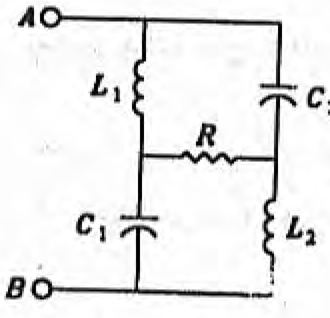
تشریح مسایل نظریه اساسی مدارها و شبکه ها

۱۵

توابع شبکه

۱۵

توابع شبکه



شکل (مسألهٔ ۱۵-۱)

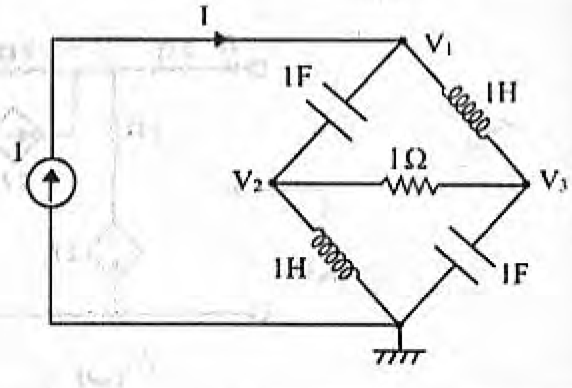
۱-الف- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۵-۱) برای $L_1=L_2=C_1=C_2=R=1$، امپدانس دیده شده در سرهای A و B چیست؟

ب- اگر $L_1=L_2=L$ و $C_1=C_2=C$، چه رابطه‌ای میان L، C و R باید برقرار باشد تا امپدانس دیده شده در سرهای A و B معادل مقاومت R باشد؟

حل:

الف)

از تجزیه و تحلیل گره داریم:



$$\begin{pmatrix} s+\frac{1}{s} & -s & -\frac{1}{s} \\ -s & s+\frac{1}{s}+1 & -1 \\ -\frac{1}{s} & -1 & s+\frac{1}{s}+1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z_{in}=\frac{V_1}{I}=\frac{\begin{vmatrix} s+\frac{1}{s}+1 & -1 \\ -1 & s+\frac{1}{s}+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+\frac{1}{s} & -s & -\frac{1}{s} \\ -s & s+\frac{1}{s}+1 & -1 \\ -\frac{1}{s} & -1 & s+\frac{1}{s}+1 \end{vmatrix}}=\frac{s^4+2s^3+2s^2+2s+1}{s^4+2s^3+2s^2+2s+1}$$

ب)

$$\Rightarrow \quad Z_{in}=1$$

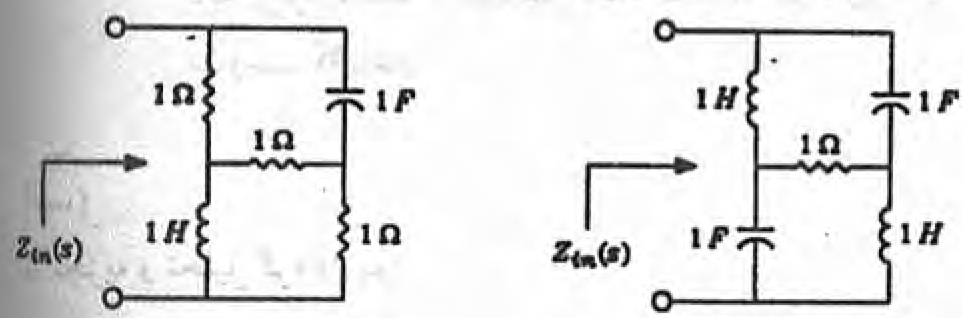
$$\begin{bmatrix} Cs+\frac{1}{Ls} & -Cs & -\frac{1}{Ls} \\ -Cs & Cs+\frac{1}{Ls}+R & -R \\ -\frac{1}{Ls} & -R & Cs+\frac{1}{Ls}+R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Z_{in}=\frac{V_1}{I}=\frac{\begin{vmatrix} Cs+\frac{1}{Ls}+1 & -R \\ -R & Cs+\frac{1}{Ls}+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Cs+\frac{1}{Ls} & -Cs & -\frac{1}{Ls} \\ -Cs & Cs+\frac{1}{Ls}+R & -R \\ -\frac{1}{Ls} & -R & Cs+\frac{1}{Ls}+R \end{vmatrix}} \equiv R$$

بعد از ساده نمودن طرف اول خواهیم داشت: $R \equiv \frac{L}{RC}$

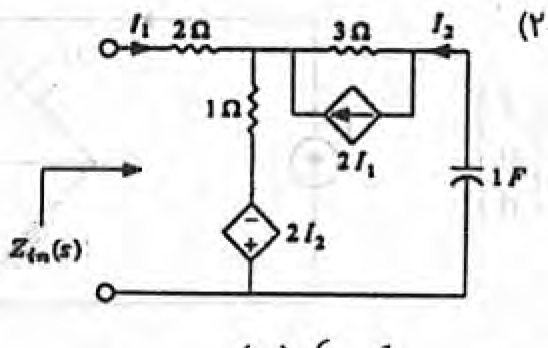
یعنی : $R^2=\frac{L}{C}$

۲- امپدانس ورودی مدارهای شکل (مسالهٔ ۱۵-۲) را تعیین کنید.



(ب) (الف)

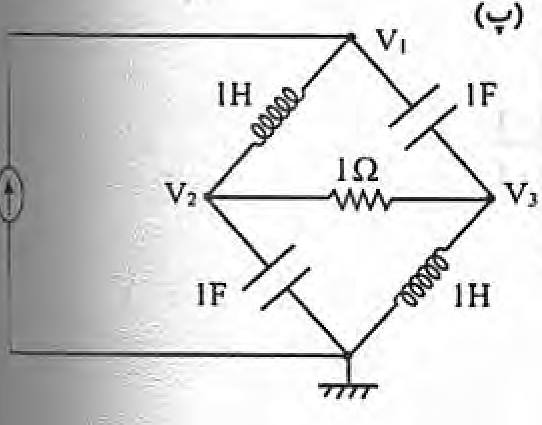
شکل (مسالهٔ ۱۵-۲)



(پ)

حل:

الف- با توجه به تجزیه و تحلیل گره داریم:



$$\begin{bmatrix} s+\frac{1}{s} & -s & -\frac{1}{s} \\ -s & s+\frac{1}{s}+1 & -1 \\ -\frac{1}{s} & -1 & s+\frac{1}{s}+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Z_{in}=\frac{V_1}{I}=\frac{\begin{vmatrix} s+\frac{1}{s}+1 & -1 \\ -1 & s+\frac{1}{s}+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+\frac{1}{s} & -s & -\frac{1}{s} \\ -s & s+\frac{1}{s}+1 & -1 \\ -\frac{1}{s} & -1 & s+\frac{1}{s}+1 \end{vmatrix}}=1$$

ب) با توجه به برقرار بودن پل وتستون از شاخهٔ وسطی جریان عبور نمی‌کند بنابراین مقاومت 1 اهمی تاثیری در امپدانس ورودی ندارد و داریم:

$$Z_{in}=(1+s)\ \|\ \left(1+\frac{1}{s}\right)=(1+s)\ \|\ \left(\frac{s+1}{s}\right)=\frac{\frac{(s+1)^2}{s}}{\frac{s^2+s+s+1}{s}}=1$$

پ- $(KVL)\ V_1=2I_1+I_1+I_2-2I_2$

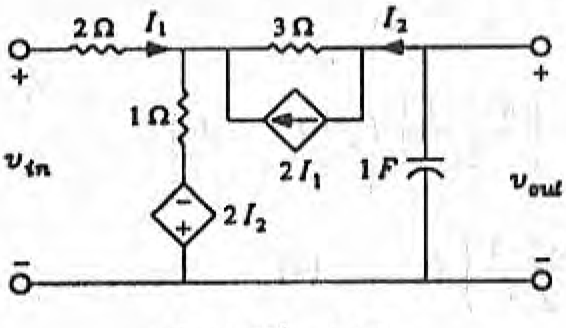
$$V_1=3I_1-I_2 \qquad (a)$$

$$(KVL)\ \frac{I_2}{s}+3\ (I_2-2I_1)\ +I_1+I_2-2I_2=0$$

$$\Rightarrow\ I_2=\frac{5s}{2s+1}\ I_1 \qquad (b)$$

$$(a),(b)\ \Rightarrow\ Z_{in}=\frac{V_1}{I_1}=\left(3-\frac{5s}{2s+1}\right)=\frac{s+3}{2s+1}$$

۳-تابع شبکهٔ انتقال ولتاژ مدار شکل (مسالهٔ ۱۵-۳) را تعیین کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۵-۳)

حل:

$$(KVL)\ V_{in}=2I_1+I_1+I_2-2I_2=3I_1-I_2 \quad (a)$$

$$(KVL)\ \frac{I_2}{s}+3\ (I_2-2I_1)\ +I_1+I_2-2I_2=0\ \Rightarrow\ I_2=\frac{5s}{2s+1}\ I_1 \quad (b)$$

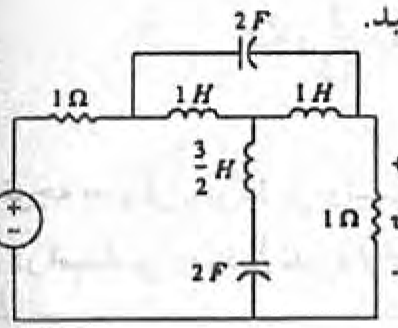
$$V_{in}=\left(3-\frac{5s}{2s+1}\right)I_1\ \Rightarrow\ I_1=\frac{2s+1}{s+3}\ V_{in} \quad (c)$$

$$(b),(c)\ \Rightarrow\ I_2=\frac{5s}{s+3}\ V_{in} \quad (d)$$

$$(KVL)\quad V_{out}=3I_2-6I_1-2I_1+V_{in}=3I_2-8I_1+V_{in}\quad (e)$$

$$(b),(c),(d),(e)\quad\Rightarrow\quad V_{out}=\left(\frac{15s}{s+3}-\frac{16s+8}{s+3}+1\right)V_{in}\quad \frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{-5}{s+3}$$

۴-تابع شبکهٔ انتقال ولتاژ را مدار شکل (مسالهٔ ۱۵-۴) حساب کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۵-٤)

حل:

باید $\frac{V_2(s)}{V_1(s)}$ را محاسبه نماییم. از تجزیه و تحلیل مش داریم:

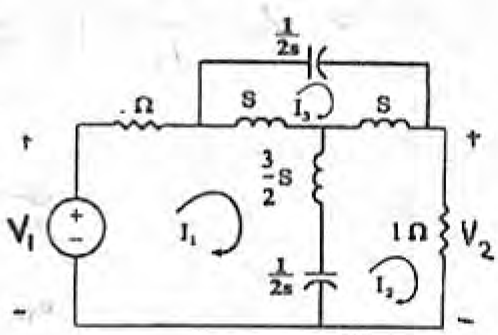
$$\begin{bmatrix} 1+\frac{5}{2}s+\frac{1}{2s} & -\frac{3}{2}s-\frac{1}{2s} & -s \\ -\frac{3}{2}s-\frac{1}{2s} & 1+\frac{5}{2}s+\frac{1}{2s} & -s \\ -s & -s & 2s+\frac{1}{2s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

از رابطهٔ ماتریسی بالا I_1 و I_3 را حذف می‌نماییم، تا معادله‌ای برحسب V_1 و I_2 بدست آید.

$$\left(\frac{2s+5s^2+1}{2s}\right)I_1-\left(\frac{3s^2+1}{2s}\right)I_2-\frac{2s^2}{2s}I_3=V_1\qquad (a)$$

$$-\left(\frac{3s^2+1}{2s}\right)I_1+\left(\frac{5s^2+2s+1}{2s}\right)I_2-\frac{2s^2}{2s}I_3=0\qquad (b)$$

$$-\left(\frac{2s^2}{2s}\right)I_1-\left(\frac{2s^2}{2s}\right)I_2+\left(\frac{4s^2+1}{2s}\right)I_3=0\qquad (c)$$



$$(c)\quad\rightarrow\quad I_1=-I_2+\left(\frac{4s^2+1}{2s^2}\right)I_3\qquad (d)$$

با جایگذاری I_1 در رابطهٔ (b) داریم:

$$I_3=\frac{4s^2}{4s^2-s+1}I_2\qquad (e)$$

با جایگذاری I_3 در رابطهٔ (d) داریم:

$$I_1=\frac{4s^2+s+1}{4s^2-s+1}I_2\qquad (f)$$

I_3 و I_1 را از روابط (e)، (f) در رابطهٔ (a) جایگزین می‌کنیم:

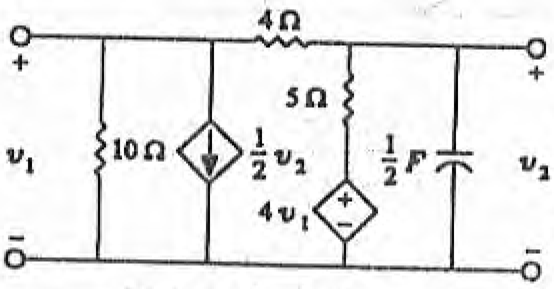
$$\left(5s^2+2s+1\right)\frac{\left(4s^2+s+1\right)}{4s^2-s+1}I_2-\left(3s^2+1\right)I_2-2s^2\left(\frac{4s^2}{4s^2-s+1}\right)I_2=2sV_1$$

$$V_1=\frac{8s^2+2s+2}{4s^2-s+1}\ I_2 \quad (*)$$

ولی با توجه به شکل $V_2=1\times I_2$ بنابراین با توجه به رابطهٔ $(*)$ داریم:

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{4s^2-s+1}{8s^2+2s+2}$$

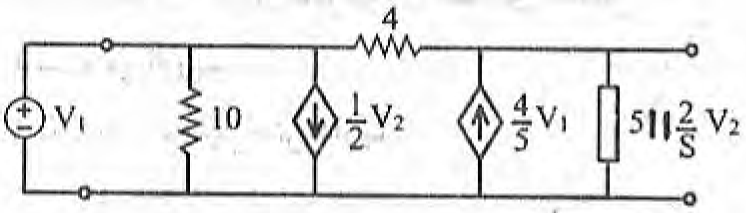
۵- تابع شبکهٔ $H(s)=\dfrac{V_2(s)}{V_1(s)}$ را برای مدار شکل (مسألهٔ ۱۵-۵) تعیین کنید. آیا می‌توان به جای این مدار، یک مدار پسیو RC یا RL ساده بدون منابع وابسته قرار داد؟ در صورت مثبت بودن پاسخ این کار را انجام دهید و گرنه دلیل لازم را بیان کنید.

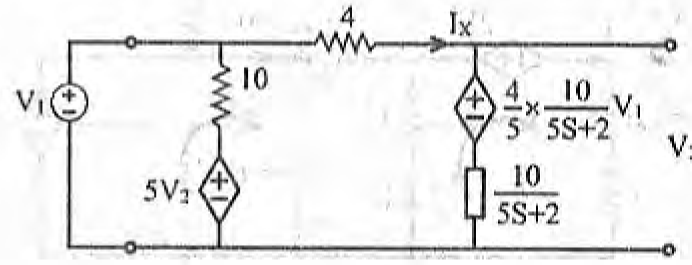


شکل (مسألهٔ ۱۵-۵)

حل:

شاخهٔ دارای منبع ولتاژ وابسته را به معادل نرتن تبدیل می‌کنیم تا شکل (الف) حاصل شود.





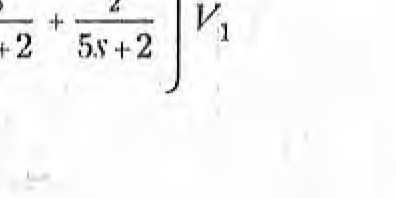
$$I_x=\frac{V_1-V_2}{4} \quad\rightarrow\quad V_2=\frac{8}{5s+2}\ V_1+\frac{10}{5s+2}\times\frac{V_1-V_2}{4}$$

$$V_2\left[1+\frac{\frac{5}{2}}{5s+2}\right]=\left[\frac{8}{5s+2}+\frac{\frac{5}{2}}{5s+2}\right]V_1$$

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{21}{10s+9} \qquad (I)$$

خیر: مثال نقض می‌آوریم:

فرض می‌کنیم مدار مقابل موجود باشد.



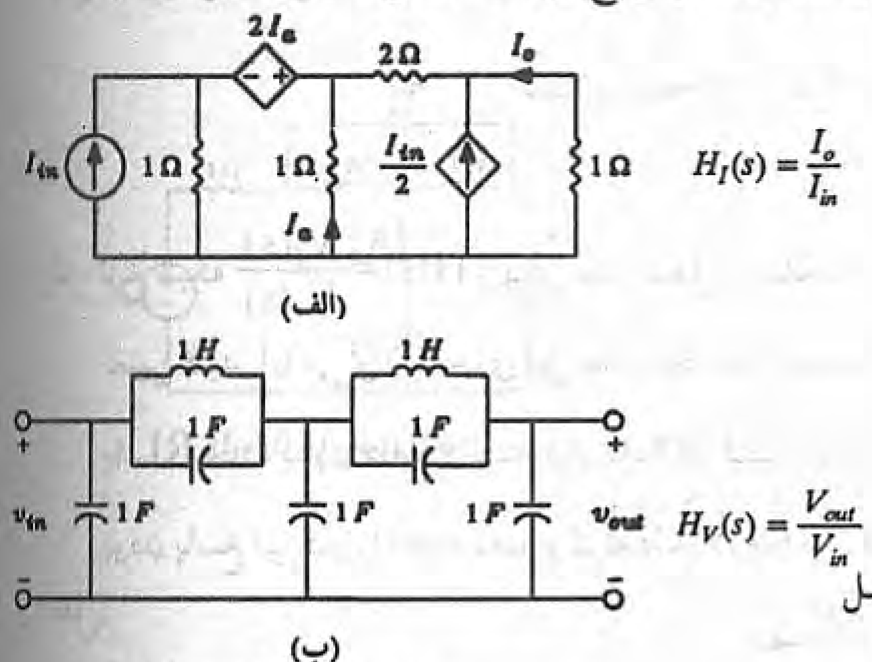
$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{1}{Cs}+R}=\frac{1}{RCs+1}$$

حال از رابطهٔ (I) داریم:

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{21}{9}\ \frac{1}{\frac{10}{9}s+1}$$

با توجه به دو رابطهٔ فوق مشخص می‌شود که ضریب $\frac{21}{9}$ را نمی‌توان توسط مدار RC یا RL بدون منبع وابسته تولید نمود.

