تشریح مسایل نظریه اساسی مدارها و شبکه ها

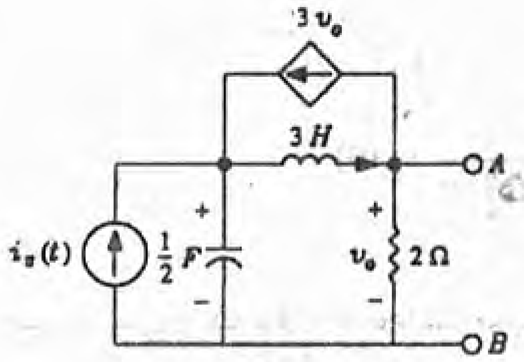
۱۶

قضایای شبکه

۱۶

قضایای شبکه‌ها

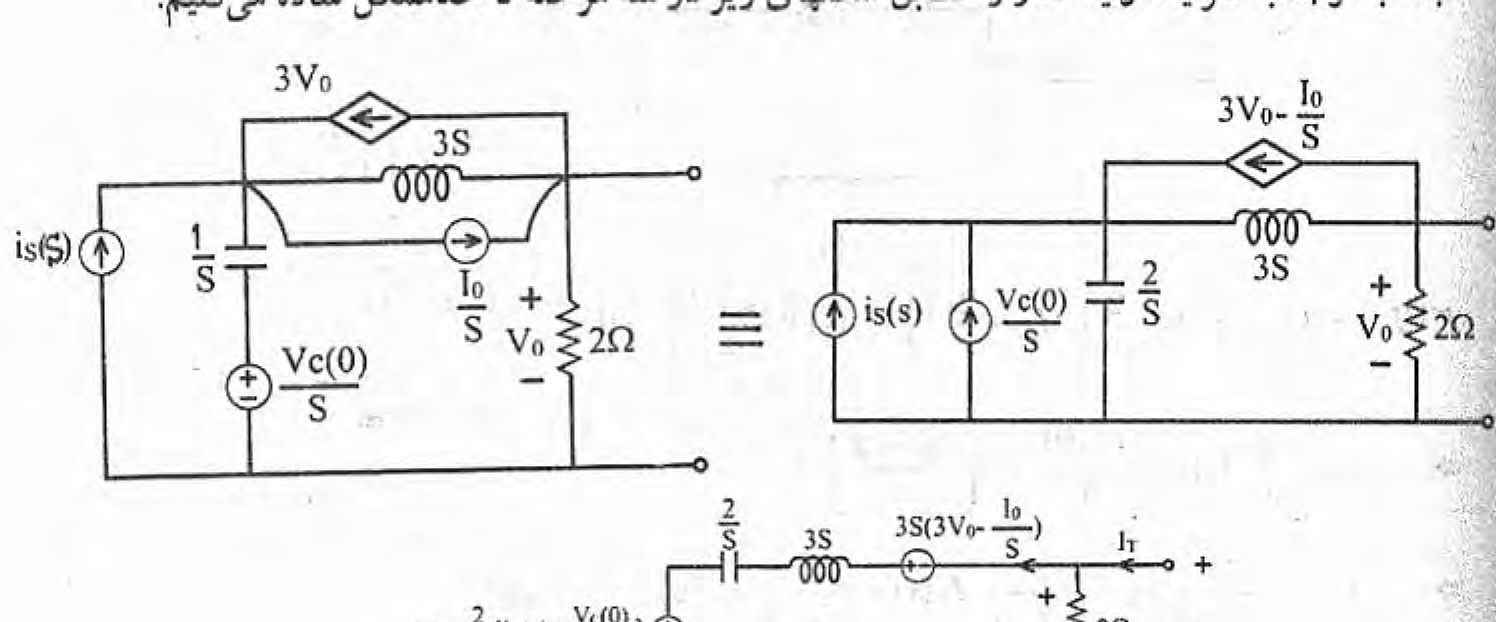
۱- مدار شکل (مسألهٔ ۱۶-۱) خازن دارای ولتاژ اولیهٔ $V_C(0)$ و سلف دارای جریان اولیهٔ I_0 و ورودی منبع جریان $i_s(t)$ است. مدار معادل تونن دیده شده در سرهای A و B را از طریق محاسبهٔ جداگانهٔ I_{sc}، E_{oc} و Z_{eq} به دست آورده، ارتباط میان این سه کمیت را عملاً نشان دهید.



شکل (مسألهٔ ۱۶-۱)

حل :

ابتدا با توجه به شرایط اولیه مدار را مطابق شکلهای زیر در سه مرحله تا حدممکن ساده می‌کنیم.



با توجه به شکل مشخص است که $v_o = v_T$ است لذا داریم:

$$KVL: V_T = 2I_x \quad \Rightarrow \quad I_x = \frac{V_T}{2} \qquad (a)$$

$$KVL \quad V_T = -3s\left[3V_T - \frac{I_0}{s}\right] + \left(\frac{2}{3} + 3s\right)(I_T - I_x) + \frac{2}{s}\left[I_s(s) + \frac{v_C(0)}{2}\right]$$

$$(a),(b) \Rightarrow V_T = -9sV_T + 3I_o + \left(\frac{3s^2+2}{s}\right)I_T - \left(\frac{3s^2+2}{s}\right)\left(\frac{V_T}{2}\right) + \frac{2}{s}\left[I_s(s) + \frac{v_C(0)}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \left(1 + 9s + \frac{3s^2+2}{2s}\right)V_T = 3I_0 + \frac{2}{s}\left[I_s(s) + \frac{v_C(0)}{2}\right] + \left(\frac{3s^2+2}{s}\right)I_T$$

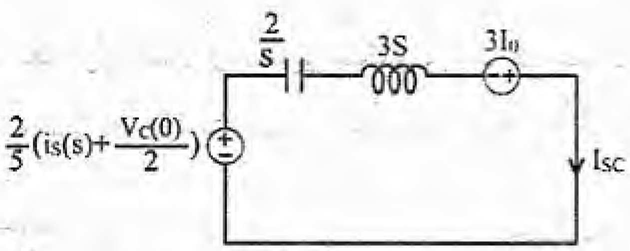
$$\Rightarrow V_T = \frac{6s^2+4}{21s^2+2s+2}I_T + \frac{4}{21s^2+2s+2}I_s(s) + \frac{6s}{21s^2+2s+2}I_0 + \frac{2}{21s^2+2s+2}v_C(0) \qquad \text{(d)}$$

$$(d) \Rightarrow \begin{cases} Z_{th}(s) = \dfrac{6s^2+4}{21s^2+2s+2} \\ E_{oC}(s) = \dfrac{4}{21s^2+2s+2}I_s(s) + \dfrac{6s}{21s^2+2s+2}I_0 + \dfrac{2}{21s^2+2s+2}v_C(0) \end{cases}$$

$$(d) \Rightarrow I_{sc} = \frac{E_{oC}(s)}{Z_{th}(s)} = \frac{2}{3s^2+2}I_s(s) + \frac{3s}{3s^2+2}I_0 + \frac{1}{3s^2+2}v_C(0)$$

$$\text{(e)}$$

حال درستی رابطه بالا را با محاسبه مستقیم I_{sc} نشان می‌دهیم اگر دو سر A و B را اتصال کوتاه کنیم مقاومت 2 اهمی از مدار حذف می‌شود و v_o برابر صفر می‌گردد. بنابراین منبع جریان $3v_o$ نیز مدار باز می‌شود و مدار بصورت زیر ساده می‌شود.



$$KVL: \quad 3I_0 - \left|3s + \frac{2}{s}\right| I_{sc} + \frac{2}{s}\left|I_s(s) + \frac{v_C(0)}{2}\right| = 0$$

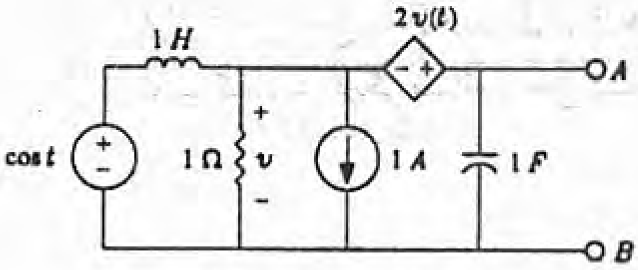
$$\Rightarrow \quad 3I_0 + \frac{2}{s}I_s(s) + \frac{v_C(0)}{s} = \left(\frac{3s^2+2}{s}\right)I_{sc}$$

$$\Rightarrow \quad I_{sc} = \frac{3s}{3s^2+2}I_0 + \frac{2}{3s^2+2}I_s(s) + \frac{1}{3s^2+2}v_C(0) \qquad (f)$$

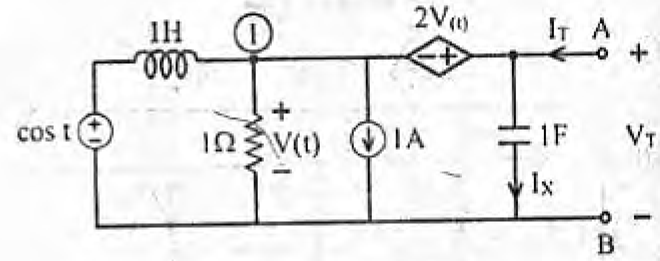
با توجه به روابط (e) و (f) ارتباط سه کمیت I_{sc}، E_{oc} و Z_{th} بصورت $I_{sc}=\frac{E_{oc}}{Z_{th}}$ می‌باشد.

۲- مدار معادل تونن دیده شده در سرهای A و B شکل (مسالهٔ ۱۶-۲) تعیین کنید.

حل :



شکل (مسالهٔ ۱۶-۲)



اگر KCL را در گره (1) بنویسیم خواهیم داشت.

$$\left[v(s) - \frac{s}{s^2+1} \right] \frac{1}{s} + v(s) + 1 = I_T - I_x \qquad (a)$$

$$KVL: \quad v_T = \frac{I_x}{s} \quad \Rightarrow \quad I_x = s\, v_T \ (b)$$

$$(a), (b) \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{1}{s} + 1 \right] V(s) + 1 - \frac{1}{s^2+1} = I_T - sV_T \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{s+1}{s} \right] V(s) + \frac{s^2}{s^2+1} = I_T - sV_T$$

$$\Rightarrow \quad V(s) = \frac{s}{s+1} I_T - \frac{s^2}{s+1} V_T - \frac{s^3}{s^3+s^2+s+1} \qquad (c)$$

$$(KVL): \quad v_T = 2v(t) + v(t) \quad \Rightarrow \quad V_T(s) = 3V(s) \qquad (d)$$

$$(c), (d) \quad \Rightarrow \quad V_T(s) = \frac{3s}{s+1} I_T - \frac{3s^2}{s+1} V_T(s) - \frac{3s^3}{s^3+s^2+s+1}$$

$$\Rightarrow \quad \left[1 + \frac{3s^2}{s+1} \right] V_T(s) = \frac{3s}{s+1} I_T - \frac{3s^3}{s^3+s^2+s+1}$$

$$\Rightarrow \quad V_T(s) = \frac{3s}{3s^2+s+1} I_T - \frac{3s^3(s+1)}{(s^2+1)(s+1)(3s^2+s+1)}$$

$$\Rightarrow \quad V_T(s) = \frac{3s}{3s^2+s+1} I_T - \frac{3s^3}{(s^2+1)(3s^2+s+1)}$$

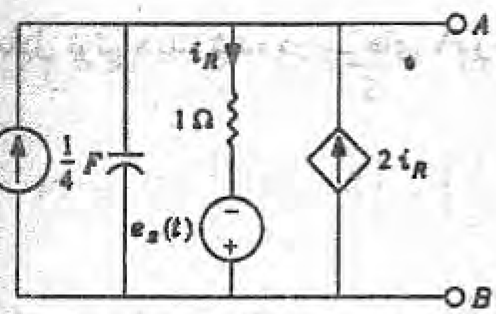
$$\Rightarrow \quad \begin{cases} Z_{th} = \dfrac{3s}{3s^2+s+1} \\ E_{oc} = \dfrac{-3s^3}{(s^2+1)(3s^2+s+1)} \end{cases}$$

۳–الف – مدار معادل تونن دیده شده را در سرهای A و B شکل (مسالهٔ ۱۶-۳) تعیین کنید.

$i_s(t)=2\cos 4t$

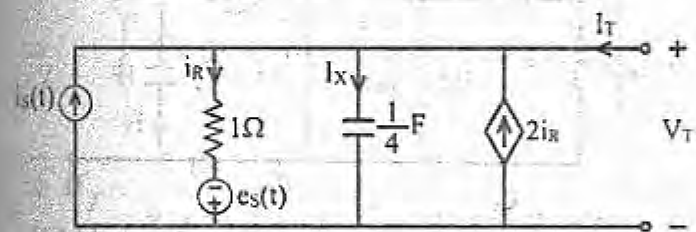
$e_s(t)=3\cos 4t$

ب – اگر فرکانس منبع ولتاژ ورودی از 4 به 2 تغییر کند، بار دیگر مساله را حل کنید.



شکل (مسالهٔ ۱۶-۳)

حل:



$$(KCL):\quad I_T+2i_R+i_s(t)=I_x+i_R \qquad (a)$$

$$(KCL):\quad V_T=I_x\times\frac{4}{s}\ \Rightarrow\ I_x=\frac{s}{4}\,V_T \qquad (b)$$

$$(a),(b)\ \Rightarrow\ I_T+i_R+i_s(s)=\frac{s}{4}\,V_T \qquad (c)$$

$$(KVL):\ i_R-e_s(s)-V_T=0\ \Rightarrow\ i_R=e_s(s)+V_T \qquad (d)$$

$$(c),(d)\ \Rightarrow\ I_T+e_s(s)+V_T+i_s(s)=\frac{s}{4}V_T$$

$$\left(\frac{s}{4}-1\right)V_T=I_T+E_s(s)+I_s(s)$$

$$V_T=\frac{4}{s-4}\,I_T+\frac{4}{s-4}\,E_s(s)+\frac{4}{s-4}\,I_s(s)$$

برای قسمت الف:

$$i_s(s)=\frac{2s}{s^2+16}\quad \text{و}\quad e_s(s)=\frac{3s}{s^2+16}$$

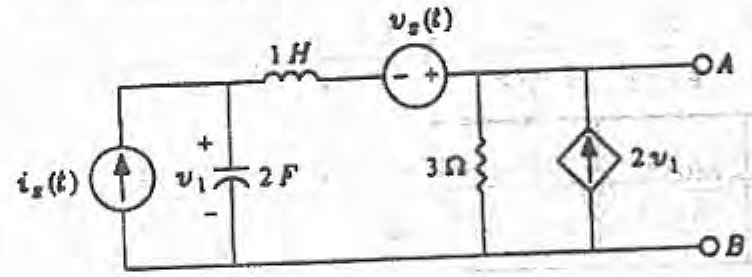
$$V_T=\frac{4}{s-4}\,I_T+\frac{4}{s-4}\left(\frac{2s+3s}{s^2+16}\right)\ \Rightarrow\ \begin{cases} Z_{th}=\dfrac{4}{s-4}\\ E_{oC}(s)=\dfrac{20s}{(s-4)(s^2+16)}\end{cases}$$

برای قسمت ب:

$$I(s)=\frac{2s}{s^2+4}\quad \text{و}\quad e_s(s)=\frac{3s}{s^2+4}$$

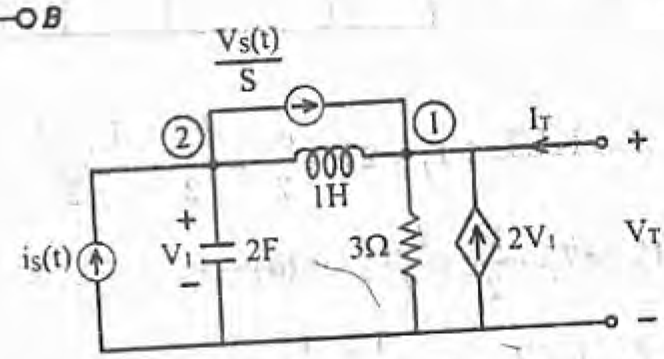
$$V_T=\frac{4}{s-4}\,I_T+\frac{4}{(s-4)}\left(\frac{2s}{s^2+4}+\frac{3s}{s^2+4}\right)\ \Rightarrow\ \begin{cases} Z_{th}=\dfrac{4}{s-4}\\ E_{oC}(s)=\dfrac{20s}{(s-4)(s^2+4)}\end{cases}$$

۴- مدار معادل تونن مدار شکل (مسألهٔ ۱۶-۴) را که از سرهای A و B دیده می‌شود، با فرض شرایط اولیهٔ صفر به دست آورید.



شکل (مسألهٔ ۱۶-۴)

حل:



اگر KCL را در گره (1) بنویسیم خواهیم داشت:

$$I_T + 2V_1 + \frac{V_s(s)}{s} = \frac{V_T}{3} + \frac{V_T - V_1}{s}$$

$$\Rightarrow \quad I_T + \frac{V_s(s)}{s} + \left(\frac{2s+1}{s}\right) V_1 = \left(\frac{s+3}{3s}\right) V_T \qquad (a)$$

اگر KCL را در گره (2) بنویسیم خواهیم داشت:

$$I_s(s) + \frac{V_T - V_1}{s} = (V_1)\,(2s) + \frac{V_s(s)}{s}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2s^2+1}{s}\, V_1 = I_s(s) + \frac{V_T}{s} - \frac{V_s(s)}{s} \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{s}{2s^2+1}\, I_s(s) + \frac{V_T}{2s^2+1} - \frac{V_s(s)}{2s^2+1}$$

$$(a),(b) \;\Rightarrow\; I_T + \frac{V_s(s)}{s} + \left(\frac{2s+1}{s}\right)\left[\frac{s}{2s^2+1}\, I_s(s) + \frac{V_T}{2s^2+1} - \frac{V_s(s)}{2s^2+1}\right] = \left(\frac{s+3}{3s}\right) V_T$$

$$\Rightarrow \quad V_T = \frac{3(2s^2+1)}{2s^2+6s-5}\, I_T + \frac{6s-6}{2s^2+6s-5}\, V_s(s) + \frac{6s+3}{2s^2+6s-5}\, I_s(s)$$

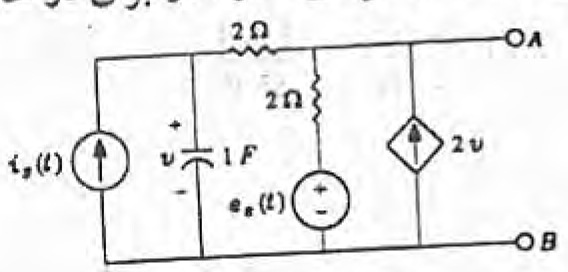
$$\Rightarrow \quad \begin{cases} Z_{th} = \dfrac{3(2s^2+1)}{2s^2+6s-5} \\[2ex] E_{oC}(s) = \dfrac{6(s-1)v_s(s) + 3(2s+1)I_s(s)}{2s^2+6s-5} \end{cases}$$

۵- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۶-۵) مدار معادل تونن دیده شده در سرهای A و B را برای دو حالت زیر به دست آورید:

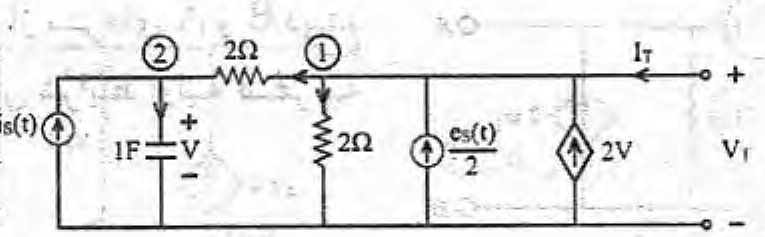
الف- $e_s(t)=4$ و $i_s(t)=2\cos 2t$

ب- $e_s(t)=4\cos 4t$ و $i_s(t)=2\cos 2t$

حل:



شکل (مسألهٔ ۱۶-۵)



KCL در گره (1) : $I_T + 2V + \frac{e_s}{2} = \frac{V_T}{2} + \frac{V_T - V}{2}$

$$\Rightarrow \quad V_T = I_T + \frac{V}{2} + \frac{E_s}{2} \qquad (a)$$

KCL در گره (2) : $I_s + \frac{V_T - V}{2} = sV \quad \Rightarrow \quad V = \frac{2}{2s+1} I_s + \frac{V_T}{2s+1} \qquad (b)$

$$(a),(b) \quad \Rightarrow \quad V_T = I_T + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2s+1} I_s + \frac{V_T}{2s+1}\right) + \frac{E_s}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{2(2s+1)}\right) V_T = I_T + \frac{1}{2s+1} I_s + \frac{E_s}{2}$$

$$\Rightarrow \quad V_T = \frac{4s+2}{4s+1} I_T + \frac{2}{4s+1} I_s + \frac{2s+1}{4s+1} E_s \qquad (c)$$

الف :

$$i_s(t) = 2\cos 2t \quad \Rightarrow \quad I_s(s) = \frac{2s}{s^2+4}$$

$$e_s(t) = 4 \quad \Rightarrow \quad E_s(s) = \frac{4}{s}$$

$$(c) \quad \Rightarrow \quad V_T = \frac{4s+2}{4s+1} I_T + \frac{s}{(4s+1)(s^2+4)} + \frac{4(2s+1)}{s(4s+1)}$$

$$V_T = \frac{4s+2}{4s+1} I_T + \frac{s^2 + 4(2s+1)(s^2+4)}{s(4s+1)(s^2+4)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z_{th}(s) = \frac{4s+2}{4s+1} \\ E_{oc}(s) = \frac{s^2 + 4(2s+1)(s^2+4)}{s(4s+1)(s^2+4)} \end{cases}$$

ب:

$$i_s(t) = 2\cos 2t \quad \Rightarrow \quad I_s(s) = \frac{2s}{s^2+4}$$

$$e_s(t) = 4\cos(t) \quad \Rightarrow \quad E_s(s) = \frac{4s}{s^2+16}$$

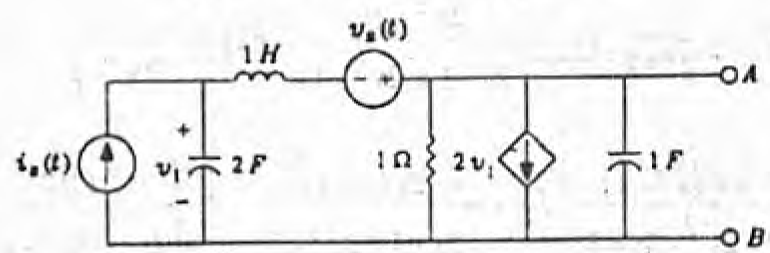
$$(c) \quad \Rightarrow \quad V_T=\frac{4s+2}{4s+1}\ I_T+\frac{2}{4s+1}\times\frac{2s}{s^2+4}+\frac{2s+1}{4s+1}\times\frac{4s}{s^2+16}$$

$$V_T=\frac{4s+2}{4s+1}\ I_T+\frac{4s(s^2+16)+4s(2s+1)(s^2+4)}{(4s+1)(s^2+4)(s^2+16)}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} Z_{th}(s)=\dfrac{4s+2}{4s+1} \\ E_{oC}(s)=\dfrac{4s(s^2+16)+4s(2s+1)(s^2+4)}{(4s+1)(s^2+4)(s^2+16)} \end{cases}$$

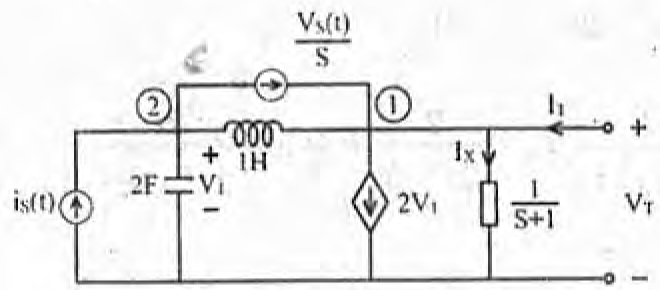
۶- مدار معادل تونن و نرتن دیده شده در سرهای A و B در مدار شکل (مسالهٔ ۱۶-۶) چیست؟

$$v_s(t)=2\cos 2t \quad , \quad i_s(t)=\sin t$$



حل:

با توجه به موازی بودن خازن 1 F و مقاومت 1Ω مدار را بصورت شکل زیر ساده می‌کنیم:



$$(KVL)\ :\ V_T=I_x\times\frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow \quad I_x=(s+1)V_T$$

اگر KCL را در گره (1) بنویسیم خواهیم داشت:

$$I_T+\frac{V_s(s)}{s}=I_x+2V_1+\frac{V_T-V_1}{s}$$

$$\Rightarrow \quad I_T+\frac{V_s(s)}{s}=\left(\frac{s^2+s+1}{s}\right)V_T+\left(\frac{2s-1}{s}\right)V_1$$

$$\Rightarrow \quad V_1=\frac{s}{2s-1}\ I_T+\frac{V_s(s)}{2s-1}\ -\frac{s^2+s+1}{2s-1}\ V_T \qquad (a)$$

