشده و یک ترانسفورماتور ایده‌آل جایگزین کرد.

۳- منابع کنترل شده

۱- توصیف چهار نوع از منابع کنترل شده

تا اینجا ما تنها با منابع ولتاژ ناپسته و منابع جریان ناپسته مواجه بوده‌ایم. منابع



شکل ۲-۸ - یک مدار دو قطبی که معادل یک چفت سلف تزویج شده است

نایسته، ورودی‌های مدار را تشکیل میدهند. در این بخش، نوع دیگری از منابع را که «منبع کنترل شده»^(۱) یا «منبع وابسته»^(۲) نامیده می‌شوند معرفی خواهیم کرد. یک منبع کنترل شده برای ساختن مدل عناصر الکترونیکی، مانند ترانزیستور، ضروری است، بموجب تعریف، یک منبع کنترل شده عنصری است که دو شاخه دارد، که در آن شاخه ۲ یک منبع ولتاژ و یا یک منبع جریان است، و شاخه ۱ یک مدار باز و یا یک مدار اتصال کوتاه می‌باشد. شکل موج منبع در شاخه ۲ تابعی از ولتاژ دو سر مدار باز (در شاخه ۱) و یا تابعی از جریان گذرنده از مدار اتصال کوتاه (در شاخه ۱) می‌باشد. بعبارت دیگر، منبع قرار گرفته در شاخه ۲ بوسیله ولتاژ و یا جریان شاخدیدیگر، یعنی شاخه ۱، «کنترل می‌شود». البته چهار اسکان وجود دارد که در شکل (۳-۱) نشان داده شده‌اند، که در آن، علاوه‌های لوزی شکل منابع «کنترل شده» را تماش میدهند. در شکلهای (۳-۱ الف) و (۳-۱ ب) منابع شاخه ۲ منابع جریان می‌باشند که جریان آنها بترتیب به جریان شاخه ۱، که مدار اتصال کوتاه است، و ولتاژ شاخه ۱، که مدار باز است بستگی دارد. این منابع کنترل شده، بترتیب «منبع جریان کنترل شده با جریان» و «منبع جریان کنترل شده با ولتاژ» نامیده می‌شوند. در شکلهای (۳-۱ پ) و (۳-۱ ت) منابع شاخه ۲ منابع ولتاژ می‌باشند. ولتاژ آنها بترتیب به ولتاژ شاخه ۱، که مدار باز است، و به جریان شاخه ۱، که مدار اتصال کوتاه است، بستگی دارد. این منابع کنترل شده بترتیب «منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ» و «منبع ولتاژ کنترل شده با جریان» نامیده می‌شوند.

اين چهار نوع منبع کنترل شده بوسیله معادلاتی که در شکل نشان داده شده‌اند مشخص می‌شوند. چهار ضریب تناسب α ، g_m ، m و r_m در شکل (۳-۱) بترتیب نشان دهنده نسبت جریان، رسانایی انتقالی، نسبت ولتاژ و مقاومت انتقالی می‌باشند. بنابراین داریم:

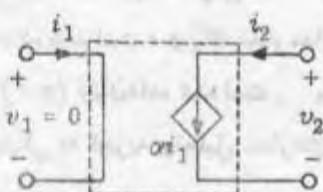
$$a = \frac{i_2}{i_1} \quad \text{منبع جریان کنترل شده با جریان :}$$

$$(3-1) \quad g_m = \frac{i_2}{v_1} \quad \text{منبع جریان کنترل شده با ولتاژ :}$$

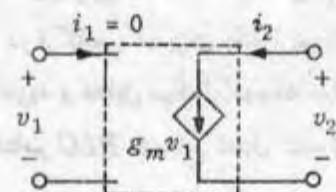
$$\mu = \frac{v_2}{v_1} \quad \text{منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ :}$$

$$r_m = \frac{v_2}{i_1} \quad \text{منبع ولتاژ کنترل شده با جریان :}$$

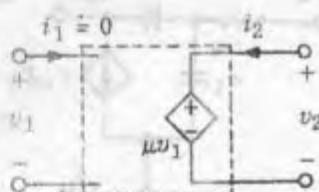
این منابع کنترل شده، که با معادلات (۳-۱) مشخص شده‌اند و در آنها a



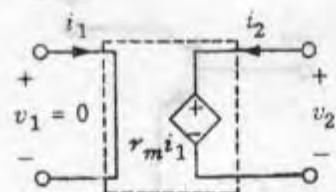
(الف)



(ب)



(ب)



(ت)

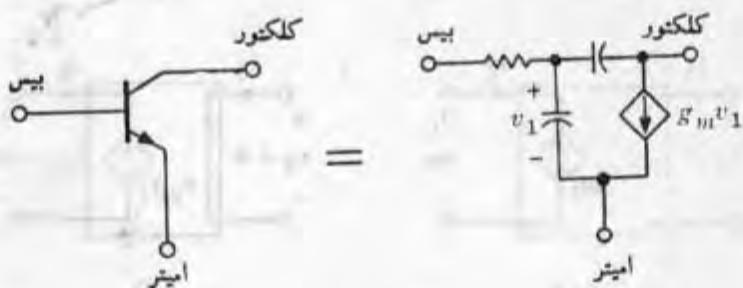
شکل ۱-۳-۱ - چهار نوع منبع کنترل شده. چون خواهی بود a , g_m , μ و r_m ثابت باشند این منابع کنترل شده عناصر خطی تغییر ناپذیر با زمان می‌باشند. (الف) $i_1 = 0$ و

$i_2 = ai$ ، منبع جریان کنترل شده با جریان (ب) $i_1 = 0$ و $i_2 = g_m v_1$ و

منبع جریان کنترل شده با ولتاژ، (ب) $i_1 = 0$ و $v_2 = \mu v_1$ و منبع ولتاژ کنترل

شده با ولتاژ، (ت) $v_1 = 0$ و $v_2 = r_m i_1$ ، منبع ولتاژ کنترل شده با جریان.