۶– برای مدارهای نشان داده شده در شکل (مسالهٔ ۱۵-۶) توابع شبکهٔ مشخص شده را تعیین کنید.

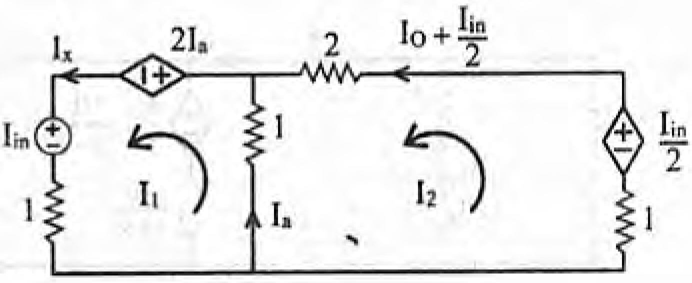


شکل (مسالهٔ ۱۵-۶)

حل:

الف) معادل تونن طرفین را مطابق شکل بدست می‌آوریم:

از تجزیه و تحلیل مش داریم:



$$\begin{bmatrix} 1+1 & -1 \\ -1 & 2+1+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2I_a - I_{in} \\ \frac{I_{in}}{2} \end{bmatrix} \quad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} I_1 - I_2 = I_a \\ I_2 = I_o + \frac{I_{in}}{2} \quad (I) \end{array}\right\} \rightarrow I_1 = I_a + I_o + \frac{I_{in}}{2} \quad (II)$$

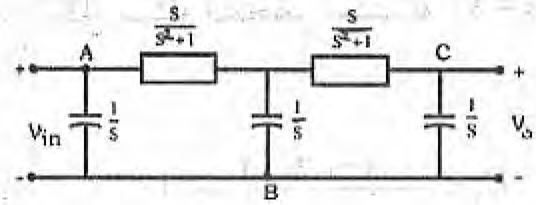
با جایگذاری I_1 و I_2 از روابط (I) و (II) در (*) داریم:

$$\begin{cases} 4I_a + I_o + \frac{3}{2} I_{in} = 0 \\ -I_a + 3I_o + I_{in} = 0 \end{cases}$$

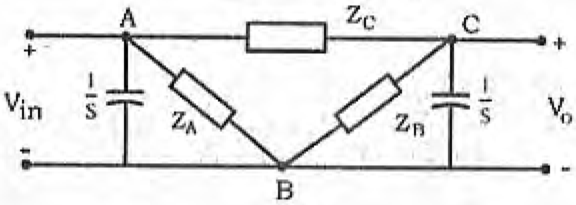
با حذف I_a از دو معادله بالا داریم:

$$13I_o + \frac{11}{2} I_{in} = 0 \quad \rightarrow \quad H_I(s) = \frac{I_o}{I_{in}} = -\frac{11}{26}$$

ب) با توجه به شکل مقابل اتصال ستاره بین نقاط A و B و C را به اتصال مثلث تبدیل می‌کنیم بنابراین داریم:



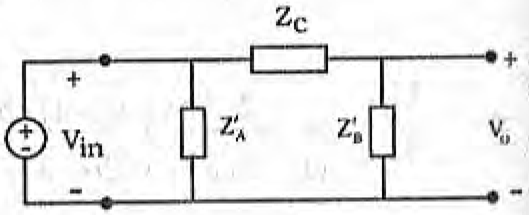
$$Z_A=Z_B=\frac{\frac{s}{s^2+1}\times\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+1}\times\frac{1}{s}+\left(\frac{s}{s^2+1}\right)^2}{\frac{s}{s^2+1}}$$



$$Z_C=\frac{\frac{s}{s^2+1}\times\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+1}\times\frac{1}{s}+\left(\frac{s}{s^2+1}\right)^2}{\frac{1}{s}}$$

$$Z_A=Z_B=\frac{3s^2+2}{s\left(s^2+1\right)}\qquad,\qquad Z_C=\frac{3s^3+2s}{\left(s^2+1\right)^2}$$

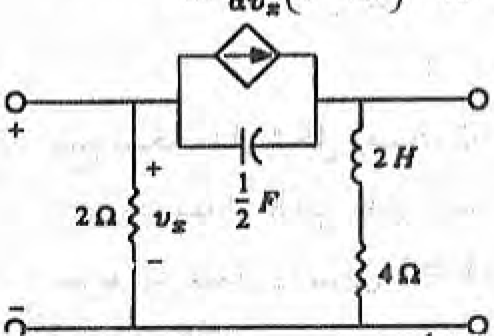
$$Z_B'=Z_A'=Z_A\parallel\frac{1}{s}\qquad\Rightarrow$$



$$V_o=V_{in}\frac{Z_B'}{Z_C+Z_B'}\qquad\rightarrow\qquad\frac{V_o}{V_{in}}=\frac{Z_B'}{Z_C+Z_B'}$$

$$H_V(s)=\frac{V_o}{V_{in}}=\frac{\left(s^2+1\right)^2}{\left(s^2+1\right)^2+s^2\left(4s^2+3\right)}=\frac{\left(s^2+1\right)^2}{5s^4+5s^2+1}$$

۷- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۵-۷) مقدار α چقدر باشد تا مدار دارای امپدانس انتقالی مستقل از فرکانس باشد؟



شکل (مسألهٔ ۱۵-۷)

حل:

بنابه تعریف امپدانس انتقال برابر $\left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0}$ است لذا از تجزیه و تحلیل گره داریم:

$$\begin{pmatrix} I_1-\alpha V_x \\ 0+\alpha V_x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{s}{2} & -\frac{s}{2} \\ -\frac{s}{2} & \frac{s}{2}+\frac{1}{2s+4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

$$(I_1-\alpha V_x)=\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\right)v_1-\frac{s}{2}v_2\qquad(a)$$

$$\alpha V_x=\left(-\frac{s}{2}\right)V_1+\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2s+4}\right)V_2\qquad(b)$$

با توجه به شکل مسئله مشخص است که $V_1 = V_x$ می‌باشد.

$$(b) \quad \Rightarrow \quad V_1\left(\alpha+\frac{s}{2}\right)=\frac{s(s+2)+1}{2s+4}V_2 \quad \Rightarrow \quad V_1=\frac{s^2+2s+1}{(2\alpha+s)\ (s+2)}V_2 \qquad (c)$$

$$(a)\,,\,(c) \quad \Rightarrow \quad I_1+\frac{s}{2}\ V_2=\left(\frac{1+s}{2}+\alpha\right)V_1 \ \Rightarrow \ \frac{2}{1+2\alpha+s}\ I_1+\frac{s}{1+2\alpha+s}\ V_2 \qquad (d)$$

$$(c),(d) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{s^2+2s+1}{(s+2)(s+2\alpha)}-\frac{s}{1+2\alpha+s}\right)V_2=\frac{2}{1+2\alpha s}\ I_1$$

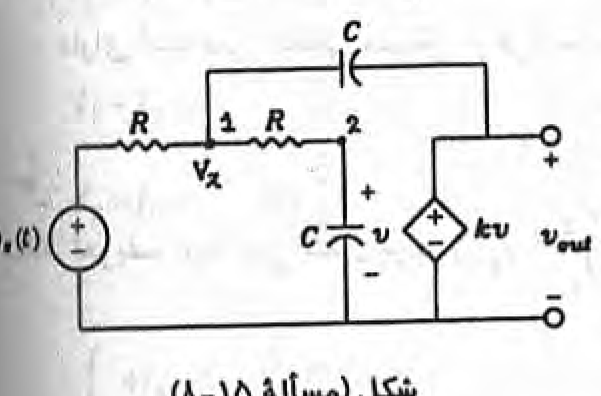
$$\Rightarrow \quad \frac{V_2}{I_1}=\frac{2s^2+s\,(4\alpha+4)+8\alpha}{(1+2\alpha)s^2+s\,(2\alpha+3)+1+2\alpha}$$

برای اینکه امپدانس انتقالی مستقل از فرکانس گردد باید حاصل $\frac{V_2}{I_1}$ مقدار ثابت گردد و برای این منظور لازم است که ضرایب چندجمله‌ای صورت با ضرایب چندجمله‌ای مخرج برابر باشد لذا با مساوی قرار دادن ضریب S^2 در صورت و مخرج خواهیم داشت:

$$1+2\alpha=2 \qquad \Rightarrow \quad \alpha=\frac{1}{2}$$

۸- تابع شبکهٔ مدار شکل (مسالهٔ ۱۵-۸) را تعیین کنید. به ازای چه مقدار k این مدار نوسان‌ساز می‌شود؟ پاسخ ضربهٔ این مدار را برای $k=1$ و $RC=\frac{1}{2}$ به دست آورید.

حل:



شکل (مسالهٔ ۱۵-۸)

با نوشتن KCL در گره (1) خواهیم داشت:

$$\frac{V_s-V_x}{R}=\frac{V_x-V}{R}+\left(V_x-kV\right)\ Cs$$

$$\Rightarrow \quad V_s-V_x=V_x-V+\left(V_x-kV\right)CRS$$

$$V_s = (2+CRS)\,V_x - (kCRs+1)\,V \qquad (a)$$

با نوشتن KCL در گره (2) خواهیم داشت:

$$\frac{V_x - V}{R} = VCs \;\Rightarrow\; V_x = (RCs+1)\,V \qquad (b)$$

$$V_s = [\,(2+RCs)\,(RCs+1) - (kCRs+1)\,V]$$

$$V_s = \left[(RCs)^2 + 3RCs + 2 - kRCs - 1\right] V$$

$$V = \frac{V_s}{(RCs)^2 + RCs\,(3-k) + 1} \qquad (c)$$

$$(KVL) \;\Rightarrow\; V_{out} = kV \;\Rightarrow\; V = \frac{V_{out}}{k} \qquad (d)$$

$$(c),(d) \;\Rightarrow\; \frac{V_{out}}{V_s} = \frac{k}{\left[(RCs)^2 + RCs\,(3-k) + 1\right]}$$

برای اینکه مدار به یک نوسان ساز تبدیل شود لازم است
که قطبهای تابع تبدیل بر روی محور $j\omega$ قرار گیرند
بنابراین لازم است که ضریب s صفر شود لذا داریم.

$$3-k=0 \;\Rightarrow\; k=3$$

پس به ازای $k=3$ این مدار به یک نوسان ساز تبدیل می‌شود.

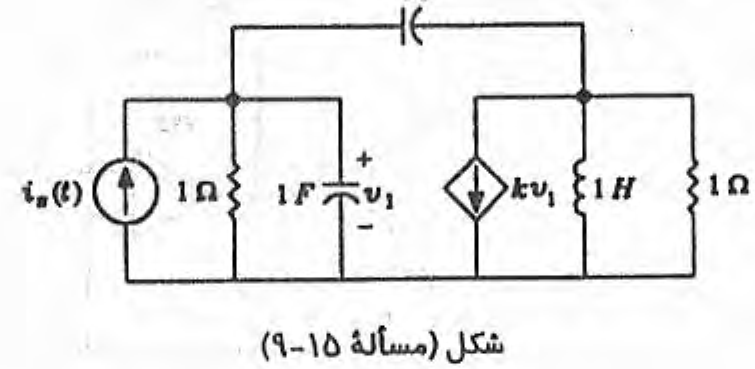
$$\begin{cases} k=1 \\ RC=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{V_{out}}{V_s} = \frac{1}{\frac{1}{4}s^2+s+1} = \frac{4}{s^2+4s+4}$$

چون پاسخ ضربه خواسته شده لذا $v_s(t)=\delta(t)$ است و $V_s(s)=1$ بنابراین داریم:

$$V_{out} = L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+4s+4}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{4}{(s+2)^2}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad V_{out} = 4t\,e^{-2t}\,u(t)$$

۹- در مورد پایداری مدار شکل (مسالهٔ ۱۵-۹) برای $k>0$ چه می‌توانید بگویید. هر مطلبی را که بیان می‌کنید، اثبات کنید.



شکل (مسالهٔ ۱۵-۹)

حل:

از تجزیه و تحلیل گره داریم:

$$\begin{bmatrix} 1+s+s & -s \\ -s & \frac{1}{s}+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s \\ -kV_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+2s & -s \\ -s+k & \frac{s+1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} (1+2s)V_1 - sV_2 = I_s & (a) \\ V_2 = \dfrac{s(-s+k)}{-(s+1)} V_1 & (b) \end{cases}$$

$$(b),(a) \quad \rightarrow \quad (1+2s)V_1 - s\frac{s(-s+k)}{-(s+1)} V_1 = I_s$$

$$\frac{V_1}{I_s} = \frac{s+1}{-s^3+(k+2)s^2+3s+1} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

جهت پایداری، همهٔ قطب ها باید در سمت چپ محور موهومی $(j\omega)$ قرار گیرند از قطب تابع شبکه داریم:

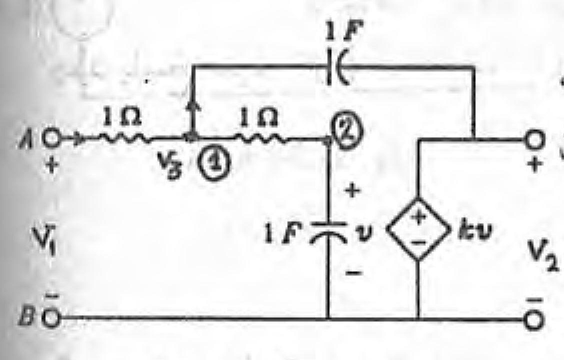
$$\left.\begin{matrix} s=0 & \rightarrow & D(0)=1 \\ s=+\infty & \rightarrow & D(+\infty)=-\infty \end{matrix}\right\} \rightarrow$$

چون جواب ها مختلف العلامت هستند.

بنابراین حداقل یک ریشه بین $(0, \infty)$ وجود دارد در نتیجه حداقل یک قطب در سمت راست محور موهومی قرار دارد. بنابراین مدار ناپایدار است.

لازم به ذکر است که با توجه به شکل نیز اگر ولتاژ V_1 به اندازه خیلی کوچک افزایش یابد منبع جریان وابسته kV_1 افزایش یافته و در نتیجه از خازن بالایی جریان بیشتری کشیده شده و در نتیجه ولتاژ V_1 افزایش می‌یابد یعنی یک فیدبک مثبت بوجود می‌آید بنابراین مدار ناپایدار می‌باشد.

۱۰ - تابع شبکهٔ $H(s)=\frac{V_o}{V_{in}}$ را مدار شکل (مسالهٔ ۱۵-۱۰) به دست آورید. حدود k را برای پایداری مدار تعیین کنید. مکان قطبهای تابع شبکه را با تغییر k تعیین کنید.



شکل (مسالهٔ ۱۵-۱۰)

حل:

با نوشتن KCL در گره (1) داریم.

$$V_1-V_3=V_3-V+s(V_3-kV) \Rightarrow V_1=(2+s)V_3-(ks+1)V \qquad (a)$$

با نوشتن KCL در گره (2) داریم.

$$V_3-V=sV \Rightarrow V_3=(s+1)V \qquad (b)$$

$$(a),(b) \Rightarrow (2+s)(s+1)V-(ks+1)V=V_1$$

$$\Rightarrow V=\frac{V_1}{s^2+(3-k)s+1} \qquad (c)$$

$$(KVL) \Rightarrow V_2=kV \Rightarrow V=\frac{V_2}{k} \qquad (d)$$

$$(c),(d) \Rightarrow H(s)=\frac{V_2}{V_1}=\frac{k}{s^2+(3-k)s+1}$$

برای پایداری باید ضریب s بزرگتر از صفر باشد لذا برای پایداری لازم است که $k<3$ باشد.

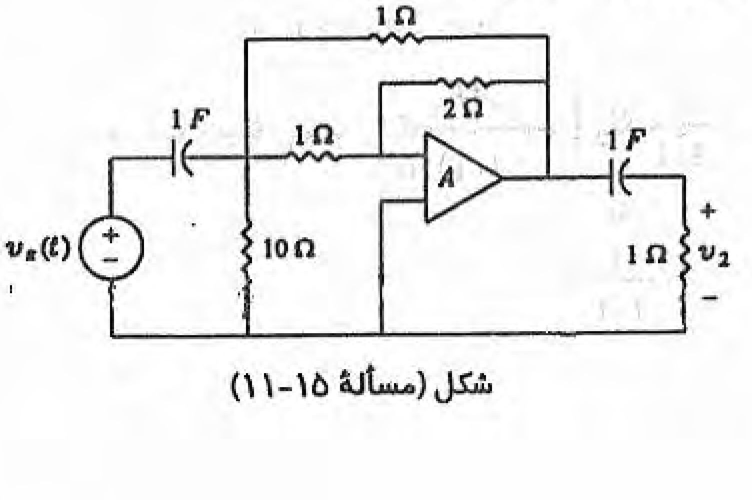
$$s^2+(3-k)s+1=0 \quad \rightarrow \quad s=\frac{k-3\pm\sqrt{(3-k)^2-4}}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} s=\dfrac{k-3}{2}\pm j\dfrac{\sqrt{4-(3-k)^2}}{2} \\ A=\dfrac{k-3}{2} \\ B=\dfrac{\sqrt{4-(3-k)^2}}{2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} \rightarrow s=A\pm jB \\ r=\sqrt{A^2+B^2}=1 \\ \theta=\pm tg^{-1}\dfrac{B}{A} \end{array}\right\} \rightarrow s=re^{j\theta}$$

با توجه به اینکه $r=1$ است بنابراین قطب‌های تابع شبکه در روی $s=e^{j\theta}$ یعنی روی دایره‌ای به شعاع $r=1$ قرار دارند.