اگر KCL را درگره (2) بنویسیم خواهیم داشت:

$$I_s(s)+\frac{V_T-V_1}{s}=\frac{V_s(s)}{s}+(V_1)(2s)$$

$$\Rightarrow \quad \left[2s+\frac{1}{s}\right] V_1 = I_s(s) + \frac{V_T - V_s(s)}{s}$$

$$\Rightarrow \quad V_1 = \frac{s}{2s^2+1}\, I_s(s) + \frac{V_T - V_s(s)}{2s^2+1} \qquad (b)$$

$$(a),(b) \quad \Rightarrow \quad \frac{s}{2s-1}\, I_T + \frac{V_s(s)}{2s-1} - \frac{s^2+s+1}{2s-1}\, V_T = \frac{s}{2s^2+1}\, I_s(s) + \frac{V_T - V_s(s)}{2s^2+1}$$

$$\left(\frac{1}{2s^2+1} + \frac{s^2+s+1}{2s-1}\right) V_T = \frac{s}{2s-1}\, I_T + \left(\frac{1}{2s-1} + \frac{1}{2s^2+1}\right) V_s(s) - \frac{s}{2s^2+1}\, I_s(s)$$

$$\frac{2s^4+2s^3+s^2+3s}{(2s-1)(2s^2+1)}\, V_T = \frac{s}{2s-2}\, I_T + \frac{2s^2+2s}{(2s-1)(2s^2+1)}\, V_s(s) - \frac{s}{2s^2+1}\, I_s(s)$$

$$V_T = \frac{s}{2s-1} \times \frac{(2s-1)(2s^2+1)}{s(2s^3+2s^2+3s+3)}\, I_T + \frac{2s(s+1)}{(2s-1)(2s^2+1)} \times \frac{(2s-1)(2s^2+1)}{s(2s^3+2s^2+3s+3)}\, V_s(s)$$

$$+ \frac{s}{2s^2+1} \times \frac{(2s-1)(2s^2+1)}{s(2s^3+2s^2+3s+3)}\, I_s(s)$$

$$\Rightarrow \quad V_T = \frac{2s^2+1}{(2s^2+3)(s+1)}\, I_T + \frac{2}{2s^3+3}\, V_s(s) + \frac{2s-1}{(2s^2+3)(s+1)}\, I_s(s)$$

با جایگذاری $I_s(s) = \frac{1}{s^2+1}$ و $V_s(s) = \frac{2s}{s^2+4}$ بدست می‌آید:

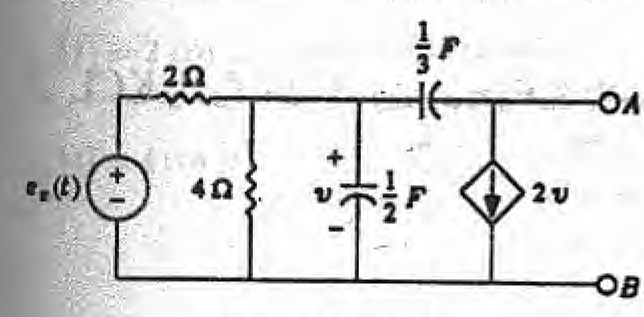
$$V_T = \frac{2s^2+1}{(2s^2+3)(s+1)}\, I_T + \frac{4s^4+2s^3+5s^2-4s+4}{(s^2+1)(s^2+4)(2s^2+3)(s+1)}$$

بنابراین داریم:

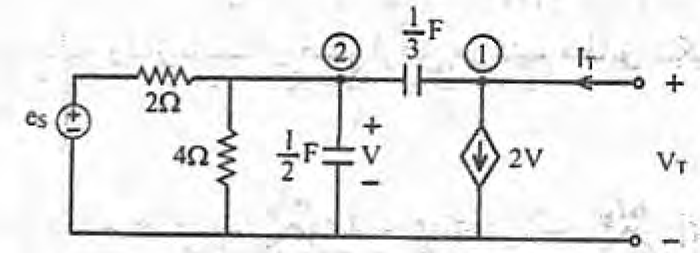
$$\Rightarrow \quad \begin{cases} Z_{th} = \dfrac{2s^2+1}{(2s^2+3)(s+1)} \\ E_{oC}(s) = \dfrac{4s^4+2s^3+5s^2-4s+4}{(s^2+1)(s^2+4)(2s^2+3)(s+1)} \end{cases}$$

۷- مدار معادل تونن دیده شده در سرهای A و B شکل (مسالهٔ ۱۶-۷) را در حوزهٔ فرکانس به دست آورید.

حل :



شکل (مسألهٔ ۱۶-۷)



با نوشتن KCL در گره (1) خواهیم داشت:

$$I_T = 2V + (V_T - V)\frac{s}{3} \Rightarrow I_T - \frac{s}{3}V_T = \left(2 - \frac{s}{3}\right)V$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{3}{6-s}I_T - \frac{s}{6-s}V_T \qquad (a)$$

با نوشتن KCL در گره (2) خواهیم داشت:

$$(V_T - V)\frac{s}{3} = \frac{V_s}{3} + \frac{V}{4} + \frac{V - e_s(s)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{s}{3}V_T = \left(\frac{s}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{s}{2}\right)V - \frac{E_s(s)}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{s}{3}V_T = \frac{10s+9}{12}V - \frac{E_s(s)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{4s}{10s+9}V_T + \frac{2E_s(s)}{10s+9} \qquad (b)$$

$$(a),(b) \quad \Rightarrow \quad \frac{4s}{10s+9}V_T + \frac{2e_s(s)}{10s+9} = \frac{3}{6-s}I_T - \frac{s}{6-s}V_T$$

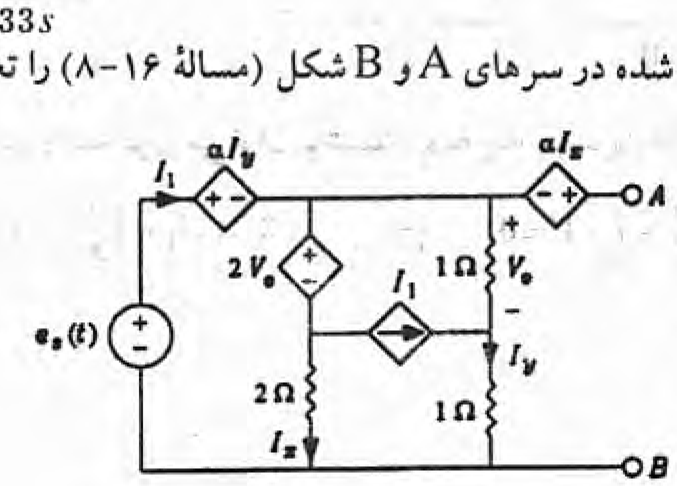
$$\Rightarrow \quad \left(\frac{4s}{10s+9} + \frac{s}{6-s}\right)V_T = \frac{3}{6-s}I_T - \frac{2E_s(s)}{10s+9}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{6s^2 + 33s}{(10s+9)(6-s)}V_T = \frac{3}{6-s}I_T - \frac{2E_s(s)}{10s+9}$$

$$\Rightarrow \quad V_T = \frac{(10s+9)}{2s^2+11s}I_T - \frac{2(6-s)E_s(s)}{6s^2+33s}$$

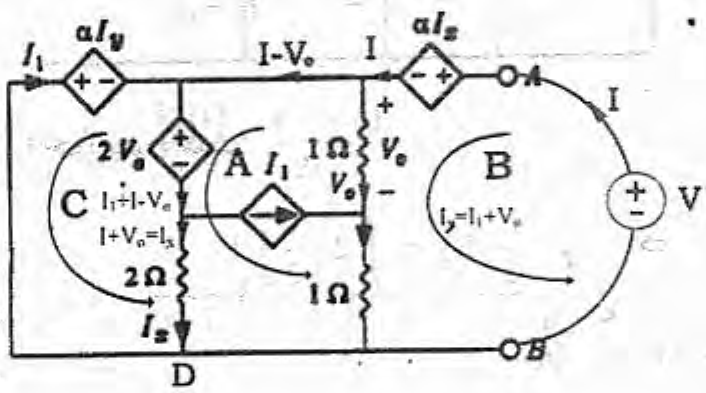
$$\Rightarrow \quad \begin{cases} Z_{th}(s) = \dfrac{10s+9}{2s^2+11s} \\ E_{oC} = \dfrac{(2s-12)E_s(s)}{6s^2+33s} \end{cases}$$

۸- مدار معادل تونن دیده شده در سرهای A و B شکل (مسالهٔ ۱۶-۸) را تعیین کنید.



حل :

برای تعیین امپدانس معادل منابع ولتاژ نابسته را صفر فرض می‌کنیم مطابق شکل جریانهای شاخه‌ها را تعیین می‌کنیم.



از حلقه خارجی داریم:

$$V = \alpha I_x - \alpha I_y \quad \rightarrow \quad V = \alpha\,(I_x - I_y)\ (*)$$

سعی می‌کنیم I_x و I_y را برحسب I تعیین نموده و در رابطه فوق قرار دهیم:

KVL حلقه سمت چپ را می‌نویسیم:

$$2V_0 + 2I_x + \alpha I_y = 0$$

از طرفی $I_x = I - V_0$ در رابطهٔ فوق قرار می‌دهیم:

$$2V_0 + 2\,(I - V_0) + \alpha I_y = 0$$

$$2I + \alpha I_y = 0 \quad \rightarrow \quad I_y = -\frac{2}{\alpha}\,I \qquad (I)$$

$$KVL\ (A):\ 2V_0 + 2I_x - I_y - V_0 = 0 \quad \rightarrow \quad V_0 + 2I_x - I_y = 0$$

$$KVL\ (B):\ V_o + I_1 + V_o - V + \alpha I_x = 0 \quad \rightarrow \quad 2V_o + \alpha I_x + I_1 - V = 0$$

از دو رابطهٔ فوق V_0 را حذف می‌کنیم:

$$4I_x - 2I_y - \alpha I_x - I_1 + V = 0 \qquad (II)$$

$$KCL\ (D):\ I_x + I_y = I_1 + I \quad \rightarrow \quad I_1 = I_x + I_y - I$$

با جایگذاری I_1 در رابطه (II) داریم:

$$(4-\alpha)\,I_x - 2I_y - (I_x + I_y - I) + V = 0$$

$$(3-\alpha)I_x - 3I_y + I + V = 0$$

با جایگذاری I_y از رابطه I در رابطهٔ فوق می‌توان نوشت:

$$(3-\alpha)I_x - 3\left[-\frac{2}{\alpha}\,I\right] + I + V = 0 \quad \rightarrow \quad (3-\alpha)I_x + \left(\frac{6}{\alpha} + 1\right) I + V = 0$$

$$I_x = \frac{\frac{6+\alpha}{\alpha}\,I + V}{\alpha - 3} \qquad (III)$$

با جایگذاری I_y و I_x از روابط (I) و (III) در رابطهٔ (*) داریم:

$$V=\alpha\left[\frac{\frac{6+\alpha}{\alpha}I+V}{\alpha-3}-\frac{2}{\alpha}I\right] \quad \rightarrow \quad Z=\frac{V}{I}=\frac{\alpha}{3}-4$$

حال برای محاسبه ولتاژ مدار باز از شکل اصلی استفاده می‌کنیم لازم به ذکر است که چون ولتاژ مدار باز را محاسبه می‌کنیم بنابراین جریانی از منبع وابسته αI_y نمی‌گذرد. بنابراین $I=0$ است. ولی از قبل داریم:
$I-V_o=I_x$ با قرار دادن $I=0$ در این رابطه داریم: $I_x=-V_o \quad (*)$

$$KVL:\quad E_s=\alpha I_y+2V_o+2I_x \xrightarrow{(*)} E_s=\alpha I_y \rightarrow I_y=\frac{E_s}{\alpha} \qquad (I)$$

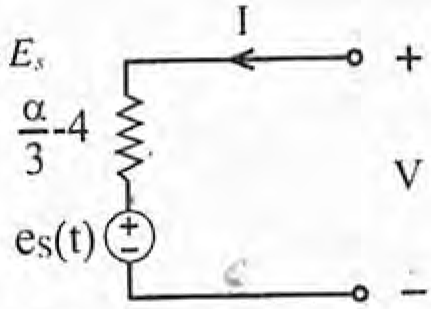
$$KVL:\quad 2V_o+2I_x-I_y-V_o=0 \xrightarrow{(*)} -I_y=V_o \xrightarrow{(I)} V_o=-\frac{E_s}{\alpha} \qquad (II)$$

$$(*)\ ,\ (II) \rightarrow I_x=\frac{E_s}{\alpha} \qquad (III)$$

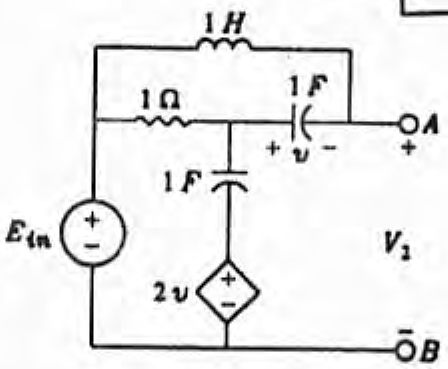
حلقه بیرونی $KVL:\ V_{OC}=\alpha\,(I_x-I_y)+E_s \xrightarrow{(I),(III)} V_{OC}=\alpha\left[\frac{E_s}{\alpha}-\frac{E_s}{\alpha}\right]+E_s$

$$\rightarrow V_{OC}=E_s$$

بنابراین مدار معادل تونن به شکل زیر است:

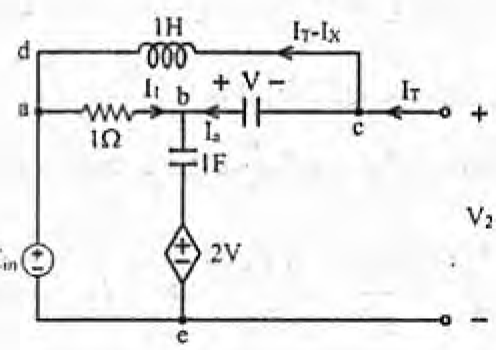


۹- تابع شبکه انتقال ولتاژ و مدار معادل تونن دیده شده در سرهای A و B مدار شکل (مسالهٔ ۱۶-۹) را تعیین کنید.



شکل (مسالهٔ ۱۶-۹)

حل:



اگر KVL را در حلقه cbe بنویسیم خواهیم داشت:

$$V_T=-V+\frac{1}{s}I_x+\frac{1}{s}I_1+2V \quad \Rightarrow \quad V_T=V+\frac{1}{s}I_x+\frac{1}{s}I_1 \qquad (a)$$

اگر KVL را در حلقه cde بنویسیم خواهیم داشت:

$$V_T = sI_T - sI_x + E_{in} \quad \Rightarrow \quad I_x = I_T + \frac{E_{in}}{s} - \frac{V_T}{s} \qquad (b)$$

$$(a),(b) \quad \Rightarrow \quad V_T = V + \frac{I_T}{s} + \frac{E_{in}}{s^2} - \frac{V_T}{s^2} + \frac{I_1}{s} \quad \Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{s^2}\right) V_T = V + \frac{I_T}{s} + \frac{E_{in}}{s^2} + \frac{I_1}{s}$$

$$\Rightarrow \quad V_T = \frac{s^2}{s^2+1} V + \frac{s}{s^2+1} I_T + \frac{E_{in}}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} I_1 \qquad (c)$$

اگر KVL را در حلقه adc بنویسیم خواهیم داشت:

$$V = -I_1 + sI_x - sI_T \qquad (d)$$

$$(b),(d) \quad \Rightarrow \quad V = -I_1 + sI_T + E_{in} - V_T - sI_T \quad \Rightarrow \quad V = E_{in} - V_T - I_1 \qquad (e)$$

$$(c),(e) \quad \Rightarrow \quad V_T = \frac{s^2}{s^2+1}(E_{in} - V_T - I_1) + \frac{s}{s^2+1} I_T + \frac{E_{in}}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} I_1$$

$$V_T = \left(\frac{s^2}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}\right) E_{in} - \frac{s^2}{s^2+1} V_T - \frac{s^2-s}{s^2+1} I_1 + \frac{s}{s^2+1} I_T$$

$$\Rightarrow \quad V_T\left(1+\frac{s^2}{s^2+1}\right) = E_{in} - \frac{s^2-s}{s^2+1} I_1 + \frac{s}{s^2+1} I_T$$

$$\left(\frac{2s^2+1}{s^2+1}\right) V_T = E_{in} - \frac{s^2-s}{s^2+1} I_1 + \frac{s}{s^2+1} I_T$$

$$V_T = \frac{s^2+1}{2s^2+1} E_{in} - \frac{s^2-s}{2s^2+1} I_1 + \frac{s(s^2+1)}{2s^2+1} I_T \qquad (f)$$

اگر KVL را در حلقه abce بنویسیم خواهیم داشت:

$$V_T = \frac{I_x}{s} - I_1 + E_{in} \quad \Rightarrow \quad I_1 = E_{in} - V_T + \frac{I_x}{s}$$

$$I_1 = E_{in} - V_T + \frac{I_T}{s} + \frac{E_{in}}{s^2} - \frac{V_T}{s^2} \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{s^2+1}{s^2} E_{in} - \frac{s^2+1}{s^2} V_T + \frac{I_T}{s} \qquad (g)$$

$$(f),(g) \Rightarrow V_T = \frac{s^2+1}{2s^2+1} E_{in} - \frac{s(s-1)}{2s^2+1} \times \frac{s^2+1}{s^2} E_{in} + \frac{s(s-1)}{2s^2+1} \times \frac{s^2+1}{s^2} V_T + \frac{s-1}{2s^2+1} I_T$$

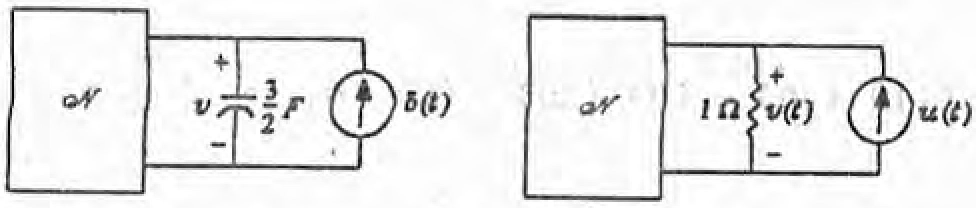
$$\left(1 - \frac{(s-1)(s^2+1)}{s(2s^2+1)}\right) V_T = \frac{s-1}{2s^2+1} I_T + \left(\frac{s^2+1}{2s^2+1} - \frac{(s^2+1)(s-1)}{s(2s^2+1)}\right) E_{in}$$

$$\left(\frac{2s^3+s-s^3-s+s^2+1}{s(2s^2+1)}\right)V_T=\left(\frac{s-1}{2s^2+1}\right)I_T+\left(\frac{s^3+1-s^3-s+s^2+1}{s(2s^2+1)}\right)E_{in}$$

$$V_T=\frac{s(s-1)}{s^3+s^2+1}\,I_T+\frac{s^2-s+2}{s^3+s^2+1}\,E_{in}\;\Rightarrow\;\begin{cases}Z_{th}(s)=\dfrac{s(s-1)}{s^3+s^2+1}\\[2mm] E_{oC}(s)=\dfrac{s^2-s+2}{s^3+s^2+1}E_{in}\end{cases}$$

$$H(s)=\frac{V_2}{V_1}=\frac{E_{oc}}{E_{in}}=\frac{s^2-s+2}{(s^3+s^2+1)}$$

۱۰- در مدار شکل (مسالهٔ ۱۶-۱۰) که از عناصر خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده است، برای ورودی $u(t)$ پاسخ ولتاژ $v(t)=\frac{1}{2}(1-e^{-4t})u(t)$ به دست می‌آید. اگر مقاومت یک اهمی را با خازن $\frac{3}{2}$ فاراد مطابق شکل (مسالهٔ ۱۶-۱۰ ب) تعویض کرده و ورودی ضربه اعمال کنیم، ولتاژ $v(t)$ دو سر خازن را تعیین کنید.



(ب) (الف)

شکل (مسالهٔ ۱۶-۱۰)

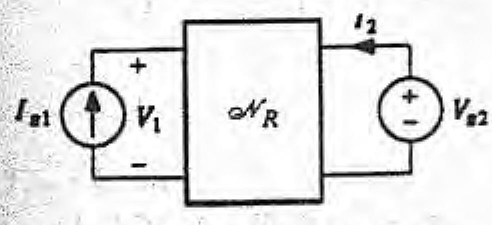
حل: امپدانس دیده شده توسط منبع جریان برابر با

$$Z=\frac{I\left\{\frac{1}{2}(1-e^{-4t})\right\}}{I\left\{u(t)\right\}}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+4}\right)}{\frac{1}{s}}=\frac{2}{s+4}$$

بنابراین ادمیتانس ورودی $2+\frac{s}{2}$ است و چون N با مقاومت 1 اهمی موازی است پس ادمیتانس N برابر $1+\frac{s}{2}$ است. در حالت دوم مدار N با خازن $\frac{3}{2}$ فاراد موازی است پس ادمیتانس دیده شده توسط منبع جریان به صورت $2s+1$ است و یا امپدانس دیده شده توسط منبع جریان به صورت $\frac{1}{2s+1}$ است. برای ورودی جریان ضربه ولتاژ خروجی به صورت $I^{-1}\left\{\frac{1}{2s+1}\right\}=\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}u(t)$ است.

۱۲- دو قطبی متقابل $\mathcal{N}_R$ طبق شکل (مسالهٔ ۱۶-۱۲) داده شده است. چهار آزمایش در مورد این دو قطبی انجام گرفته و نتایج در جدول مقابل داده شده است. خانه‌های خالی را پر کنید و برای هر یک دلیل خود را بنویسید.

V_{s2}	I_2	V_1	I_{s1}	شمارهٔ آزمایش
0	-1	20	5	1
40	2		0	2
10			-3	3
	5	50		4



شکل (مسألهٔ ۱۶-۱۲)

حل:

برای حل مسئله از نتیجه قضیه تلگان که بصورت $i_1\hat{v}_1+i_2\hat{v}_2=\hat{i}_1v_1+\hat{i}_2v_2$ است، استفاده می‌کنیم.

آزمایش 1 و 2:

$(5)\ (v_1)+(-1)\ (40)=(0)\ (20)+(2)\ (0)\ \Rightarrow\ [\,v_1=8]$

آزمایش 2و 3:

$(0)\ (v_1)+(2)\ (10)=(-3)\ (8)+(I_2)\ (40)$

$40\ I_2=20+24\ \Rightarrow\ [\,I_2=1.1]$

آزمایش 1 و 3:

$(5)\ (V_1)+(-1)\ (10)=(-3)\ (20)+(1.1)\ (0)$

$5V_1=-60+10\ \Rightarrow\ [\,V_1=-10]$

آزمایش 1 و 4:

$(5)\ (50)+(-1)\ (V_{s2})=(20)\ (I_{s1})+(0)\ (5)$

$[\,V_{s2}+20\ I_{s1}=250]$

آزمایش 2 و 4:

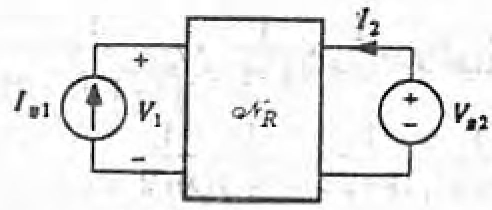
$(0)\ (50)+(2)\ (V_{s2})=(8)\ (I_{s1})+(40)\ (5)$

$[\,2V_{s2}-8I_s=200]$

$(a),(b)\ \Rightarrow\ [\,I_{s1}=6.25]\ ,\ [\,V_{s2}=1.25]$

۱۳- در مدار شکل (مسالهٔ ۱۶-۱۳) نتایج سه آزمایش در جدول کنار آن داده شده‌اند خانه‌های خالی جدول را تکمیل کنید.

