Subject:
Year. Month. Date. ( )

مبانی مدارهای الکتریکی و الکترونیکی

جلسه 16ام

تبدیل لاپلاس:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$u(t) \rightarrow \frac{1}{s}$ $\delta(t) \rightarrow 1$

① خطی بودن

$f_1(t) \rightarrow F_1(s)$

ⓐ $f_1(t) + f_2(t) \rightarrow F_1(s) + F_2(s)$

$f_2(t) \rightarrow F_2(s)$

ⓑ $a f_1(t) \rightarrow a F_1(s)$

$\Rightarrow u(t) + \delta(t) \longrightarrow \frac{1}{s} + 1$

② شیفت زمانی

اگر $f(t) \rightarrow f(t-t_0)$

$\Rightarrow F(s) \rightarrow e^{-t_0 s} F(s)$

مثال: $u(t) \rightarrow u(t-3) \Rightarrow \frac{1}{s} \rightarrow e^{-3s}\frac{1}{s}$

③ شیفت فرکانسی

$f(t) \longrightarrow e^{s_0 t} f(t)$

$\Rightarrow F(s) \rightarrow F(s-s_0)$

$u(t) \rightarrow e^{-2t} u(t)$

$\Rightarrow \frac{1}{s} \longrightarrow \frac{1}{s+2}$

Subject :
Year . Month . Date . ( )

④ تغییر مقیاس زمانی :

$$f(t) \longrightarrow f\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$\Rightarrow F(s) \longrightarrow aF(as)$$

⑤ مشتق زمانی :

$$f(t) \longrightarrow f'(t)$$

انتگرال جزء به جزء

$$\Rightarrow F(s) \longrightarrow SF(S) - f(0^-)$$

مثال : $u(t) \longrightarrow \frac{1}{s} \Rightarrow \delta(t) = u'(t) \longrightarrow S\left(\frac{1}{s}\right) - u(0^-)$

$$\Rightarrow \delta(t) \longrightarrow 1$$

---

⑥ مشتق فرکانسی :

$$f(t) \longrightarrow F(s)$$

$$\Rightarrow -tf(t) \longrightarrow \frac{dF(s)}{s}$$

مثال : $-tu(t) \longrightarrow -\frac{1}{s^2}$

$$\Rightarrow t^n f(t) \longrightarrow (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

$$f'(t) \longrightarrow SF(S) - f(0^-)$$
$$f''(t) \longrightarrow S(SF(s) - f(0^-)) - f'(0^-)$$
$$f'''(t) \longrightarrow S(S(SF(s) - f(0^-)) - f'(0)) - f''(0^-)$$
$$\vdots$$

Subject :
Year . Month . Date . ( )

$$\Rightarrow f^{(n)}(t) \to S^n F(s) - S^{n-1} f(0^-) - S^{n-2} f'(0^-) - \cdots - f^{(n-1)}(0^-)$$

⑦ انتگرال زمانی

$$f(t) \to F(s)$$

$$\Rightarrow \int f(t)\,dt \to \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0^-)}{s}$$

انتگرال تابع f

مثال: $\delta(t) \to 1 \Rightarrow \int \delta(t)\,dt \to \frac{1}{s}$

① قضیه مقدار اولیه: $f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$

② قضیه مقدار نهایی: $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

$$\delta(t) \to 1 \qquad u(t) \to \frac{1}{s}$$

$$e^{-\alpha t} u(t) \to \frac{1}{s+\alpha}$$

$$\sin \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

$$e^{j\omega t} u(t) \to \frac{1}{s-j\omega}, \quad e^{-j\omega t} u(t) \to \frac{1}{s+j\omega}$$

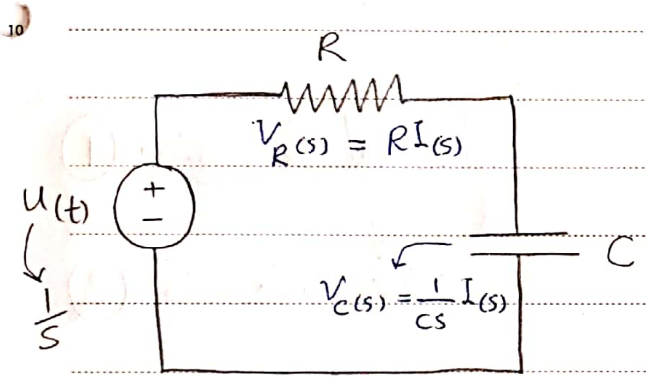
$$\Rightarrow (\sin \omega_0 t)\, u(t) \to \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

$$\cos \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

$$\Rightarrow (\cos \omega_0 t)\, u(t) \longrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{s+j\omega_0}\right)$$

$$\Rightarrow (\cos \omega_0 t)\, u(t) \longrightarrow \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

(مثال)



$$V(t) = R\, i(t)$$

$$\Downarrow$$

$$V(s) = R\, I(s)$$

$$V(t) = \cancel{V(0)}^{\,0} + \frac{1}{C}\int i(t)\, dt$$

$$\rightarrow V(s) = \frac{1}{C}\,\frac{1}{S}\, I(s) = \frac{1}{CS}\, I(s)$$

$$\frac{1}{S} = V_R(S) + V_C(S)$$

$$\rightarrow \frac{1}{S} = R I(s) + \frac{1}{CS} I(s) = I(s)\left(R + \frac{1}{CS}\right)$$

$$\rightarrow I(s) = \frac{1}{S}\,\frac{1}{R+\frac{1}{CS}} = \frac{1}{RS+\frac{1}{C}} = \frac{1/R}{S+\frac{1}{RC}}$$

Subject :
Year .   Month .   Date .   ( )

← مرحلهٔ بعدی محاسبهٔ لاپلاس معکوس :

لاپلاس معکوس : $\rightarrow \dfrac{1}{S+2} : e^{-2t}u(t)$

$$\frac{S}{S+2} : 1 - \frac{2}{S+2}$$

$1 \rightarrow \delta(t)$ ، $\dfrac{2}{S+2} \rightarrow 2e^{-2t}u(t)$

$$\Rightarrow \frac{S^2}{S+2} = \text{----} + \frac{\cdots}{S+2}$$ → درجهٔ کمتر از مخرج

جمع بندی : 1- برای منبع ولتاژ و جریان، تبدیل لاپلاس آن را می گذاریم.

2- برای مقاومت، خودش را می گذاریم $V_R(s) = R\,I(s)$

3- برای خازن، $V(s) = \dfrac{1}{CS} I(s)$ می گذاریم.

4- KVL و KCL می زنیم.

5- لاپلاس معکوس کسر را بدست می آوریم.

مثال: لاپلاس معکوس کسر $\dfrac{S+4}{(S+2)(S+3)}$ را بدست آورید.

$$\frac{S+4}{(S+2)(S+3)} = \frac{A}{(S+2)} + \frac{B}{S+3} \xrightarrow{\times(S+2)} \left(\frac{S+4}{S+3}\right)_{S=-2} = \left(A + \frac{B(S+2)}{S+3}\right)_{S=-2}$$

$$\rightarrow A = \frac{2}{1} = 2 \quad , \quad B \Rightarrow \xrightarrow{\times(S+3)} \left(\frac{S+4}{S+2}\right)_{S=-3} = \left(\frac{A(S+3)}{S+2} + B\right)_{S=-3}$$