۱۱-الف- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۵-۱۱) تقویت کنندهٔ عملیاتی را با یک منبع وابسته تعویض کنید و معادلات گره را در حالت دایمی سینوسی بنویسید. $v_s(t)=2\cos\omega t$

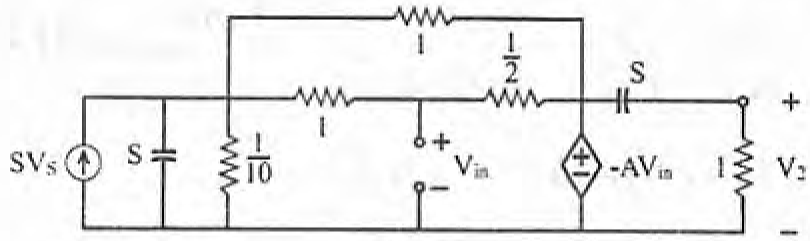
ب- تابع شبکهٔ ارتباط دهندهٔ خروجی v_2 به ورودی $v_s(t)$ را تعیین کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۵-۱۱)

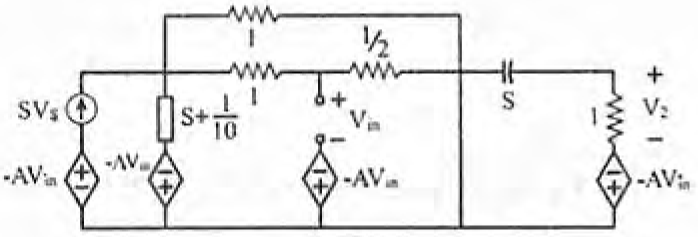
حل:

الف) با تعویض جای آپ‌امپ با یک منبع نابسته شکل (الف) حاصل می‌شود.



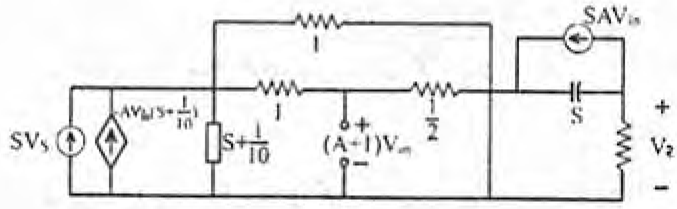
(الف)

حال منبع ولتاژ نابسته را در سایر شاخه‌ها پخش می‌کنیم تا مدار بصورت استاندارد درآید. بنابراین شکل (ب) نتیجه می‌شود.



(ب)

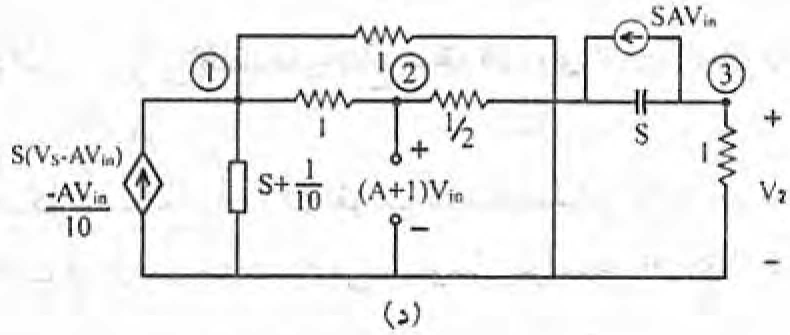
منبع ولتاژ نابسته را به منابع جریان تبدیل می‌کنیم شکل (ج) را داریم:



(ج)

با توجه به شکل (د) می‌توان نوشت:

$$E_2 = (A+1)\,V_{in}$$
$$E_3 = V_2$$



(د)

$$\begin{bmatrix} s+\frac{1}{10}+1+1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\left(V_s-\frac{A}{A+1}E_2\right)-\frac{AE_2}{(A+1)10} \\ 0 \\ -s\frac{A}{A+1}E_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} s+2+\frac{1}{10} & -1+\frac{A}{A+1}\left(s+\frac{1}{10}\right) & 0 \\ -1 & 1+\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & s\frac{A}{A+1} & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sV_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (I)$$

در حالت دایمی سینوسی با $V_s(t)=2\cos\omega t$ داریم: $\qquad V_s(j\omega)=2$

$$\begin{bmatrix} j\omega+\frac{21}{10} & -1+\frac{A}{A+1}\left(j\omega+\frac{1}{10}\right) & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & j\omega\frac{A}{A+1} & j\omega+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega\times 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ب) برای $H(s)=\dfrac{V_2(s)}{V_s(s)}$ از رابطهٔ (I) می‌توان نوشت :

سطر دوم ماتریس : $\qquad E_1=\frac{3}{2}E_2 \qquad (a)$

سطر سوم ماتریس : $\qquad s\frac{A}{A+1}E_2=-(s+1)E_3 \Rightarrow E_2=\frac{-(s+1)}{s}\times\frac{A+1}{A}\times E_3 \qquad (b)$

$$(a),(b) \Rightarrow E_1=\frac{-3}{2}\times\frac{s+1}{s}\times\frac{A+1}{A}\times E_3 \qquad (c)$$

بنابر سطر اول ماتریس و روابط (b) و (c) داریم:

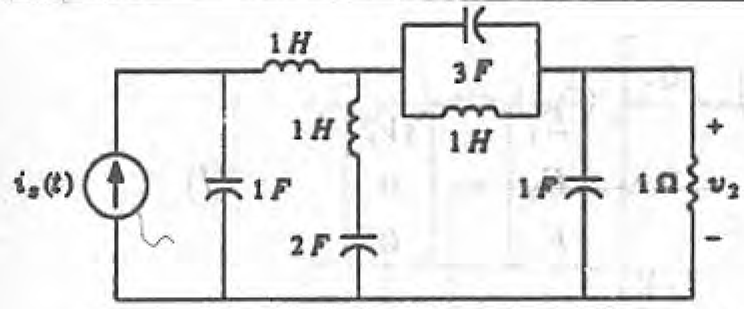
$$\left(s+\frac{21}{10}\right)\left(-\frac{3}{2}\times\frac{s+1}{s}\times\frac{A+1}{A}\right)E_3+\left[-1+\frac{A}{A+1}\left(s+\frac{1}{10}\right)\right]\left(-\frac{s+1}{s}\times\frac{A+1}{A}\right)E_3=sV_s$$

ولی $V_2=E_3$ بنابراین : $\qquad \dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{s^2}{\frac{(A+1)}{A}(s+1)\left(-\frac{43}{20}-\frac{3}{2}s-\frac{A}{A+1}\left(s+\frac{1}{10}\right)\right)}$

اگر A را نیز به سمت بینهایت میل دهیم داریم:

$$\frac{V_2(s)}{V_s(s)}=\frac{-s^2}{(s+1)(2.55+2.25)}$$

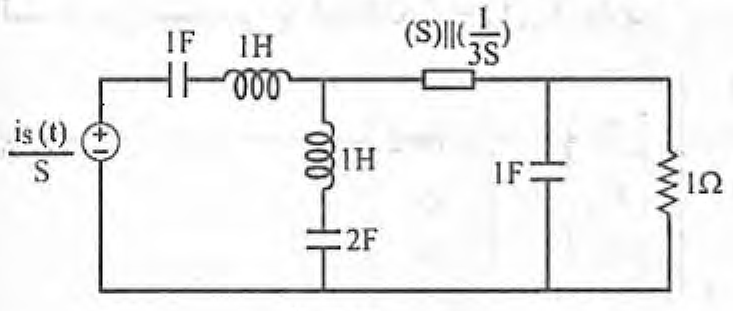
۱۲- تابع شبکهٔ امپدانس انتقالی $H(s)=\dfrac{V_2(s)}{I(s)}$ را در مدار شکل (مسالهٔ ۱۵-۱۲) تعیین کنید. صفرها و قطب های $H(s)$ را محاسبه کنید.



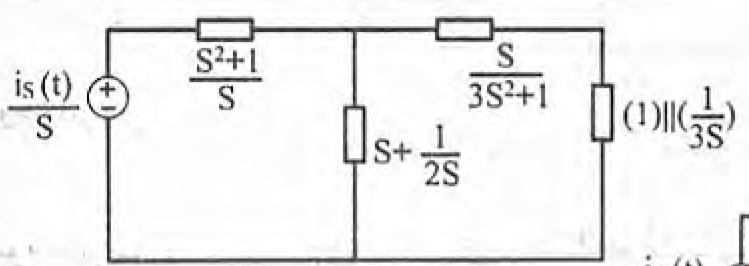
شکل (مسألهٔ ۱۵-۱۲)

حل:

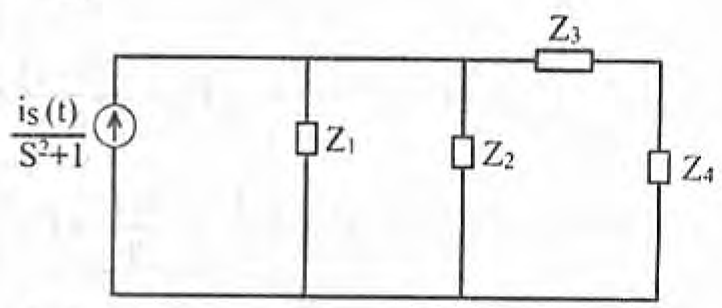
ابتدا مدار را تا حد ممکن با تبدیل تونن به نرتن و برعکس ساده می‌کنیم:



(الف)



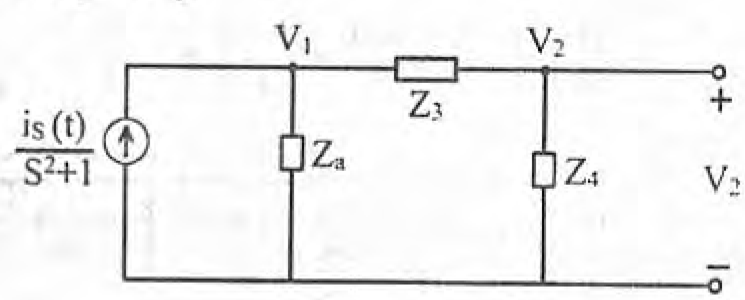
(ب)



(ج)

$$Z_1 \| Z_2 = \left(\frac{s^2+1}{s}\right) \| \left(\frac{2s^2+1}{2s}\right) = \frac{(2s^2+1)\ (s^2+1)}{(2s^2+1)\ +2\ (s^2+1)} = Z_a$$

$$Z_3 = \frac{s}{3s^2+1} \quad , \qquad Z_4 = \frac{1}{s+1}$$



(د)

حال از تجزیه و تحلیل گره مسئله‌داریم:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{Z_a}+\frac{1}{Z_3} & -\frac{1}{Z_3} \\ -\frac{1}{Z_3} & \frac{1}{Z_3}+\frac{1}{Z_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{I_s(s)}{s^2+1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{Z_a}+\frac{1}{Z_3}\right) v_1 - \frac{1}{Z_3}\ v_2 = \frac{I_s(s)}{s^2+1} \qquad (a)$$

$$-\frac{1}{Z_3}v_1+\left(\frac{1}{Z_3}+\frac{1}{Z_4}\right)v_2=0$$

$$\Rightarrow \quad v_1=\left(1+\frac{Z_3}{Z_4}\right)v_2 \qquad (b)$$

$$(a),(b) \Rightarrow \left(\frac{1}{Z_a}+\frac{1}{Z_3}\right)\left(1+\frac{Z_3}{Z_4}\right)v_2-\frac{1}{Z_3}v_2=\frac{I_s(s)}{s^2+1}$$

$$\left[\left(\frac{Z_3+Z_a}{Z_aZ_3}\right)\left(\frac{Z_3+Z_4}{Z_4}\right)-\frac{1}{Z_3}\right]v_2=\frac{I_s(s)}{s^2+1}$$

$$\frac{(Z_3+Z_a)\ (Z_3+Z_4)\ -Z_aZ_4}{Z_aZ_3Z_4}v_2=\frac{I_s(s)}{s^2+1}$$

$$\frac{Z_3^2+Z_3Z_4+Z_3Z_a}{Z_3Z_aZ_4}v_2=\frac{I_s(s)}{s^2+1}$$

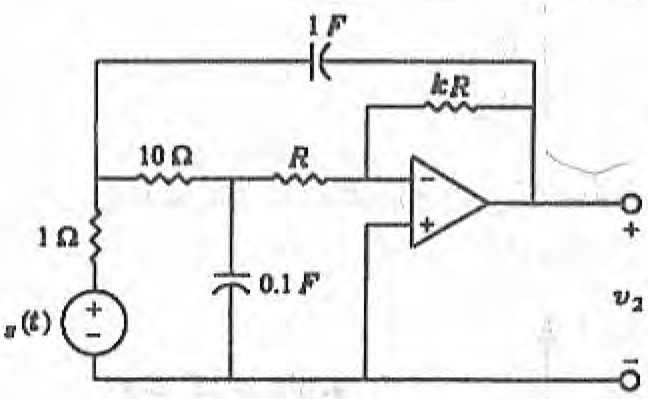
$$H(s)=\frac{V_2}{I_s(s)}=\frac{Z_aZ_4}{Z_3^2+Z_4+Z_a}\times\frac{1}{s^2+1}$$

با توجه به معین بودن Z_a ، Z_3 و Z_4 می توان صفرها و قطبهای H(s) را محاسبه کرد.

۱۳ -الف- تابع شبکهٔ $H(s)=\frac{V_2(s)}{V_1(s)}$ را مدار شکل (مسالهٔ ۱۵-۱۳) تعیین کنید.

ب- به ازای چه مقداری از k این مدار ناپایدار است؟ R را برابر یک انتخاب کنید.

پ- مکان قطبهای تابع شبکهٔ H(s) را با تغییر k رسم کنید.



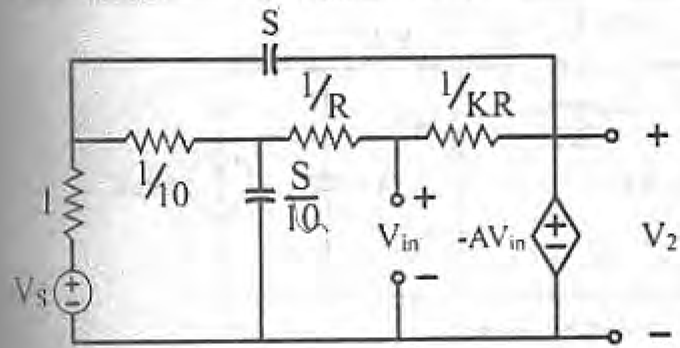
شکل (مسألهٔ ۱۵-۱۳)

ت- به ازای k=1.1 پاسخ فرکانسی را رسم کنید و نشان دهید که رفتار این مدار مانند رفتار یک فیلتر پایین‌گذر است.

حل:

الف) مطابق شکل اصلی می توان بجای آپ‌امپ معادل آنرا جایگزین نمود. (شکل (الف) حاصل می‌شود.)

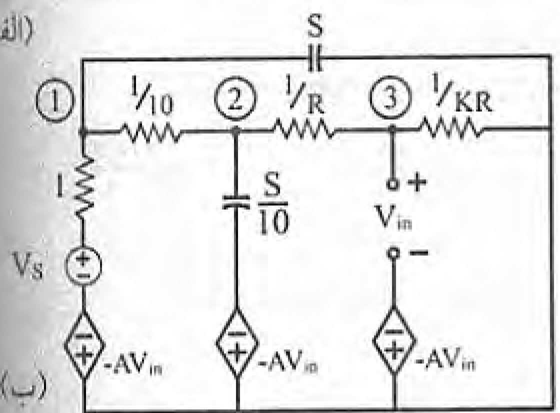
با توجه به شکل (الف):



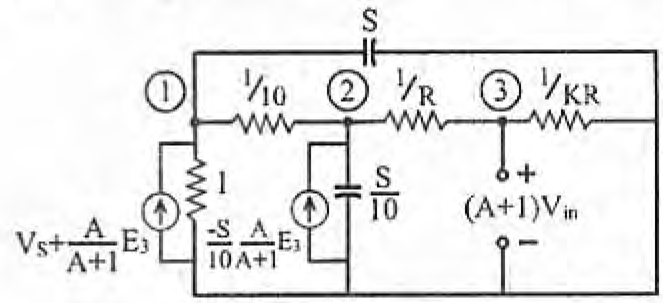
(الف)

$$V_2 = -AV_{in} \qquad (I)$$

برای تجزیه و تحلیل گره منبع ولتاژ وابسته را بین شاخه‌ها تقسیم می‌کنیم تا حالت استاندارد برای مدار بدست آید. (شکل (ب) حاصل می‌شود.)