V_{s2}	I_2	V_1	I_{s1}
صفر	-4	16	6
30	2		0
15		12	-3



شکل (مسألهٔ ۱۶-۱۳)

حل:

برای حل مسئله از نتیجه قضیه تلگان که بصورت $\hat{i}_1 v_1 + \hat{i}_2 v_2 = i_1 \hat{v}_1 + i_2 \hat{v}_2$ است استفاده می‌کنیم:

آزمایش 1 و 2:

$$(6)\ (V_1) + (-4)\ (30) = (0)\ (16) + (2)\ (0)$$

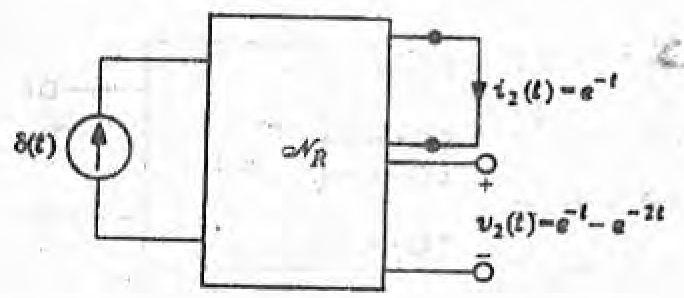
$$\Rightarrow \quad [\ V_1 = 20]$$

آزمایش 2 و 3:

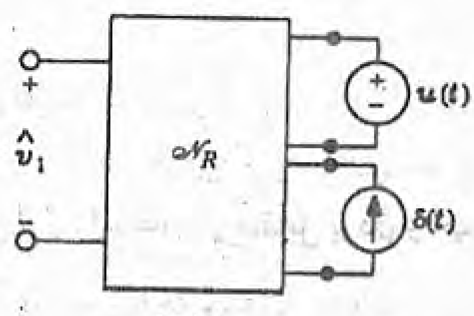
$$(0)\ (12) + (2)\ (15) = (-3)\ (20) + (I_2)\ (30)$$

$$\Rightarrow \quad [\ I_2 = 3]$$

۱۴- مدار $\mathcal{N}_R$ را در حالت (شکل مسالهٔ ۱۶-۱۴) و شکل (مسالهٔ ۱۶-۱۴ ب) وصل کرده‌ایم. با توجه به‌اطلاعات داده شده مقدار $\hat{v}_1$ را تعیین کنید.



(الف)



(ب)

حل:

برای حل این مسئله از دو بیان قضیه هم‌پاسخی و همچنین جمع آثار استفاده می‌کنیم با توجه به اطلاعات داده شده داریم:

$$H_1 = \frac{I\ \{i_2(t)\}}{I\ \{\ \delta(t)\}} = \frac{\frac{1}{s+1}}{1} = \frac{1}{s+1}$$

$$Z_{31} = \frac{I\left\{v_3(t)\right\}}{I\left\{\delta(t)\right\}} = \frac{\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}}{1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

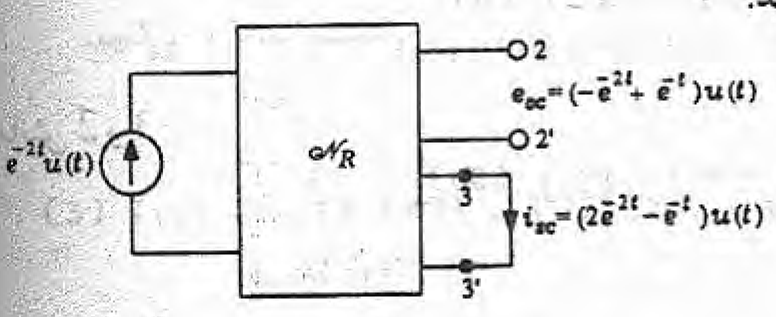
در حالت دوم با توجه به روابط $H_V = H_I$ و $Z_{31} = Z_{13}$ و قضیه جمع آثار داریم:

$$\hat{V}_1(s) = \frac{1}{s} \times H_V(s) + 1 \times Z_{13}(s) = \frac{1}{s} \times \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

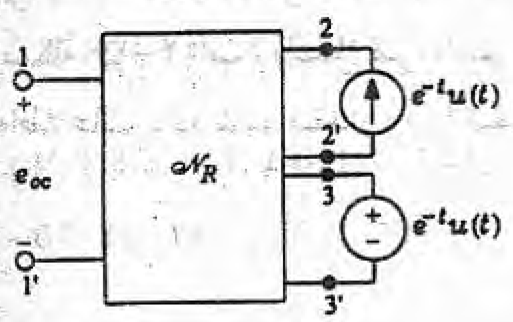
$$\hat{V}_1(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) + \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}$$

بنابراین : $\hat{v}_1(t) = \left(1 - e^{-2t}\right) u(t)$ می‌باشد.

۱۵- نتایج یک آزمایش بر روی مدار $\mathcal{N}_R$ در شکل (مسالهٔ ۱۶-۱۵) داده شده است. مقدار $e_{oC(t)}$ را برای مدار شکل (مسالهٔ ۱۶-۱۵ ب) تعیین کنید.



(الف)



(ب)

شکل (مسالهٔ ۱۶-۱۵)

حل :

راه حل اول : استفاده از متقابل بودن و جمع آثار است با توجه به شکل الف بدست می‌آوریم:

$$Z_{21} = \frac{I\left\{e^{-t} - e^{-2t}\right\}}{I\left\{e^{-2t}\right\}} = \frac{\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}}{\frac{1}{s+2}} = \frac{1}{s+1} = Z_{12}$$

$$H_{31} = \frac{I\left\{2e^{-2t} - e^{-t}\right\}}{I\left\{e^{-2t}\right\}} = \frac{\frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+1}}{\frac{1}{s+2}} = \frac{s}{s+1} = H_{13}$$

در شکل ب ولتاژ در سرهای (1) جمع آثار منبع جریان اعمالی در قطب 2 و منبع ولتاژ اعمالی در قطب 3 است پس:

$$e_{oC}(s)=V_1(s)=\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+1}\cdot\frac{s}{s+1}=\frac{1}{s+1}$$

$$e_{oC}(t)=e^{-t}u(t)$$

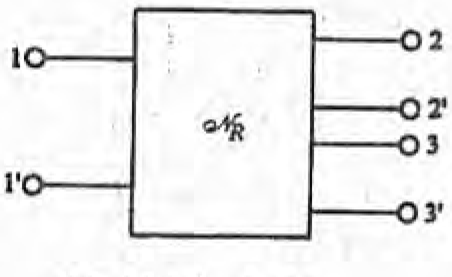
راه حل دوم: استفاده از نتیجه قضیه تلگان بصورت زیراست:

$$V_1(s)\,\hat{i}_1(s)+V_2(s)\hat{i}_2(s)+V_3(s)\hat{i}_3(s)=\hat{V}_1(s)i_1(s)+\hat{V}_2(s)i_2(s)+\hat{V}_3(s)\,i_3(s)$$

کمیتهای بدون ∧ مربوط به شکل الف وکمیتهای با ∧ مربوط به مدار شکل ب هستند با توجه به شکلهای الف و ب روشن است $V_3=0$ ، $i_2=0$ و $\hat{i}_1=0$ است (توجه کنید که در استفاده از رابطه بالا باید جهت های متناظر نیز مورد توجه قرار گیرد) بنابراین داریم:

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)}\cdot\frac{1}{s+1}=\hat{V}_1(s)\frac{1}{s+2}+\frac{-s}{(s+1)(s+2)}\cdot\frac{1}{s+1}$$

$$\hat{V}_1(s)=\frac{1}{s+1}\quad\Rightarrow\quad\left[\hat{v}_1(t)=e_{oC}(t)=e^{-t}u(t)\right]$$



شکل (مسألۀ ۱۶-۱۶)

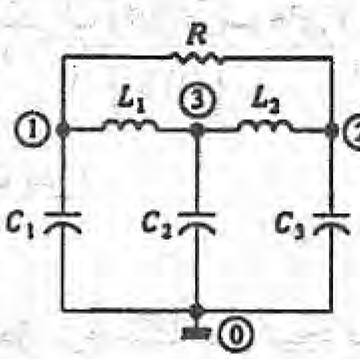
۱۶- در مدار خطی تغییرناپذیر با زمان $\mathcal{N}_R$ شکل (مسألۀ ۱۶-۱۶) اگر منبع جریان $i_{s1}(t)=e^{-2t}u(t)$ را در سرهای (1) و (1′) وصل کنیم ولتاژ مدار باز در سرهای (2) و (2′) به صورت $v_{2-2'}(t)=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)$ و جریان شاخه اتصال کوتاه در سرهای (3) و (3′) به صورت $i_{3-3'}(t)=\left(2e^{-2t}-e^{-t}\right)u(t)$ در می‌آید. حال اگر منبع جریان $i_{s2}(t)=e^{-t}u(t)$ رادرسرهای (2) و (2′) و منبع ولتاژ $v_{s3}(t)=e^{-t}u(t)$ را در سرهای (3) و (3′) وصل کنیم ولتاژ در سرهای (1) و (1′) به صورت خواهد بود؟

حل:

اگر شکل مسئله را با توجه به معلومات داده شده بدقت رسم کنیم مشاهده می‌کنیم که این مسئله دقیقا" خصوصیات مسئله 15 دارا می‌باشد لذا از حل مجدد آن خودداری می‌کنیم و داریم. $V_{1-1'}=e^{-t}u(t)$

۱۷- مدار نشان داده شده در شکل (مسالۀ ۱۶-۱۷) را در نظر بگیرید.

الف- ورودیهای بریده شده در خازن های C_1 و C_2 ایجاد کرده و درستی بیان 1 قضیۀ هم پاسخی را تحقیق



کنید.

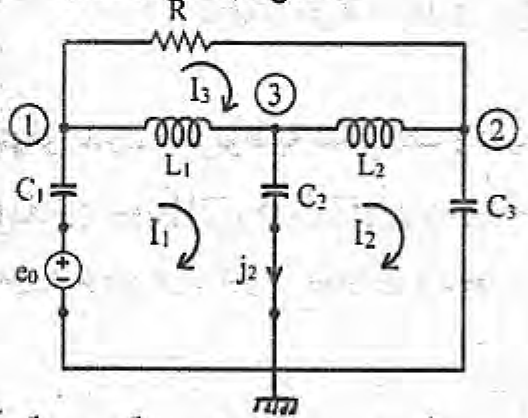
ب- ورودیهای لحیم شده در دو سر خازن های C_1و C_2 ایجاد کرده و درستی بیان 2 قضیهٔ هم‌پاسخی را تحقیق کنید.

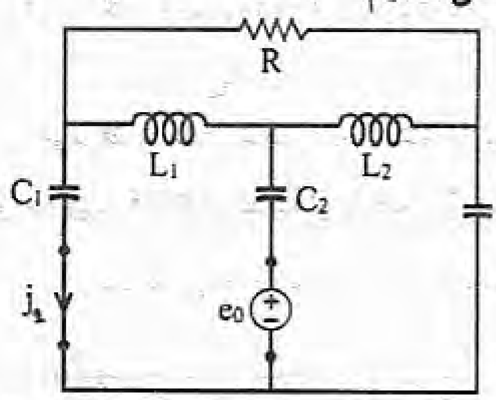
پ- ورودی بریده شده در خازن C_1 و لحیم شده در خازن C_2 ایجاد کرده و درستی بیان 3 قضیهٔ هم پاسخی را تحقیق کنید.

حل :

الف) از معادلات مش داریم.

شکل (مسألهٔ ۱۶-۱۷)





$$\begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 s}+\frac{1}{C_2 s}+L_1 s & -\frac{1}{C_2 s} & -L_1 s \\ -\frac{1}{C_2 s} & \frac{1}{C_2 s}+\frac{1}{C_3 s}+L_2 s & -L_2 s \\ -L_1 s & -L_2 s & R+L_1 s+L_2 s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_o(s) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\left(\frac{1}{C_2 s}+\frac{1}{C_3 s}+L_2 s\right)\left(R+L_1 s+L_2 s\right)-\left(L_2 s\right)^2}{\Delta Z} E_o(s)$$

$$I_2 = \frac{-\frac{1}{C_2 s}\left(R+L_1 s+L_2 s\right)-\left(L_1 s\right)\left(L_2 s\right)}{\Delta Z} E_o(s)$$

حاصل $j_2=I_1-I_2$ عبارت است از :

$$\frac{\left[\left(\frac{1}{C_2 s}+\frac{1}{C_3 s}+L_2 s\right)\left(R+L_1 s+L_2 s\right)-\left(L_2 s\right)^2\right]+\left[\left(-\frac{1}{C_2 s}\right)\left(R+L_1 s+L_2 s\right)-\left(L_1 s\right)\left(L_2 s\right)\right]E_O(s)}{\Delta Z}$$

با توجه به شکل، حال اگر به جای منبع ورودی e_o با جریان خروجی تعویض کنیم ، داریم:

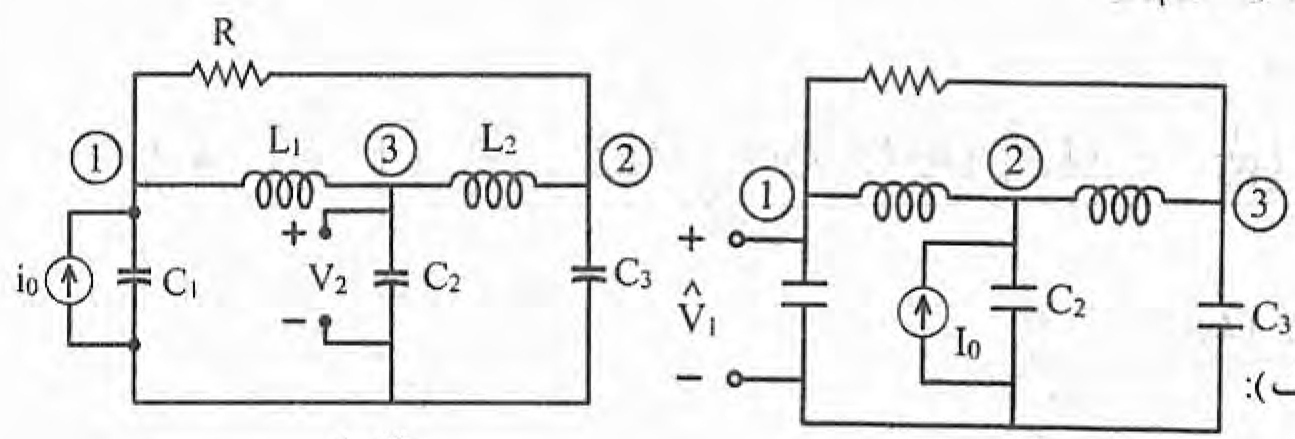
$$Z_n(s)\begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \\ \hat{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_o(s) \\ E_o(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

عبارت $\hat{j}_1 = -\hat{I}_1$ برابر است با:

$$-\frac{-E_o(s)\left[\left(\frac{1}{C_2 s}+\frac{1}{C_3 s}+L_2 s\right)(R+L_1+L_2 s)-(L_2 s)^2\right]-E_o(s)\left[\left(-\frac{1}{C_2 s}\right)(R+L_1 s+L_2 s)-(L_1 s)(L_2 s)\right]}{\Delta Z}$$

با توجه به روابط (I)، (II) $\hat{j}_1 = j_2$ می‌باشد.

ب) از معادلات گره داریم:



(الف)

(ب)

مطابق شکل (الف):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{R}+\frac{1}{L_1 s}+C_1 s & -\frac{1}{R} & -\frac{1}{L_1 s} \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R}+\frac{1}{L_2 s}+C_3 s & -\frac{1}{L_2 s} \\ -\frac{1}{L_1 s} & -\frac{1}{L_2 s} & \frac{1}{L_1 s}+\frac{1}{L_2 s}+C_2 s \end{bmatrix}}_{Y_n(s)} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_o \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = E_2 = -\frac{\left(-\frac{1}{R}\right)\left(\frac{1}{L_1 s}+\frac{1}{L_2 s}+C_2 s\right)-\left(\frac{1}{L_1 s}\right)\left(\frac{1}{L_2 s}\right)}{\Delta Y} I_o \qquad (I)$$

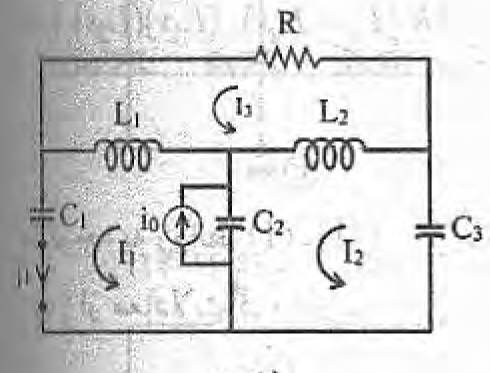
مطابق شکل (ب):

$$Y_n(s).\begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \\ \hat{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_o \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{V}_1 = \hat{E}_1 = -\frac{\left(-\frac{1}{R}\right)\left(\frac{1}{L_1 s}+\frac{1}{L_2 s}+C_2 s\right)-\left(\frac{1}{L_1 s}\right)\left(\frac{1}{L_2 s}\right)}{\Delta Y} I_o \qquad (II)$$

قضیه هم پاسخی صادق است . $\qquad I_1 , (II) \quad \rightarrow \quad \hat{V}_2=\hat{V}_1 \quad \rightarrow$

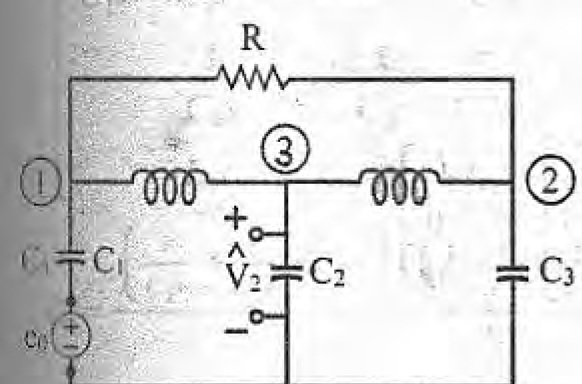
پ)



$$Z_n(s)\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_o}{C_2 s} \\ -\frac{I_o}{C_2 s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

(الف)

$$j_1 = I_1 = \frac{\frac{I_o}{C_2 s}\left[\left(\frac{1}{C_2 s}+\frac{1}{C_3 s}+L_2 s\right)\left(R+L_1 s+L_2 s\right)-\left(L_2 s\right)^2\right]+\frac{I_o}{C_2 s}\left[\left(-\frac{1}{C_2 s}\right)\left(R+L_1 s+L_2 s\right)-\left(L_1 s\right)\left(L_2 s\right)\right]}{\Delta Z} \qquad (I)$$



$$Y_n(s)\begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \\ \hat{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_o C_1 s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

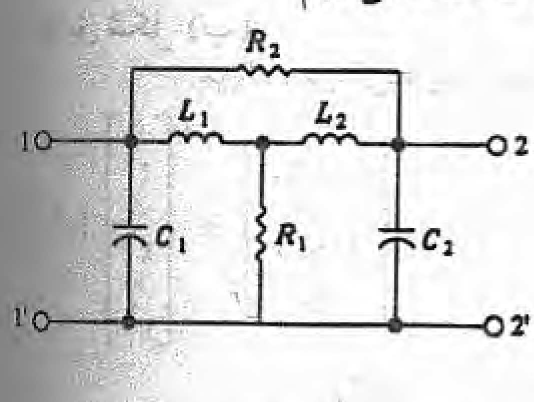
$$\hat{V}_2=\hat{E}_3=\frac{E_o C_1 s\left[\left(\frac{1}{R}\right)\left(\frac{1}{L_2 s}\right)+\left(\frac{1}{L_1 s}\right)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{L_2 s}+C_3 s\right)\right]}{\Delta Z} \qquad (II)$$

با ساده نمودن هر دو ربطهٔ (I) ،(II) و مساوی قرار دادن $E_o=I_o$ مشاهده می‌کنیم:

بنابراین قضیه هم پاسخی صادق است. $\hat{V}_2=j_1$

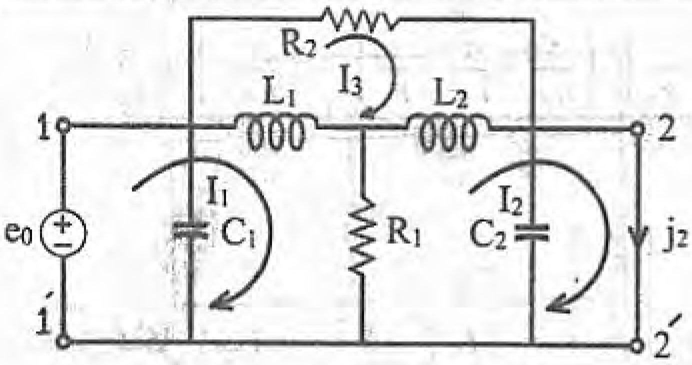
۱۸- درستی بیانهای مختلف قضیهٔ هم‌پاسخی را در مدار شکل (مسالهٔ ۱۶-۱۸) بررسی کنید.

حل :



شکل (مسألهٔ ۱۶-۱۸)

بیان ۱):

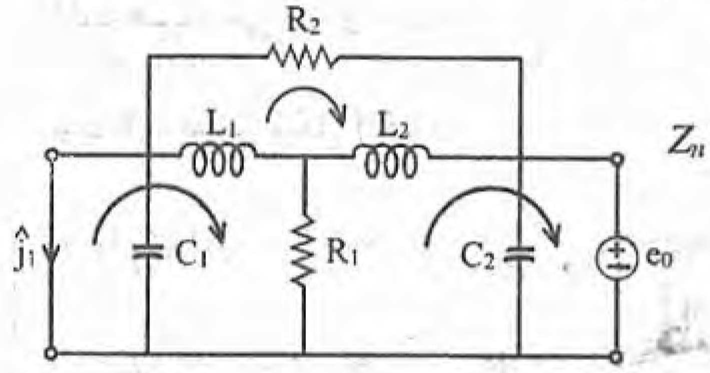


$$Z_n(s)=\begin{bmatrix} L_1s+R_1 & -R_1 & -L_1s \\ -R_1 & R_1+L_2s & -L_2s \\ -L_1s & -L_2s & R_2+L_1s+L_2s \end{bmatrix}$$

بنا به شکل (الف):

$$Z_n(s)\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_o(s) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$j_2=I_2=\frac{E_o(s)\left[\ (-R_1)\ (R_2+L_1s+L_2s)\ -\ (L_1s)\ (L_2s)\ \right]}{\Delta Z} \qquad (I)$$



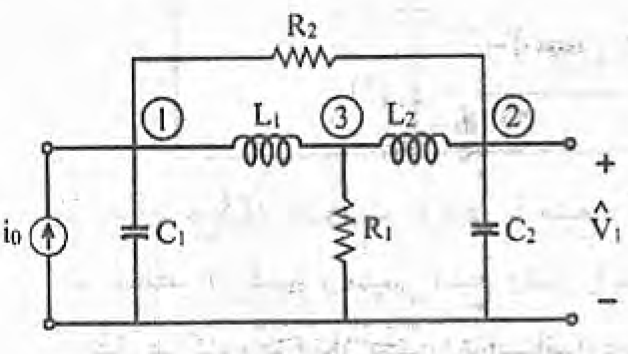
بنابه شکل (ب):

$$Z_n(s)\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -E_o(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{j}_1=-I_1=-\frac{E_o(s)\left[\ (-R_1)\ (R_2+L_1s+L_2s)\ -\ (L_1s)\ (L_2s)\ \right]}{\Delta Z}\ ,\quad (II)$$

$$(I)\ ,\ (II)\quad\rightarrow\quad j_2=\hat{j}_1\quad\rightarrow$$

قضیهٔ هم‌پاسخی صادق است.



(الف)

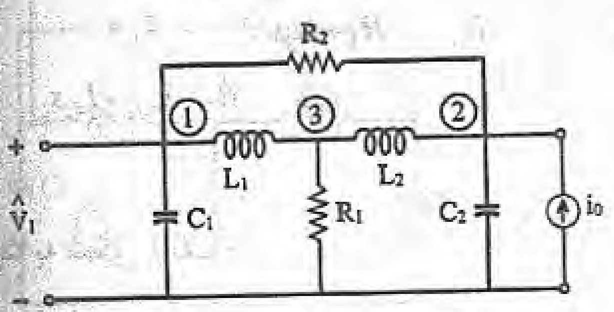
$$Y_n(s)=\begin{bmatrix} C_1s+\frac{1}{L_1s}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{L_1s} \\ -\frac{1}{R_2} & C_2s+\frac{1}{L_2s}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{L_2s} \\ -\frac{1}{L_1s} & -\frac{1}{L_2s} & \frac{1}{L_1s}+\frac{1}{L_2s} \end{bmatrix}$$

بنا به شکل (الف) داریم:

$$Y_n(s)\cdot\begin{bmatrix}E_1\\E_2\\E_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_o\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow V_2=E_2=\frac{-I_o\left[\left(-\frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{1}{L_1s}+\frac{1}{L_2s}+\frac{1}{R_1}\right)-\left(\frac{1}{L_1s}\right)\left(\frac{1}{L_2s}\right)\right]}{\Delta Y}\quad (I)$$

مطابق شکل (ب) :

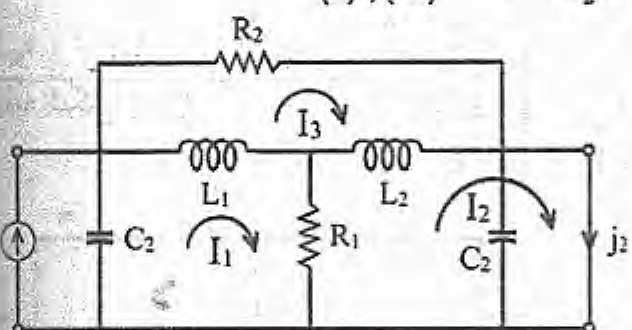
$$Y_n(s)\cdot\begin{bmatrix}\hat{E}_1\\\hat{E}_2\\\hat{E}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\I_o\\0\end{bmatrix}$$



$$\hat{V}_1=\hat{E}_1=\frac{-I_o\left[\left(-\frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{1}{L_1s}+\frac{1}{L_2s}+\frac{1}{R_1}\right)-\left(\frac{1}{L_1s}\right)\left(\frac{1}{L_2s}\right)\right]}{\Delta Y}\quad (II)$$

$$(I),(II)\ \rightarrow\ V_2=\hat{V}_1\qquad\rightarrow$$ قضیهٔ هم‌پاسخی صادق است.