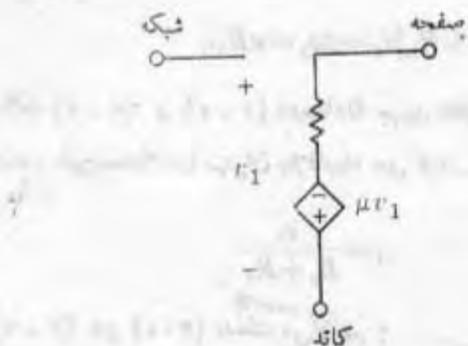
i_m و v_m مقادیر ثابت می‌باشند، عناصر خطی تغییر ناپذیر با زمان هستند. یک منبع کنترل شده غیر خطی مشخصه‌ای مانند $i = f(v)$ دارد که در آن $f(v)$ یک تابع غیر خطی است. یک منبع کنترل شده خطی تغییر پذیر با زمان مشخصه‌ای مانند $v = a(t)$ دارد که در آن $a(t)$ یک تابع داده شده از زمان است. منابع کنترل شده خطی تغییر پذیر با زمان برای نمایش دادن بعضی مدولاتورها^(۱) مفید می‌باشند. با وجود این، برای سادگی، تنها منابع کنترل شده خطی تغییر ناپذیر با زمان در اینجا بررسی خواهند شد. وسائل الکترونیکی مانند ترانزیستورها و لامپهای خلاء را میتوان، وقیکه بصورت خطی سیگنال کوچک کار کنند، با پکار بردن مقاومتها خطي، خازنهای خطی و یک منبع کنترل شده خطی، مانند آنجه در شکل (۳-۱) نشان داده شده است، مدل سازی نمود، مدار معادل سیگنال کوچک نوعی یک ترانزیستور با ایست زمین^(۲) شده در شکل (۳-۲) در نشان داده شده است، و یک مدار معادل خطی در فرکانس کم برای یک تریود^(۳) در شکل (۳-۳) نشان داده شده است. بنابراین، تجزیه و تحلیل سیگنال کوچک مدارهای الکترونیکی به تجزیه و تحلیل مدارهای خطی با عناصر RLC و منابع کنترل شده تبدیل می‌شود.



شکل ۳-۲- مدار معادل خطی سیگنال کوچک یک ترانزیستور با ایست زمین شده که در آن از یک منبع جریان کنترل شده با ولتاژ استفاده شده است.

توصیر ۵ - دلائل بکار بردن علائم مختلف برای منابع ثابتة و واپسته چنین است:

- منابع واپسته نقش "کاملاً" متفاوتی از منابع واپسته ایفاء میکنند. منابع واپسته ورودیهای مدار هستند، و نمایش دهنده مولدهای سیگنال میباشد. یعنی آنها تأثیر محیط خارج بر روی مدار را نمایش میدهند. چون مشخصه های منابع واپسته خطوط موازی محور زمان تغییر نمیباشند ازاینجهت آنها عناصر غیر خطی میباشند ("عموملاً" تغییر پذیر با زمان هستند). منابع واپسته برای مدل سازی پدیده هایی که در دستگاه های الکترونیکی رخ میدهد بکار میروند. منابع واپسته تزویج میان یک متغیر مدار در شاخه ۱ و یک متغیر مدار در شاخه ۲ را نمایش میدهند. منابع واپسته نوعی درشك (۲-۱) داده شده اند. منابعی که درشك (۲-۱) نشان داده شده اند عناصر چهار سر (خطی) تغییر ناپذیر با زمان میباشند.
- مدارهای خطی ممکن است شامل منابع واپسته و منابع واپسته، هردو، باشند. معهذا منابع واپسته باستی خطی باشند، درحالیکه منابع واپسته خطی نیستند.
- در قضاای شبکه های معادل تونن وترن (فصل شانزدهم)، منابع «واپسته» نقش "کاملاً" متفاوتی از منابع «واپسته» ایفا میکنند.



شکل ۳-۳۰ - مدار معادل لامپ تریود که در آن از یک منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ استفاده شده است.

۳-۲- مثالهایی از تجزیه و تحلیل مدار

در تجزیه و تحلیل مدار، هنگام نوشتن معادلات مدار، منابع کنترل شده را مانند منابع تابسته در نظر بگیرید، این امر بوسیله دو مثال زیر نشان داده خواهد شد.

مثال ۱ - مدار ساده نشان داده شده در شکل (۳-۲) را در نظر بگیرید، منبع کنترل شده این مدار یک منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ میباشد، که در آن i_1' و i_2' دو شاخه آنرا نمایش میدهند، و چنین مشخص میشود:

$$(3-2) \quad v_2 = \mu v_1$$

گهیم که ورودی منبع تابسته v_1 و خروجی ولتاژ v_L دو سر مقاومت R_L باشد، چون دو مش وجود دارد، میتوان دو معادله مش را با جریانهای مش i_1 و i_2 بعنوان متغیرهای آنها نوشت. این دو معادله چنین هستند:

$$(3-3) \quad (R_s + R_1)i_1 = v_s$$

$$(3-4) \quad (R_2 + R_L)i_2 = v_2$$

از آنجائیکه منبع کنترل شده با معادله (۳-۲) مشخص شده است، میتوان معادله (۳-۴) را بصورت زیر نوشت:

$$(3-5) \quad (R_2 + R_L)i_2 = \mu v_1 = \mu R_1 i_1$$

بنابراین، معادلات (۳-۳) و (۳-۵) دو معادله جبری خطی بر حسب دو جریان مجهول i_1 و i_2 میباشند. این معادلات را میتوان پلا فاصله حل کرد. از (۳-۳) داریم:

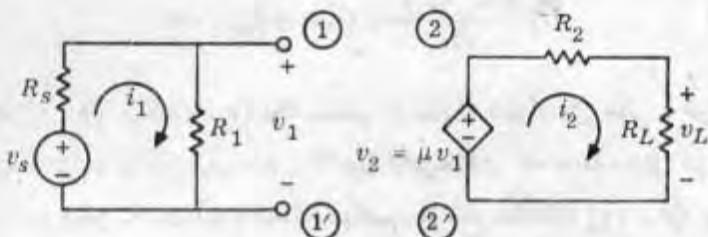
$$(3-6) \quad i_1 = \frac{v_s}{R_s + R_1}$$

پایگذاری (۳-۶) در (۳-۵) پذست می آوریم:

$$i_2 = \frac{\mu v_s R_1}{(R_s + R_1)(R_2 + R_L)}$$

بنابراین ولتاژ خروجی چنین است:

$$(3-7) \quad v_L = R_L i_2 = \frac{\mu v_s R_1 R_L}{(R_s + R_1)(R_2 + R_L)}$$



شکل ۴-۳-۱ - مثال ۱ : یک مدار ساده با یک منبع کنترل شده

تبصره ۱ - اگر ثابت μ بزرگ باشد و مقاومتها بطرز مناسبی انتخاب شده باشند، ولتاژ خروجی v_L میتواند از ولتاژ ورودی v_2 پسیار بزرگتر باشد. در این حالت مدار یک تقویت کننده ولتاژ ساده را نمایش میدهد.

