سرکار خانم رمضانی

تمرین ۱ جبر خطی

سارا آذرنوش ۹۸۱۷۰۴۴۸

$\|x\| = \|y\| = 1$

آ)

$(x-y)^T(x-y) \overset{?}{=} 2(1-x^Ty)$ ✓

$\underbrace{x^Tx}_{\|x\|^2} - y^Tx - x^Ty + \underbrace{y^Ty}_{\|y\|^2} \overset{?}{=} 2 - 2x^Ty$

$, \; y^Tx = x^Ty$

$\|x\|^2 = \|y\|^2 = 1$

$\Rightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2x^Ty = 2 - 2x^Ty$ ✓ به ازای تمام مقادیر برقرار است

ب)

$\|x - \tfrac{1}{2}y\|^2 \overset{?}{=} \tfrac{5}{4} - x^Ty$ ✓

$= (x - \tfrac{1}{2}y)^T(x - \tfrac{1}{2}y) = x^Tx + \tfrac{1}{4}y^Ty - \tfrac{1}{2}y^Tx - \tfrac{1}{2}x^Ty = 1 + \tfrac{1}{4} - x^Ty$

$= \tfrac{5}{4} - x^Ty$ ✓ الزاماً درست

ج)

$$\frac{x^Ty}{x^Tx} - \frac{y^Ty}{x^Ty\,y^Ty} = 0 \quad ✗$$

$$\frac{x^Ty}{\|x\|^2} - \frac{\|y\|^2}{x^Ty\|y\|^2} = \frac{x^Ty}{1} - \frac{1}{x^Ty} = 0 \quad (x^Ty)^2 = 1 \quad \boxed{x^Ty = \pm 1} \quad \theta = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$$

در این حالت برقرار است لزوماً صحیح نیست

۱۴)

$$\|y + \tfrac{2}{3}x\|^2 = \tfrac{4}{9}(1 + 4x^Ty) \quad \times$$

$$(y+\tfrac{2}{3}x)^T(y+\tfrac{2}{3}x) = \underbrace{y^Ty}_{\|y\|^2} + \tfrac{2}{3}y^Tx + \tfrac{2}{3}x^Ty + \tfrac{4}{9}\frac{x^Tx}{\|x\|^2}$$

$$= 1 + \tfrac{4}{9} + \tfrac{4}{3}x^Ty = \tfrac{13}{9} + \tfrac{4}{3}x^Ty \overset{?}{=} \tfrac{4}{9} + \tfrac{16}{9}x^Ty$$

$$\Rightarrow \tfrac{9}{9} = \tfrac{4}{9}x^Ty \qquad x^Ty = \tfrac{9}{4} \qquad \overset{\times}{\Longrightarrow} x^Ty \neq \tfrac{9}{4}$$

$x^Ty = \|x\|\|y\|\cos\theta$ ، $-1 \le \cos\theta \le 1$ زیرا نمی‌شود پس برقرار نیست

۱۵)

$$x^Tx + x^Tx - 2y^Ty = x^Ty \quad \times$$

$$2\|x\|^2 - 2\|y\|^2 \overset{?}{=} x^Ty \qquad 2-2 \overset{?}{=} x^Ty \qquad \boxed{x^Ty = 0} \to x \perp y$$

در این صورت برقرار است

۱۶)

$$\frac{\frac{1}{2}y^Ty\; x^Tx}{y^T(\frac{1}{4}y)} + \frac{\|x\|^2}{\|x\|^2\|y\|^2} - \frac{y^Tyy^Ty}{x^Tx} = 1 \quad ✓$$

$y^Ty = \|y\|^2 = 1$

$x^Tx = \|x\|^2 = 1$

$$\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}y^Ty} + \frac{1}{1} - \frac{1}{1} = \frac{1/4}{1/4} + 1 - 1 = \boxed{1}$$

به ازای تمام مقادیر برقرار است

۱۲

$b_1 \dots b_k$ هر یک، یک ترکیب خطی از $a_1 \dots a_m$

c یک ترکیب خطی از $b_1 \dots b_k$

حکم: c یک ترکیب خطی از $a_1, \dots a_m$

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_m a_m \rightarrow b_i = \beta_{i1} a_1 + \beta_{i2} a_2 + \dots \beta_{im} a_m$$

$$C = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_k b_k$$

$$\Rightarrow C = \alpha_1 (\beta_{11} a_1 + \beta_{12} a_2 + \dots \beta_{1m} a_m) + \alpha_2 (\beta_{21} a_1 + \dots \beta_{2m} a_m) + \dots + \alpha_k (\beta_{k1} a_1 \dots \beta_{km} a_m)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} \alpha_i \beta_{ij} a_j$$