بیان ۳) : مطابق شکل (الف) :

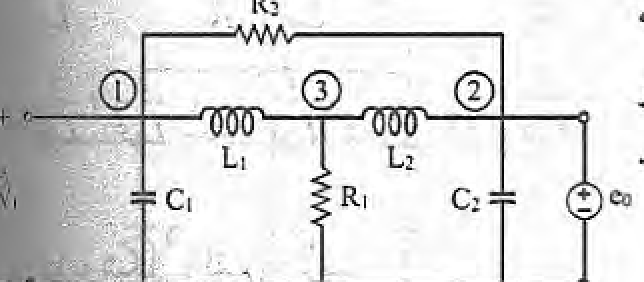


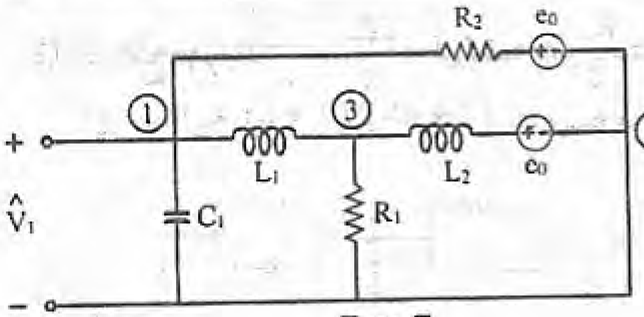
$$Z_n(s)=\begin{bmatrix}L_1s+R_1+\frac{1}{C_1s} & -R_1 & -L_1s\\ -R_1 & R_1+L_2s & -L_2s\\ -L_1s & -L_2s & R_2+L_2s+L_1s\end{bmatrix}$$

$$Z_n(s)\cdot\begin{bmatrix}I_1\\I_2\\I_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{I_o}{C_1s}\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$I_2=j_2=\frac{-\frac{I_o}{C_1s}\left[\,(-R_1)\,(R_2+L_1s+L_2s)-(L_1s)\,(L_2s)\,\right]}{\Delta Z}\quad (I)$$

از خازن C_2 که بصورت موازی با منبع ولتاژ e_o قرار گرفته صرف‌نظر می‌کنیم و سپس منبع ولتاژ را به شاخه‌های دیگر منتقل می‌کنیم تا مدار بصورت استاندارد شکل (ج) درآید. حال داریم: (گره (2) زمین شده است)





$$= \begin{bmatrix} C_1 s + \frac{1}{L_1 s} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{L_1 s} \\ -\frac{1}{L_1 s} & \frac{1}{L_1 s} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{L_2 s} \end{bmatrix}$$

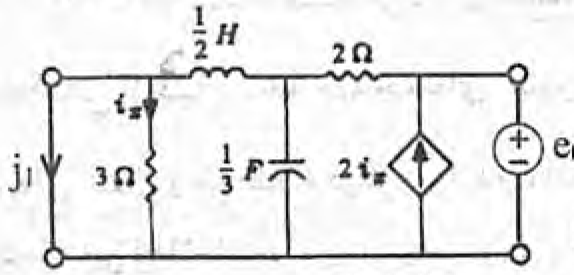
$$Y_n(s)\begin{bmatrix} E_1 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_o}{R_2} \\ \frac{E_o}{L_2 s} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad E_1 = \hat{V}_1 = \frac{\frac{E_o}{R_2}\left(\frac{1}{L_1 s}+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{L_2 s}\right)+\frac{E_o}{L_2 s}\left(\frac{1}{L_1 s}\right)}{\Delta Y_n} \qquad (II)$$

حال اگر فرض کنیم $I_o = E_o$ باشد بنابه روابط (I) و (II) خواهیم داشت:

$$(I),(II) \quad \rightarrow \quad \hat{V}_1 = j_2$$

لذا قضیه هم‌پاسخی صادق است.

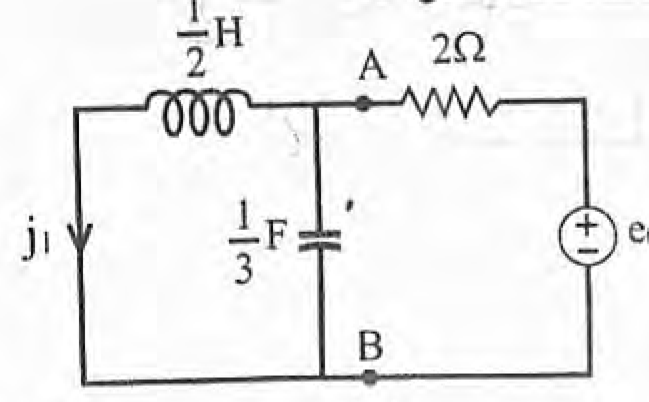
۱۹- نشان دهید که در مدار شکل (مسالهٔ ۱۶-۱۹) قضیهٔ هم‌پاسخی برقرار نیست. علت این امر را بیان کنید.



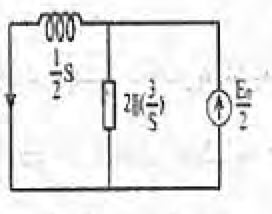
(الف)

حل:

از بیان (۱) استفاده می‌کنیم. با توجه به شکل الف $i_x = 0$ و در نتیجه منبع جریان وابسته مدار باز است شکل (ب) ساده شده مدار شکل (الف) می‌باشد. معادل تونن از دید A و B را جایگذاری کرده و معادل امپدانسهای موازی را بصورت شکل (ج) قرار می‌دهیم:



(ب)

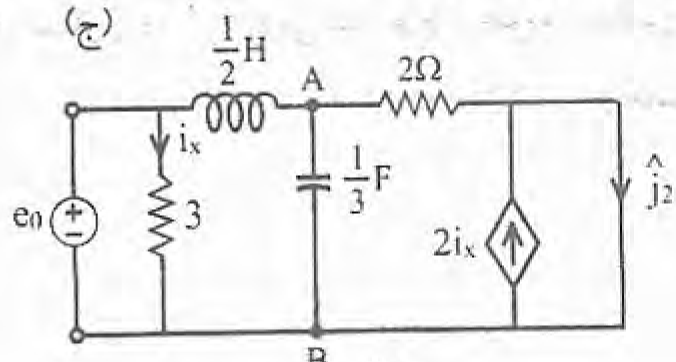


(ج)

$$j_1 = \frac{E_o}{2} \times \frac{2 \,\|\, \frac{3}{s}}{2 \,\|\, \frac{3}{s} + \frac{s}{2}} \qquad (I)$$

حال اگر جای منبع ولتاژ و جریان اتصال کوتاه را عوض کنیم خواهیم داشت:

مطابق شکل (د) داریم:



(د)

مقدار منبع جریان: $I_x=\frac{E_o}{3} \rightarrow 2I_x=\frac{2E_o}{3}$

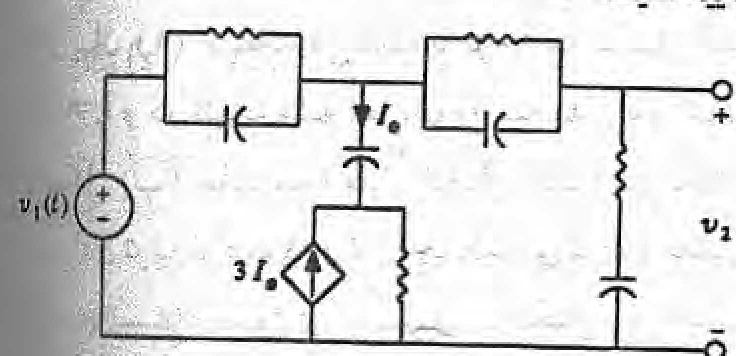
$$V_{AB}=E_o\frac{\frac{3}{s}\parallel 2}{\frac{s}{2}+\left(\frac{3}{s}\parallel 2\right)}$$

$\hat{j}_2$ متشکل از جریانهای مقاومت 2 اهمی و منبع جریان $2i_x$ می‌باشد بنابراین داریم:

$$\hat{j}_2=\frac{V_{AB}}{2}+2i_x=\frac{E_o}{2}\;\frac{\frac{3}{s}\parallel 2}{\frac{s}{2}+\left(\frac{3}{s}\parallel 2\right)}+\frac{2E_o}{3} \qquad (II)$$

با توجه به روابط (I) و (II) نتیجه می‌شود که $\hat{j}_1\neq\hat{j}_2$ است. علت این امر وجود منبع جریان وابسته در مدار می‌باشد. که جملهٔ دوم جریان در حالت اول به علت اتصال کوتاه شدن دو سر مقاومت 3 اهمی ($i_x=0$ در نتیجه منبع جریان مساوی صفر) صفر می‌گردد. در حالیکه در حالت دوم جملهٔ دوم حاصله از منبع جریان وجود دارد.

۲۰- در مدار شکل (مسالهٔ ۱۶-۲۰) تمام عناصر دارای مقدار یک هستند. در مورد تابع شبکهٔ $H(s)=\frac{V_2(s)}{V_1(s)}$ اطلاعاتی از قبیل درجهٔ چندجمله‌ای صورت و مخرج، محل فرکانس های طبیعی محل و مرتبهٔ صفرهای انتقال و هر اطلاع دیگری را بدون آنکه تابع شبکه را تعیین کنید پیشگویی کنید. با تعیین تابع شبکه این اطلاعات را تایید کنید.

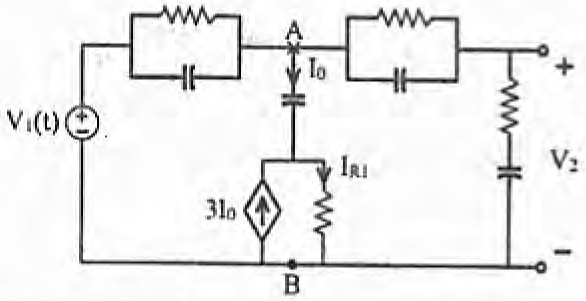


شکل (مسألهٔ ۱۶-۲۰)

حل :

تعداد عناصر ذخیره کننده انرژی 4 عدد می‌باشد بنابراین مخرج تابع شبکه از درجه 4 می‌باشد با توجه به شکل دو امپدانس مشابه در بازوی افقی (خازن و مقاومت موازی) دارای مقدار $\frac{1}{s+1}$ می‌باشند که ایجاد دو صفر مساوی در $s=-1$ می‌کنند. و با توجه به امپدانس موجود در شاخه عمودی (خازن و مقاومت سری) با

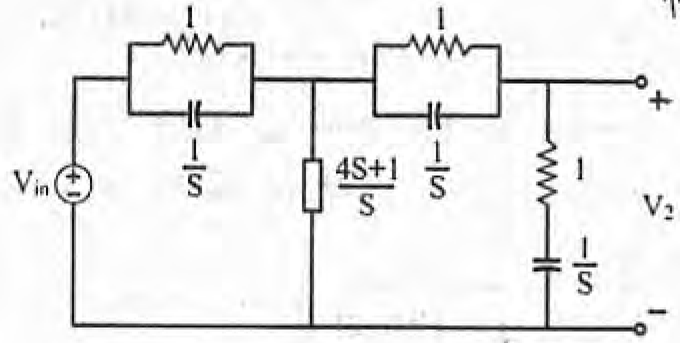
مقدار $\frac{s+1}{s}$ که ایجاد یک صفر در $s=-1$ می‌کنند و به طریق مشابه یک صفر یا مقدار $\frac{4s+1}{s}$ داریم که ایجاد یک صفر دیگر در $s=-\frac{1}{4}$ می‌کنند بنابراین صفرهای موجود به صورت $(s+1)^3(4s+1)$ خواهند بود.

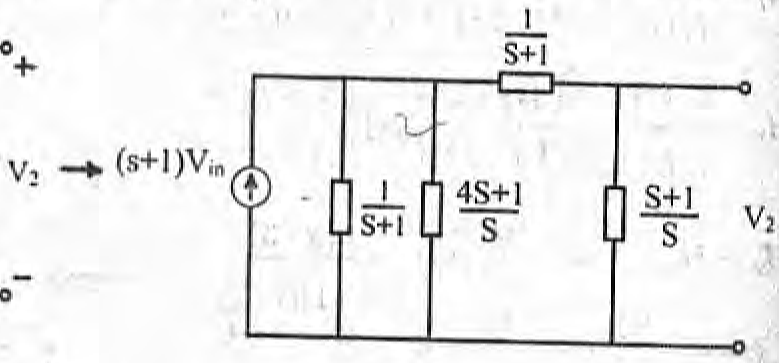


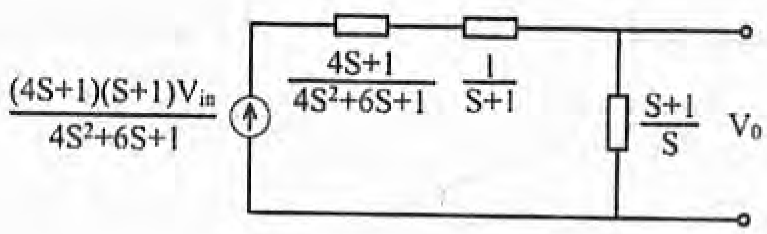
با توجه به شکل $I_{R_1}=4I_O$ می‌باشد. حال معادل تونن مابین A و B (شاخه وسط) عبارتند از:

$$V_{AB}=I_o\times\frac{1}{s}+4I_o\times 1=\left(\frac{1}{s}+4\right)I_o$$

بنابراین به جای شاخه وسط امپدانس $4\frac{1}{s}$ قرار می‌دهیم:







مطابق شکلهای (ب) و (ج) و (د) می‌توان مدار را ساده‌تر نمود اکنون از تقسیم ولتاژ داریم:

$$V_o=\frac{(4s+1)\ (s+1)}{4s^2+6s+1}\ V_{in}\left[\frac{\frac{s+1}{s}}{\frac{(4s+1)}{4s^2+6s+1}+\frac{1}{s+1}+\frac{s+1}{s}}\right]$$

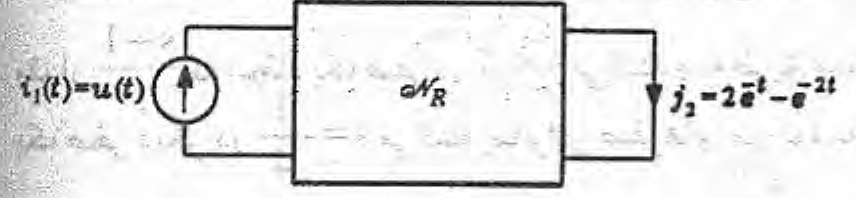
$$H(s)=\frac{V_o}{V_{in}}=\frac{(s+1)^3\ (4s+1)}{4s^4+22s^3+28s^2+10s+1}$$

با حل معادلهٔ $4s^4+22s^3+28s^2+10s+1=0$ فرکانسهای طبیعی مدار بدست می‌آیند که عبارتنداز:

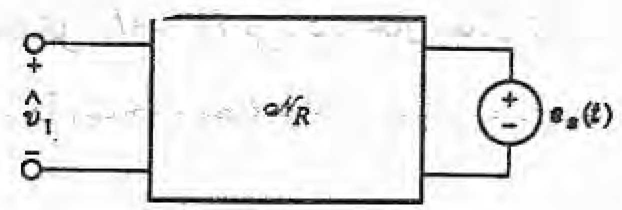
$$s_1=-0.1719\ ,\quad s_2=-0.3267\ ,s_3=-1.1577\ \ ,s_4=-3.8436$$

۲۱- با توجه به اطلاعات داده شده در شکل (مسالهٔ ۱۶-۲۱ الف وب) مقدار $\hat{v}_1$ را برای $e_s(t)=\delta(t)$ و

$e_s(t)=\cos t$ به دست آورید.



(الف)



(ب)

شکل (مسألهٔ ۱۶-۲۱)

حل :

از بیان 3 قضیهٔ هم‌پاسخی استفاده می‌کنیم.

برای $e_s(t)=\delta(t)$

$$H_I=\frac{J_2(s)}{I_1(s)}=\frac{\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}}{\frac{1}{s}}=\frac{s(s+3)}{(s+1)(s+2)}$$

$$H_v=\frac{\hat{v}_1(s)}{e_s(s)}=\frac{\hat{v}_1(s)}{1}=\hat{v}_1(s)$$

$$H_v=H_I \quad\Rightarrow\quad \hat{v}_1(s)=\frac{s(s+3)}{(s+1)(s+2)}=\frac{s^2+3s+2-2}{s^2+3s+2}=1-\frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

$$\hat{V}_1(s)=1+2\left(\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+1}\right) \quad\Rightarrow\quad \hat{v}_1(t)=\left(\delta(t)+2e^{-2t}-2e^{-t}\right)u(t) \qquad (a)$$

برای $e_s(t)=\cos t$

$$H_I=\frac{J_2(s)}{I_1(s)}=\frac{s(s+3)}{(s+1)(s+2)}$$

$$H_v=\frac{\hat{V}_1(s)}{eE(s)}=\frac{\hat{V}_1(s)}{\frac{s}{s^2+1}}=\frac{(s^2+1)\,\hat{V}_1(s)}{s}$$

$$H_I=H_v \quad\Rightarrow\quad \frac{(s^2+1)\hat{V}_1(s)}{s}=\frac{s(s+3)}{(s+1)(s+2)} \quad\Rightarrow\quad \hat{V}_1(s)=\frac{s^2(s+3)}{(s+1)(s+2)(s^2+1)}$$

$$\hat{V}_1(s)=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}+\frac{CS+D}{s^2+1}$$

$$A(s+2)(s^2+1)+B(s+1)(s^2+1)+(CS+D)(s+1)(s+2)=s^2(s+3)$$

$$s=-2 \quad\Rightarrow\quad -5B=4 \quad\Rightarrow\quad [B=-0.8]$$

$$s=-1 \quad\Rightarrow\quad 2A=2 \quad\Rightarrow\quad [A=1]$$

$$s=0 \quad \Rightarrow \quad 2A+B+2D=0 \quad \Rightarrow \quad 2D=-\frac{12}{10} \quad \Rightarrow \quad [\,D=-0.6\,]$$

$$s=1 \quad \Rightarrow \quad 6A+4B+6C+6D=4$$

$$6C=4-6+\frac{32}{10}+\frac{36}{10} \quad \Rightarrow \quad [\,C=0.8\,]$$

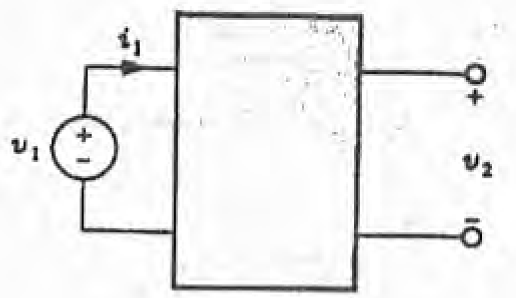
$$\hat{v}_1(t)=\left(e^{-t}-0.8e^{-2t}+0.8\cos t-0.6\sin t\right)u(t) \qquad (b)$$

بنا به قضیهٔ جمع آثار و روابط (a) و (b) داریم:

$$\hat{v}_1(t)=\left[\delta(t)-e^{-t}+1.2e^{-2t}+0.8\cos t-0.6\sin t\right]u(t)$$

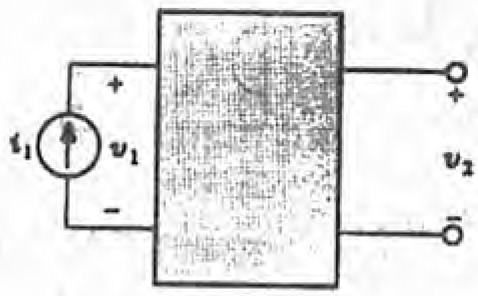
۲۲-الف- با انجام دو آزمایش بر روی یک شبکه دسته‌ای از توابع شبکه مانند شکل (مسالهٔ ۱۶-۲۲ الف و ب) تعریف شده‌اند. هر گونه تساوی که ممکن است میان چندجمله‌ای های مختلف A(s) ، B(s) ، C(s) ، D(s) ، E(s) ، F(s) ، G(s) ، H(s) وجود داشته باشد بیان کنید.

ب- به عنوان مثال فیزیکی از نتایج به دست آمده در قسمت (الف) چندجمله‌ای های A(s) ، B(s) ، C(s) ، D(s) ، E(s) ، F(s) ، G(s) و H(s) را برای مدار شکل (مسالهٔ ۱۶-۲۲ ج) به دست آورید.



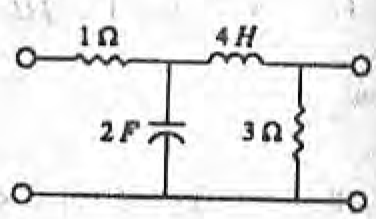
$$\frac{V_1(s)}{I_1(s)}=\frac{A(s)}{B(s)}\ ,\ \frac{V_2(s)}{V_1(s)}=\frac{C(s)}{D(s)}$$

(ب)



$$\frac{I_1(s)}{V_1(s)}=\frac{E(s)}{F(s)}\ ,\ \frac{V_2(s)}{I_1(s)}=\frac{G(s)}{H(s)}$$

(الف)



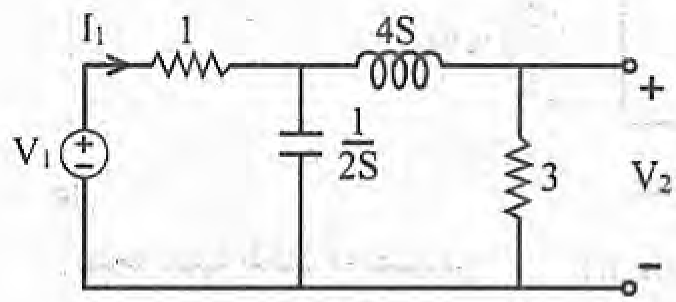
(ج)

شکل (مسالهٔ ۱۶-۲۲)

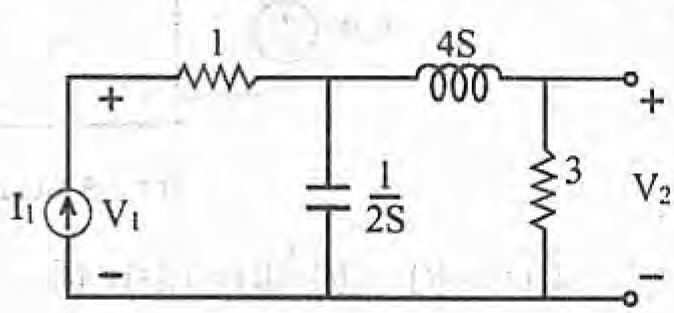
حل:

الف: $\frac{V_2}{V_1}$ فرکانسهای طبیعی اتصال کوتاه را می‌دهند، صفرهای $\frac{V_1}{I_1}$ نیز فرکانسهای طبیعی اتصال کوتاه هستند، همچنین قطبهای $\frac{I_1}{V_1}$ فرکانسهای طبیعی اتصال کوتاه هستند پس A(s)=D(s)=F(s) فرکانسهای طبیعی مدار باز هستند پس H(s)=E(s)=B(s) است.