(ب)



(ج)

حال از شکل (ب): $E_s = (A+1)V_{in} \quad (II)$

معادلات گره را برای شکل (ج) می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{10}+s & -\frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10}+\frac{s}{10}+\frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \\ 0 & -\frac{1}{R} & \frac{1}{R}+\frac{1}{kR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_s + \frac{A}{A+1}E_3 \\ \frac{s}{10}\frac{A}{A+1}E_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1+\frac{1}{10}+s & -\frac{1}{10} & -\frac{A}{A+1} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10}+\frac{s}{10}+\frac{1}{R} & -\frac{s}{10}\frac{A}{A+1}-\frac{1}{R} \\ 0 & -\frac{1}{R} & \frac{1}{R}+\frac{1}{kR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

از روش کرامر داریم:

مقدار E_3 برابر است با:

$$E_3 = \frac{V_s\left[\frac{1}{10R}\right]}{\left(1+\frac{1}{10}+s\right)\left[\left(\frac{1}{10}+\frac{s}{10}-\frac{1}{R}\right)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{kR}\right)+\frac{1}{R}\left(-\frac{s}{10}\frac{A}{A+1}-\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{10}\left[\left(-\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{kR}\right)-\frac{A}{A+1}\frac{1}{R}\right]\right]}$$

$$E_3 = \frac{(10kR)\,V_s}{10s^2\left(-R\frac{Ak}{A+1}-Rk+R\right)+s\left(21Rk+21R+100-11R\frac{A}{A+1}k\right)+10Rk+10R+1100-10R\frac{Ak}{A+1}}$$

$$(I),(II) \quad \rightarrow \quad E_3=\left(\frac{A+1}{-A}\right)V_2$$

E_3 را از رابطهٔ فوق در رابطهٔ قبلی جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{A+1}{-A}V_2=\frac{V_s}{s^2\left(-\frac{A}{A+1}+1+\frac{1}{k}\right)+s\left(2.1+\frac{2.1}{k}+\frac{10}{kR}-1.1\frac{A}{A+1}\right)+1+\frac{1}{k}+\frac{11}{kR}-\frac{A}{A+1}}$$

صورت و مخرج را ضربدر k می‌کنیم:

$$\frac{V_2}{V_s}=\frac{-k}{\frac{A+1}{A}\left[s^2\left(-\frac{A}{A+1}.k+k+1\right)+s\left(2.1k+2.1+\frac{10}{R}-1.1\frac{Ak}{A+1}\right)+k+1+\frac{11}{R}-\frac{A}{A+1}k\right]}$$

$$\frac{V_2}{V_s}=\frac{-k}{s^2\left(-k+\frac{A+1}{A}(k+1)\right)+s\left(\frac{A+1}{A}\left(2.1k+2.1+\frac{10}{R}\right)-1.1k\right)+\left(\frac{A+1}{A}\right)\left(k+1+\frac{11}{R}\right)-k}$$

اگر A را به سمت بینهایت میل دهیم آنگاه $\frac{A+1}{A}$ به سمت 1 میل می‌کند:

$$\frac{V_2}{V_s}=\frac{-k}{s^2+s\left(k+2.1+\frac{10}{R}\right)+1+\frac{11}{R}}$$

ب) قطب عبارتست از (به ازای R=1)

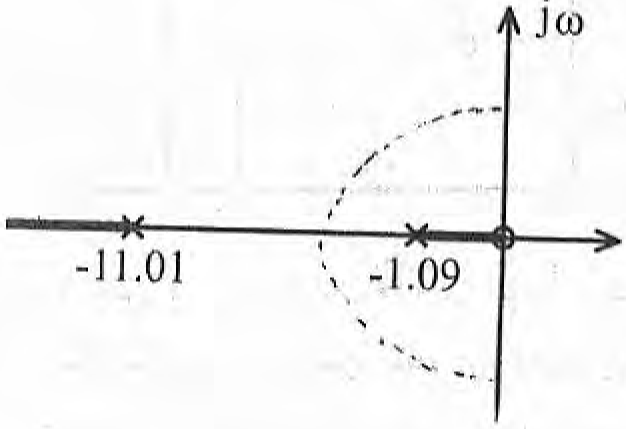
$$D(s)=s^2+s(k+12.1)+12=0$$

$$\rightarrow \qquad s=\frac{-(s^2+12)}{k+12.1}$$

حال با توجه به عبارت مقابل برای اینکه s مثبت باشد (سیستم ناپایدار گردد) چون صورت کسر به ازای هر s منفی است بنابراین مخرج نیز باید منفی گردد یعنی: $k+12.1<0$

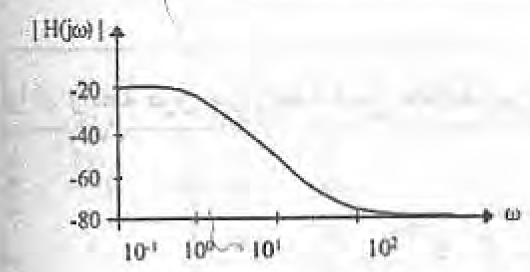
بنابراین به ازای $k<-12.1$ سیستم ناپایدار است.

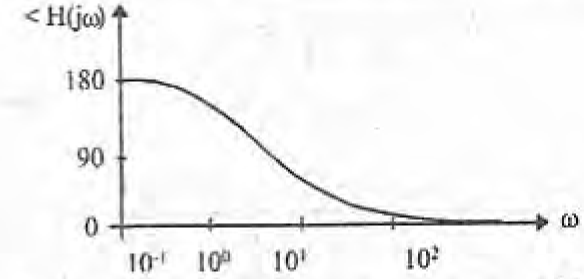
پ) به ازای $k>0$ های مختلف می‌توان شکل را رسم نمود.



ت)

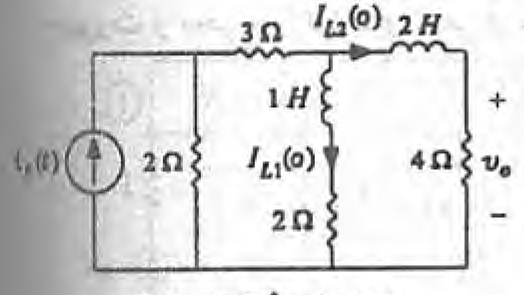
$$k=1.1 \qquad \rightarrow \qquad \frac{V_2}{V_s}=\frac{-1.1}{s^2+13.2s+12}$$





با توجه به $|H|$ متوجه می‌شویم که این مدار به صورت پایین گذر عمل می‌کند.

۱۴-الف- در مدار شکل (مسالهٔ ۱۵-۱۴) تابع شبکهٔ $H(s)=\frac{V_o(s)}{I_s(s)}$ را تعیین کنید. در مورد فرکانسهای طبیعی این مدار چه می‌توانید بگویید؟

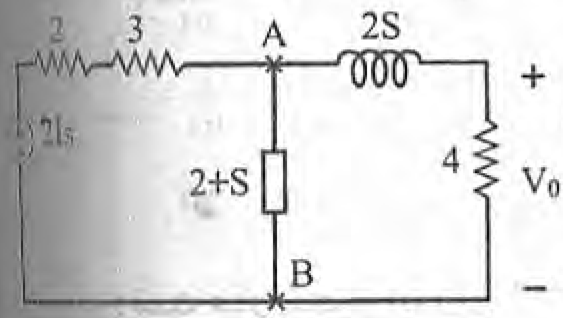


شکل (مسألة ۱۵-۱٤)

ب- فرکانسهای طبیعی متغیرهای شبکهٔ I_1 و I_2 جریانهای گذرنده از سلف ها را تعیین کنید. اگر $I_{L1}(0)=2I_{L2}(0)$ باشد، چه می‌توانید نتیجه بگیرید؟

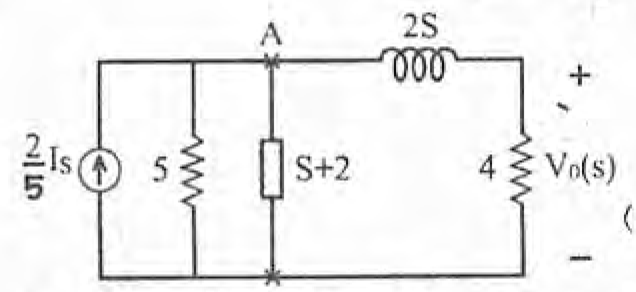
پ- برای $i_s(t)=\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$ و $I_{L1}(0)=\frac{1}{5}$ و $I_{L2}(0)=0$، ولتاژ خروجی $v_o(t)$ را حساب کنید.

حل:



(الف)

الف) مطابق شکل (الف) معادل تونن مقاومت 2 اهمی و منبع جریان را رسم می‌کنیم سپس معادل تونن از دید A و B را بدست می‌آوریم تا شکل (ج) حاصل شود:

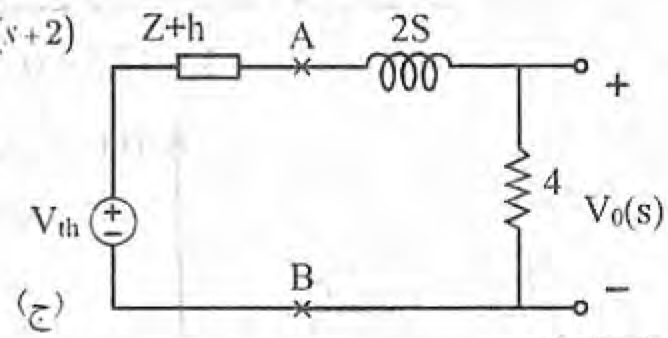


(ب)

$$V_{th}=\left[5\,||\,(s+2)\right]\times\frac{2}{5}I_s \qquad , \qquad Z_{th}=5\,||\,(s+2)$$

$$\to V_o=V_{th}\frac{4}{4+2s+Z_{th}} \;\to\; V_o=\frac{8}{s+9.5}I_s$$

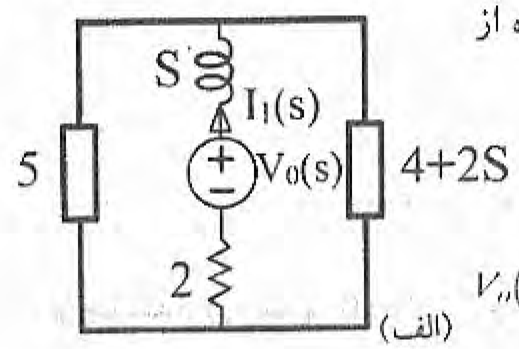
$$H(s)=\frac{V_o(s)}{I(s)}=\frac{8}{(s+7)(2s+19)}$$



(ج)

همانطور که از شکل مشاهده می‌شود 2 عنصر ذخیره کننده انرژی داریم که نه سری و نه موازی می‌باشد، حلقه سلفی و کات ست سلفی نیز داریم بنابراین 2 تا فرکانس طبیعی خواهیم داشت که هر دو غیر صفر هستند، که تابع $H(s)$ نیز نشان دهندهٔ همین موضوع است.

ب) با توجه به شکل برای پیدا کردن فرکانسهای طبیعی متغیر شبکه I_1

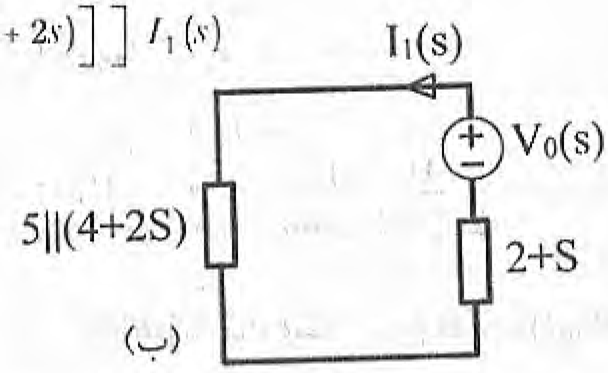


(الف)

منبع ولتاژ $V_o(s)$ را به شاخهٔ مربوطه وصل می‌کنیم و جریان گذرنده از آنرا $I_l(s)$ می‌نامیم.

بعد از ساده نمودن شکل (الف)، شکل (ب) حاصل می‌شود.

$$V_o(s) = \Big[2+s+\big[5 \,\|\, (4+2s)\big]\Big]\, I_1(s)$$



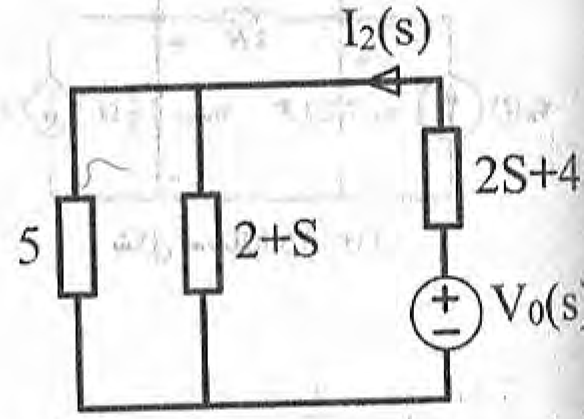
(ب)

$$\frac{I_1(s)}{V_o(s)} = \frac{2s+9}{2s^2+13s+18} \quad \rightarrow$$

$$2s^2+13s+18=0 \quad \rightarrow \quad s_1=-2 \quad , \quad s_2=-\frac{9}{2}$$

به روشی مشابه برای I_2 داریم:

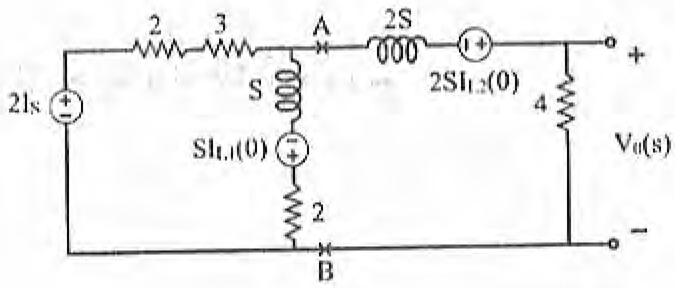
$$V_o(s) = \Big[(2s+4)+5 \,\|\, (2+s)\Big]\, I_2(s)$$



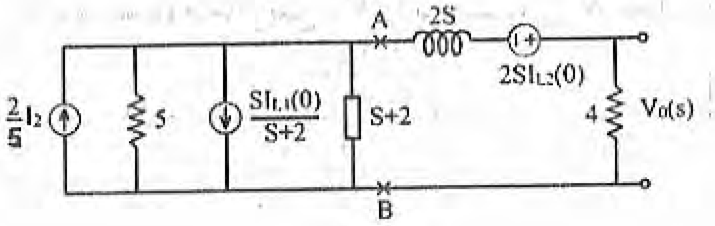
$$\frac{I_2}{V_o(s)} = \frac{s+7}{2s^2+23s+38}$$

$$2s^2+23s+38=0 \quad \rightarrow \quad s_1=-9.5 \quad , \quad s_2=-2$$

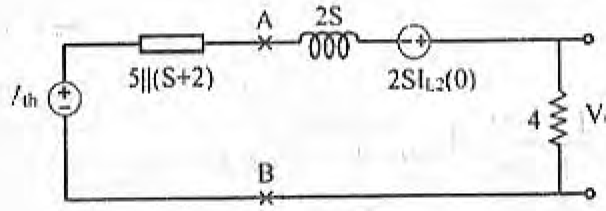
پ) با توجه به شکل ولتاژ تونن دوسر A و B را مطابق شکلهای (الف) تا (ج) محاسبه می‌کنیم.



(الف)



(ب)



(ج)

$$V_{th}=\left(\frac{2}{5}I_s-\frac{sI_L(0)}{s+2}\right)\times\big(5\,||\,(s+2)\big)$$

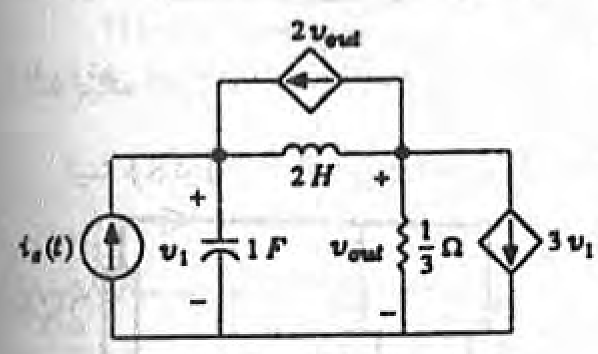
$$V_o(s)=\big(V_{th}+2sI_2(0)\big)\left(\frac{4}{4+2s+5\,||\,(s+2)}\right)$$

با جایگذاری مقادیر $I_{L_2}(0)=0$ و $I_{L_1}(0)=\frac{1}{s}$ و $I_s=\frac{1}{2(s+2)}$ داریم:

$$V_o(s)=\frac{4(1-s)}{2s^2+23s+38}\quad\rightarrow\quad V_o(s)=\frac{0.8}{s+2}+\frac{-5.6}{2s+19}$$

$$V_o(t)=\left(0.8e^{-2t}-2.8e^{-4.5t}\right)u(t)$$

۱۵- در مدار شکل (مسالهٔ ۱۵-۱۵) تابع شبکهٔ $H(s)=\frac{V_{out}}{I_s(s)}$ را به دست آورده و صفرها و قطب های این تابع شبکه را مشخص کنید و منحنی پاسخ فرکانسی را رسم کنید.