تبصره ۲ - مدار شکل (۴-۲) شامل دو منبع میباشد که بیکدیگر مستصل نیستند. منبع کنترل شده بعنوان عنصر تزویج کننده میان شهرهای ۱ و ۲، و یا میان ورودی و خروجی، عمل میکند.

مثال ۲ - مدار شکل (۵-۳) را در نظر بگیرید. منبع کنترل شده در مدار یک منبع جریان کنترل شده با ولتاژ میباشد، که در آن ۱ ۱' و ۲ ۲' دو شاخه آنرا نمایش میدهند، و بوسیله رابطه زیر مشخص میشود :

$$(۳-۸) \quad i_2 = g_m v_1$$

میخواهیم معادله دیفرانسیلی که منبع جریان ورودی i_1 و ولتاژ v_1 را بهم مربوط بیکند بدست آوریم. در اینجا از تجزیه و تحلیل گره استفاده میکنیم. گیریم v_1 و v_2 دو ولتاژ گره باشند. دو معادله گره چنین هستند :

$$(۳-۹) \quad G_1 v_1 + C_1 \frac{dv_1}{dt} + C_2 \frac{d(v_1 - v_2)}{dt} = i_s$$

$$(۳-۱۰) \quad C_2 \frac{d(v_2 - v_1)}{dt} + G_2 v_2 = -i_2$$

در معادله (۱۰-۳) بجای جریان i_2 میتوان، طبق رابطه (۳-۸)، $g_m v_1$ را قرار داد و بنابراین معادله (۱۰-۳) بدین صورت درست آید :

$$(3-11) \quad C_2 \frac{d(v_2 - v_1)}{dt} + G_2 v_2 + g_m v_1 = 0$$

معادلات (۳ - ۹) و (۳ - ۱۱) یک سیستم دو معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت بر حسب v_1 و v_2 را تشکیل میدهند. اکنون از این حقیقت که جمله مشتق در دو معادله یکسان است (بجز علامت آنها) استفاده میکنیم. از جمع معادلات (۳ - ۹) و (۳ - ۱۱) پدست می‌آوریم:

$$(3-12) \quad (G_1 + g_m) v_1 + C_1 \frac{dv_1}{dt} - i_s = -G_2 v_2$$

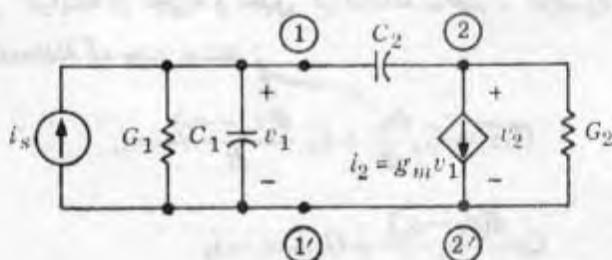
با مشتق‌گیری از (۳ - ۱۲) و جایگذاری $\frac{dv_2}{dt}$ در (۳ - ۹)، معادله دیفرانسیل لازم را

بر حسب v_1 پدست می‌آوریم. بنابراین:

$$(3-13) \quad \frac{dv_1}{dt} + \left(\frac{G_1 + g_m + G_2}{C_1} + \frac{G_1}{C_1} + \frac{G_2}{C_2} \right) \frac{dv_1}{dt} + \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2} v_1 \\ = \frac{1}{C_1} \frac{di_s}{dt} + \frac{G_2}{C_1 C_2} i_s$$

شرط اولیه لازم را میتوان بأسانی از اطلاعات داده شده یعنی $v_2(0) = V_2$ و $v_1(0) = V_1$

پدست آورد. برای تعیین $\frac{dv_1}{dt}(0)$ در معادله (۳ - ۱۳) قرار میدهیم و پدست می‌آوریم:



شکل ۵ - ۳ - مثال ۲: یک مدار ساده با یک منبع کنترل شده که با استفاده از روش تجزیه و تحلیل گره بررسی شده است.

$$\frac{dv_1}{dt}(o) = \frac{1}{C_1} [i_1(o) - G_1 V_T - (g_m + G_1) V_1]$$

با این دو شرط اولیه، و برای هر یک داده شده، محاسبه جواب معادله (۱۳ - ۳) و همچنین جایگزین نمودن نتیجه آن در معادله (۱۲ - ۳) برای بدست آوردن i_2 کارساده‌ای است.

۳-۳-۳ خواص دیگر منابع کنترل شده

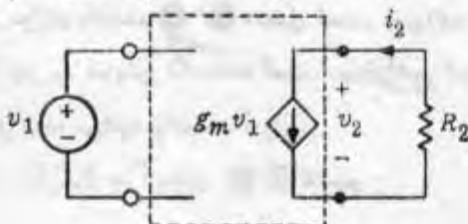
چنانکه در بعضی (۱ - ۳) گفته شد، منابع کنترل شده نشان داده شده در شکل (۱ - ۳)، عناصر خطی تغییر ناپذیر با زمان میباشند. آنها عناصر تزویج کننده هستند چون ولتاژها و جریانهای دوشاخه مختلف را بهم ربط میدهند. چون معادلاتی که منابع کنترل شده را مشخص مینمایند (شکل (۱ - ۳) را بینید) معادلات جبری خطی پرسیب متغیرهای ولتاژها و جریانها میباشند، منابع کنترل شده را میتوان عنوان عناصر دوقطبی مقاومتی در درنظر گرفت. با درنظرداشتن اینکه مازجهات قراردادی متناختر استفاده میکنیم، توان لحظه‌ای که وارد مدار دوقطبی میشود چنین است:

$$(3-14) \quad p(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t)$$

چون شاخه ۱ یعنی شاخه ورودی مدار اتصال کوتاه ($v_1 = 0$) و یا مدار باز ($i_1 = 0$) است توان لحظه‌ای برای هرچهار نوع منبع کنترل شده چنین است:

$$p(t) = v_2(t)i_2(t)$$

گریم شاخه ۱ یک منبع چریان کنترل شده با ولتاژ را به یک منبع ولتاژ نابسته و شاخه ۲ یعنی شاخه خروجی را به یک مقاومت خطی با مقاومت R_2 وصل کنیم. این امر در شکل



شکل ۳-۳-۶ - مداری که نشان میدهد منابع کنترل شده معکن است به محیط خارج از رُزی تحریل نمیشوند؛ درنتیجه منابع کنترل شده عناصر اکثراً هستند.