ب:



(1)



(2)

در آزمایش اول مدار بصورت شکل (1) است پس:

$$\frac{V_1}{I_1}=Z=1+\frac{1}{2s}\ \|\ (4s+3)\ =\frac{8s^2+10s+4}{8s^2+6s+1}=\frac{A(s)}{B(s)}$$

V_2 را با توجه به اینکه I_1 را داریم بدست می‌آوریم:

$$V_2=I_1\times\frac{\frac{1}{2s}}{\frac{1}{2s}+4s+3}\times 3=\frac{3I_1}{8s^2+6s+1}=\frac{V_1}{Z}\times\frac{3}{8s^2+6s+1}$$

$$V_2=\frac{3V_1}{8s^2+10s+4}\quad\Rightarrow\quad\frac{V_2}{V_1}=\frac{3}{8s^2+10s+4}=\frac{C(s)}{D(s)}$$

در آزمایش دوم مدار بصورت شکل (2) است پس :

$$\frac{I_1}{V_1}=\frac{1}{Z}=\frac{8s^2+6s+1}{8s^2+10s+4}=\frac{E(s)}{F(s)}$$

نسبت $\frac{V_2}{I_{12}}$ را در بالا بدست آوردیم:

$$\frac{V_2}{I_1}=\frac{3}{8s^2+6s+1}=\frac{G(s)}{H(s)}$$

چنان چه مشاهده می‌شود

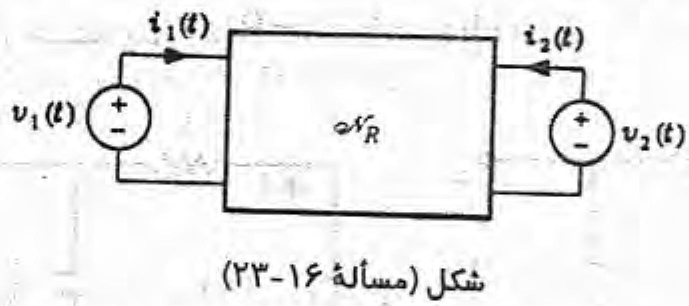
$$A(s)=D(s)=F(s)=8s^2+10s+4$$

$$H(s)=E(s)=B(s)=8s^2+6s+1$$

۲۳ـ دو قطبی $\mathcal{N}_R$ از عناصر RCL پسیو خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده است. اندازه‌گیریهای زیر انجام شده است :

$$v_1(t)-=4\cos(5t+60°)\qquad,\qquad v_2=0$$
$$i_1(t)=\cos(5t+80°)\qquad,\qquad i_2(t)=2\cos(5t+70°)$$

در اندازه‌گیری بعدی می‌دانیم $v_1(t)=2\cos(5t+70°)$ و $v_2(t)=\cos(5t+20°)$. جریان $i_1(t)$ را حساب کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۶-۲۳)

حل :

از نتیجهٔ قضیهٔ تلگان که بصورت $i_1(t)\hat{v}_1(t)+i_2(t)\hat{v}_2(t)=\hat{i}_1(t)v_1(t)+\hat{i}_2(t)v_2(t)$

در این مسئله $\hat{i}_1(t)=i_1(t)$ است برای کمتر بودن محاسبات از روش فازوری استفاده می‌کنیم :

$$(1\angle 80^\circ)\,(2\angle 10^\circ)+(2\angle 70^\circ)\,(1\angle 20^\circ)$$

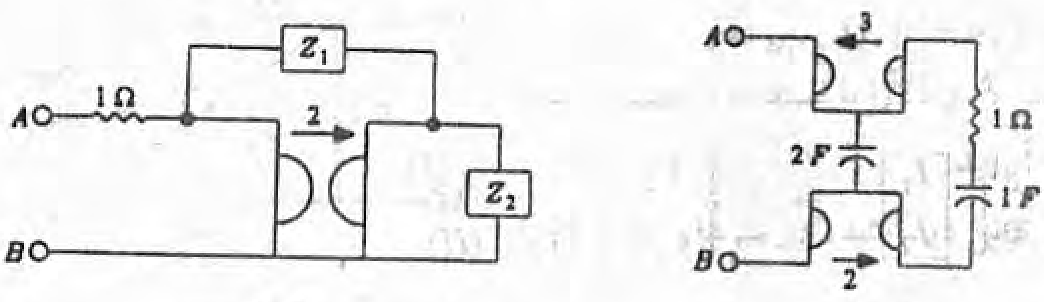
$$=\left[i_1(t)\right]\,(4\angle 60^\circ)+\left[\hat{i}_2(t)\right]\,(0)$$

$$\Rightarrow\quad \left[i_1(t)\right]\,(4\angle 60^\circ)=(2\angle 90^\circ)+(2\angle 90^\circ)$$

$$i_1(t)=(4\angle 90^\circ)/(4\angle 60^\circ)=1\angle 30$$

$$i_1(t)=\cos\ (5t+30^\circ)$$

۲۴- امپدانس دیده شده در سرهای A و B دو مدار شکل (مسالهٔ ۱۶-۲۴ الف و ب) چیست؟

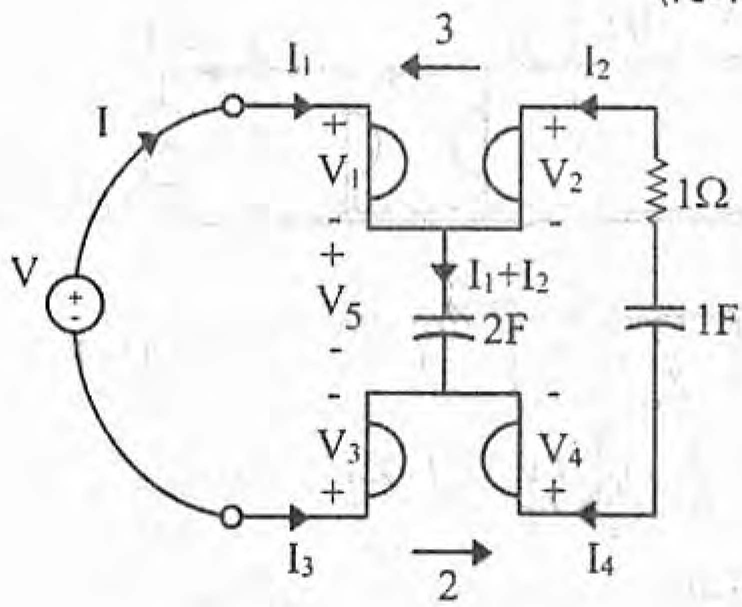


(ب) (الف)

شکل (مسالهٔ ۱۶-۲٤)

حل :

الف)



$$\begin{bmatrix} V_2 \\ V_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_2 \\ I_1 \end{bmatrix}\ ،\qquad (I)$$

$$\begin{bmatrix} V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}\qquad (II)$$

با توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases} I_3=-I_1=-I \\ I_4=-I_2 \\ V_s=(I_1+I_2)\times\dfrac{1}{2s} \qquad (III) \\ I_2=-\dfrac{V_2+V_5-V_4}{1+\frac{1}{s}} \qquad (IV) \end{cases}$$

$$(I)\quad\rightarrow\quad V_2=3I_1\quad\Rightarrow\quad V_2=3I$$

$$(II) \quad \rightarrow \quad V_4 = -2I_3 \quad \Rightarrow \quad V_4 = 2I$$

$$(IV),(III) \quad \rightarrow \quad V_5 = \frac{I}{s(2s+3)}$$

$$(IV),(I) \quad \rightarrow \quad V_1 = 3 \times \frac{V_2 + V_5 - V_4}{1+\frac{1}{s}} = I\,\frac{3(2s+1)}{2s+3}$$

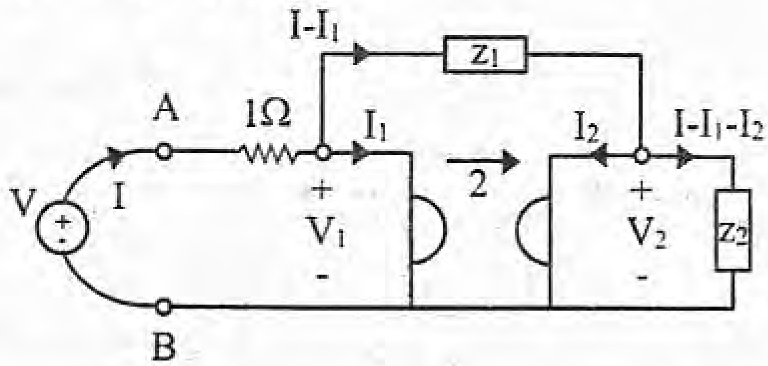
$$(IV),(II) \quad \rightarrow \quad V_3 = 2 \times \frac{V_2 + V_5 - V_4}{1+\frac{1}{s}} = I\,\frac{2(2s+1)}{2s+3}$$

$$V = V_1 + V_5 - V_3 \quad \Rightarrow \quad V = I\left[\frac{3(2s+1)}{2s+3} + \frac{1}{s(2s+3)} - \frac{2(2s+1)}{2s+3}\right]$$

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{2s^2+s+1}{s(2s+3)}$$

ب) مطابق شکل :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} V_1 = 3I_2 & (I) \\ V_2 = -3I_1 & (II) \end{cases}$$



$$V_2 = (I - I_1 - I_2)Z_2 \qquad (III)$$

$$V_1 - V_2 = Z_1(I - I_1) \qquad (IV)$$

$$V = I + V_1 \qquad (V)$$

$$(III) \rightarrow I_2 = -\frac{V_2}{Z_2} + I - I_1 \quad \overset{(I)}{\rightarrow} V_1 = 3\left[-\frac{V_2}{Z_2} + I - I_1\right] \quad \overset{(II)}{\rightarrow} V_1 = -\frac{3V_2}{Z_2} + 3I + V_2$$

$$\rightarrow \quad V_1 = \left[-\frac{3}{Z_2} + 1\right]V_2 + 3I \quad \overset{(IV)}{\rightarrow} V_1 = \left[-\frac{3}{Z_2} + 1\right](V_1 - Z_1 I + Z_1 I_1) + 3I$$

$$V_1 = V_1 - Z_1 I + Z_1 I_1 - \frac{3V_1}{Z_2} + \frac{3Z_1}{Z_2}I - \frac{3Z_1}{Z_2}I_1 + 3I$$

$$\rightarrow \quad \frac{3}{Z_2}V_1 = I\left[-Z_1 + 3 + \frac{3Z_1}{Z_2}\right] + I_1\left[Z_1 - \frac{3Z_1}{Z_2}\right] \qquad (VI)$$

$$(IV),(II) \quad \rightarrow \quad V_1 + 3I_1 = Z_1(I - I_1) \quad \rightarrow \quad I_1 = \frac{Z_1 I - V_1}{3 + Z_1}$$

I_1 را در رابطهٔ (VI) قرار می‌دهیم:

$$\frac{3}{Z_2}\ V_1 = I\left[-Z_1+3+\frac{3Z_1}{Z_2}\right]+\left[\frac{Z_1I-V_1}{3+Z_1}\right]\left[Z_1-\frac{3Z_1}{Z_2}\right]$$

$$\rightarrow\quad V_1=\frac{9I\ [\ Z_1+Z_2]}{9+Z_1Z_2}$$

با جایگذاری V_1 در رابطهٔ (V) داریم:

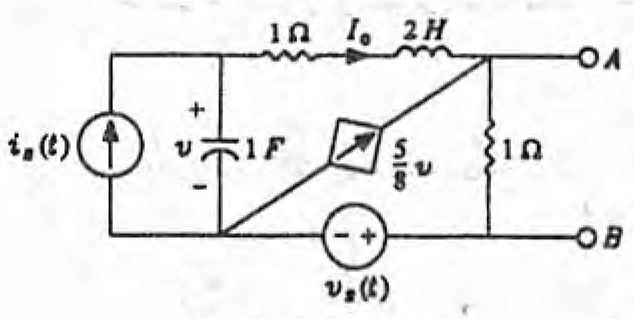
$$V=I+\frac{9I\ [\ Z_1+Z_2]}{9+Z_1Z_2}$$

$$\frac{V}{I}=\frac{9+Z_1Z_2+9Z_1+9Z_2}{9+Z_1Z_2}$$

۲۵- در مدار شکل (مسالهٔ ۱۶-۲۵) $V_0=2$ و $I_0=1$ بوده و داریم $v_s(t)=u(t)$ و $i_s(t)=e^{-\frac{t}{2}}u(t)$.

الف- ولتاژ دو سر A و B را با استفاده از قضیه جمع آثار به دست آورید.

ب- مدار معادل تونن دیده شده در سرهای A و B را تعیین کنید.

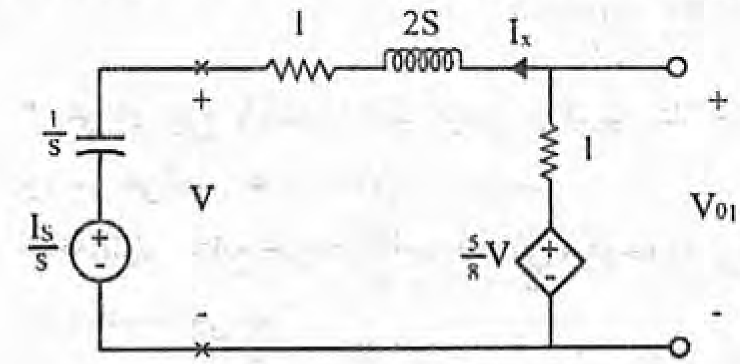


شکل (مسالهٔ ۱۶-۲۵)

حل:

مساله را چهار قسمت می‌کنیم:

۱) فقط $i_s(t)$ در مدار وجود دارد و شرایط اولیه نیز صفر است. در این صورت معادل تونن منبع $i_s(t)$ و خازن 1 اهمی را طبق شکل الف رسم می‌کنیم.



(الف)

از طرف راست مدار:

$$V_{o1}=-I_x+\frac{5}{8}\ V \qquad (a)$$

از طرف چپ مدار:

$$V=\frac{I_x}{s}+\frac{I_s}{s} \qquad (b)$$

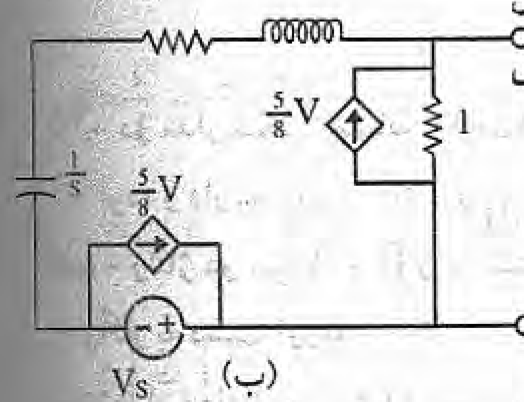
$$KVL:\ \left[\frac{1}{s}+2+2s\right]I_x=\frac{5}{8}V-\frac{I_s}{s} \qquad (c)$$

$$(b),(c) \quad \rightarrow \quad I_x=\frac{-3I_s}{16s^2+16s+3} \quad , \quad V=\frac{16(s+1)}{16s^2+16s+3}\,I_s$$

$$\xrightarrow{(a)} V_{o1}=\frac{3I_s}{16s^2+16s+3}+\frac{5}{8}\times\frac{16(s+1)I_s}{16s^2+16s+3}=\frac{10s+13}{16s^2+16s+3}\,I_s$$

۲) فقط $V_s(t)$ در مدار وجود دارد و شرایط اولیه نیز صفر است.

در این صورت منبع جریان وابسته را بین مقاومت 1 اهمی و منبع نابسته توزیع می‌کنیم تا مدار بصورت استاندارد درآید (مطابق شکل (ب)).

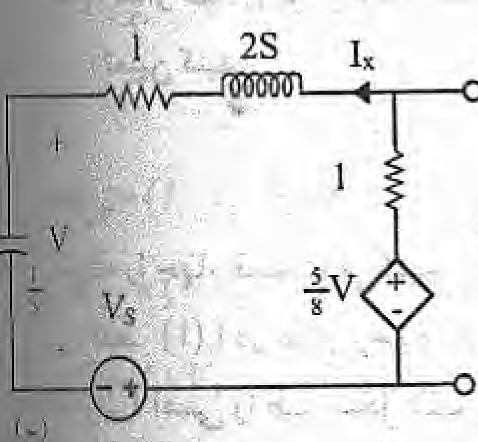


حال منبع ولتاژ و منبع جریان به صورت موازی با هم می‌باشند بنابراین منبع جریان را حذف می‌کنیم و همچنین معادل تونن مقاومت 1 اهمی و منبع جریان وابسته را رسم می‌کنیم شکل (ج) حاصل می‌شود.

$$V_{o2}=-I_x+\frac{5}{8}V \qquad (a)$$

$$V=\frac{I_x}{s} \qquad (b)$$

$$\left[2+2s+\frac{1}{s}\right]I_x=\frac{5}{8}V+V_s \qquad (c)$$



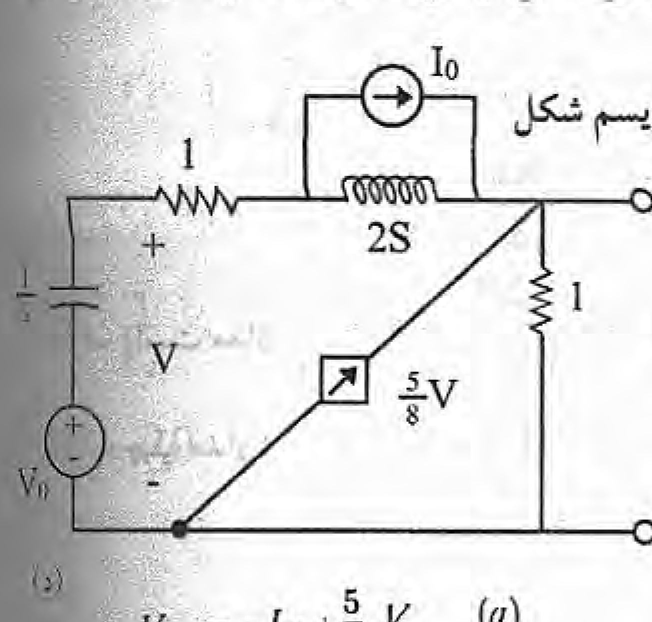
$$(b),(c) \quad \rightarrow \quad I_x=\frac{8s}{16s^2+16s+3}V_s \text{ و } V=\frac{8}{16s^2+16s+3}V_s$$

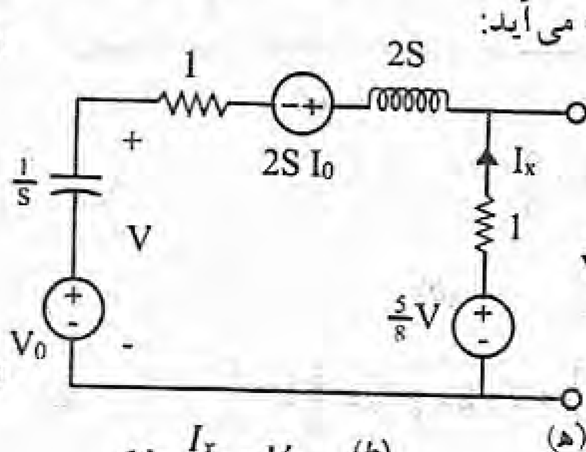
$$V_{02}\xrightarrow{(a)} V_{o2}=-\frac{8s}{16s^2+16s+3}V_s+\frac{5}{8}\times\frac{8}{16s^2+16s+3}V_s$$

$$\rightarrow \quad V_{o2}=\frac{5-8s}{16s^2+16s+3}V_s$$

۳) هر دو منبع نابسته را صفر فرض می‌کنیم ولتاژ خروجی ناشی از شرایط اولیه $V_o=2$ و $I_o=1$ را بررسی می‌کنیم مطابق شکل (د) داریم:

معادل تونن منابع جریان با امپدانسهای مربوطه را می‌نویسم شکل (هـ) بدست می‌آید:





$$V_{O3}=-I_X+\frac{5}{8}V \qquad (a)$$

$$V=\frac{I_x}{s}+V_0 \qquad (b)$$

$$\left(2+2s+\frac{1}{s}\right) I_x=\frac{5}{8} V-V_o-2s I_o \qquad (c)$$

$$(b),(c) \rightarrow I_x=\frac{s(5s-8)}{16s^2+16s+3} V_o-\frac{16s^2}{16s^2+16s+3} I_o$$

$$\xrightarrow{a} V_{o3}=\frac{40s^2+169s-25}{16s^2+16s+3} V_o-\frac{2s(s-8s)}{16s^2+16s+3} I_o$$

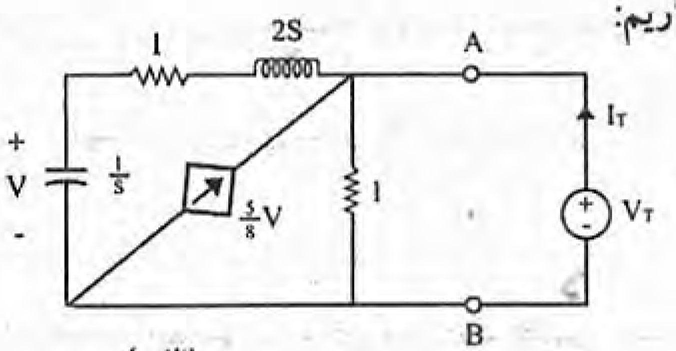
بنابراین بنا به خاصیت جمع آثار داریم:

$$V_o=V_{o1}+V_{o2}+V_{o3}$$

$$V_o=\frac{\left((10s+13) I_s+(5-8s) V_s+\left(40s^2+169s-25\right) V_o+\left(16s^2-10s\right) I_o\right)}{16s^2+16s+3}$$

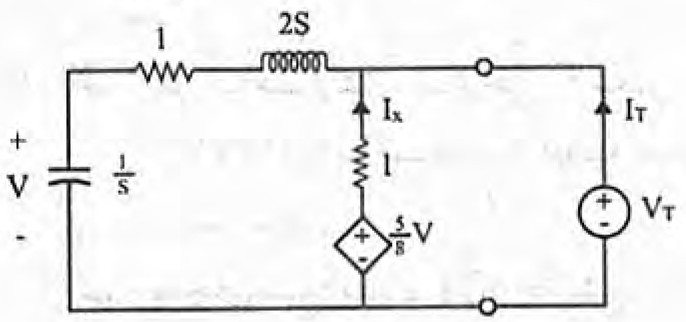
$$V_s=\frac{1}{s} \quad , \quad I_s=\frac{1}{s+\frac{1}{2}} \quad , \quad V_o=2 \quad , \quad I_o=1$$

ب) برای محاسبه Z_{th} منابع نابسته را صفر می‌کنیم و داریم:



(الف)

از معادل تونن مقاومت 1 اهمی و منبع جریان وابسته شکل (ب) حاصل می‌شود:



(ب)

$$V=\frac{I_T+I_x}{s} \qquad (a)$$

$$\left(\frac{1}{s}+1+2s\right)\left(I_T+I_x\right)+I_x=\frac{5}{8} V \qquad (b)$$

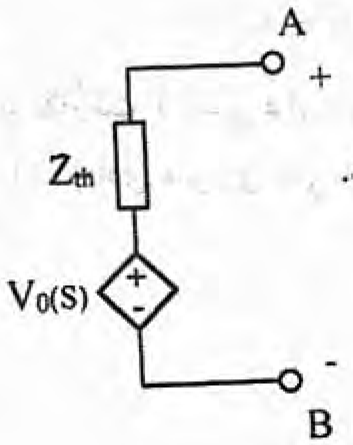
$$V_T=\frac{s}{8} V-I_x \qquad (c)$$

$$(a),(b) \rightarrow I_x=-\frac{16s^2+8s+3}{16s^2+16s+3} I_T \quad \text{و} \quad V=\frac{8}{16s^2+16s+3} I_T$$

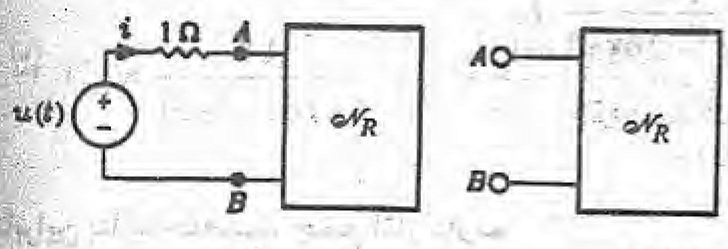
$$\xrightarrow{c} \quad V_T=\frac{5}{8} \times \frac{8}{16s^2+16s+3} I_T+\frac{16s^2+8s+3}{16s^2+16s+3} I_T$$

$$Z_{th}=\frac{V_T}{I_T}=\frac{16s^2+8s+8}{16s^2+16s+3}$$

- V_{th} همان $V_o(s)$ قسمت (الف) می‌باشد.



۲۶- مدار $\mathcal{N}_R$ خطی تغییرناپذیر با زمان است و برای شکل (مسألهٔ ۱۶-۲۶ ب) داریم $i(t) = \left(2-1.5e^{0.5t}\right)u(t)$ پایداری مدار $\mathcal{N}_R$ سمت راست را با فرض مدار باز بودن سرهای B و A و یا اتصال کوتاه بودن آن بررسی کنید.