شکل (مسالهٔ ۱۵-۱۵)

حل:

از تجزیه و تحلیل گره داریم:

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2s}+s & -\frac{1}{2s}\\ -\frac{1}{2s} & 3+\frac{1}{2s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\ V_{out}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_s+2V_{out}\\ -2V_{out}-3V_1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2s}+s & -\frac{1}{2s}-2\\ -\frac{1}{2s}+3 & 3+\frac{1}{2s}+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\ V_{out}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_s\\ 0\end{bmatrix}$$

از ردیف دوم ماتریس V_1 را برحسب V_{out} محاسبه می‌کنیم:

$$V_1=\frac{1+10s}{1-6s}V_{out}\quad(*)$$

از ردیف اول ماتریس داریم:

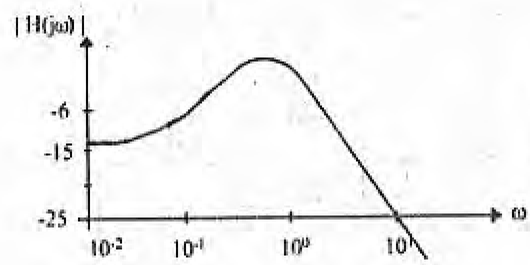
$$\frac{2s^2+1}{2s}V_1+\frac{-4s-1}{2s}V_{out}=I_s$$

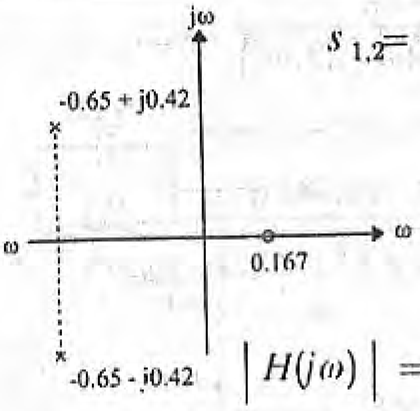
$$\overset{(*)}{\rightarrow}\ \frac{2s^2+1}{2s}\times\frac{1+10s}{1-6s}V_{out}+\frac{-4s-1}{2s}V_{out}=I_s$$

صفر :

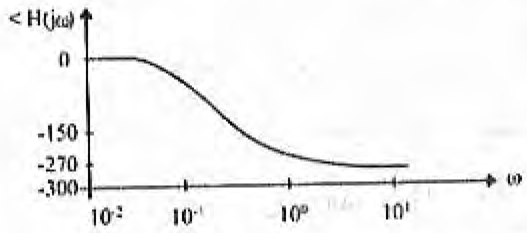
$$\frac{V_{out}}{I_s}=\frac{(1-6s)}{10s^2+13s+6}\qquad s=0.167$$

قطب ها : $s_{1,2}=-0.65\pm j\,0.42$



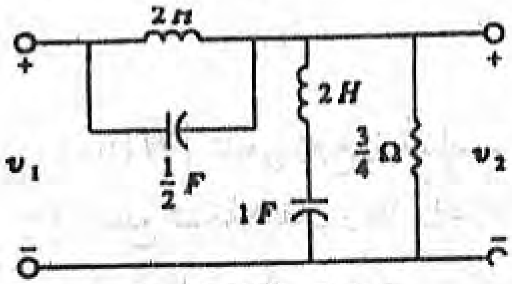


$$\left|H(j\omega)\right|=\frac{\sqrt{1+(6\omega)^2}}{\sqrt{\left(6-10\omega^2\right)^2+(13\omega)^2}}$$



$$\angle H(j\omega)=-tg^{-1}6\omega-tg^{-1}\frac{13\omega}{6-10\omega^2}$$

۱۶- قطب ها و صفرهای تابع شبکهٔ $H(s)=\frac{V_2(s)}{V_1(s)}$ مدار شکل (مسالهٔ ۱۵-۱۶) را تعیین کنید و منحنی اندازهٔ $\left|H(j\omega)\right|$ را برحسب ω رسم کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۵-۱۶)

حل:

$$Z_1=\left(2s+\frac{1}{s}\right)\parallel\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\frac{2s^2+1}{s}\times\frac{3}{4}}{\frac{2s^2+1}{s}+\frac{3}{4}}=\frac{3\left(2s^2+1\right)}{8s^2+3s+4}$$

$$Z_2=(2s)\parallel\left(\frac{2}{s}\right)=\frac{2s\times\frac{2}{s}}{2s+\frac{2}{s}}=\frac{4s}{2s^2+2}$$

با نوشتن رابطه مستقیم ولتاژ خواهیم داشت:

$$v_2=\frac{v_1\times Z_1}{Z_1+Z_2}\quad\Rightarrow\quad H(s)=\frac{Z_1(s)}{Z_1(s)+Z_2(s)}$$

$$\Rightarrow\ H(s)=\frac{\frac{3\left[2s^2+1\right]}{8s^2+3s+1}}{\frac{3\left[2s^2+1\right]}{8s^2+3s+1}+\frac{4s}{2s^2+2}}=\frac{3\left(2s^2+1\right)\left(2s^2+2\right)}{3\left(2s^2+1\right)\left(2s^2+2\right)+4s\left(8s^2+3s+1\right)}$$

$$H(s)=\frac{3\left(4s^4+6s^2+2\right)}{12s^4+32s^3+30s^2+4s+6}$$

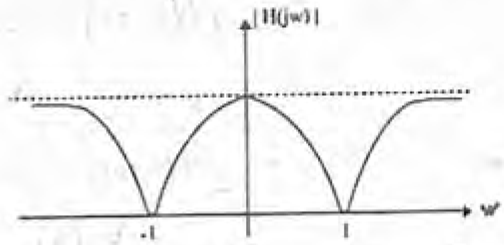
$$H(j\omega)=\frac{12\omega^4-18\omega^2+6}{12\omega^4-30\omega^2+6+j\left(4\omega-32\omega^3\right)}$$

$$\left|H(j\omega)\right|=\frac{12\,\omega^4-18\omega^2+6}{\sqrt{\left(12\omega^4-30\omega^2+6\right)^2+\left(4\omega+32\omega^3\right)^2}}$$

$\left|H(j0)\right|=1$

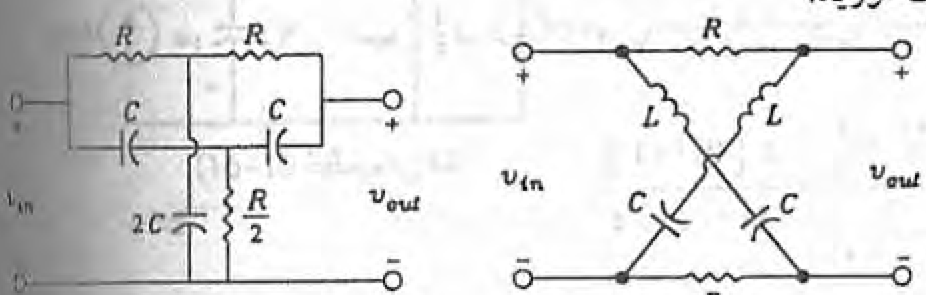
$\left|H(j1)\right|=0$

$\left|H(j\infty)\right|=1$



$\left|H(j\omega)\right|=\left|H(-j\omega)\right| \Rightarrow$ $\left|H(j\omega)\right|$ تابعی زوج از ω است.

۱۷ - تابع شبکهٔ انتقال ولتاژ را در دو مدار شکل (مسألهٔ ۱۵-۱۷) تعیین کنید و منحنی های اندازه و فاز پاسخ را با روش ترسیمی به دست آورید.



مدار لَتیس متقارن

(الف)

مدار T دوتلو

(ب)

شکل (مسألهٔ ۱۵-۱۷)

حل:

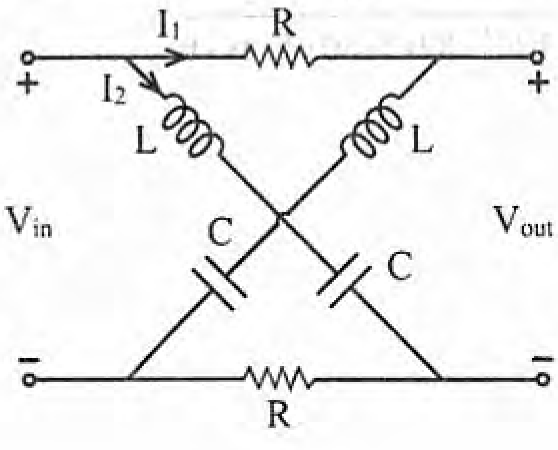
الف:
$$I_1(s)=\frac{V_i(s)}{Ls+\frac{1}{CS}+R}=\frac{CS\,V_i(s)}{LCs^2+RCs+1} \qquad (a)$$

$$I_2(s)=\frac{V_i(s)}{Ls+\frac{1}{CS}+R}=\frac{Cs\,V_i(s)}{LCs^2+RCs+1} \qquad (b)$$

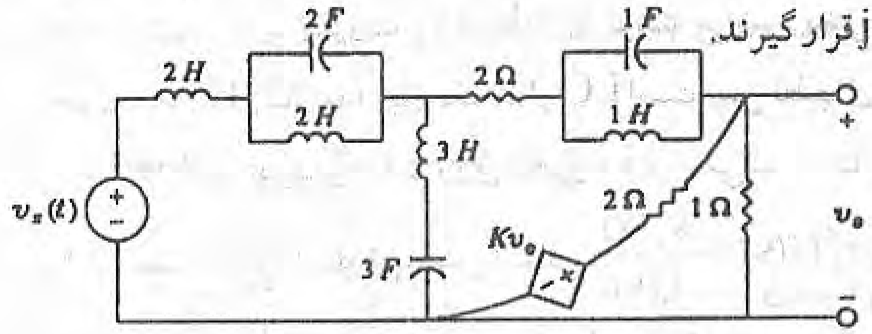
$$V_o(s)=\left(Ls+\frac{1}{Cs}\right)I_1(s)-RI_2(s)=\left(\frac{LCs^2+1}{Cs}\right)I_1(s)-RI_2(s) \qquad (c)$$

$$(a),(b),(c)\ \Rightarrow\ V_o(s)=\left(\frac{LCs^2+1}{Cs}\right)\left[\frac{Cs\,v_i(s)}{LCs^2+RCs+1}\right]-R\left[\frac{Cs\,V_i(s)}{LCs^2+RCs+1}\right]$$

$$\Rightarrow\ \frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{LCs^2-RCs+1}{Ls^2+RCs+1}$$



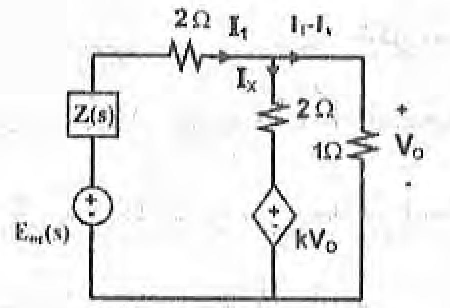
۱۸- در مدار شکل (مسالهٔ ۱۵-۱۸) مقدار k را چنان تعیین کنید که تا تمامی قطبهای تابع شبکهٔ $H(s)=\dfrac{V_o(s)}{V_s(s)}$ بر روی محور $j\omega$ قرار گیرند.



شکل، (مسالهٔ ۱۵-۱۸)

حل:

با توجه به شکل (الف) اگر از دوسر A و B به مدار سمت چپ نگاه کنیم و مدار معادل تونن آن را بدست آوریم مدار شکل (ب) بدست می‌آید که در آن قطبها و صفرهای $E_{oc}(s)$ و $Z(s)$ فقط روی محور $j\omega$ قرار دارند. می‌توان ولتاژ خروجی v_o را برحسب $Z(s)$ و $E_{oc}(s)$ محاسبه کرد و بدست آورد.



$$(KVL)\qquad E_{oC}(s)=I_1 Z(s)+2I_1+2I_x+kV_o=I_1\left(Z(s)+2\right)+2I_x+kV_o\qquad (a)$$

$$(KVL)\qquad V_o=2I_x+kV_o\ \Rightarrow\ I_x=\frac{(1-k)V_o}{2}\qquad (b)$$

$$V_o=I_1-I_x\ \Rightarrow\ I_1=V_o+I_x\qquad (c)$$

$$(b),(c)\ \Rightarrow\ I_1=V_o+\frac{(1-k)V_o}{2}=\frac{(3-k)V_o}{2}\qquad (d)$$

$$(a),(b),(d)\ \Rightarrow\ E_{oC}(s)=\frac{(3-k)V_o}{2}\,(Z(s)+2)+(1-k)V_o+kV_o$$

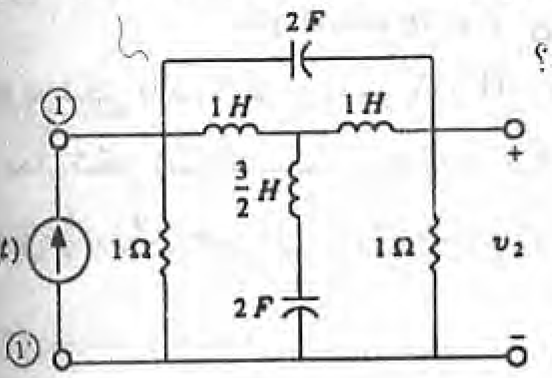
$$\Rightarrow\quad E_{oC}(s)=\frac{(3-k)V_o}{2}Z(s)+(3-k)V_o+V_o=\frac{(3-k)}{2}V_o Z(s)+(4-k)V_o$$

$$\Rightarrow\quad V_o=\frac{E_{oC}(s)}{\left(\frac{3-k}{2}\right)Z(s)+(4-k)}$$

اگر $k=4$ باشد قطبهای v_o همان قطبهای $E_{oc}(s)$ و صفرهای $Z(s)$ هستند که روی محور $j\omega$ قرار دارند. اگر $k=3$ باشد v_o به صورت $v_o=E_{oc}(s)$ نوشته می‌شود یعنی قطبهای v_o با قطبهای $E_{oc}(s)$ یکسان هستند چون $E_{oc}(s)$ ولتاژ مدار باز یک مدار LC است. پس قطبهای آن نیز بر روی محور $j\omega$ قرار دارند بنابراین به ازاء $k=3$ نیز قطبهای v_o بر روی محور $j\omega$ قرار می‌گیرند بنابراین 4 یا $k=3$ می‌باشد.

۱۹-الف- تابع شبکهٔ امپدانس انتقالی $H(s)=\dfrac{V_2(s)}{I_s(s)}$ را برای مدار شکل (مسالهٔ ۱۵-۱۹) تعیین کنید.

ب- امپدانس دیده شده در سرهای $(1)(1')$ چیست؟



شکل (مسألهٔ ۱۵-۱۹)

حل:

الف) با توجه به شکل مسالهٔ (4-15) مشخص می‌شود که ورودی در این مسأله بصورت نرتن بوده و در مسأله (4-15) به شکل تونن می‌باشد در مسأله (4-15) داشتیم

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{4s^2-s+1}{8s^2+2s+2}$$

با توجه به تبدیلات تونن به نرتن داریم: $V_1=1\times I_s$

بنابراین

$$\frac{V_2(s)}{I_s(s)}=\frac{4s^2-s+1}{8s^2+2s+2}$$

ب) در مسأله قبلی $Z_{in}=\dfrac{V_1}{V_2}$ را پیدا کردیم از روابط (*) و (f) داریم:

$$Z_{in}=\frac{V_1}{I_1}=2$$

اگر Z'_{in} را امپدانس دیده شده بعد از مقاومت 1 اهمی در نظر بگیریم:

$$Z_{in}=Z'_{in}+1 \quad \rightarrow \quad Z'_{in}=Z_{in}-1=2-1=1$$

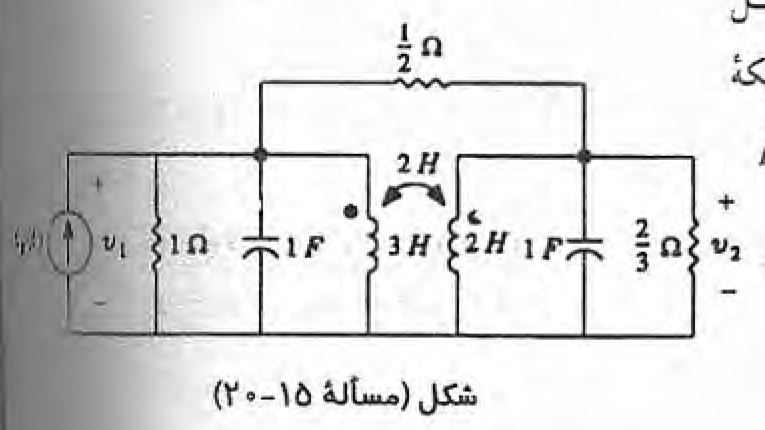
حال در این مسأله امپدانس ورودی برابر است با :

$$\frac{V_1}{I_1}=Z'_{in}\ \|\ 1$$

$$\frac{V_1}{I_1}=1\|1=\frac{1}{2}\ \Omega$$

۲۰-الف- برای مدار نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۱۵-۲۰) توابع شبکهٔ $H_2(s)=\dfrac{V_2(s)}{V_1(s)}$ و $H_1(s)=\dfrac{V_2(s)}{I_s(s)}$ را تعیین کنید.

ب- فرکانس های طبیعی این مدار را به



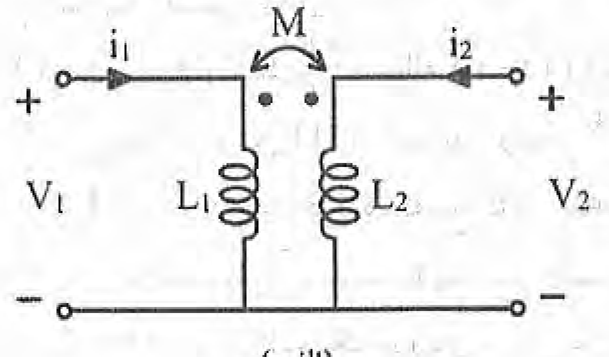
شکل (مسألهٔ ۱۵-۲۰)

دست آورید.