(۲ - ۳) نشان داده شده است. با توجه به جهات قراردادی برای i_2 و i_3 ، از قانون اهم نتیجه می‌شود:

$$(3-10) \quad v_2 = -i_2 R_2$$

با جایگزینی معالله (۱۵ - ۳) در (۱۴ - ۳) بست می‌آوریم:

$$j(t) = -i_2'(t) R_2$$

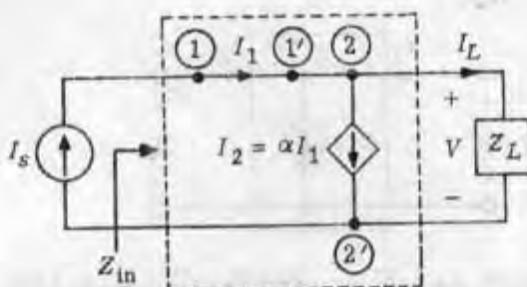
بنابراین، توان لحظه‌ای وارد شونده به مدار دوقطبی همواره منفی است. عبارت دیگر، منبع کنترل شده باشد $i_2'(t)$ به مقاومت R_2 توان تحويل میدهد. بنابراین با کنترل ولتاژ ورودی v مدار، در شکل (۶ - ۳)، می‌توان بوسیله منبع ولتاژ ناپسند v هر مقدار ارزی به مقاومت پار R_2 تحويل داد. بهاظطری باورید که در فصل دوم عنصر «پسیو» رابطوان عنصری که نتواند به محیط خارج ارزی تحويل دهد تعریف نمودیم. از آنجائیکه یک منبع کنترل شده را می‌توان عنوان یک عنصر مقاومتی دوقطبی در نظر گرفت و با توجه باینکه این عنصر می‌تواند به محیط خارج ارزی تحويل دهد، از اینرو منبع کنترل شده یک عنصر «اکتیو» است.

در بخش قبل دیدیم مداری که شامل یک منبع کنترل شده و مقاومتهاي پسیو باشد نتواند ولتاژها را تقویت کند. اکنون مثال دیگری، برای نشان دادن اینکه از بکار بردن منبع کنترل شده امکانات جالب دیگری نیز بست می‌آید، بیان می‌کنیم.

مثال ۳ - تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی مدار ساده شکل (۷ - ۳) را در نظر بگیرید. منبع کنترل شده بوسیله دوشاخه ۱'۱ و ۱'۲ نمایش داده شده است. امپدانس Z_L بطور موازی با شاخه ۱'۲ متصل است. ورودی، منبع جریان ناپسند است که جریان آن با فازور I_L نمایش داده شده است. میخواهیم امپدانس ورودی Z_{in} که بوسیله منبع ورودی دینه می‌شود را بست آوریم، با استفاده از KCL در گره‌های ۱'۱ داریم:

$$(3-11) \quad I_s = I_1 \quad \text{و} \quad I_1 = \alpha I_1 + I_L$$

بنابراین امپدانس ورودی خواهد بود.



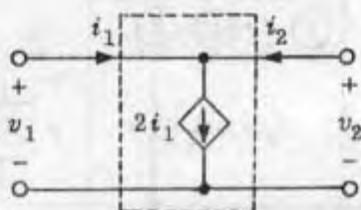
شکل ۷-۳ - مثال : یک مدار دوقطبی که بوسیله یک منبع کنترل شده حاصل شده است

$$(۲-۱۷) \quad Z_{in} = \frac{V}{I_s} = \frac{Z_L I_L}{I_s}$$

با ترکیب معادلات (۱۶ - ۳) و (۱۷ - ۳) داریم :

$$(۲-۱۸) \quad Z_{in} = (1 - \alpha) Z_L$$

بتوان مشاهده کرد که اگر پارامتر α برابر ۲ باشد ، معادله (۱۸ - ۳) نشان میدهد که Z_{in} با منفی Z_L برابر است. بنابراین ، اگر Z_L امپدانس یک مدار یک قطبی پسیو را نشان دهد ، $Z_{in} = -Z_L$ امپدانس یک مدار یک قطبی اکتیو را نمایش میدهد. در فصل هفتم نشان دادیم که یک شرط لازم برای اینکه امپدانس نقطه تحریک Z_L پسیو باشد این است که ، برای تمام مقادیر ω ، $0 \geq \operatorname{Re}[Z_L(j\omega)] \geq 0$ باشد. از آنجائیکه $Z_{in} = -Z_L$ است ، $\operatorname{Re}[Z_{in}(j\omega)] \leq 0$ و بنابراین ، وقتی که $\alpha = 2$ باشد ، امپدانس یک مدار یک قطبی اکتیو است. مدار دوقطبی داخل مربع خط پیش شده در شکل (۲ - ۷) « مبدل امپدانس منفی » (۱) نامیده میشود. یک مبدل امپدانس منفی ، یک دستگاه دوقطبی با این خاصیت است که امپدانس ورودی اش برابر منفی هر امپدانسی است که در قطب خروجی به آن متصل باشد. در حقیقت ، مبدل امپدانس منفی خود یک عنصر دوقطبی تزویج کننده است. اگر قسمت داخل مربع خط چین شده مدار شکل (۲ - ۷) را ، مطابق آنچه در شکل (۲ - ۸) نشان داده شده است با $\alpha = 2$ مجددآ رسم کنیم و جزءها و ولتاژها را مطابق شکل ، مجددآ تعریف کنیم ، توصیف یک مبدل امپدانس منفی بصورت زیر میباشد:



شکل ۳-۸ - یک مبدل امپدانس منفی که بوسیله یک منبع کنترل شده حاصل شده است.

$$(3-19) \quad v_1 = v_2 \quad i_1 = i_2$$

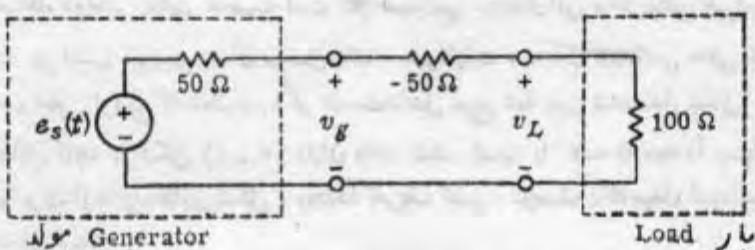
چنانکه در فصلهای دوم و پنجم دیدیم، یک مقاومت منفی یک عنصر آشتیو است. این نکته در تعریف زیر مجدد آتا کید می‌شود. این مطابق در طرح تقویت کننده‌ها و بعضی سیستمهای ارتباطی کابلی مورد استفاده قرار گرفته است.

تمرین - مدار نشان داده شده در شکل (۳-۹) را در نظر بگیرید.