(ب) (الف)

شکل (مسألهٔ ۱۶-۲۶)

حل :

$$I(s)=\frac{2}{s}-\frac{\frac{3}{2}}{s-\frac{1}{2}}=\frac{s-2}{s(2s-1)}$$

$$V(s)=\frac{1}{s}$$

امپدانس ورودی دیده شده از دو سر منبع ولتاژ:

$$Z_T=\frac{V(s)}{I(s)}=\frac{\frac{1}{s}}{\frac{s-2}{s(2s-1)}}=\frac{2s-1}{s-2}$$

Z_{AB} امپدانس ورودی مدار N_e عبارتست از :

$$Z_{AB}=Z_T-1$$

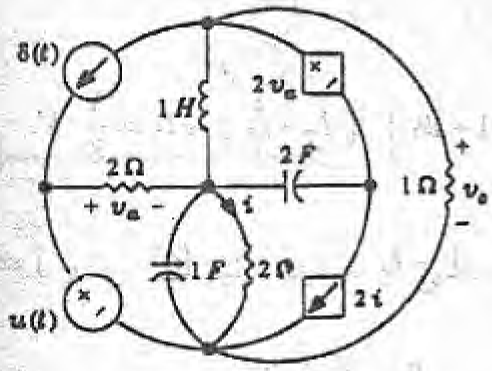
$$Z_{AB}=\frac{2s-1}{s-2}-1=\frac{s+1}{s-2}$$

با توجه به امپدانس ورودی چون یک قطب در سمت راست محور موهومی وجود دارد بنابراین سیستم ناپایدار است.

۲۷-الف- می‌خواهیم ولتاژ خروجی v_o شکل (مسألهٔ ۱۶-۲۷) را با استفاده از قضیهٔ جمع آثار حساب کنیم.

ب- به جای منبع جریان $\delta(t)$ چه منبع ولتاژی قرار دهیم تا ولتاژ خروجی تغییر نکند؟

پ- مدار معادل تونن دیده شده در دوسر مقاومت خروجی را تعیین کنید.



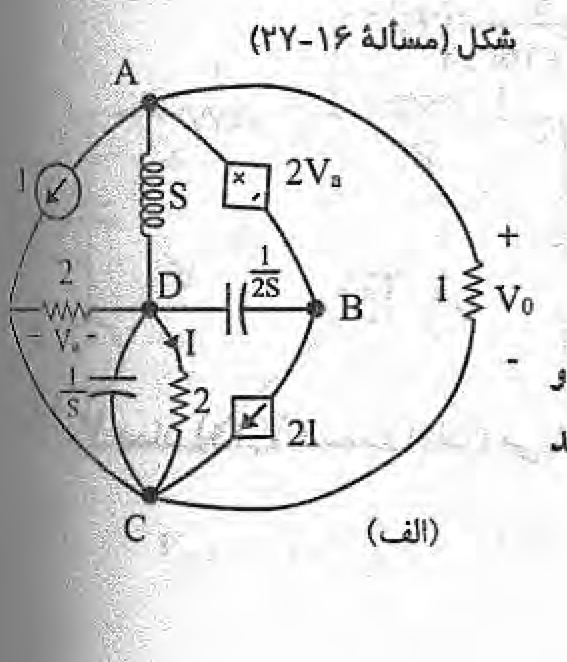
شکل (مسألهٔ ۱۶-۲۷)

حل :

الف) فرض می‌کنیم فقط منبع جریان $\delta(t)$ موجود باشد داریم:

با توجه به شکل : $-V_a=2I$

منبع جریان نابسته بصورت موازی با مقاومت 1 اهمی قرار دارد و دو عدد مقاومت 2 اهمی و خازن 1 فارادی موازی می‌باشند

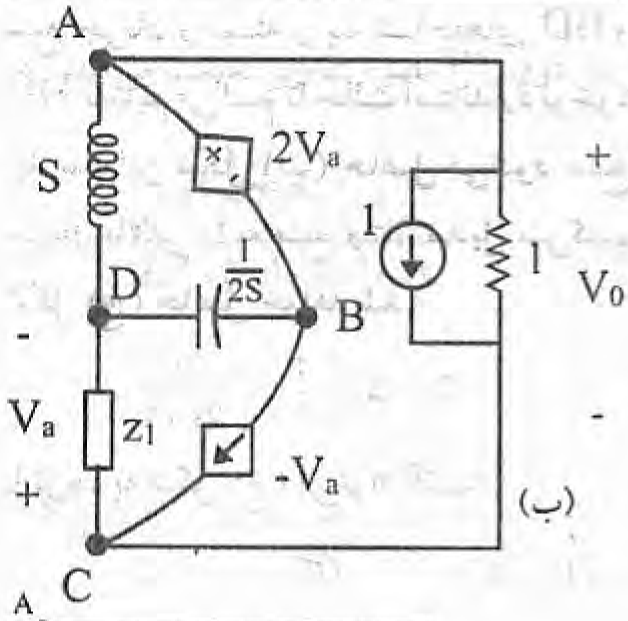


(الف)

بنابراین شکل (ب) حاصل می‌شود.

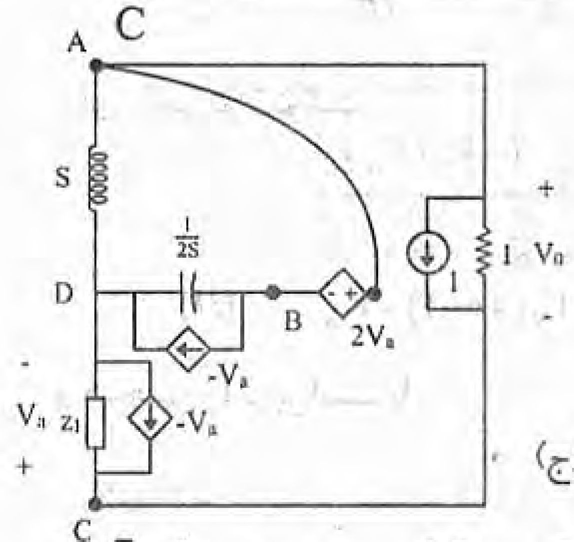
$$Z_1 = 2 \parallel 2 \parallel \frac{1}{s} = \frac{1}{s+1}$$

حال منابع ولتاژ وابسته و جریان وابسته را در شاخه‌ها پخش می‌کنیم تا حالت استاندارد مدار ظاهر شود بنابراین شکل (ج) را خواهیم داشت:



(ب)

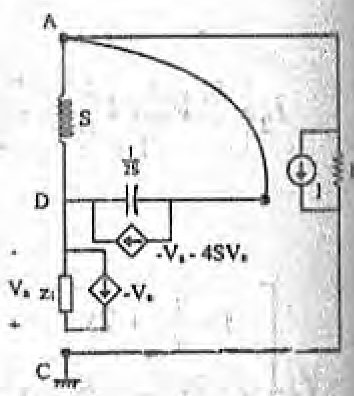
اگر منبع ولتاژ وابسته را داخل شاخه‌های BD پخش کنیم و معادل نرتن آنرا رسم کنیم شکل (د) حاصل می‌گردد.



(ج)

جهت نوشتن معادلات گره پتانسیل نقاط را بصورت زیر فرض می‌کنیم:

$$\begin{cases} \text{زمین} : C \\ E_1 : A \\ E_2 : D \end{cases} \rightarrow \quad (*)\ V_o = E_1 \quad (**)\ -V_a = E_2$$



(د)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{s}+2s+1 & -\left(\frac{1}{s}+2s\right) \\ -\left(\frac{1}{s}+2s\right) & \frac{1}{s}+2s+\frac{1}{Z_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+4s)V_a - 1 \\ V_a - (1+4s)V_a \end{bmatrix}$$

$$\overset{(*)}{\underset{(**)}{\Rightarrow}} \begin{bmatrix} \frac{1}{s}+2s+1 & -\left(\frac{1}{s}+2s\right)+(1+4s) \\ -\left(\frac{1}{s}+2s\right) & \frac{1}{s}+2s+\frac{1}{Z_1}-4s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_o \\ -V_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

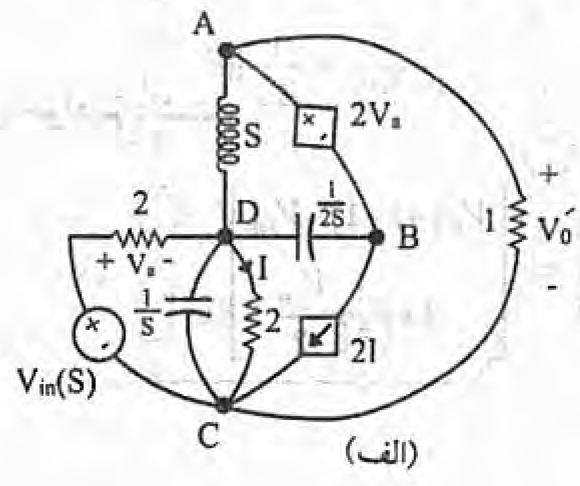
از روش کرامر داریم:

$$V_o = \frac{-\left(\frac{1}{s}+1-s\right)}{\left(\frac{1}{s}+2s+1\right)\left(\frac{1}{s}+1-s\right)+\left(-\frac{1}{s}+2s+1\right)\left(\frac{1}{s}+2s\right)}$$

$$V_o = \frac{s(s^2-s-1)}{2s^4+3s^3+2s^2+3s}$$

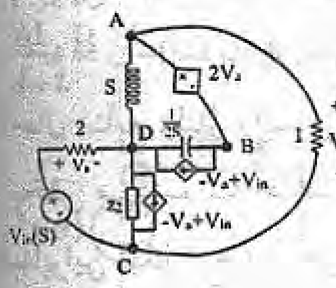
حال فقط منبع ولتاژ $u(t)$ را در نظر می‌گیریم بنابراین داریم:

$$KVL\ : 2I = -V_a + V_{in}$$

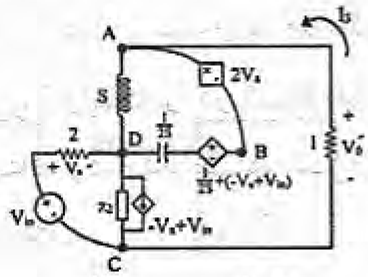


(الف)

منبع جریان وابسته را بـه شـاخه‌های BD و DC تقسیم می‌کنیم تا حالت استاندارد بوجود آید بنابراین شکل (ب) حاصل می‌شود. منبع جریان بالایی را به منبع ولتاژ تبدیل مـی‌کنیم شکل (ج) حاصل خواهد شد.



(ب)



(ج)

$$Z_2 = 2 \parallel \frac{1}{s} = \frac{2}{2s+1}$$

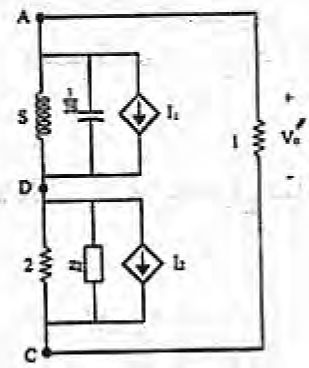
با توجه به شکل (ج) می‌توان گفت:

$$V_{DC} = -V_a + V_{in} \qquad (I)$$

برای I_1 می‌توان نوشت:

$$I_1 = \frac{-2V_a + \frac{1}{2s}\ (-V_a + V_{in})}{\frac{1}{2s}}$$

$$\rightarrow \quad I_1 = -V_a(4s+1) + V_{in} \qquad (II)$$



(د)

و همچنین I_2 برابر است با :

$$I_2 = -V_a + V_{in} - \frac{V_{in}}{2} = -V_a + \frac{V_{in}}{2} \qquad (III)$$

از تجزیه و تحلیل گره با توجه به فرضیات زیر می‌توان نوشت:

پتانسیل C :زمین

پتانسیل E_1 : A

پتانسیل E_2 : D

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{s}+2s & -\left(\frac{1}{s}+2s\right) \\ -\left(\frac{1}{s}+2s\right) & \frac{1}{s}+2s+\frac{1}{2}+\frac{1}{Z_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_1 \\ I_1-I_2 \end{bmatrix}$$

از روابط (II) و (III) ، I_1 و I_2 را جایگزین می‌کنیم و همچنین بنا به (I) :

$$\begin{cases} E_2 = V_{DC} = -V_a + V_{in} \\ E_1 = V_o' \end{cases}$$

پس خواهیم داشت :

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{s}+2s & -\left(\frac{1}{s}+2s\right) \\ -\left(\frac{1}{s}+2s\right) & \frac{1}{s}+2s+\frac{1}{2}+\frac{2s+1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_o' \\ -V_a+V_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_a(4s+1)-V_{in} \\ -4s\,V_a+\frac{V_{in}}{2} \end{bmatrix}$$

می‌دانیم $V_{in}=\frac{1}{s}$ بنابراین از دو معادله بدست آمده از ماتریس فوق V'_o بصورت زیر بدست می‌آید.

$$V'_o = \frac{4s^3+7s^2-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}}{2s^4+3s^3+2s^2+3s}$$

بنا به خاصیت جمع آثار V_{oT} عبارتست از :

$$V_{oT}=V_o+V'_o=\frac{5s^3+6s^2-\frac{3}{2}s+\frac{1}{2}}{2s^4+3s^3+2s^2+3s}$$

ب- ولتاژ خروجی به ازای ورودی منبع جریان $i_i(s)=1$ با توجه به قسمت الف عبارتست از :

$$V_o(s)=\frac{s^2-s-1}{2s^3+3s^2+2s+3}\times i_i(s)=\frac{s^2-s-1}{2s^3+3s^2+2s+3} \qquad (I)$$

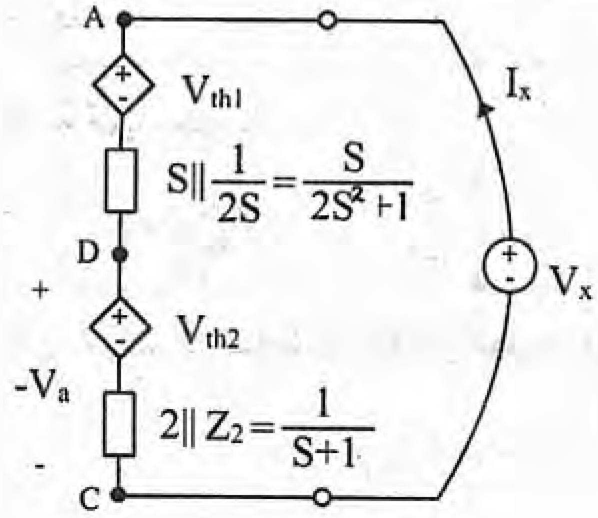
حال اگر به جای منبع جریان i_i منبع ولتاژ v_i قرار دهیم داریم:

$$V_o(s)=V_i(s) \quad \xrightarrow{(I)} \quad V_i(s)=\frac{s^2-s-1}{2s^3+3s^2+2s+3}=\frac{1}{2}\left(\frac{0.846}{s+1.5}+\frac{0.154s-1.831}{s^2+1}\right)$$

$$v_i(t)=\frac{1}{2}\left(0.846e^{-1.5t}+0.154\cos t-1.231\sin t\right)u(t)$$

لازم به ذکراست که در این مدار از منبع ولتاژ $u(t)$ صرف نظر کردیم، زیرا که منبع ولتاژ $u(t)$ ثابت بود. به عبارت دیگر منبع ولتاژ $u(t)$ را اتصال کوتاه فرض کردیم واثر تغییرات منبع جریان و تبدیل آن به منبع ولتاژ را مورد بحث قرار دادیم:

پ) بنابه شکل (د) می‌توان معادل تونن قسمت های مختلف را رسم نمود:



$$V_{th_1}=V_a\frac{s(4s+1)}{2s^2+1} \qquad (I)$$

$$V_{th_2}=\frac{V_a}{s+1} \qquad (II)$$

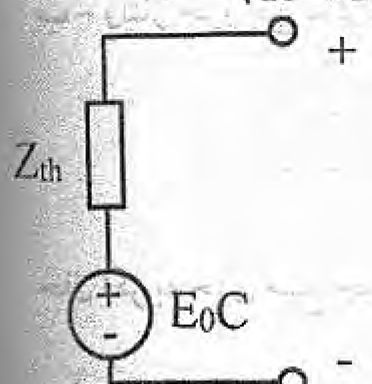
$$KVL: V_x = V_{th_1} + V_{th_2} + I_x\left(\frac{s}{2s^2+1} + \frac{1}{s+1}\right)$$

$$KVL: -V_a = V_{th_2} + \frac{I_x}{s+1} \overset{(II)}{\Rightarrow} V_a = \frac{-I_x}{s+2}$$

$\Rightarrow$

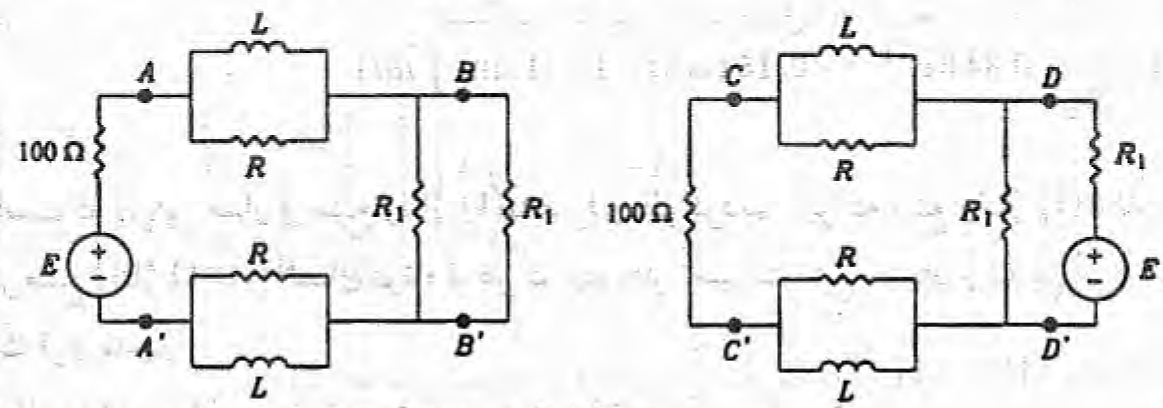
$$V_x = -\frac{I_x}{s+2} \times \frac{s(4s+1)}{2s^2+1} + \frac{-I_x}{s+2} \times \frac{1}{s+1} + I_x\left(\frac{s}{2s^2+1} + \frac{1}{s+1}\right)$$

$$Z_{th} = \frac{V_x}{I_x} = \frac{-s^2+s+1}{(2s^2+1)(s+2)}$$



بنابراین معادل تونن دیده شده بصوت شکل مقابل است کـه در آن E_{oC} همان V_{oT} قسمت (الف) می‌باشد.

۲۸- در مدار شکل (مسالهٔ ۱۶-۲۸) می‌دانیم $v_{AB} = \frac{E}{3}$ و $v_{CC'} = \frac{E}{30}$. مقدار مقاومت R_1 را تعیین کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۶-۲۸)

حل :

راه حل اول :

$$i_2 = \hat{i}_1 \ , \ i_2 = \frac{v_{BB'}}{R_1} \quad , \quad \hat{i}_1 = \frac{v_{CC'}}{100}$$

طبق قضیه هم‌پاسخی داریم:

$$\frac{v_{BB'}}{R_1} = \frac{v_{CC'}}{100} \Rightarrow R_1 = 100 \times \frac{v_{BB'}}{v_{CC'}} \quad , \quad v_{CC'} = \frac{E}{30} \quad , \quad v_{BB'} = ?$$

$$(KVL) \quad v_{BB'} = v_{BA} + v_{AA'} + v_{A'B'} \ , \ v_{BA} = v_{A'B'} = I_x\left(LS \parallel R\right)$$

$$\Rightarrow v_{BB'} = 2\,v_{BA} + v_{AA'} = 2\left(-v_{AB}\right) + v_{AA'} = -2v_{AB} + v_{AA'}$$

$$\Rightarrow \quad v_{BB'} = -\frac{2}{3}E + v_{AA'} \qquad (a)$$

$$v_{AA'} = 100 i_x + E \ , \ i_x = \frac{-v_{BB'}}{\frac{R_1}{2}} = \frac{-2v_{BB'}}{R_1} \quad \Rightarrow \quad v_{AA'} = \frac{-200 v_{BB'}}{R_1} + E \quad (b)$$

$$(a)\ ,\ (b) \quad \Rightarrow \quad v_{BB'} = -\frac{2}{3}E + \left(\frac{-200 v_{BB'}}{R_1} + E\right) \quad \Rightarrow \quad v_{BB'}\left(1 + \frac{200}{R_1}\right) = \frac{1}{3}E$$

$$\Rightarrow \quad v_{BB'} = \frac{ER_1}{3R_1 + 600}$$

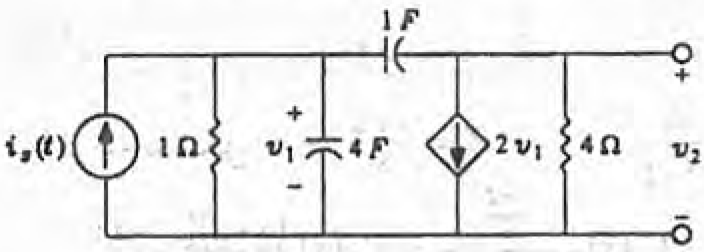
$$R_1 = 100 \times \frac{v_{BB'}}{v_{CC'}} = 100 \times \frac{\frac{ER_1}{3R_1+600}}{\frac{E}{30}} \quad \Rightarrow \quad R_1 + 200 = 1000$$

$$\Rightarrow \quad [\ R_1 = 800\ \Omega]$$

راه حل دوم :

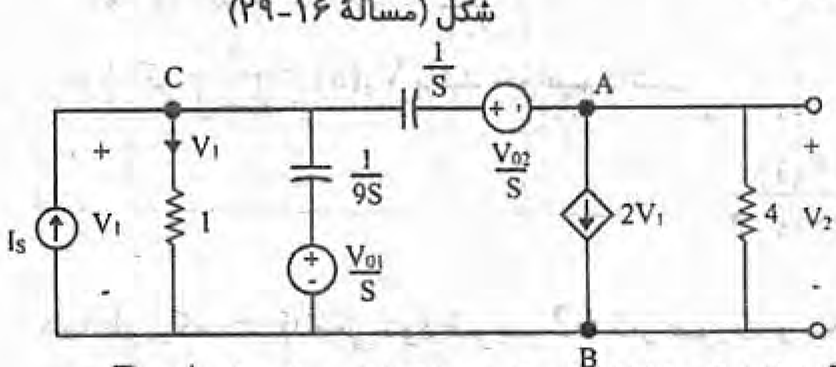
چون $v_{CC'} = \frac{E}{30}$ است پس جریان گذرنده از مقاومت 100Ω برابر $I = \frac{E}{3000}$ است بنا به قضیهٔ هم‌پاسخی جریان I در مقاومت R_1 میان B و 'B نیز همین مقدار است پس $v_{BB'} = \frac{E}{3000} \times R_1$ می‌باشد با توجه به اینکه جریانی که از A به B می‌رود از 'B به 'A برمی‌گردد و مقادیر I و R، در شاخه‌های AB و 'A'B یکسان هستند پس $v_{AB} = v_{A'B'}$ است با نوشتن KVL در حلقه بیرونی مدار اول داریم:

$$E = 100 \times \frac{2E}{3000} + \frac{E}{3} + \frac{E}{3000} \times R_1 + \frac{E}{3} \quad \Rightarrow \quad [\ R_1 = 800\ \Omega]$$



شکل (مسالهٔ ۱۶-۲۹)

۲۹- در مدار شکل (مسالهٔ ۱۶-۲۹) آیا می‌توان یک ورودی $i_s(t)$ و شرایط اولیه مناسبی برای ولتاژ خازن‌ها چنان تعیین کنید که پاسخ کامل $v_2(t)$ متحد با صفر باشد؟ در صورت مثبت بودن، یک جواب به دست آورید.