پ- فرکانس های طبیعی این مدار با قطب های تابع شبکهٔ $H_1(s)$ و $H_2(s)$ چه ارتباطی دادند و چرا؟

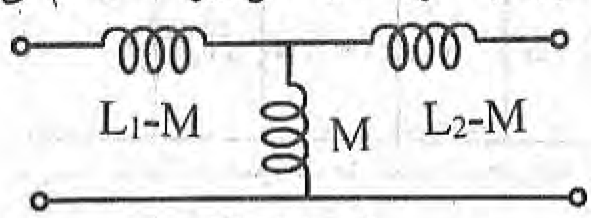
حل:

الف) با توجه به تعریف دو شکل زیر معادل هم می‌باشند :



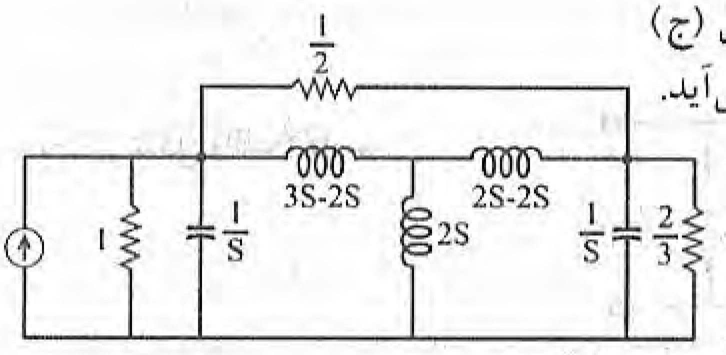
(الف)

≡

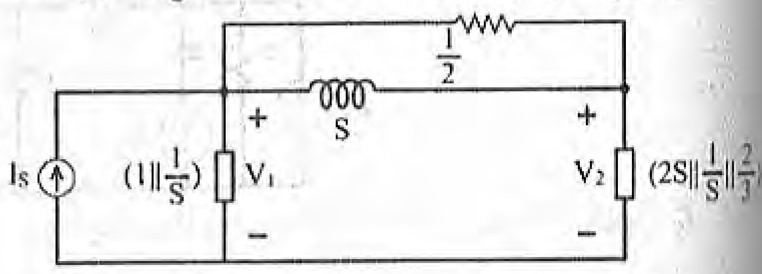


(ب)

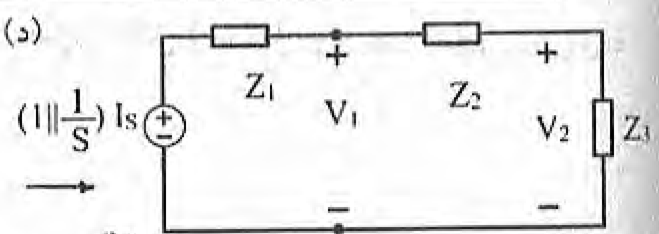
اکنون می‌توان شکل مسأله (15-20) را بصورت شکل (ج) تبدیل نمود. بعد از ساده نمودن، شکل (هـ) بدست می‌آید.



(ج)



(د)



(هـ)

$$Z_1 = 1 \parallel \frac{1}{s} \qquad Z_2 = s \parallel \frac{1}{2}$$

$$Z_3 = 2s \parallel \frac{1}{s} \parallel \frac{2}{3}$$

$$Z_1 = \frac{1}{s+1} \quad , \quad Z_2 = \frac{s}{2s+1} \quad , \quad Z_3 = \frac{2s}{2s^2+3s+1}$$

$$V_2 = I_s \left(\frac{1}{s+1}\right)\left[\frac{Z_3}{Z_1+Z_2+Z_3}\right] = \frac{I_s}{s+1} \times \frac{2s}{s^2+5s+1} \qquad (I)$$

$$H_1(s) = \frac{V_2(s)}{I_s(s)} = \frac{2s}{(s+1)(s^2+5s+1)}$$

$$V_1 = I_s \times \left(\frac{1}{s+1}\right)\left[\frac{Z_2+Z_3}{Z_1+Z_2+Z_3}\right] = \frac{I_s}{s+1} \times \frac{s^2+3s}{s^2+5s+1} \qquad (II)$$

با تقسیم دو رابطهٔ (I) و (II) به همدیگر داریم:

$$H_2(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{2}{s+3}$$

ب) با توجه به شکل (هـ) ماتریس امپدانس از تجزیه و تحلیل مش یک بعدی بوده و داریم:

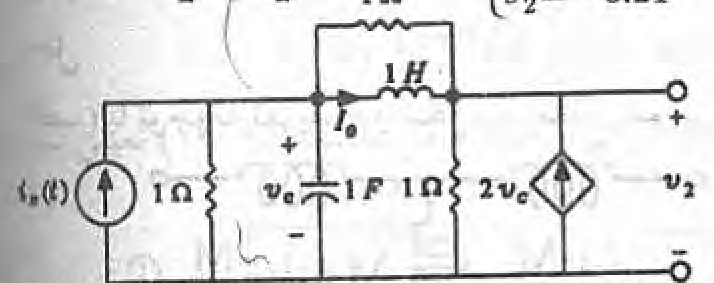
$$Z = [\,Z_1 + Z_2 + Z_3\,] \quad \rightarrow \quad |\,Z\,| = 0 \quad \rightarrow \quad Z_1 + Z_2 + Z_3 = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{s+1}+\frac{s}{2s+1}+\frac{2s}{2s^2+3s+1}=0 \quad \rightarrow \quad s^2+5s+1=0$$

فرکانسهای طبیعی مدار :

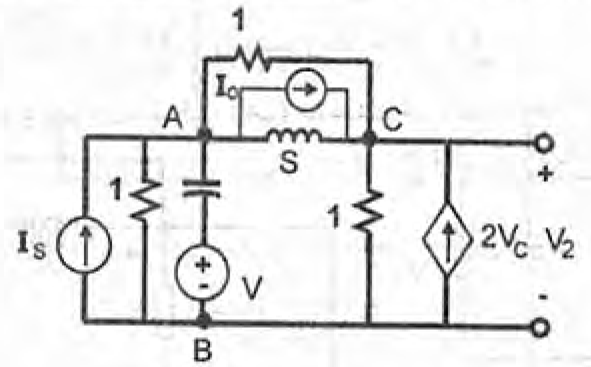
$$s_{1,2}=-\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{21}}{2} \rightarrow \begin{cases} s_1=-4.79 \\ s_2=-0.21 \end{cases}$$

۲۱- در مدار شکل (مسالهٔ ۱۵-۲۱) آیا می‌توان ورودی $i_s(t)$ و شرایط اولیهٔ V_o و I_o را چنان تعیین کرد که پاسخ کامل متحد با صفر باشد (پاسخ ولتاژ v_2)؟ آیا می‌توانید یک ورودی نمایی با این خاصیت پیدا کنید؟ در صورت مثبت بودن جواب این کار را انجام دهید.

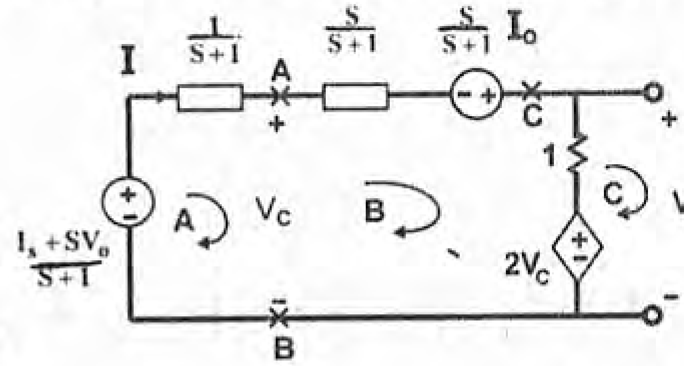


حل:

مطابق شکل (الف) داریم:



معادل تونن نقاط A و B و همچنین A و C و نیز C و B را مطابق شکل (ب) بدست می‌آوریم:



$$KVL\ A: \frac{I_s+sV_o}{s+1}=\frac{I}{s+1}+V_C \qquad (a)$$

$$KVL\ B: V_C=\left(\frac{s}{s+1}+1\right)I-\frac{s}{s+1}I_o+2V_C \qquad (b)$$

$$KVL\ C: V_2=I+2V_C \qquad (c)$$

V_C را از رابطهٔ (b) پیدا نموده و در رابطهٔ (c) جایگزین می‌کنیم:

$$V_2=I+\frac{2}{s+1}\left(sI_o-(2s+1)I\right) \qquad (d)$$

V_C را در رابطهٔ (a) جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{I_s+sV_o}{s+1}=\frac{I}{s+1}+\frac{sI_o-(2s+1)I}{s+1} \quad \Rightarrow \quad I=\frac{I_s+sV_o-sI_o}{-2s} \qquad (e)$$

I را از رابطهٔ (e) در رابطهٔ (d) جایگزین می‌کنیم:

$$V_2=\left(-\frac{2}{s+1}\ (2s+1)+1\right)\left(\frac{I_s+sV_o-sI_o}{-2s}\right)+\frac{2sI_o}{s+1}$$

$$V_2=-\frac{I_o}{2}+\frac{(3s+1)}{(s+1)(2s)}I_s+\frac{(3s+1)}{2(s+1)}V_o$$

بنا به قضیهٔ مقدار نهایی در تبدیل لاپلاس داریم:

$$V_2(\infty)=\lim_{s\to 0} sV_2(s)\equiv 0 \quad\to\quad \lim_{s\to 0}\frac{I_s}{2}\equiv 0 \quad\to\quad \lim_{s\to 0} I_s\equiv 0 \qquad (I)$$

همچنین بنا به قضیهٔ مقدار اولیه :

$$v_2(0)=\lim_{s\to\infty} sV_2(s)\equiv 0 \quad\to\quad v_2(0)=\lim_{s\to\infty}\frac{s}{2}\left[-I_o+\frac{3s+1}{s+1}V_o\right]+\frac{3}{2}\lim_{s\to\infty} I_s=0 \ (*)$$

$$\to\quad v_2(0)=\lim_{s\to\infty}\frac{s}{2}\left[-I_o+\lim_{s\to\infty}\frac{3s+1}{s+1}V_o\right]+\frac{3}{2}\lim_{s\to\infty} I_s=0$$

$$V_2(0)=\lim_{s\to\infty}\frac{s}{2}\ [-I_o+3V_o]+\frac{3}{2}\lim_{s\to\infty} I_s=0 \qquad (II)$$

از رابطهٔ (I) چون $\lim_{s\to 0} I_s=0$ است و میخواهیم ورودی بصورت نمایی باشد بنابراین باید صورت دارای ضریب s باشد. یعنی : $I_s=\frac{ks}{s+\alpha}$ حال با توجه به رابطهٔ (II) داریم:

$$V_2(0)=\lim_{s\to\infty}\frac{s}{2}\ (-I_o+3V_o)+\frac{3}{2}k=0$$

حال با توجه به رابطهٔ بدست آمده مشخص میشود که جمله اول باید با جملهٔ دوم $(\frac{3}{2}k)$ که ثابت است قرینه باشد تا مجموع دو جمله صفر گردد بنابراین جملهٔ داخل پارانتز که مستقل از s می‌باشد باید صفر گردد $(-I_o+3V_o=0)$ تا وقتی که s به سمت بینهایت میل می‌کند جملهٔ اول بصورت $0\times\infty$ گردید. و از این جمله رفع ابهام نماییم. بنابراین :

$$I_o=3V_o \qquad (a)$$

حال از رابطهٔ (*) رفع ابهام می‌کنیم: (از رابطهٔ (a) به جای I_o مقدارش را نیز قرار می‌دهیم):

$$V_2(0)=\lim_{s\to\infty}\frac{s}{2}\left[\frac{-3V_o(s+1)+(3s+1)V_o}{s+1}\right]+\frac{3}{2}\lim_{s\to\infty}\frac{ks}{s+\alpha}=0$$

$$V_2(0)=\lim_{s\to\infty}\frac{s}{s+1}\ (-V_o)+\frac{3}{2}k=0$$

$$\to\quad -V_o+\frac{3}{2}k=0 \quad\to\quad V_o=\frac{3}{2}k \qquad (b)$$

حال فرض می‌کنیم $I_o=b$ باشد بنابه روابط (a) و (b) داریم:

$$I_o=b \quad , \quad V_o=\frac{b}{3} \quad , \quad k=\frac{2}{9}\,b \qquad \rightarrow \; I_s=\frac{\frac{2}{9}\,s}{s+\alpha}$$

$$\rightarrow \quad i_s(t)=\frac{2}{9}\;\left(1-\alpha e^{-\alpha t}\right)\,u(t)$$

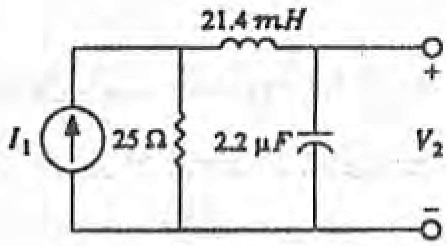
۲۲-الف- مدار RLC شکل (مسالهٔ ۱۵-۲۲ الف) را در نظر بگیرید. تابع شبکهٔ امپدانس انتقالی $H(s)=\dfrac{V_2(s)}{I_1(s)}$ را تعیین و منحنی اندازهٔ $|H(j\omega)|$ را برحسب ω در مقیاس لگاریتمی رسم کنید. این منحنی چه مشخصهٔ خاصی دارد؟ آیا علت پیدایش آن را می‌توانید بیان کنید.

ب- سؤال بند (الف) را در مورد مدار RC شکل (مسالهٔ ۱۵-۲۲ ب) پاسخ دهید.

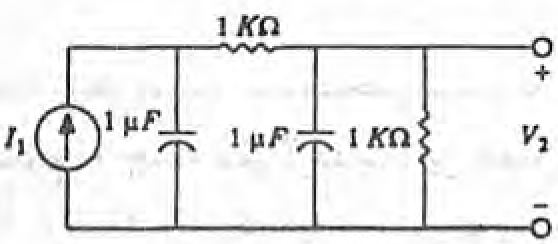
پ- مدار RC بند (ب) را با اضافه کردن یک ترانزیستور مطابق شکل (مسالهٔ ۱۵-۲۲ پ) به مدار RC اکتیو تبدیل می‌کنیم و برای ساده کردن طرز نمایش از مدل مدار معادل T سیگنال کوچک استفاده می‌کنیم. سؤال بند (الف) را در این مورد نیز جواب دهید. آیا مدار RC اکتیو می‌تواند جایگزین مدار RLC پسیو شود؟

ت- مدار نشان داده شده در شکل (مسالهٔ ۱۵-۲۲ ت) را در نظر بگیرید که در آن یک تقویت کنندهٔ ولتاژ ایده‌آل به عنوان قسمت اکتیو به مدار RC اضافه شده است. برای $k=2.65$ بار دیگر سؤال بند (الف) را پاسخ دهید.

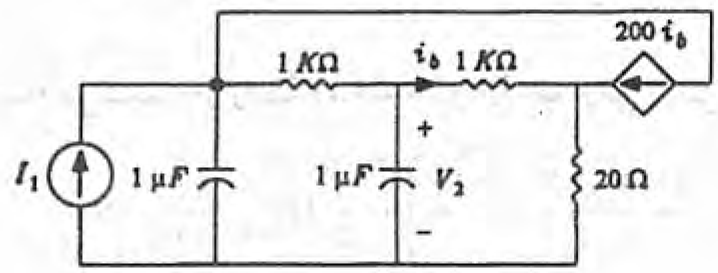
ث- از بندهای (الف) تا (ت) چه نتیجهٔ کلی می‌توانید بگیرید؟



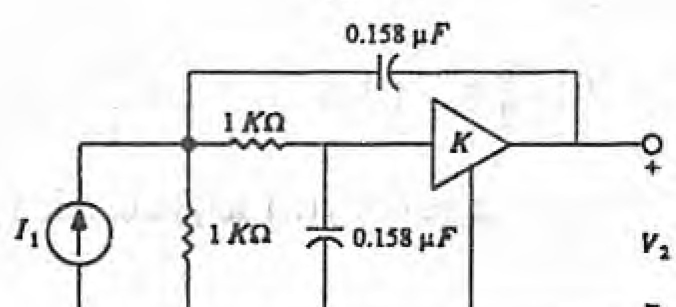
(الف)



(ب)



(پ)

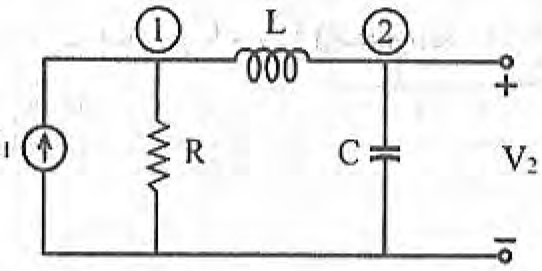


(ت)

شکل (مسألهٔ ۱۵-۲۲)

حل:

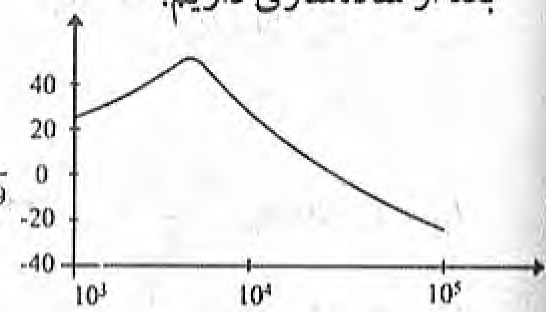
الف) با توجه به شکل و تجزیه و تحلیل گره داریم:



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R}+\frac{1}{Ls} & -\frac{1}{Ls} \\ -\frac{1}{Ls} & \frac{1}{Ls}+CS \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

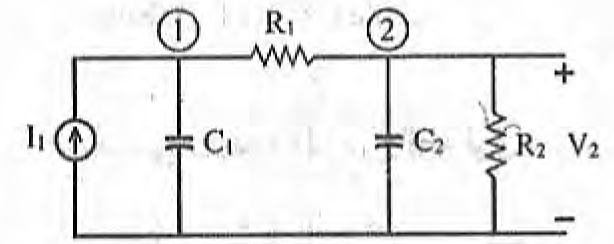
$$V_2=\frac{det\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{R}+\frac{1}{Ls} & I_1 \\ -\frac{1}{Ls} & 0 \end{bmatrix}\right)}{det\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{R}+\frac{1}{Ls} & -\frac{1}{Ls} \\ -\frac{1}{Ls} & \frac{1}{Ls}+Cs \end{bmatrix}\right)}=\frac{\frac{1}{Ls}I_1}{\frac{1}{RLs}+\frac{CS}{R}+\frac{C}{L}}$$

بعد از ساده‌سازی داریم:



$$\rightarrow \quad H(s)=\frac{V_2}{I_1}=\frac{R}{LCS^2+RCS+1}=\frac{25\times10^9}{47.085^2+55000s+10^9}$$

ب) با توجه به شکل و تجزیه و تحلیل گره داریم:

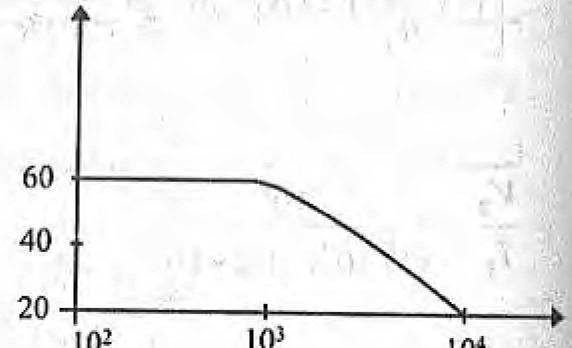


$$\begin{bmatrix} C_1s+\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+C_2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

از حل معادله برای V_2 داریم:

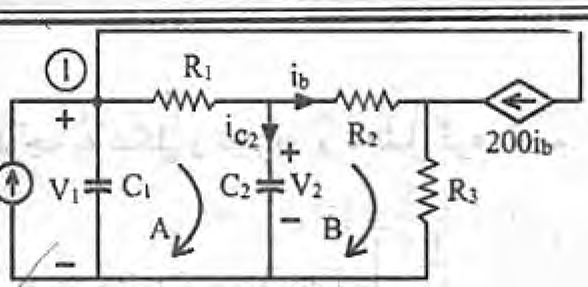
$$V_2=\frac{\frac{1}{R_1}I_1}{C_1C_2s^2+\left(\frac{C_1}{R_1}+\frac{C_1}{R_2}+\frac{C_2}{R_1}\right)s+\frac{1}{R_1R_2}}$$

$$H(s)=\frac{V_2}{I_1}=\frac{R_2}{R_1R_2C_1C_2s^2+(R_2C_1+R_1C_1+R_2C_2)s+1}$$



$$\rightarrow \quad H(s)=\frac{10^9}{s^2+10^3s+10^6}$$

پ) از KVL در حلقهٔ متشکل از خازن های C_1 و C_2 ومقاومت R_1 داریم:



$$V_1=V_2+R_1(I_b+I_c)=V_2+R_1(I_b+C_2sV_2)$$

$$\rightarrow \quad V_1=R_1I_b+(1+R_1C_2s)V_2 \qquad (I)$$

از KVL در حلقه متشکل از خازن C_2 و مقاومتهای R_2 و R_3 داریم:

$$V_2=R_2I_b+R_3(201)I_b=(201R_3+R_2)I_b$$

$$\rightarrow \quad I_b=\frac{V_2}{R_2+201R_3} \qquad (II)$$

با جایگذاری رابطهٔ (II) در رابطهٔ (I) داریم:

$$V_1=R_1\frac{V_2}{R_2+201R_3}+(1+R_1C_ss)V_2=(\frac{R_1}{R_2+201R_3}+1+R_1C_2s)V_2$$

ولی میدانیم:

$$V_1=C_1sI_{C_1} \, (*)$$

در گره (1) داریم:

$$I_{C_1}=I_1-200I_b-\frac{V_1-V_2}{R_1} \qquad (**)$$

بنا به روابط (*) و (**) داریم:

$$V_1=C_1s(I_1-200I_b-\frac{V_1-V_2}{R_1}) \quad (***)$$

با جایگزینی رابطهٔ (II) در رابطهٔ فوق داریم:

$$V_1=C_1sI_1-\frac{200C_1sV_2}{R_2+201R_3}-\frac{C_1s}{R_1}V_1+\frac{C_1s}{R_1}V_2$$

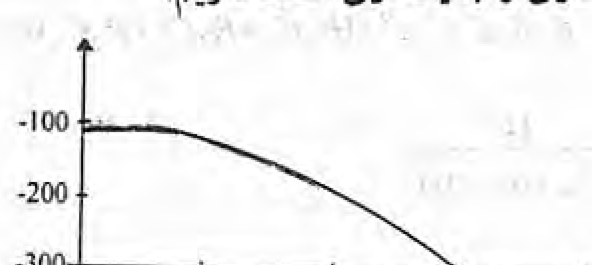
$$\rightarrow \quad (1+\frac{C_1}{R_1}s)V_1=(\frac{C_1s}{R_1}-\frac{200C_1s}{R_2+201R_3})V_2+C_1sI_1$$

با جایگذاری V_1 از رابطهٔ (I) در رابطهٔ فوق داریم :(بجای I_b در رابطهٔ (I) از رابطهٔ (II) قرار می‌دهیم)

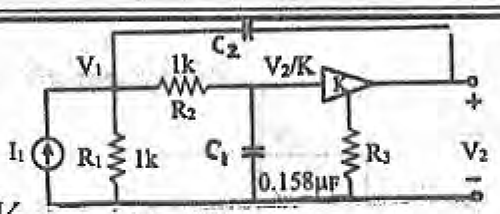
$$\left[(1+\frac{C_1}{R_1}s)(1+R_1C_2s+\frac{R_1}{R_2+201R_3})+\frac{200C_1s}{R_2+201R_3}-\frac{C_1}{R_1}s\right]V_2=C_1sI_1$$

بعد از مرتب سازی و جایگذاری اعداد داریم:

$$\frac{V_2}{I_1}=\frac{10^6}{s^2+10^9s+1.2\times10^{12}}$$



ت) با توجه به شکل داریم:



$$(KCL): I_1=\frac{V_1}{R_1}+\frac{V_1-\frac{V_2}{k}}{R_2}+\frac{V_1-V_2}{\frac{1}{C_2 s}}=(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+C_2 s)V_1-(C_2 s+\frac{1}{kR_2})V_2 \; (I)$$

$$(KCL): \frac{V_1-\frac{V_2}{k}}{R_2}=\frac{\frac{V_2}{k}}{\frac{1}{C_1 s}} \Rightarrow \frac{1}{C_1 s}(V_1-\frac{V_2}{k})=R_2\frac{V_2}{k} \to \frac{1}{C_1 s}V_1=(R_2+\frac{1}{C_1 s})\frac{V_2}{k}$$

$$\to \quad V_1=(R_2 C_1 s+1)\frac{V_2}{k} \quad (II)$$

با جایگذاری رابطهٔ (II) در رابطهٔ (I) داریم:

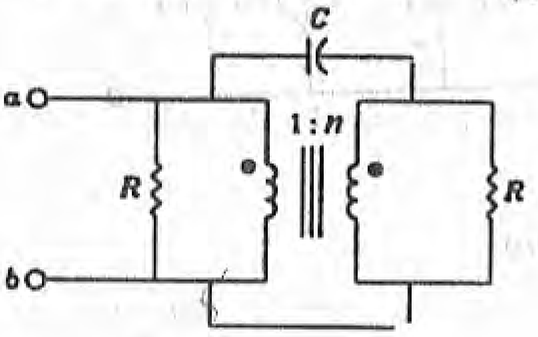
$$I_1=(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+C_2 s)(R_2 C_1 s+1)\frac{V_2}{k}-(C_2 s+\frac{1}{kR_2})V_2$$

بعد از مرتب سازی داریم:

$$\frac{V_2}{I_1}=\frac{1}{R_2 C_1 C_2 s^2+(C_1+C_2-kC_2+\frac{R_2 C_1}{R_1})s+\frac{1}{R_1}}$$

$$\frac{V_2}{I_1}=\frac{10^9}{0.025s^2+55.3s+10^6}$$

۲۳- در مدار شکل (مسالهٔ ۱۵-۲۳) به ازای چه مقدار n ، امپدانس دیده شده در سرهای a و b برابر $\frac{R}{2}$ می‌گردد؟

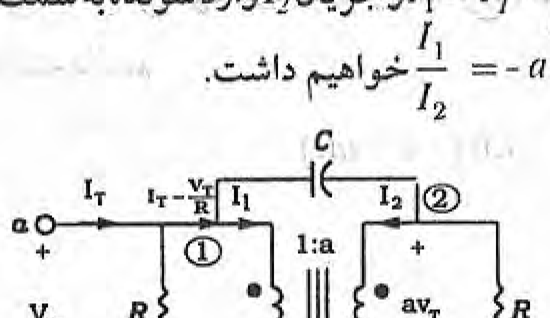


شکل (مسألهٔ ۱۵-۲۳)

حل:

منبع جریان I_T را در دو سر a و b وصل می‌کنیم و ولتاژ v_T دو سر آن را محاسبه می‌کنیم ولتاژ دو سر سمت چپ ترانس v_T و ولتاژ دو سر سمت راست آن av_T است با توجه به اینکه ولتاژ گره (1) برابر v_T و ولتاژ گره (2) برابر av_T است لذا جریان گذرنده از خازن برابر $sc\,(1-a)\,v_T$ است جریان I_1 وارد شونده به سمت چپ ترانس به صورت $I_1=I_T-\frac{v_T}{R}-sc\,(1-a)v_T$ و جریان I_2 وارد شونده به سمت راست ترانس به صورت $I_2=sc\,(1-a)\,v_T-\frac{av_T}{R}$ است با قرار دادن $\frac{I_1}{I_2}=-a$ خواهیم داشت.

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{I_T-\frac{v_T}{R}-sc(1-a)v_T}{sc(1-a)v_T-\frac{av_T}{R}}=-a$$

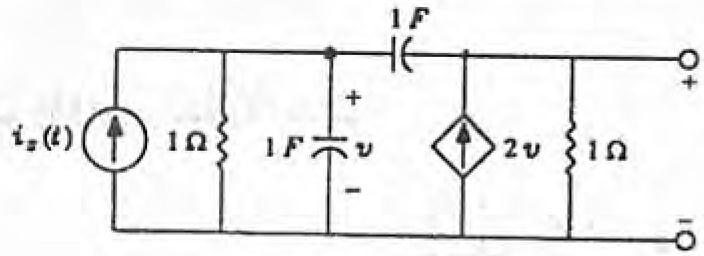


با ساده کردن این رابطه خواهیم داشت:

$$v_T = \frac{1}{\frac{1}{R}\left(1+a^2\right) + sc\,(1-a)^2}\, I_T$$

که در رابطه بالا ضریب I_T نشان دهنده امپدانس دیده شده از دو سر a و b است برای آنکه این امپدانس مستقل از c باشد باید ضریب آن صفر شود یعنی لازم است که $a=1$ باشد که در این صورت امپدانس دیده شده از دو سر a و b برابر $\frac{R}{2}$ می‌باشد که مطلوب ما است.

۲۴ - در مدار شکل (مسالهٔ ۱۵-۲۴) ورودی $i_s(t)$ را چگونه انتخاب کنیم تا فقط فرکانس های طبیعی مدار در خروجی ظاهر شود؟



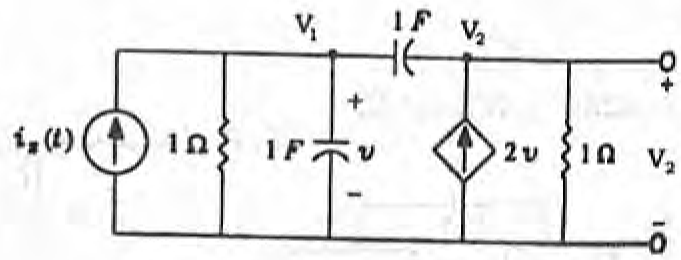
شکل (مسالهٔ ۱۵-۲٤)

حل:

با نوشتن معادلات گره در حوزهٔ فرکانس خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix} 1+2s & -s \\ -s & 1+s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_s(s) \\ 2v_1(s) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+2s & -s \\ -s-2 & 1+s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_s(s) \\ 0 \end{pmatrix}$$



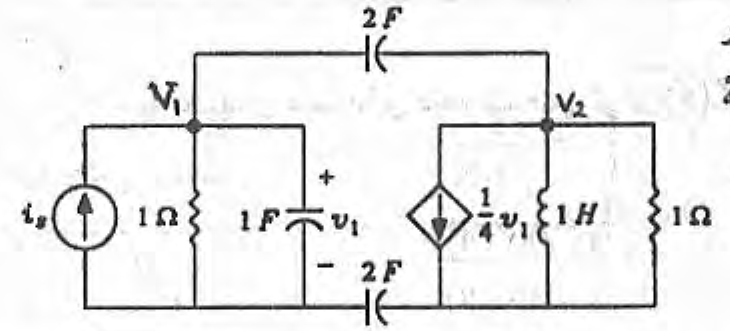
$$\begin{cases} (1+2s)\,V_1(s) - sV_2(s) = I_s(s) & (a) \\ (-s-2)V_1(s) + (1+s)V_2(s) = 0 \;\Rightarrow\; V_1(s) = \frac{1+s}{2+s}\,V_2(s) & (b) \end{cases}$$

$$(a),(b) \;\Rightarrow\; H(s) = \frac{V_2(s)}{I_s(s)} = \frac{s+2}{s^2+s+1}$$

$$V_o(s) = V_2(s) = \frac{s+2}{s^2+s+1}\, I_s(s)$$

برای اینکه در خروجی فقط فرکانسهای طبیعی ظاهر می‌شود (ریشه‌های مخرج) لازم است که عامل $(s+2)$ صورت را از بین ببریم بنابراین باید داشته باشیم.

$$I_s(s) = \frac{1}{s+2} \quad \Rightarrow \quad i_s(t) = e^{-2t}u(t)$$



۲۵- می‌خواهیم فرکانس های طبیعی متغیر v_1 را در مدار شکل (مسالهٔ ۱۵-۲۵) از طریق محاسبهٔ قطبهای تابع شبکهٔ مناسبی به دست آوریم. این کار را انجام دهید.

حل:

دو خازن 2 فارادی در حلقه وسطی باهم سری هستند می‌توان بجای آنها خازن معادل 1 فارادی را قرار داد و مدار شکل زیر را بدست آورد با نوشتن معادلات گره در حوزه فرکانس خواهیم داشت.

$$\begin{pmatrix} 2s+1 & -s \\ -s & s+1+\frac{1}{s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I(s) \\ -\frac{1}{4}V_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2s+1 & -s \\ -s+\frac{1}{4} & s+1+\frac{1}{s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I(s) \\ 0 \end{pmatrix}$$

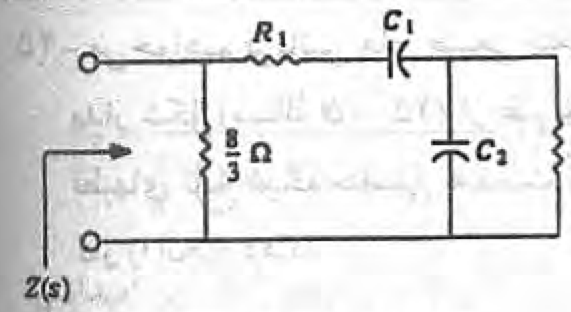
فرکانسهای طبیعی متغیر v_1 قطبهای تابع شبکه $\frac{V_1(s)}{I(s)}$ هستند با محاسبه تابع شبکه مربوطه خواهیم داشت.

$$\frac{V_1(s)}{I(s)} = \frac{s+1+\frac{1}{s}}{(2s+1)\left(s+1+\frac{1}{s}\right)+s\left(-s+\frac{1}{4}\right)} = \frac{4\left(s^2+s+1\right)}{4s^3+13s^2+12s+4}$$

$$4s^3+13s^2+12s+4=(s+2)\left(4s^2+5s+2\right)$$

$$(s+2)\left(4s^2+5s+2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} s_1=-2 \\ s_{2,3}=\frac{-5\pm j\sqrt{7}}{8} \end{cases}$$

۲۶- در مدار شکل (مسالهٔ ۱۵-۲۶) می‌دانیم که امپدانس ورودی $Z(s)$ دارای قطبهای 1- و 3- و صفرهای 2- و 4- است. مقدار مقاومت R_1 را تعیین کنید. (با ساده‌ترین راه حل)



شکل (مسألهٔ ۱۵-۲۶)

حل:

با توجه به قطبها و صفرهای داده شده می‌توان Z(s) را چنین نوشت.

$$Z(s)=k\frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)}$$

برای تعیین مقادیر k و R_1 از دو قضیه مقدار اولیه و مقدار نهایی استفاده می‌کنیم در فرکانس صفر (s=0) خازنها مدار باز هستند و از روی شکل داریم $Z(0)=\frac{8}{3}$ بنابراین با توجه به ضابطه Z(s) خواهیم داشت:

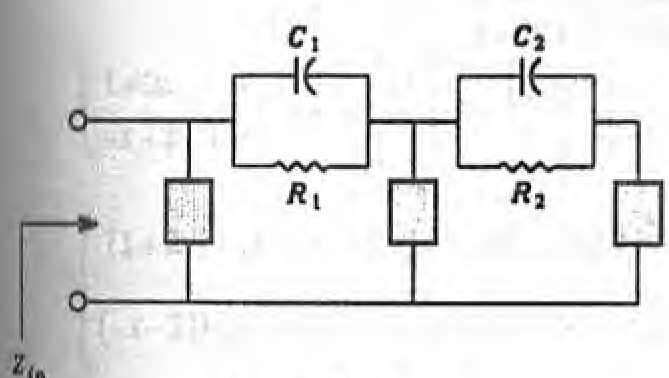
$$\frac{8}{3}=k\frac{8}{3}\quad\Rightarrow\quad[\,k=1\,]\quad\Rightarrow\quad Z(s)=\frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)}$$

در فرکانس بی‌نهایت خازنها اتصال کوتاه هستند و از روی شکل داریم:

$$Z(s)=\frac{8}{3}\;\|\;R_1=\frac{\frac{8}{3}\,R_1}{\frac{8}{3}+R_1}$$

با توجه به ضابطه Z(s) و رابطه بالا خواهیم داشت:

$$\frac{\frac{8}{3}\,R_1}{\frac{8}{3}+R_1}=1\quad\Rightarrow\quad\frac{8}{3}\,R_1=\frac{8}{3}+R_1\quad\Rightarrow\quad\left[R_1=\frac{8}{3}\,\Omega\right]$$

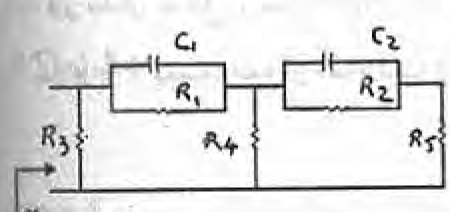


شکل (مسألهٔ ۱۵-۲۷)

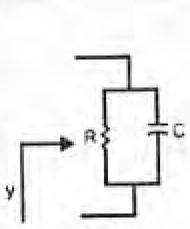
۲۷- با استفاده از مفهوم فرکانس طبیعی، مدارهای درون جعبه‌های شبکهٔ شکل (مسالهٔ ۱۵-۲۷) را به دست آورید. امپدانس نقطهٔ تحریک ورودی این مدار را به صورت $Z_{in}=\frac{s^2+13s+32}{3s^2+27s+44}$، $R_1C_1=1$ و $R_2C_2=\frac{1}{4}$ است.