الف - برای حالتی که v_2 مقدار ثابتی برابر 10 ولت سیاستد، توانی که مولدهای میدهد، توانی که مقاومت منفی دریافت می‌کند، و توانی که مقاومت با دریافت می‌کنند را محاسبه کنید.

ب - سواله را برای حالتی که $v_2(t) = 10 \cos \omega t$ می‌باشد تکرار کنید (توان لحظه‌ای و توان متوسط، هردو، را محاسبه کنید).

پ - درباره چگونگی تقسیم انرژی در مدار چه می‌توانید بگویید؟



شکل ۳-۹ - تمرینی که نشان میدهد مقاومت منفی به بار توان تحویل میدهد

خلاصه

● عنصر تزویج کننده نوعی عبارت از سلفهای تزویج شده، ترانسفورماتورهای ایده‌آل، و متابع کنترل شده می‌باشد. عنصر تزویج کننده بیش از یک شاخه و بیش از دوسر دارند، که تعداد آنها معمولاً چهار می‌باشد. آنها بوسیله معادلاتی که ولتاژ شاخه و جریان شاخه آنها را بهم مربوط می‌سازند تعریف می‌گردند.

● معادلاتی که یک جفت مسلف تزویج شده خطی تغییر ناپذیر با زمان را تعریف می‌کنند عبارتند از:

$$v_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt}$$

برای تکمیل مشخصات، جریانهای اولیه $(i_1)_0$ و $(i_2)_0$ لازم است.

● انرژی ذخیره شده در یک جفت سلف تزویج شده خطی تغییر ناپذیر با زمان چنین است:

$$g(i_1, i_2) = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2$$

اگر این سلفها همیو باشند، ضرایب خود القاء L_{11} و L_{22} ثابت می‌باشند، در حالیکه ممکن است M ثابت و یا متغیر باشد. مقدار M به ضریب تزویج k ، که بوسیله رابطه زیر تعریف می‌شود، مربوط است:

$$k \triangleq \frac{|M|}{\sqrt{L_{11} L_{22}}}$$

همیو بودن لازم میدارد که $1 \leq k \leq 0$ باشد.

● سلفهای خطی تغییر ناپذیر با زمان را می‌توان بر حسب ماتریس ضرایب القاء L توصیف نمود. بنابراین:

$$\mathbf{v} = \mathbf{L} \frac{d\mathbf{i}}{dt}$$

نظریه " اساسی مدارها و شبکه ها

همچنین ، میتوان آنها را بر حسب ماتریس ضرایب القاء معکوس Γ تعریف نمود . بنابراین :

$$\mathbf{i}(t) = \mathbf{i}(0) + \Gamma \int_0^t \mathbf{v}(t') dt'$$

رابطه زیر همواره برقرار است :

$$\Gamma = \mathbf{L}^{-1}$$

● معادلات تعریف کننده یک ترانسفورماتور ایدهآل با دو سیم بیجی چنین است :

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{-i_2(t)}{i_1(t)}$$

که در آن n_1 و n_2 بترتیب تعداد دور در سیم بیجی اول و سیم بیجی دوم میباشد . این معادلات وقتی برقرار است که جهات قراردادی i_1 و i_2 هردو به سرنشطه گذاری شده داخل (ویا از آن خارج) شوند . اگراین وضع برقرار نباشد ، بجای n_1 و n_2 - قرار دهد .

● یک ترانسفورماتور ایدهآل یک عنصر خطی تغییر ناپذیر با زمان است ، و انرژی تلف ویا ذخیره نمی کند .

● یک ترانسفورماتور ایدهآل را میتوان بعنوان یک جفت سلف تزویج شده خطی تغییر ناپذیر با زمان ، با ضرایب خود القاء بینهایت ، و ضریب تزویجی برابر با یکدرو نظر گرفت .

● چهار نوع اصلی منبع کنترل شده خطی تغییر ناپذیر با زمان چنین است :

منبع جریان کنترل شده با جریان : $i_1 = ai_1$ $v_1 = 0$

منبع جریان کنترل شده با ولتاژ : $i_1 = g_m v_1$ $i_1 = 0$

منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ : $v_2 = \mu v_1$ $i_1 = 0$

منبع ولتاژ کنترل شده با جریان : $v_2 = r_m i_1$ $v_1 = 0$

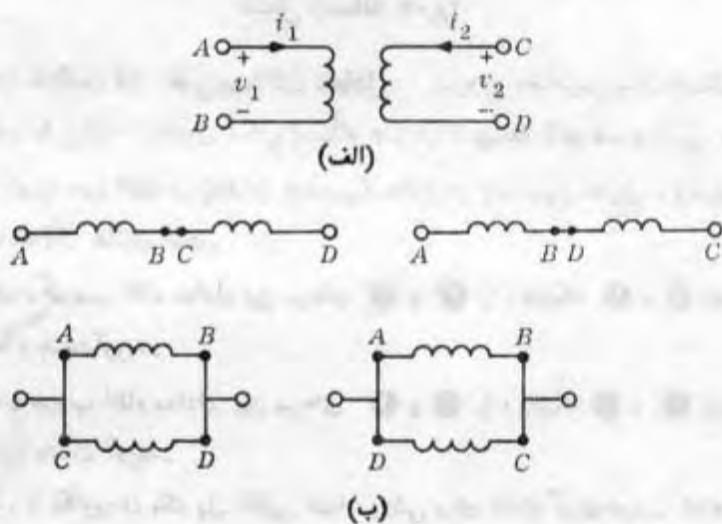
که در آن ، a ، g_m و r_m مقادیر ثابت میباشند .

مسائل

۱- اتصال سری و موازی سلفهای تزویج شده یک جفت سلف تزویج شده (با جهات قراردادی نشان داده شده در شکل (مسئله ۱ - ۸ الف)) دارای ماتریس ضرایب القاء زیرمیباشد :

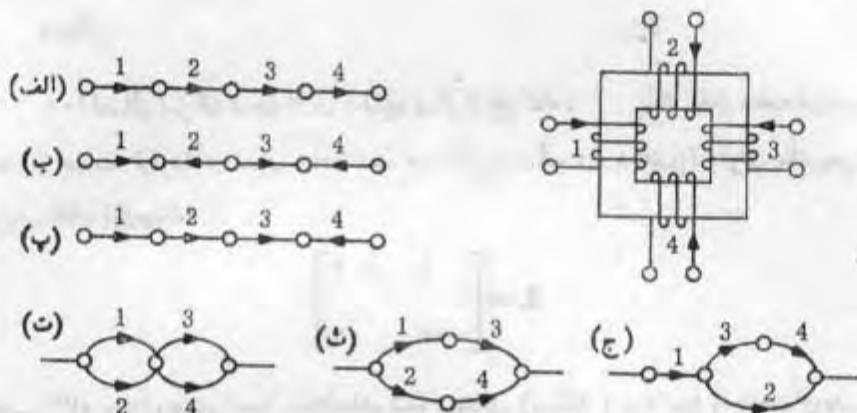
$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

ضریب القاء معادل چهار اتصال نشان داده شده در شکل (مسئله ۱ - ۸ ب) را بدست آورید.