حل :

اگر ولتاژ اولیه خازنها و i_s طوری باشد که $V_2 = 0$ گردد از مقاومت 4 اهمی جریانی عبور نمی‌کند پتانسیل نقطهٔ A و B برابر می‌گردد. V_{o1} و V_{o2} ولتاژ اولیه خازنها نیز (چون اختلاف پتانسیل A و B در همهٔ لحظات صفر می‌باشد) مساویند. $(V_{o1} = V_{o2})$ (I)

$$KCL\ \ (c)\ :\ I_s = V_1 + \left(V_1 - \frac{V_{o1}}{s}\right)4s + \left(V_1 - \frac{V_{o2}}{s}\right)s \qquad (II)$$

چون از مقاومت 4 اهمی جریانی عبور نمی‌کند بنابراین از KCL در نقطهٔ A داریم:

$$2V_1 = s\left(V_1 - \frac{V_{o2}}{s}\right) \rightarrow V_1 = \frac{V_{o2}}{s-2} \qquad (III)$$

با جایگذاری (III) و (I) در رابطهٔ (II) داریم:

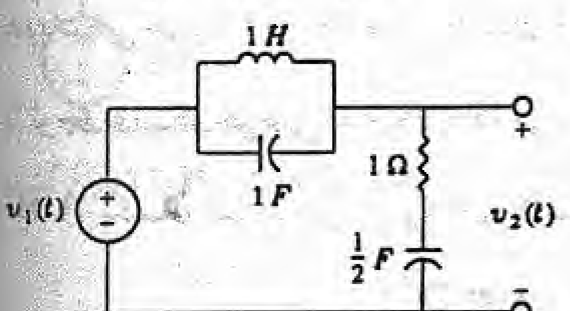
$$I_s = \frac{V_{o2}}{s-2} + \left(\frac{V_{o2}}{s-2} - \frac{V_{o2}}{s}\right)4s + \left(\frac{V_{o2}}{s-2} - \frac{V_{o2}}{s}\right)s$$

$$I_s = V_{o2}\left(\frac{11}{s-2}\right)\ (*)$$

حال $\frac{k}{11}=V_{o2}$ فرض می‌کنیم آنگاه

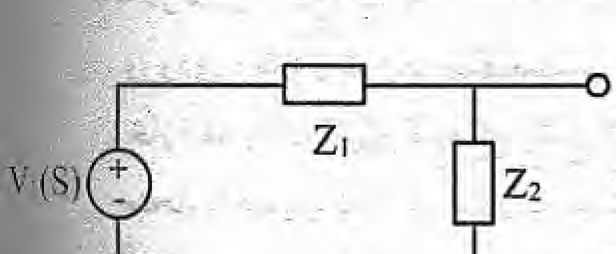
$$V_{o1} = V_{o2} = \frac{k}{11}$$

$$\xrightarrow{(*)} I_s = \frac{k}{11}\times\frac{11}{s-2} = \frac{k}{s-2} \qquad \xrightarrow{L^{-1}} i_s(t) = ke^{2t}$$



۳۰- در مدار شکل (مسالهٔ ۱۶-۳۰) نشان دهید که اگر ورودی $v_1(t)$ به صورت ke^{-2t} انتخاب شود، در پاسخ $v_2(t)$ جمله‌ای به شکل e^{-2t} ظاهر نخواهد شد. به طریق مشابه اگر ورودی $v_1(t)=k\sin t$ انتخاب شود، در پاسخ $v_2(t)$ جمله‌ای سینوسی با فرکانس 1 ظاهر نخواهد شد. علت این امر را توضیح دهید.

حل :



با توجه به شکل : $Z_1 = \frac{s}{s^2+1}$, $Z_2 = \frac{s+2}{s}$

$$V_2(S)\,V_2(s) = V_1(s)\frac{\frac{s+2}{s}}{\frac{s+2}{s}+\frac{s}{s^2+1}} = V_1(s)\,\frac{(s+2)(s^2+1)}{s^3+3s^2+s+2}$$

اکنون اگر $V_1(s)=\frac{k}{s+2}$ باشد خواهیم داشت:

$$V_2(s) = \frac{k}{s^2+2}\times\frac{(s+2)(s^2+1)}{s^3+3s^2+s+2} = \frac{k(s^2+1)}{s^3+3s^2+s+2}$$

همانطوریکه مشاهده می‌شود ضریب s+2 از صورت و مخرج حذف می‌شود و در نتیجه ضریب s+2 در مخرج وجود نداشته بنابراین با عکس تبدیل لاپلاس گرفتن جمله‌ای به شکل e^{-2t} در $V_2(t)$ ظاهر نخواهد شد.

حال اگر $V_1(s)=\dfrac{k}{s^2+1}$ باشد خواهیم داشت:

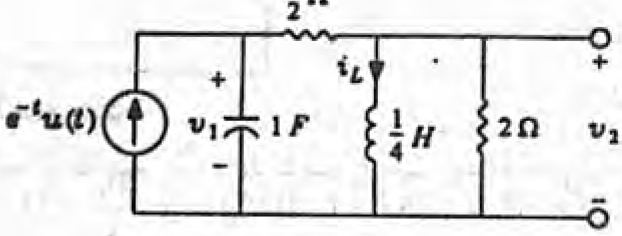
$$V_2(s)=\frac{k}{s^2+1}\times\frac{(s+2)(s^2+1)}{s^3+3s^2+s+2}=\frac{k(s+2)}{s^3+3s^2+s+2}$$

باز به همین ترتیب با عکس تبدیل لاپلاس گرفتن جمله‌ای سینوسی با فرکانس 1 ظاهر نمی‌شود زیرا که جملهٔ s^2+1 در مخرج با s^2+1 صورت حذف می‌شود.

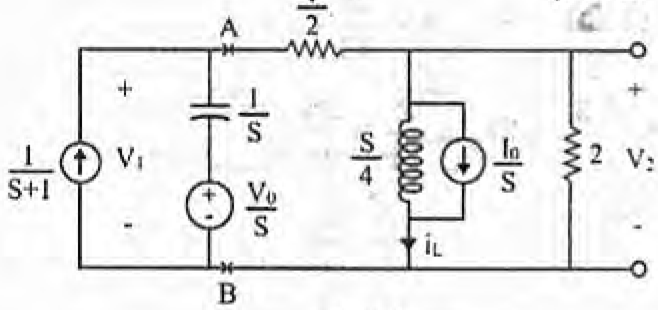
علت این امر این است که مطابق شکل امپدانس Z_2 در فرکانس $s=-2$ صفر می‌باشد بنابراین خروجی در این فرکانس صفر است و همچنین امپدانس Z_1 در فرکانس $s=\pm j$ بینهایت می‌باشد بنابراین جریان حلقه در این فرکانس صفر بوده و ولتاژ خروجی در این فرکانس صفر خواهد بود.

۳۱- برای مدار شکل (مسالهٔ ۱۶-۳۱) شرایط اولیهٔ $v_1(0^-)$ و $i_L(0^-)$ را چنان به دست آورید که هیچ نوسان سینوسی در خروجی $v_2(t)$ حاصل نشود

حل :



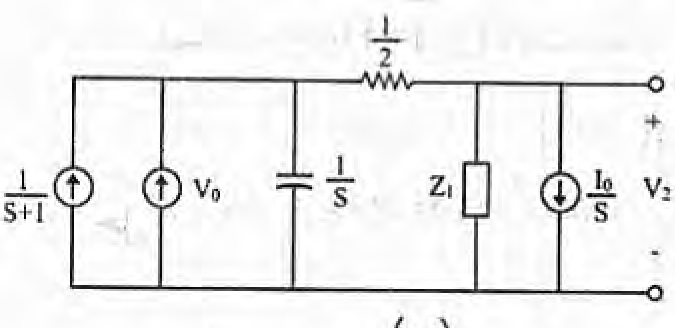
شکل (مسألهٔ ۱۶-۳۱)



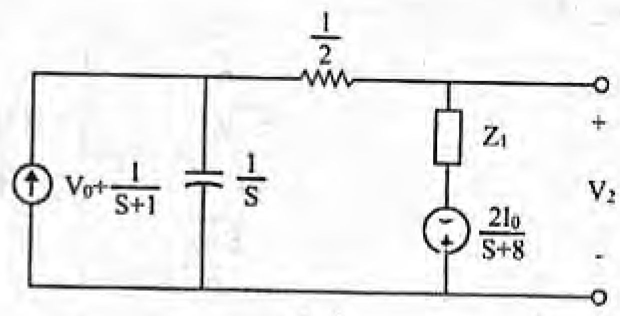
(الف)

V_0 ولتاژ اولیه خازن و I جریان اولیه سلف را در حوزه لاپلاس بصورت منبع ولتاژ و منبع جریان مطابق شکل (الف) نشان می‌دهیم، معادل نرتن از دید A و B را محاسبه می‌کنیم.

مطابق شکل (ب) : $Z_1=2\ \|\ \frac{s}{4}$



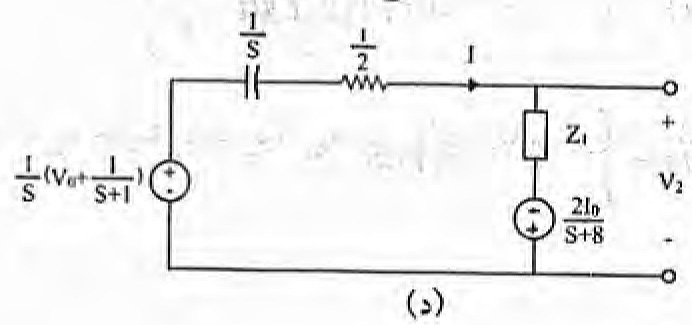
(ب)



(ج)

$$I=\frac{\left(\frac{1}{s+1}+V_0\right)\times\frac{1}{s}+\frac{2I_0}{s+8}}{\frac{1}{s}+\frac{1}{2}+\frac{2s}{s+8}}\qquad (I)$$

$$V_2=-\frac{2I_0}{s+8}+\frac{2s}{s+8}\times I\qquad (II)$$



(د)

$$(I),(II) \rightarrow V_2 = -\frac{2I_0}{s+8} + \frac{2s}{s+8} \times \frac{(1+sV_0+V_0)(s+8)+2I_0s^2+2I_0}{\frac{5}{2}s^3+\frac{15}{2}s^2+13s+8}$$

$$V_2 = -\frac{2I_0}{s+8} + \frac{2s}{s+8} \times \frac{(V_0+2I_0)s^2+(1+9V_0+2I_0)+(8+8V_0)}{\left(\frac{1}{7}s+\frac{1}{7}\right)\left(\frac{35}{2}s^2+\frac{70}{2}s+56\right)}$$

حال برای آنکه در خروجی V_2 نوسان سینوسی نداشته باشیم باید جملات با ریشه مختلط را از مخرج حذف می‌کنیم بنابراین جملهٔ درجه 2 صورت را k برابر جملهٔ درجه 2 مختلط مخرج قرار می‌دهیم بنابراین داریم: [جملهٔ درجه 2 مخرج].k= جملهٔ درجه 2 صورت

آنگاه :

$$\begin{cases} V_0+2I_0 = k.\frac{35}{2} & (I) \\ 1+9V_0+2I_0 = k.\frac{70}{2} & (II) \\ 8+8V_0 = k.56 & (III) \end{cases}$$

$$(II) \rightarrow 2I_0 = 35k-1-9V_0 \overset{(I)}{\rightarrow} V_0+(35k-1-9V_0) = k.\frac{35}{2} \quad (*)$$

$$(III) \rightarrow V_0 = 7k-1 \overset{(*)}{\rightarrow} (7k-1)+\frac{35}{2}k-1-9(7k-1)=0 \rightarrow \left[k=\frac{2}{11}\right]$$

$$(III) \rightarrow 8+8V_0 = \frac{2}{11}\times 56 \rightarrow \left[V_0=\frac{3}{11}\right] \overset{(I)}{\rightarrow} \frac{3}{11}+2I_0 = \frac{2}{11}\times\frac{35}{2}$$

$$\rightarrow \left[I_0=\frac{16}{11}\right]$$

۳۲- اگر s(t) پاسخ پلهٔ مداری با تابع شبکهٔ H(s) باشد و $s_\alpha(t)$ پاسخ پلهٔ مداری با تابع شبکهٔ $H_\alpha(s)=H(s+\alpha)$ باشد، نشان دهید که :

$$s_\alpha(t) = e^{-\alpha t}s(t) + \alpha\int_0^t e^{-\alpha\tau}s(\tau)d\tau$$

حل :

کانولوشن طرف اول را می‌نویسیم:

$$s_\alpha(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\tau}h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

$$s_\alpha(t) = \int_0^t e^{-\alpha\tau}h(\tau)d\tau$$

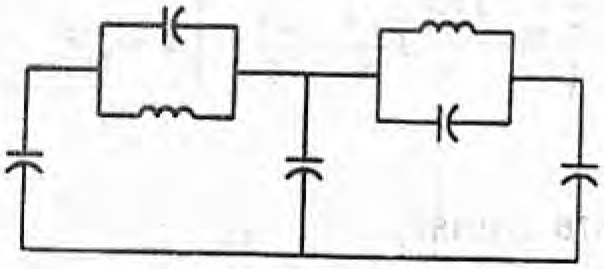
از انتگرال جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} e^{-\alpha\tau}=V \\ h(\tau)d\tau=du \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\alpha e^{-\alpha\tau}d\tau=dv \\ \int_0^t h(\tau)d\tau=u \end{cases} \qquad \int Vdu=uV-\int udv$$

$$s_\alpha(t)=\int_0^t e^{-\alpha\tau}h(\tau)d\tau=e^{-\alpha t}\int_0^t h(\tau)d\tau-\int -\alpha e^{-\alpha\tau}\left[\int_0^\tau h(\tau')d\tau'\right]d\tau \quad (I)$$

ولی از طرفی:
$$s(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau=\int_0^t h(\tau)d\tau$$

بنابراین در رابطه (I) با جایگذاری از فوق داریم:
$$s_\alpha(t)=e^{-\alpha t}s(t)+\alpha\int e^{-\alpha\tau}s(\tau)d\tau$$



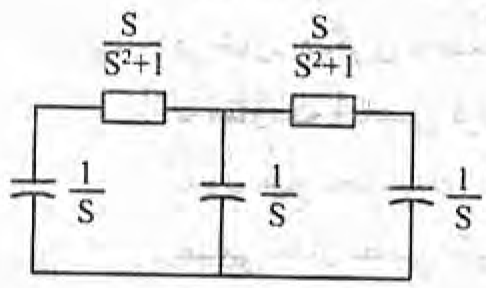
شکل (مسالهٔ ۱۶-۳۳)

۳۳-الف- فرکانس های طبیعی مدار نشان داده شده در شکل (مسالهٔ ۱۶-۳۳) را با هر روشی که مناسب می‌دانید به دست آورید (همهٔ مقادیر عناصر برابر واحد هستند)

ب- اگر خازن وسطی به مقاومت یک اهمی تبدیل شود بار دیگر مساله را حل کنید.

حل:

الف) می‌توان شکل را بصورت مقابل ساده نمود.



$$Z=\begin{bmatrix} \frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & \frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

ماتریس امپدانس عبارتست:

$$|Z|=0 \rightarrow 8s^4+10s^2+3=0 \rightarrow \begin{cases} s^2=-\frac{3}{4} \\ s^2=-\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} s_1=j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ s_2=-j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ s_3=j\frac{\sqrt{2}}{2} \\ s_4=-j\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

s_1، s_2، s_3 و s_4 فرکانسهای طبیعی غیر صفر شبکه می‌باشند و با توجه به شکل اصلی:

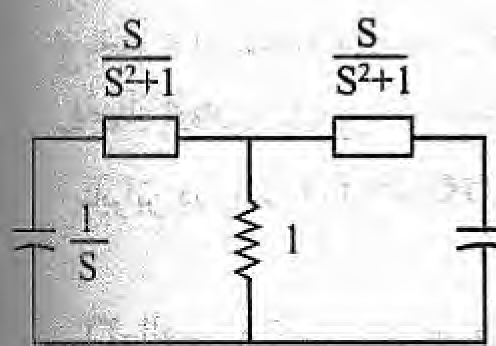
$4=5-1=$ تعداد فرکانسهای طبیعی غیر صفر ← { $5=7-2-0=$ تعداد فرکانسهای طبیعی، $1=$ تعداد کات ست های خازنی، $0=$ تعداد حلقه‌های سلفی } { $7=$ تعدادعناصرذخیره‌کننده‌انرژی، $2=$ تعداد حلقه های خازنی، $0=$ تعدادکات ست های سلفی }

بنابراین یک $S_5=0$ نیز وجود دارد. زیرا که :

تعداد فرکانسهای طبیعی غیرصفر - تعداد فرکانسهای طبیعی=تعدادفرکانسهای‌طبیعی‌صفر

$$=5-4=1$$

ب) با توجه به شکل مقابل از ماتریس می‌توان گفت:



$$Z=\begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+1}+1+\frac{1}{s} & -1 \\ -1 & \frac{s}{s^2+1}+1+\frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

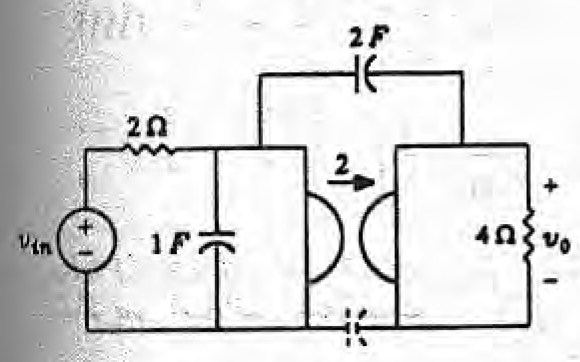
$$|Z|=0 \quad \rightarrow \quad 4s^5-4s^4+6s^3+4s^2+2s+1=0$$

$$s_{1,2}=0.814 \pm 1.245j \quad , \quad s_3=-0.477 \quad s_{4,5}=-0.076 \pm j\,0.481$$

۳۴-الف- در مدار نشان داده در شکل (مسالهٔ ۱۶-۳۴) تابع شبکهٔ $H(s)=\dfrac{V_o(s)}{V_{in}(s)}$ را تعیین و فرکانس های طبیعی شبکه را به دست آورید.

ب- اگر خازن دیگری به مقدار $2F$ را به طور موازی با مقاومت 4 اهمی قرار دهیم آیا می‌توانید بدون هیچ محاسبه‌ای راجع به فرکانس های طبیعی مدار مطلبی بگویید؟ بار دیگر فرکانس های طبیعی مدار را به دست آورید.

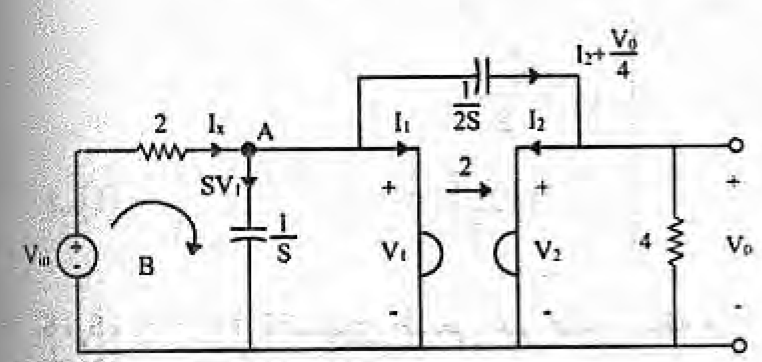
پ- اگر این خازن در محل مشخص شده با خط چین قرار داده شود بار دیگر قسمت (الف) را پاسخ دهید.



شکل (مسألهٔ ۱۶-۳٤)

حل :

الف) مطابق شکل جریانهای شاخه‌ها را روی آنها مشخص می‌نماییم :



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

از رابطهٔ فوق داریم: $V_2=V_0$

$$\begin{cases} V_1=2I_2 \\ V_0=-2I_1 \end{cases} \quad (*)$$

$$\left\{\begin{matrix} KCL\,(A): I_x = sV_1+I_1+I_2+\dfrac{V_0}{4} \\ KVL\,(B): V_{in}=2I_x+V_1 \end{matrix}\right\} \rightarrow V_{in}=2\left[I_1+I_2+\frac{V_0}{4}+sV_1\right]+V_1$$

I_1 و I_2 را برحسب V_0 و V_1 از روابط (*) جایگزین می‌کنیم:

$$V_{in}=2\left[-\frac{V_0}{2}+\frac{V_1}{2}+\frac{V_0}{4}+sV_1\right]+V_1 \qquad (I)$$

از KVL بین خازن 2F و ژیراتور داریم:

$$V_1-V_0=\frac{1}{2s}\left[I_2+\frac{V_0}{4}\right]$$

V_1 برحسب V_0 را در رابطه (I) جایگزین می‌کنیم:

$$\rightarrow \quad V_1=V_0\,\frac{(8s+1)}{2(4s-1)} \quad \rightarrow$$

$$V_{in}=-\frac{V_0}{2}+(2+2s)\left[\frac{8s+1}{2(4s-1)}\right]V_0$$

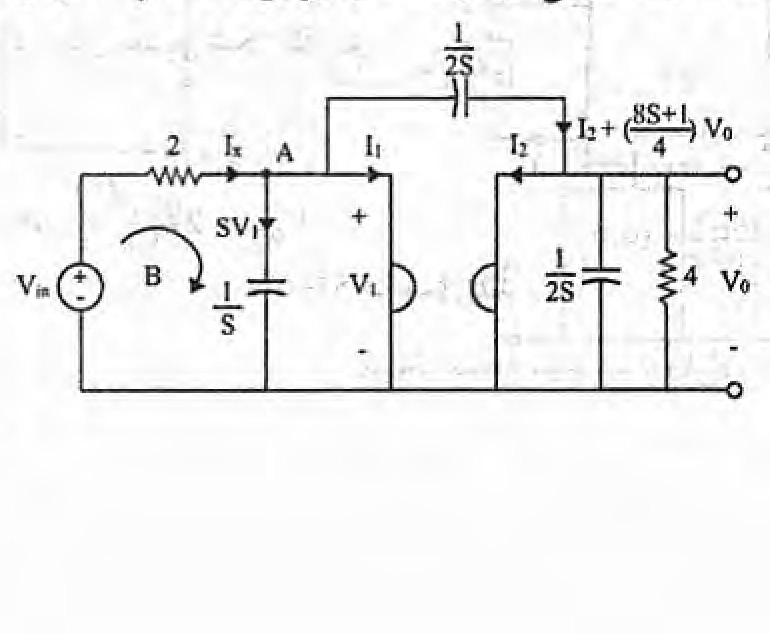
$$V_{in}=\frac{16s^2+14s+3}{2(4s-1)}V_0 \quad \rightarrow \quad \frac{V_0}{V_{in}}=\frac{2(4s-1)}{16s^2+14s+3}$$

فرکانسهای طبیعی عبارتند از:

$$16s^2+14s+3=0$$

$$s_1=-\frac{1}{2}\ , \quad s_2=-\frac{3}{8}$$

ب) در این صورت یک حلقه خازنی تشکیل می‌شود و تعداد فرکانسهای طبیعی برابر تعداد عناصر ذخیره کننده انرژی منهای یک عدد حلقهٔ خازنی موجود شده بنابراین تعداد فرکانسهای طبیعی 3-1=2 خواهد شد.



$$\begin{cases} V_1=2I_2 \\ V_0=-2I_1 \end{cases} \quad (*)$$

$$\begin{cases} KCL\ (A): I_x = sV_1 + I_1 + I_2 + \left(\frac{8s+1}{4}\right) V_0 \\ KVL\ (B): V_{in} = 2I_x + V_1 \end{cases} \rightarrow$$

$$V_{in} = 2\left[sV_1 + I_1 + I_2 + \left(\frac{8s+1}{4} V_0\right) \right] + V_1$$

باز I_1 و I_2 را برحسب V_0 و V_1 از روابط (*) جایگزین می‌کنیم:

$$V_{in} = 2\left[sV_1 - \frac{V_0}{2} + \frac{V_1}{2} + \frac{(8s+1)}{4} V_0 \right] + V_1 \qquad (I)$$

باز از KVL بین خازن 2F بالایی و ژیراتور داریم:

$$V_1 - V_0 = \frac{1}{2s}\left[I_2 + \frac{8s+1}{4} V_0 \right] \rightarrow V_1 = \frac{16s+1}{2(4s-1)} V_0$$

V_1 برحسب V_0 در رابطهٔ (I) جایگذین می‌کنیم:

$$V_{in} = (2s+2)\frac{(16s+1)}{2(4s-1)} V_0 + \left[\frac{8s+1}{2} - 1\right] V_0$$

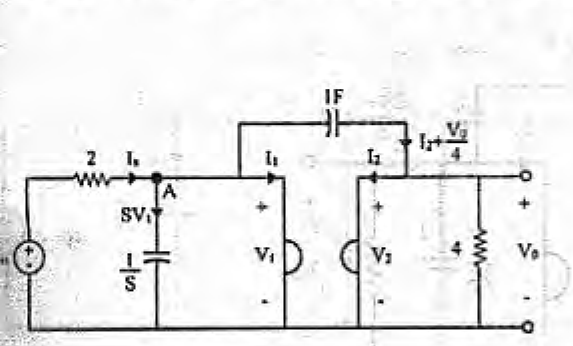
$$V_{in} = \frac{32s^2 + 11s + 1.5}{4s-1} V_0 \rightarrow \frac{V_0}{V_{in}} = \frac{4s-1}{32s^2 + 11s + 1.5}$$

فرکانسهای طبیعی عبارتند از:

$$32s^2 + 11s + 1.5 = 0$$

$$s_{1,2} = -\frac{11}{64} \pm j\frac{\sqrt{71}}{64}$$

پ- در این حالت خازن 2F بالایی و 2F پایینی با همدیگر سری می‌گردند و می‌توان معادل آنها به اندازه 1F جایگزین نمود. حال مطابق شکل داریم:



$$\begin{matrix} V_1 = 2I_2 \\ V_0 = -2I_1 \end{matrix} \quad (*)$$

$$\begin{cases} KCL\ (A) : I_x = sV_1 + I_1 + I_2 + \dfrac{V_0}{4} \\ KVL\ (B) : V_{in} = 2I_x + V_1 \end{cases} \rightarrow \quad V_{in} = 2\left[I_1 + I_2 + \frac{V_0}{4} + sV_1 \right] + V_1$$

I_1 و I_2 را برحسب V_0 و V_1 از روابط (*) جایگزین می‌کنیم:

$$V_{in} = 2\left[-\frac{V_0}{2} + \frac{V_1}{2} + \frac{V_0}{4} + sV_1 \right] + V_1 \quad (I)$$

از KVL بین خازن 1F و ژیراتور داریم:

$$V_1 - V_0 = \frac{1}{s}\left[I_2 + \frac{V_0}{4} \right]$$

$$V_1 = V_0 \left(\frac{4s+1}{2(2s-1)} \right)$$

V_1 را برحسب V_0 در رابطهٔ I جایگزین می‌کنیم:

$$V_{in} = -\frac{V_0}{2} + (2+2s)\left(\frac{4s+1}{2(2s-1)} \right) V_0$$

$$V_{in} = \frac{8s^2+8s+3}{2(2s-1)} V_0 \quad \rightarrow \quad \frac{V_0}{V_{in}} = \frac{2(2s-1)}{8s^2+8s+3}$$

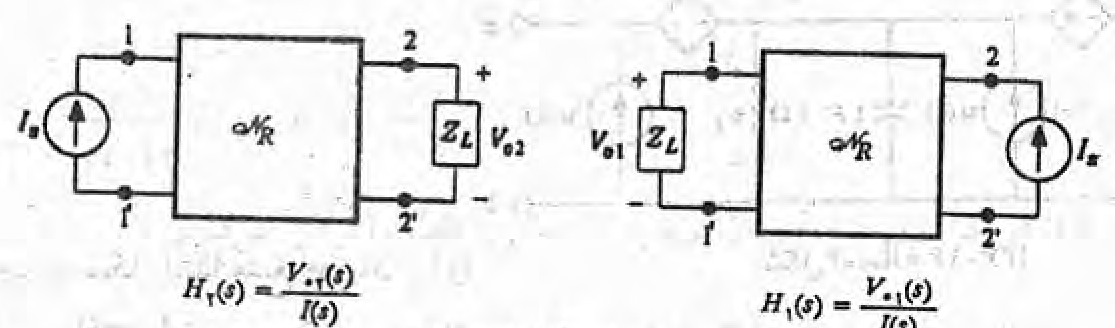
فرکانسهای طبیعی عبارتند از:

$$8s^2+8s+3=0 \quad s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{8}}{8}$$

۳۵- دانشجویی برای یک مدار $\mathcal{N}_R$ دو تابع شبکه به صورت زیر تعریف می‌کند:

الف- او ادعا می‌کند که $H_1(s)=H_2(s)$. ادعای او را ثابت یا نقض کنید.