حل:

چون Z_{in} دو قطب دارد و در مدار نیز دو خازن وجود دارد بنابراین جعبه‌ها باید مقاومت باشند پس حالاشکل مقابل را داریم:



برای مدار قسمت مقابل داریم:

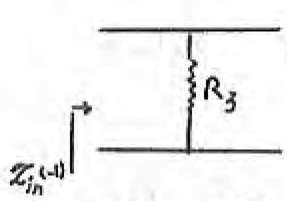


$$Y=\frac{1}{R}+S\;\rightarrow\;\text{اگر}\;S=-\frac{1}{RC}\rightarrow Y=0\rightarrow Z=\infty$$

بنابراین این قسمت از مدار بصورت اتصال باز عمل می‌کند.

حال اگر $S=-\frac{1}{R_1C_1}$ داریم: $S=-\frac{1}{R_1C_1}=-\frac{1}{1}=-1 \rightarrow \quad Z_{in}(-1)=1 \quad (*)$

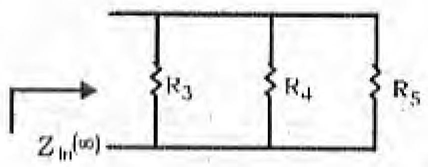
و نیز شکل مدار با توجه به اتصال باز شدن قسمت C_1 و R_1 بصورت زیر است:



$$Z_{in}(-1)=R_3 \quad (**)$$

بنابر روابط (*) و (**) داریم: $R_3=1$

حال اگر $S\rightarrow\infty$ میل دهیم، $\frac{1}{CS}=0$ می‌گردد بنابراین خازنها اتصال کوتاه می‌گردد و در این فرکانس مدار معادل زیر را خواهیم داشت:



با توجه به رابطهٔ Z_{in} برای $Z_{in}(\infty)$ داریم:

$$Z_{in}(\infty)=\lim_{s\rightarrow\infty}\frac{s^2+13s+32}{3s^2+27s+44}=\frac{1}{3}$$

حال با توجه به شکل معادل داریم:

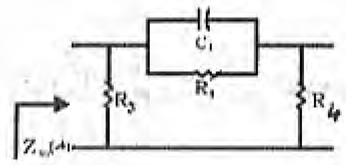
$$\frac{1}{Z_{in}(\infty)}=\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5} \quad \rightarrow \quad 3=1+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}=2 \quad (I)$$

با توجه به داده‌های مسأله $R_2C_2=\frac{1}{4}$ بنابراین برای فرکانس $S=-\frac{1}{R_2C_2}=-4$ داریم:

$$Z_{in}(-4)=\frac{1}{13}$$

و نیز مدار معادله بصورت شکل زیر در می‌آید:



$$Z_{in}=(R_4+\frac{1}{G_1+SC_1})\,||\,R_3$$

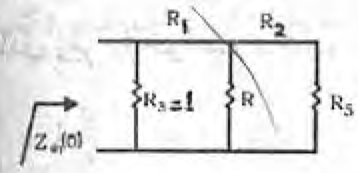
$$Z_{in}=\frac{R_4+\frac{1}{G_1+SC_1}}{R_4+\frac{1}{G_1+SC_1}+1}=\frac{1+R_4G_1+R_4SC_1}{1+R_4G_1+R_4SC_1+G_1+SC_1}$$

$$Z_{in}=\frac{1}{1+\frac{G_1-4C_1}{1+R_4(G_1-4C_1)}}=\frac{1}{13} \rightarrow \frac{G_1-4C_1}{1+R_4(G_1-4C_1)}=12$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{R_4+\frac{1}{G_1-4C_1}}=12 \quad \rightarrow \quad R_4+\frac{R_1}{1-4R_1C_1}=\frac{1}{12} \rightarrow$$

$$R_4+\frac{R_1}{-3}=\frac{1}{12} \rightarrow R_1=3R_4-\frac{1}{4} \quad (II)$$

حال اگر $S\rightarrow 0$ میل دهیم خازنها اتصال باز می‌شوند و شکل معادل زیر حاصل می‌شود:



$$Z_{in}(0)=\frac{32}{44}=\frac{8}{11}$$

با توجه به شکل داریم:

$$Z_{in}(0)=\left(\frac{(R_2+R_5)R_4}{R_2+R_5+R_4}+R_1\right)\parallel 1$$

$$Z_{in}(0)=\frac{8}{11}=\frac{(R_2+R_5)R_4+R_1(R_2+R_5+R_4)}{(R_2+R_5)R_4+R_1(R_2+R_5+R_4)+R_2+R_4+R_5} \quad (III)$$

چون تعداد معادلات کمتر از تعداد متغیرها است بنابراین جواب های متعددی داریم که یکی از جواب ها

را بصورت زیر میتوان برای R_4 ، R_5 یافت:

در رابطهٔ (II) صورت را مساوی 8 و مخرج را مساوی 11 در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases}(R_2+R_5)R_4+R_1(R_2+R_5+R_4)=8 & (a)\\ (R_2+R_5)R_4+R_1(R_2+R_5+R_4)+R_2+R_4+R_5=11 & (b)\end{cases} \Rightarrow$$

$$R_2+R_4+R_5=11-8=3 \quad \rightarrow \quad R_2=3-R_4-R_5$$

رابطهٔ (a) را بصورت زیر تصحیح می‌کنیم:

$$(R_2+R_5+R_4-R_4)R_4+3R_1=8$$

$$\rightarrow \quad (3-R_4)R_4+3R_1=8$$

بنابر رابطهٔ (II) و رابطهٔ فوق داریم:

$$(3-R_4)R_4+3\left(3R_4-\frac{1}{4}\right)=8$$

با حل معادله فوق R_4 بصورت مقابل بدست می‌آید:

$$R_4=\frac{24\pm 20.88}{4}$$

با جایگذاری R_1 در روابط (I) و (II) و (III) داریم:

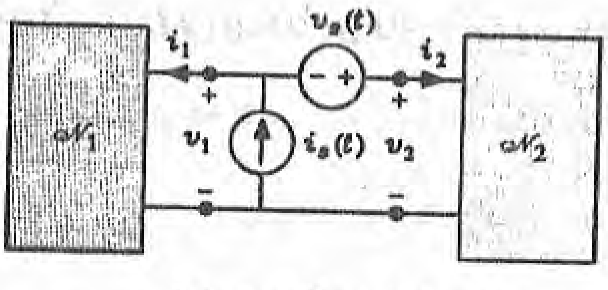
$$\begin{cases} R_4=11.22\Omega \rightarrow R_1=33.41 \rightarrow R_5=0.523 \rightarrow R_2=-9.743 \\ R_4=0.78\Omega \rightarrow R_1=2.09 \rightarrow R_5=1.39 \rightarrow R_2=0.83 \end{cases}$$

اولین سطر جواب ها غیر قابل قبول است زیرا مقاومت R_2 مقداری منفی است بنابراین یکی از جواب ها

بصورت مقابل می‌باشد:

$$\begin{cases} R_3=1\Omega \\ R_4=0.78\Omega \\ R_5=1.39\Omega \end{cases}$$

۲۸- فرض کنید یک قطبی‌های خطی $\mathcal{N}_1$ و $\mathcal{N}_2$ در مدار شکل (مسالهٔ ۱۵-۲۸) دارای امپدانس های ورودی $Z_1(s)$ و $Z_2(s)$ مشخص شده و به صورت زیر باشند:



شکل (مسالهٔ ۱۵-۲۸)

$$Z_1(s)=\frac{N_1(s)}{D_1(s)} \quad \text{و} \quad Z_2(s)=\frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

که در آن $N_1(s)$، $N_2(s)$ و $D_1(s)$ و $D_2(s)$ چندجمله‌ای های معلوم بوده و $N_k(s)$ و $D_k(s)$ نسبت به هم اول هستند ($k=1$ و 2) شرط لازم و کافی برای اینکه شبکهٔ به هم پیوستهٔ شکل (مسالهٔ ۱۵-۲۸) به طور نمایی پایدار باشد، چیست؟ به عبارت دیگر برای اینکه برای جریانهای کوچک پالسی $i_s(t)$ یا ولتاژهای کوچک پالسی $v_s(t)$ وقتی که $t\to\infty$، متغیرهای $i_1(t)$، $i_2(t)$، $v_1(t)$ و $v_2(t)$ به سوی صفر میل کنند، چه شرطی باید برقرار باشد؟

حل:

از روی شکل میتوان دریافت.

$$\frac{V_1(s)}{I_1(s)}=\frac{N_1(s)}{D_1(s)}=Z_1(s) \quad (I)$$

$$\frac{V_2(s)}{I_2(s)}=\frac{N_2(s)}{D_2(s)}=Z_2(s) \quad (II)$$

از روی KVL می‌توان نوشت:

$$V_1=-V_s+V_2 \quad (*)$$

همچنین از روی KCL داریم:

$$I_s=I_1+I_2=\frac{V_1}{Z_1}+\frac{V_2}{Z_2}$$

$$(*) \rightarrow I_s=\frac{-V_s+V_2}{Z_1}+\frac{V_2}{Z_2}=\frac{-V_s}{Z_1}+(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2})V_2$$

$$\rightarrow \quad V_2(s)=\frac{I_s+\frac{V_s}{Z_1}}{\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}}=\frac{(V_s+Z_1I_s)Z_2}{Z_1+Z_2}$$

حال با توجه به روابط (I) و (II) داریم:

$$V_2(s)=\frac{(V_s+\frac{N_1}{D_1}I_s)\frac{N_2}{D_2}}{\frac{N_1}{D_1}+\frac{N_2}{D_2}} \qquad (III)$$

معادلات $I_s(t)$ و $V_s(t)$ را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\begin{cases} i_s(t)=u(t) \\ v_s(t)=u(t) \end{cases} \rightarrow \quad \begin{cases} I_s(s)=\frac{1}{s} \\ V_s(s)=\frac{1}{s} \end{cases}$$

با جایگذاری روابط فوق در رابطهٔ (III) و ضرب طرفین در s داریم:

$$SV_2(s)=\frac{s(\frac{1}{s}+\frac{N_1}{D_1}\frac{1}{s})\frac{N_2}{D_2}}{\frac{N_1}{D_1}+\frac{N_2}{D_2}}$$

حال داریم:

$$\lim_{t\to\infty} v_2(t)=\lim_{s\to 0} SV_2(s)=\frac{\lim(1+\frac{N_1(s)}{D_1(s)})\frac{N_2(s)}{D_2(s)}}{\frac{N_1(s)}{D_1(s)}+\frac{N_2(s)}{D_2(s)}}=\lim_{s\to 0}\frac{\left[D_1(s)+N_1(s)\right]\ N_2(s)}{N_1(s)D_2(s)+N_2(s)D_1(s)}$$

$$\lim_{t\to\infty} v_2(t)=\frac{(D_1(0)+N_1(0)N_2(0)}{N_1(0)D_2(0)+N_2(0)D_1(0)}=0 \rightarrow \begin{cases} D_1(0)=-N_1(0)\rightarrow Z_1(0)=-1 \\ N_1(0)D_2(0)+N_2(0)D_1(0)\neq 0 \end{cases}$$

بنابراین برای اینکه $\lim_{t\to\infty} v_2(t)=0$ گردد بایستی $Z_1(0)=-1$, $Z_1(0)\neq -Z_2(0)$ باشد.

و همچنین برای V_1 نیز می‌توان نوشت:

$$V_1=-V_s+V_2=-V_s+\frac{(V_s+\frac{N_1}{D_1}I_s)\frac{N_2}{D_2}}{\frac{N_1}{D_1}+\frac{N_2}{D_2}}$$

$$V_1=\frac{(-V_s+\frac{N_2}{D_2}I_s)}{\frac{N_1}{D_1}+\frac{N_2}{D_2}}=\frac{(-D_2V_s+N_2I_s)N_1}{N_1D_2+N_2D_1}$$

$$\lim_{t\to\infty}=\lim_{s\to 0}SV_1(s)=\lim_{s\to 0}\frac{(-D_2(s)+N_2(s))N_1(s)}{N_1(s)D_2(s)+N_2(s)D_1(s)}=0\ \rightarrow$$

$$\begin{cases}N_2(0)=D_2(0)\ \rightarrow\ Z_2(0)=1\\ N_1(0)D_2(0)+N_2(0)D_1(0)\neq 0\ \rightarrow\ Z_1(0)\neq -Z_2(0)\end{cases}$$

بنابراین برای اینکه $\lim_{t\to\infty} v_1(t)=0$ گردد بایستی $Z_2(0)=1$ و $Z_1(0)\neq -Z_2(0)$ باشد. با توجه به دو نتیجه فوق می‌توان اظهار داشت برای اینکه شبکه به طور نمایی پایدار باشد باید داشته باشیم:

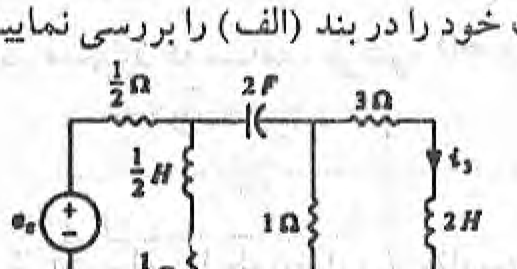
$$\begin{cases}Z_1(0)=-1\\ Z_2(0)=1\\ Z_1(0)\neq -Z_2(0)\end{cases}$$

ولی چون این سه رابطه با همدیگر برقرار نمی‌باشند بنابراین سیستم همیشه ناپایدار است.

۲۹-الف- در مورد تعداد صفرها و تعداد قطبهای تابع شبکهٔ $H(s)=\dfrac{I_2(s)}{E_s(s)}$ مدار شکل (مسالهٔ ۱۵-۲۹) و محل قرارگرفتن آنها در صفحهٔ s چه می‌دانید؟ هر آنچه را که درست می‌دانید، بیان کنید.

ب- به کمک تحلیل مش تابع شبکهٔ H(s) را حساب کنید و صفرها و قطب های آن را مشخص نمایید و درست بودن (یا درست نبودن) نظرات خود را در بند (الف) را بررسی نمایید.

پ- با اضافه کردن تنها یک عنصر R ، L یا C به مدار، یک صفر تکراری برای تابع شبکه ایجاد نمایید (همهٔ جوابها را تعیین کنید)



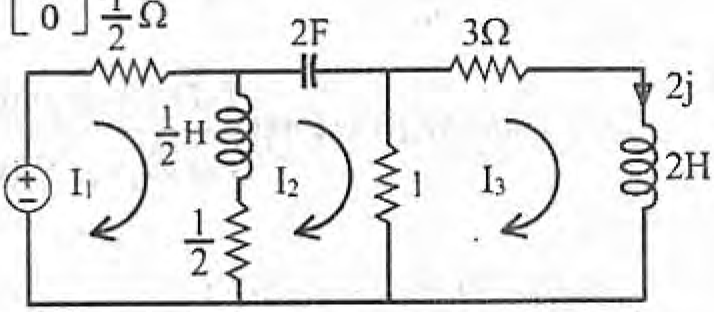
شکل (مسألهٔ ۱۵-۲۹)

حل:

$s=0$ یک صفر تابع شبکه است زیراکه به ازای $s=0$، امپدانس خازن بی‌نهایت شده و مدار باز می‌گردد. و نیز $I_3=0$ می‌گردد.

ب) از تجزیه و تحلیل مش میتوان نوشت:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{s}{2}+\frac{1}{2} & -\frac{s}{2}-\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{s}{2}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{s}{2}+\frac{1}{2s}+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1+3+2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} \frac{s+2}{2}I_1-\frac{(s+1)}{2}I_2=E_s \quad (a) \\ -\frac{(s+1)}{2}I_1+\frac{s^2+3s+1}{2s}I_2-I_3=0 \quad (b) \\ -I_2+(4+2s)I_3=0 \quad (c) \end{cases}$$

I_2 ، I_1 را از رابطهٔ (b) ، (c) برحسب I_3 پیدا می‌کنیم:

$$(c) \rightarrow I_2=2(s+2)I_3$$

$$(b) \rightarrow I_1=\frac{2(s^2+4s+2)}{s}I_3$$

با جایگذاری I_2 و I_1 در رابطهٔ (a) داریم:

$$\frac{s+2}{2}\times\frac{2(s^2+4s+2)}{s}I_3-\frac{(s+1)}{2}\times 2(s+2)I_3=E_s$$

$$H(s)=\frac{I_3(s)}{E(s)}=\frac{s}{3s^2+8s+4}$$

صفرها: $s=0$

قطب ها: $3s^2+8s+4=0 \rightarrow s_1=-2 \;,\; s_2=-\frac{2}{3}$

بنابراین همچنان که مشاهده می‌شود $s=0$ همانطوریکه در قسمت (الف) اشاره شد صفر تابع شبکه است.

پ) اگر یک سلف را بطور موازی با مقاومت یک اهمی قرار دهیم ،یک صفر تکراری خواهیم داشت زیرا که مدار متشکل از سلف 2H و مقاومت 3Ω اتصال کوتاه میشود و در نتیجه $I_3=0$ می‌گردد.