شکل (مسئله ۱ - ۸)

۲- علامت M ، اتصالهای سری و موازی در شکل (مسئله ۲ - ۸) ترتیب قرار گرفتن فیزیکی سیم پیچی سلفها روی یک هسته مشترک رسم شده است. مقدار هر ضریب خود القاء برابر ۲ هانزی، و قدر مطلق ضریب القاء متقابل مساوی ۱ هانزی است. ضریب القاء خالص مدارهای (الف) تا (ج) را بدست آورید. در شکل‌های (الف)، (ب) و غیره پیکان‌ها، جهت قراردادی هر سیم پیچی را نشان میدهد.



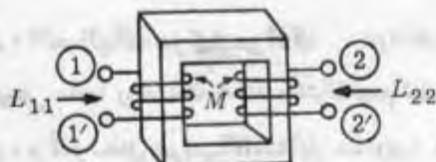
شکل (مسئله ۸-۲)

۳ - علامت M ، ضریب القاء معادل توزیع مغناطیسی میان دو سلف خطی تغییر ناپذیر با زمان ، مطابق شکل (مسئله ۳ - ۱) ، بوسیله یک هسته تأمین میشود. مقادیر ضرایب خود القاء عبارتند از $L_{11} = 2$ هانزی و $L_{22} = 3$ هانزی ، و ضریب القاء متقابل $M = 1$ هانزی است.

الف - ضریب القاء معادل بین سرهای ① و ② را ، وقتیکه ① و ② بهم وصل شده باشند ، بدست آورید.

ب - ضریب القاء معادل بین سرهای ① و ③ را ، وقتیکه ① و ③ بهم وصل شده باشند ، بدست آورید.

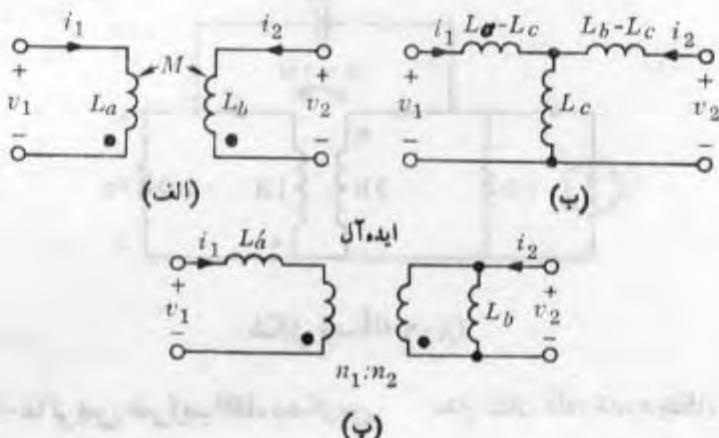
پ - با بکاربردن یک پل القایی تنها ، روشی برای اندازه‌گیری ضریب القاء متقابل بین سیم‌لیچی‌ها پیشنهاد کنید.



شکل (مسئله ۸-۳)

۴ - ما تریس ضرایب القاء دو قطبی‌های معادل سلفهای مدارهای نشان داده شده در شکل (مسئله ۴ - ۱) خطی و تغییر ناپذیر با زمان هستند.

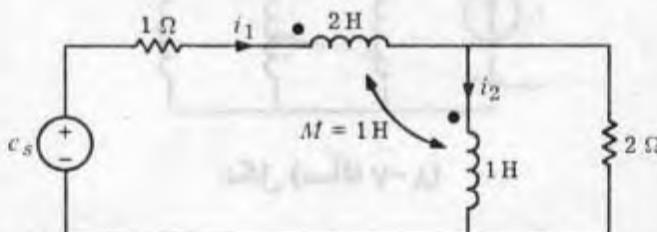
- الف - ماتریس ضرایب القاء را برای هر مدار بدست آورید.
- ب - نشان دهید که اگر $L_c = M$ باشد، مدارهای (الف) و (ب) ماتریس ضرایب القاء یکسان دارند.



شکل (مسئله ۴ - ۸)

- پ - چه رابطه‌ای باید L_a و M با $\frac{n_1}{n_2}$ داشته باشند تا مدارهای (الف) و (ب) دارای ماتریس ضرایب القاء یکسان باشند؟

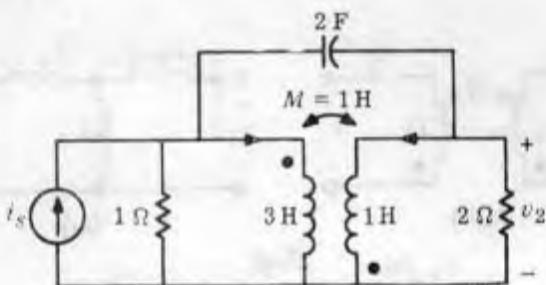
- ۵ - تجزیه و تحلیل مش سدار نشان داده شده در شکل (مسئله ۵ - ۸) در حالت دائمی سینوسی است، که در آن، ورودی یک منبع ولتاژ $e_s(t) = \cos(2t + 20^\circ)$ می‌باشد جریانهای حالت دائمی i_1 و i_2 را بدست آورید.



شکل (مسئله ۵ - ۸)

نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها

۶- تجزیه و تحلیل گره برای سدازشان داده شده در شکل (مسئله ۸-۶) معادلات گره را بنویسید. اگر $i_1(t) = \cos t$ باشد، ولتاژ حالت دائمی سینوسی $v_2(t)$ را تعیین کنید.