ب- اگر ادعای او درست نباشد تحت چه شرایطي ادعای او می‌تواند درست باشد؟



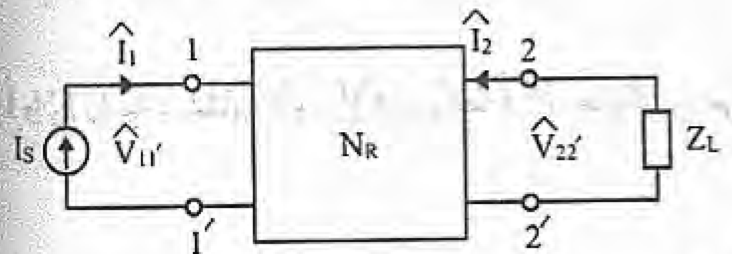
شکل (مسألهٔ ۱۶-۳۵)

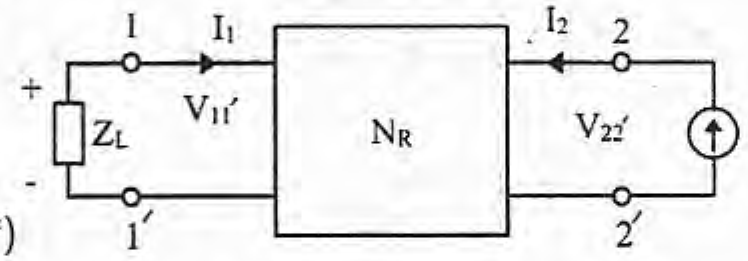
حل:

الف) برای اینکه $H_2(s)=H_1(s)$ باشد باید داشته باشیم:

$$\frac{V_{01}(s)}{I(s)}=\frac{V_{01}(s)}{I(s)} \quad \rightarrow \quad V_{02}(s)=V_{01}(s)$$

حال بنا به قضیه تلگان داریم:(مطابق شکل)





$$\hat{V}_{11'}I_1+\hat{V}_{22'}I_2=V_{11'}\hat{I}_1+V_{22'}\hat{I}_2$$

$$\hat{V}_{11'}\left(-\frac{V_{11'}}{Z_L}\right)+\hat{V}_{22'}I_s=V_{11'}I_s+V_{22'}\left(-\frac{\hat{V}_{22'}}{Z_L}\right)(*)$$

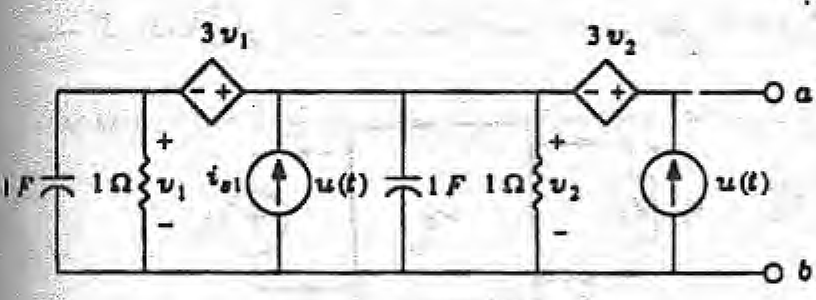
حال اگر با توجه به رابطهٔ (*) $\hat{V}_{22'}V_{22'}\neq\hat{V}_{11'}V_{11'}$ باشد آنگاه $\hat{V}_{22'}\neq V_{11'}$ خواهد بود و در نتیجه $\frac{\hat{V}_{22'}}{I_s}\neq\frac{\hat{V}_{11'}}{I_s}$ خواهد بود بنابراین $H_1(s)\neq H_2(s)$ خواهد بود.

ب- این ادعا در حالتی صحیح است که آزمایش را با بار $Z_L=\infty$ انجام دهد و یا اینکه $\hat{V}_{22'}V_{22'}=\hat{V}_{11'}V_{11'}$ باشد آنگاه با توجه به رابطهٔ (*) داریم:

$$\hat{V}_{22'}I_s=V_{11'}I_s \quad \rightarrow \quad \frac{\hat{V}_{22'}}{I_s}=\frac{V_{11'}}{I_s} \quad \rightarrow \quad H_1(s)=H_2(s)$$

۳۶-الف- مدار معادل تونن در سرهای a و b مدار نشان داده شده در شکل (مسالهٔ ۱۶-۳۶) را با به کارگیری جمع آثار تعیین کنید (حالت اولیه مدار صفر است).

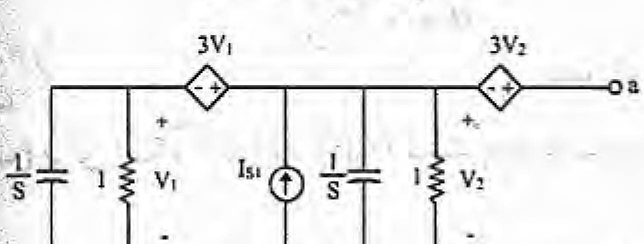
ب- به جای منبع جریان I_{s1} چه منبع ولتاژی در مدار فوق باید قرار گیرد تا مدارمعادل تونن دیده شده در سرهای a و b تغییر نکند؟



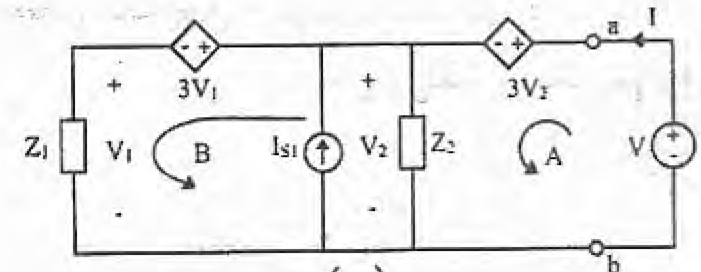
شکل (مسألهٔ ۱۶-۳۶)

حل:

الف) با توجه به شکل ابتدا منبع جریان i_{s1} را در نظر می‌گیریم $I_{s2}=0$ فرض می‌کنیم، بعد از ساده نمودن مقاومت های موازی بنا به شکل (ب) خواهیم داشت:



(الف)

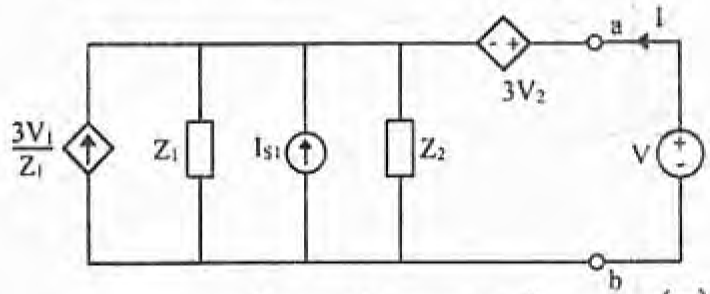


(ب)

$$z_1 = 1 \parallel \frac{1}{S} = \frac{1}{S+1}$$

$$z_2 = 1 \parallel \frac{1}{S} = \frac{1}{S+1}$$

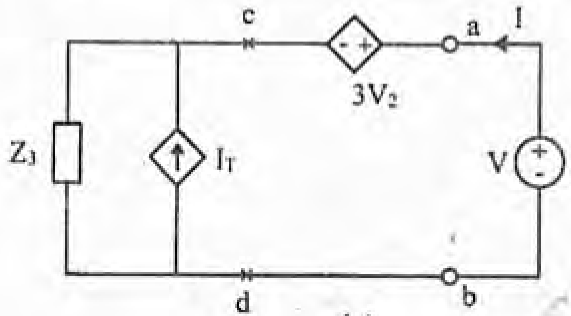
$$\begin{Bmatrix} KVL\,(A) : V = 3V_2 + V_2 = 4V_2 \\ KVL(B) : V_2 = 3V_1 + V_{1 = 4V_1} \end{Bmatrix} \rightarrow V = 16\,V_1 \rightarrow \begin{cases} V_1 = \dfrac{1}{16}\ V \\ V_2 = \dfrac{1}{4} V \end{cases} \quad (I)$$



(ج)

مطابق شکل (ج) امپدانس Z_1 موازی Z_2 می‌باشد و دو منبع جریان با همدیگر جمع میشوند و شکل (د) حاصل می‌شود.

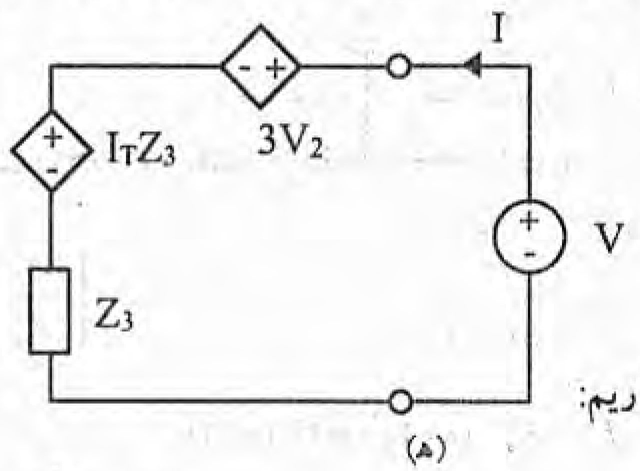
$$Z_3 = Z_1 \parallel Z_2 = \frac{1}{2(s+1)} \qquad (II)$$



(د)

$$I_T = \frac{3V_1}{Z_1} + I_{s1} = 3V_1(s+1) + I_{s1} \qquad (III)$$

معادل تونن از دید دو سر c و d را پیدا می‌کنیم (شکل (هـ))



(ه)

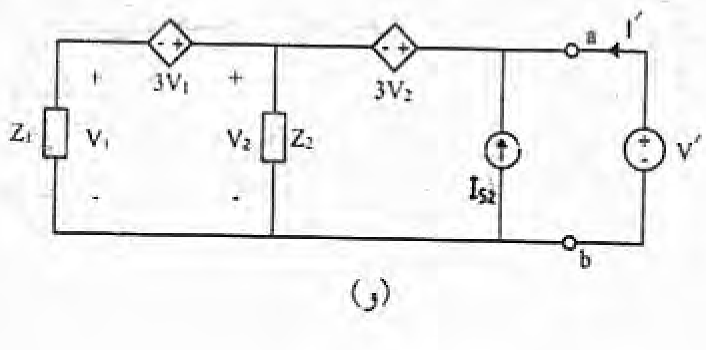
حال داریم:

$$V = 3V_2 + Z_3 I_T + Z_3 I \quad \xrightarrow{(I),(II),(III)}$$

$$V = 3 \times \frac{1}{4}\ V + \frac{1}{2(s+1)} \times \left[3 \times \frac{V}{16}\ (s+1) + I_{s1} \right] + \frac{1}{2(s+1)} \times I$$

$$V = \frac{3.2\ I_{s1}}{(s+1)} + \frac{3.2}{(s+1)}\ I \rightarrow E_{oC} = \frac{3.2}{s+1}\ I_{s1} \qquad (a)$$

حال $I_{s1} = 0$ فرض کرده و منبع جریان موجود در مدار را فقط I_{s2} فرض می‌کنیم:

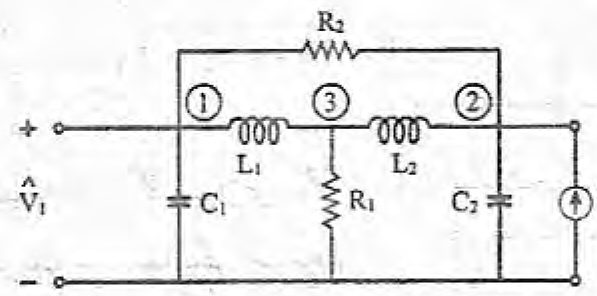


(و)

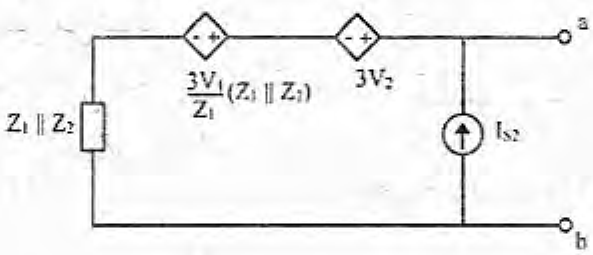
مطابق شکل (و) داریم:

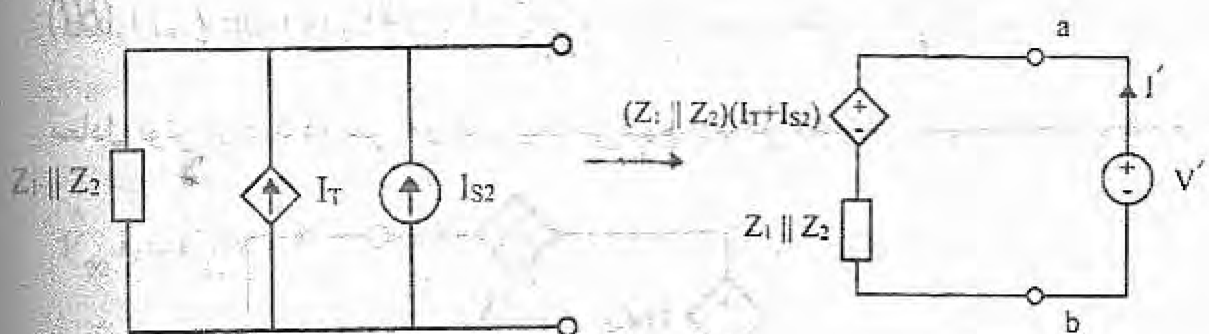
$$\begin{Bmatrix} V_2 = 3V_1 + V_1 = 4V_1 \\ V' = 3V_2 + V_2 = 4V_2 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{cases} V_1 = \frac{1}{16}\ V' \\ V_2 = \frac{1}{4}\ V' \end{cases}$$

اکنون با توجه به شکلهای زیر داریم:



(ز)





$$Z_1 \parallel Z_2 = \frac{1}{2(s+1)} \qquad , \qquad I_T = \left(\frac{3V_1}{Z_1}\ (Z_1 \parallel Z_2) + 3V_2\right)\frac{1}{Z_1 \parallel Z_2}$$

$$\rightarrow \quad I_T = 3V_1(s+1) + 6V_2(s+1) \quad \rightarrow \quad I_T = \frac{27}{16}\ (s+1)V'$$

$$V' = \frac{1}{2(s+1)}\ \left(\frac{27}{16}\ (s+1)V' + I_{s2}\right) + \frac{1}{2(s+1)}\ I'$$

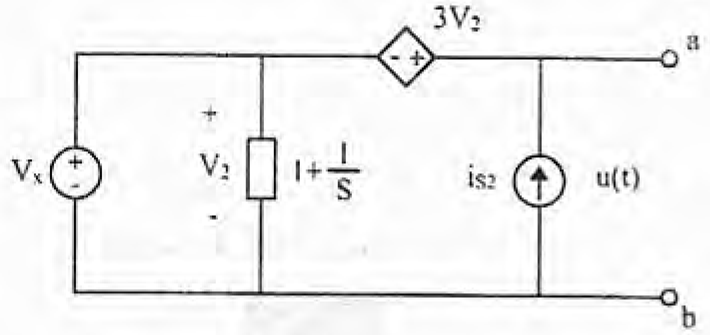
$$V' = \frac{3.2}{s+1}\ I_{s2} + \frac{3.2}{s+1}\ I' \quad \rightarrow \quad E'_{oC} = \frac{3.2}{s+1}\ I_{s2} \qquad (b)$$

بنا به (a) و (b) و خاصیت جمع آثار داریم:

$$V_{th} = \frac{3.2}{s+1}\ (I_{s1} + I_{s2}) \qquad , \qquad Z_{th} = \frac{V}{I}\ \Big|_{I_{s1}=0} = \frac{3.2}{s+1}$$

ب) اگر به جای i_{s1} از منبع ولتاژ V_x استفاده نماییم، مطابق شکل چون منبع ولتاژ V_x بصورت موازی با قسمت چپ قرار می‌گیرد، می‌توان از قسمت چپ صرف نظر نمود و شکل زیر حاصل می‌شود.

بنا به قضیهٔ جمع آثار ابتدا $V_x=0$ در نظر می‌گیریم و اثـر منبع جریان i_{s2} را در خروجی پیدا می‌کنیم.



$$\left\{\begin{array}{l} V_x=0 \quad \rightarrow \quad V_2=0 \\ V_{ab_1}=3V_2+V_2 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad V_{ab_1}=0$$

اکنون $i_{s2}=0$ در نظر می‌گیریم و اثر V_x را محاسبه می‌کنیم: .

$$\left\{\begin{array}{l} V_{ab_2}=4V_2 \\ V_2=V_x \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad V_{ab_2}=4V_x$$

بنا به قضیه جمع آثار:

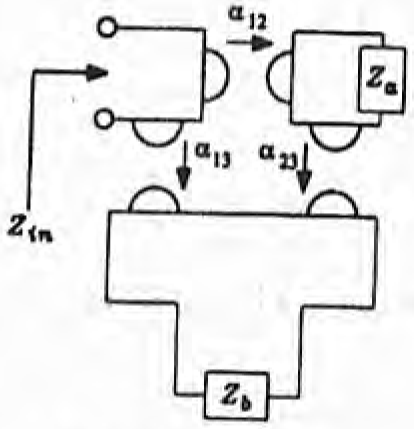
$$V_{ab}=V_{ab_1}+V_{ab_2}=0+4V_x=4V_x$$

$$Z_{th}=0 \quad , \quad E_{oC}=4V_x$$

باتوجه به اینکه Z_{th} در این حالت صفر است بنابراین مدار معادل تونن در این حالت را نمی‌توان مساوی

با حالت قبل توسط فقط V_x تولید نمود.

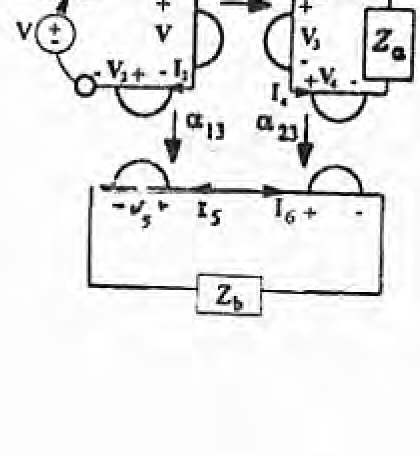
۳۷- در مدار نشان داده در شکل (مسالهٔ ۱۶-۳۷) امپدانس ورودی Z_{in} را حساب کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۶-۳۷)

حل:

روابط بین سه ژیراتور مطابق شکل عبارتند از:



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} \\ -\alpha_{12} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_3 \end{bmatrix} \rightarrow \left\{\begin{array}{ll} V_1=\alpha_{12}I_3 & (a) \\ V_3=-\alpha_{12}I_1 & (b) \end{array}\right.$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ V_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \alpha_{13} \\ \alpha_{13} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_2 \\ I_5 \end{bmatrix} \rightarrow \left\{\begin{array}{ll} V_2=\alpha_{13}I_5 & (c) \\ V_5=-\alpha_{13}I_2 & (d) \end{array}\right.$$

$$\begin{bmatrix} V_4 \\ V_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{23} \\ -\alpha_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 \\ I_6 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} V_4 = \alpha_{23} I_6 & (e) \\ V_6 = -\alpha_{23} I_4 & (f) \end{cases}$$

$$I_1 = I_2 = I \qquad (g)$$

$$I_3 = I_4 \qquad (h)$$

$$I_5 = -I_6 \qquad (i)$$

از روابط KVL داریم:

$$I_3 = -\frac{V_3 + V_4}{Z_a} \qquad (j)$$

$$I_6 = \frac{V_5 - V_6}{Z_b} \qquad (k)$$

$$V = V_1 + V_2 \qquad (L)$$

از رابطهٔ اخیر سعی می‌کنیم V را فقط برحسب I پیدا کنیم در نتیجه $Z_{in} = \frac{V}{I}$ خواهد شد.

$$V \overset{(L)}{=} V_1 + V_2 \underset{(c)}{\overset{(a)}{=}} \alpha_{12} I_3 + \alpha_{13} I_5 \overset{(i)}{=} \alpha_{12} I_3 - \alpha_{13} I_6 \qquad (*)$$

$$\left.\begin{cases} (b),(e),(j) \rightarrow I_3 = \dfrac{\alpha_{12} I_1 - \alpha_{23} I_6}{Z_a} \overset{(g)}{\rightarrow} I_3 = \dfrac{\alpha_{12} I - \alpha_{23} I_6}{Z_a} \\ (f),(d),(k) \rightarrow I_6 = \dfrac{-\alpha_{13} I_2 + \alpha_{23} I_4}{Z_b} \overset{(g),(h)}{\rightarrow} I_6 = \dfrac{-\alpha_{13} I + \alpha_{23} I_3}{Z_b} \end{cases}\right\} \rightarrow$$

$$I_6 = \frac{-Z_a \alpha_{13} + \alpha_{23}\alpha_{12}}{Z_a Z_b + (\alpha_{23})^2} I \quad , \quad I_3 = \frac{\alpha_{12} Z_b + \alpha_{23} \alpha_{13}}{Z_a Z_b + \alpha_{23}^2} I$$

با جایگذاری I_3 و I_6 در رابطهٔ (*) داریم:

$$V = \left[\alpha_{12} \frac{\alpha_{12} Z_b + \alpha_{23}\alpha_{13}}{Z_a Z_b + \alpha_{23}^2} - \alpha_{13} \frac{-Z_a \alpha_{13} + \alpha_{23}\alpha_{12}}{Z_a Z_b + \alpha_{23}^2} \right] I$$

$$Z_{in} = \frac{V}{I} = \frac{\alpha_{12}^2 Z_b + \alpha_{13}^2 Z_a}{Z_a Z_b + \alpha_{23}^2}$$