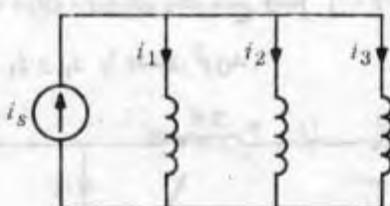


شکل (مسئله ۸-۶)

۷- ماتریس ضرایب القاء معکوس مدار نشان داده شده در شکل (مسئله

۸-۷) داده شده است. جریان‌های حالت دائمی $i_1(t)$ ، $i_2(t)$ و $i_3(t)$ را برای منبع جریان ورودی $i_s(t) = \sin t$ تعیین کنید. ماتریس ضرایب القاء به صلف تزویج شده چنین است:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & t & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$



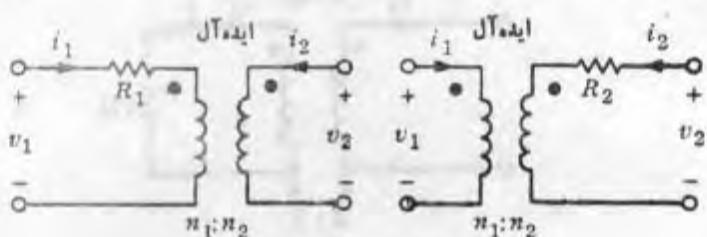
شکل (مسئله ۸-۷)

۸- انرژی ذخیره شده فرض کنید در مدار مسئله ۷، $i_1 = 1$ آمپر باشد. یک منبع جریان ثابت

بوده و $i_2 = 2$ ، $i_3 = 3$ آمپر باشند. انرژی ذخیره شده در سلفها چقدر است؟

۹- ترانسفورماتور ایدهآل و دو قطبی‌های معادل عبارتی برای

باید بطوریکه دو قطبی‌های نشان داده شده در شکل (مسأله ۹ - ۸) معادل باشند.



شکل (مسأله ۹ - ۸)

۱۰- خاصیت تغییر امپدانس ترانسفورماتور ایدهآل، محاسبه توان

متوسط مدار نشان داده شده در شکل (مسأله ۱۰ - ۸) خطی و تغییر ناپذیر با زمان میباشد.

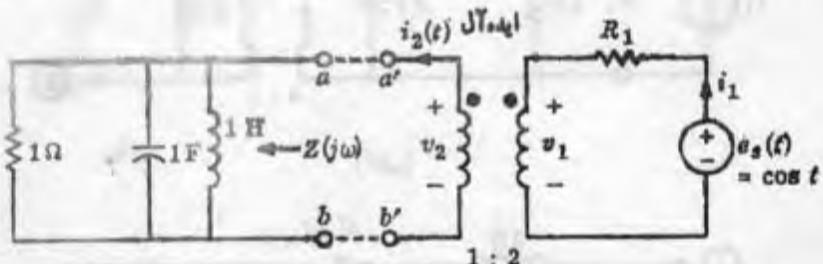
الف - $Z(j\omega)$ را، وقتیکه aa' و bb' وصل نشده‌اند، بدست آورید.

ب - در حالتیکه aa' و bb' وصل شده باشند، بافرض اینکه تمام واتاژها و جریان‌های

شاخه‌هایستوی و با فرکانس ω باشند، برای $R_1 = 2$ اهم، i_1 را بدست آورید.

پ - آن مقدار R_1 که موجب حداقل اختلاف توان متوسط در مقاومت R می‌شود را

بدست آورید.



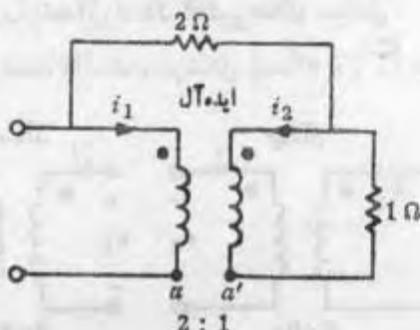
شکل (مسأله ۱۰ - ۸)

۱۱- معادلات تعریف کننده ترانسفورماتور ایدهآل الف - متوالی

معادل مدار یک قطبی نشان داده شده در شکل (مسأله ۱۱ - ۸) را تعیین کنید.

ب - مسأله را برای حالتی که نقاط a و a' با یک اتصال کوتاه بهم وصل شده باشند

تکرار کنید.



شکل (مسئله ۱۱)

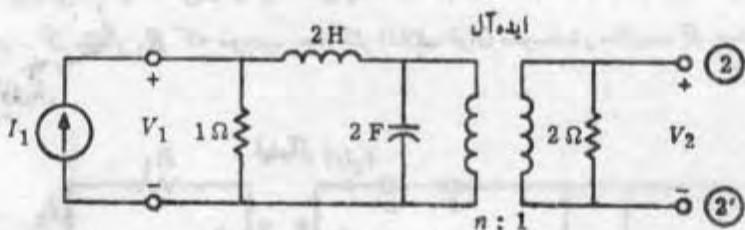
۱۲- خواص نقطه تحریک و انتقالی ترانسفورماتور ایده‌آل

برای مدارهای نشان داده شده در شکل (مسئله ۱۲ - ۸) امپدانس‌های زیر را [با پکار بردن شکل (الف)]

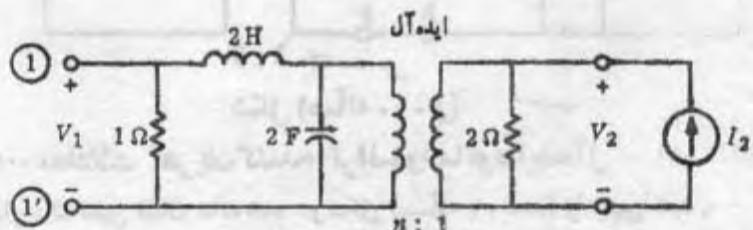
و [با پکار بردن شکل (ب)] محاسبه کنید :

$$Z_{11}(j\omega) = \frac{V_1}{I_1} \quad \text{و} \quad Z_{21}(j\omega) = \frac{V_2}{I_1}$$

و امپدانس‌های زیر را [با پکار بردن شکل (ب)] محاسبه کنید :



(الف)



(ب)

شکل (مسئله ۱۲)

$$Z_{22}(j\omega) = \frac{V_2}{I_2} \quad \text{و} \quad Z_{12}(j\omega) = \frac{V_1}{I_2}$$

که در آن V_1 و V_2 فازورهای هستند که بترتیب ولتاژهای خروجی میتوانی (t) و $v_2(t)$ را نمایش میدهند، و I_1 و I_2 فازورهایی هستند که بترتیب جریانهای ورودی (t)₁ و (t)₂ را نمایش میدهند. توجه کنید که در شکل (الف) سرهای ① و ②' مدار باز میباشند، و در شکل (ب) سرهای ① و ②' مدار باز میباشند.

۱۳- خواص نقطه تحریک و انتقالی سلفهای تزویج شده یک جفت سلف خطی تغییر ناپذیر بازمان که پاماتریس ضرایب القاء مشخص شده‌اند را در نظر گیرید. (شکل (مسئله ۱۳ - ۸) را بینید).

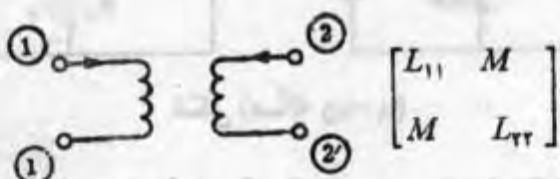
الف - نشان دهید که اپیدانس نقطه تحریک (Z₁₀(jω)) (که در دوسر ① و ②' موقعی که ① و ②' باز است دیده میشود) و اپیدانس نقطه تحریک (Z₂₀(jω)) (که در دوسر ② و ②' موقعی که ① و ②' باز است دیده میشود) در رابطه زیر صدق میکنند:

$$\frac{Z_{10}(j\omega)}{L_{11}} = \frac{Z_{20}(j\omega)}{L_{22}}$$

ب - نشان دهید که :

$$\frac{Z_{10}(j\omega)}{L_{11}} = \frac{Z_{20}(j\omega)}{L_{22}}$$

که در آن (Z₁₀(jω)) اپیدانس ورودی دیده شده بین دوسر ① و ②' موقعی که ① و ②' اتصال کوتاه شده باشند، و (Z₂₀(jω)) اپیدانس ورودی دیده شده بین دوسر ② و ②' موقعی که ① و ②' اتصال کوتاه شده باشند هستند.



شکل (مسئله ۱۳ - ۸)

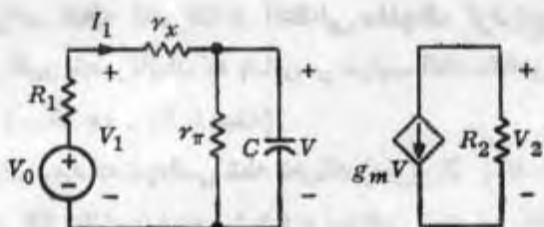
نظریه اساسی مدارها و شبکهای

۱۴ - تقویت کننده ترانزیستوری شکل (مسئله ۱۴ - ۸) مدار معادل

سیگنال کوچک یک تقویت کننده ترانزیستوری ساده را نشان میدهد. V_0 و V_2 ، I_1 ، V_1 و r_x میباشند، نشان دهنده فازورهای سینوسی با فرکانس ω میباشند.

$$\text{الف} - \text{امپدانس نقطه تحریک } Z_{in}(j\omega) = \frac{V_1}{I_1} \text{ را حساب کنید.}$$

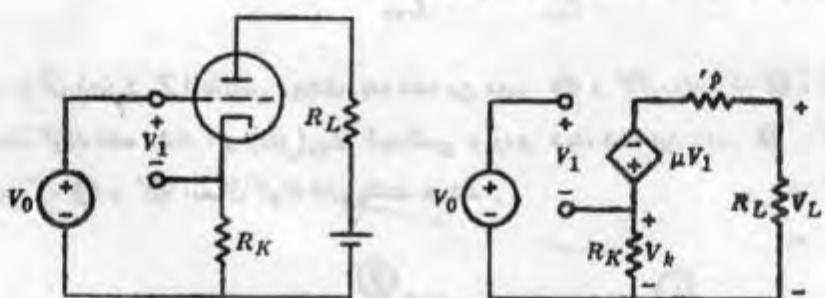
$$\text{ب} - \text{نسبت انتقالی ولتاژها } H(j\omega) = \frac{V_2}{V_0} \text{ را حساب کنید.}$$



شکل (مسئله ۱۴ - ۸)

۱۵ - تقویت کننده لامپی شکل (مسئله ۱۵ - ۸) یک مدار تقویت کننده لامپی

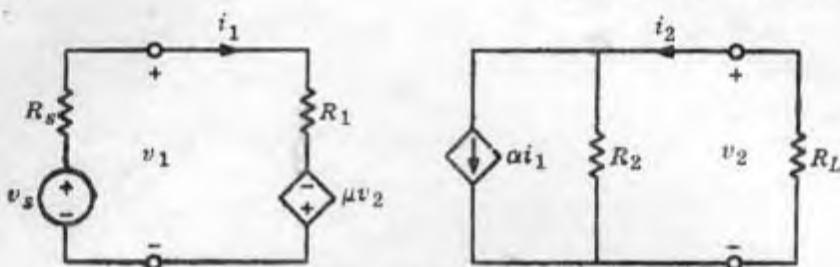
و مدار معادل سیگنال کوچک آنرا نشان میدهد. نسبت های ولتاژ های $\frac{V_L}{V_0}$ و $\frac{V_k}{V_0}$ و را بر حسب مقاومت های داده شده و ثابت m حساب کنید.



شکل (مسئله ۱۵ - ۸)

۱۶ - منابع وابسته مدار شکل (مسئله ۱۶ - ۸) مدل دیگری از یک تقویت

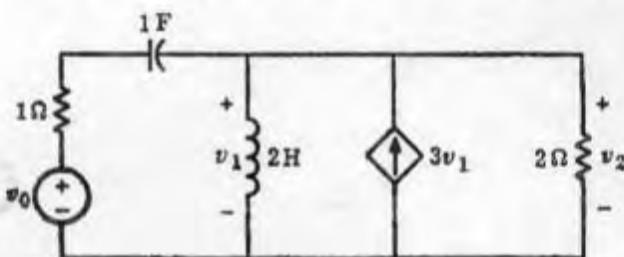
کننده ترانزیستوری در فرکانس های پائین راتعیش میدهد. ولتاژ های V_1 و V_2 را تعیین کنید.



شکل (مسأله ۸-۱۶)

۱۷- منبع وابسته وتابع شبکه برای مدار نشان داده شده در شکل (مسأله

(۸-۱۷) تابع شبکه $H(j\omega) \triangleq \frac{V_2}{V_0}$ را تعیین کنید، که در آن V_2 و V_0 فازورهایی هستند که بترتیب ولتاژهای سینوسی $v_2(t)$ و $v_0(t)$ را نمایش میدهند.



شکل (مسأله ۸-۱۷)

۱۸- ترانسفورماتور ایدهآل و منابع وابسته یک ترانسفورماتور ایدهآل

با دو سیم پیچی و نسبت دورهای $1:n$ را میتوان بوسیله مدلی که از دو منبع وابسته تشکیل میشود نمایش داد. براسامن معادلات تعريف کننده ترانسفورماتور ایدهآل و منابع وابسته، مدل مناسبی برای ترانسفورماتور ایدهآل چنان تعیین کنید که از دو منبع وابسته که بطور مناسبی انتخاب شده باشند استفاده کند.