بنابراین c یک ترکیب خطی از $a_1 \dots a_m$ است

۳) n مواد اولیه ، بردار n تایی q ، q_i مقدار مواد اولیه i

k تأمین کننده ، قیمت بردار n تایی p ،

انتخاب تصادفی i امین کننده حلونه P

تقسیم سفارش به ۲ ، انتخاب ۲ تأمین کننده و سفارش $1/2 \times q$ ، بهتر؟

در این سوال انتخاب بهترین تأمین کننده برابر است با تأمین کننده ای که کمترین هزینه به ازای خرید تمام مواد اولیه تأمین می شود

$P_a \cdot q =$ هزینه کل تأمین کننده a

$\min\{p_i \cdot q\} , 1 \leq i \leq k$ به ازای همه فروشنده ها مقدار کل را حساب می کنیم

بخش دوم

$\frac{1}{2} P_a q + \frac{1}{2} P_b q = \frac{1}{2}(P_a q + P_b q) \rightarrow$ گفته شده

$P_M q = X$ کمترین هزینه $\xRightarrow{x \leq P_a q} 2x \leq P_a q + P_b q \rightarrow x \leq \frac{1}{2}(P_a q + P_b q)$

روش پیشنهادی بیشتر مساوی کمترین مقدار است و بهتر نیست

۴. ۲۰۰ بردار به طول 4×10^6

آ) بایت ذخیره؟

ب) flops برای ذخیره ترکیب خطی

ج) مدت محاسبه با در کامپیوتر $1\ \mathrm{Gflops}/s$

آ) هر درایه ۸ بایت برای ذخیره سازی نیاز است

$$4\times10^6\times200\times8=\boxed{6.4\times10^9\ \mathrm{Byte}}$$

ب)

$200n \rightarrow$ ضرب

$(200-1)n \rightarrow$ جمع

$$\underbrace{200\times4\times10^6}_{\text{ضرب}}+\underbrace{199\times10^6\times4}_{\text{جمع}}=\boxed{1596\times10^6\ \mathrm{flops}}$$

ج)

$$1\ \mathrm{Gflops}/s=10^9\ \mathrm{flops}/s$$

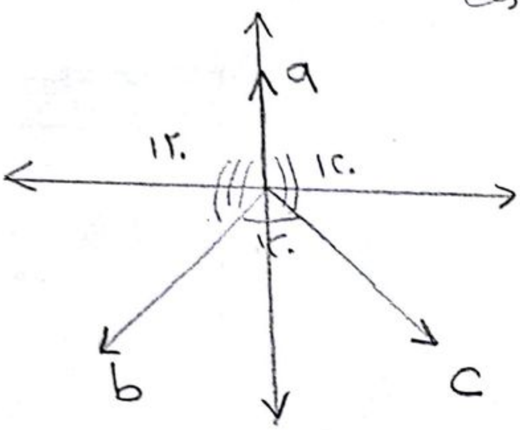
$$\frac{1596\times10^6\ \mathrm{flops}}{10^9\ \mathrm{flops}/s}=\boxed{1{,}596\ s}$$

زمان

۱۵) آ) ۳ بردار ناصفر در xy که حاصل ضرب داخلی ۲ به ۲ منفی باشد؟

ب) حداکثر چند بردار؟

آ) درصورتی که اندازه بردارها مثبت باشد با توجه به فرمول درصورتی که $\cos\theta < 0$ باشد حاصل ضرب داخلی منفی است



$$\cos\theta < 0 \leftarrow \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$$

۳ بردار و ضرب ۲ تا ۲ تای منفی باشد ← $\theta = 120^\circ$

$$a \cdot b = \|a\|\|b\| \cos \overset{120}{\theta} < 0$$

$$a \cdot c < 0$$

$$b \cdot c < 0$$

ب) اگر تعداد بردارها بیشتر از ۳ شود (برای مثال ۴) برقرار نمی شود

۴ بردار ← a, b, c, d

$$a \cdot b = \|a\|\|b\| \cos\theta_{ab}$$

$$b \cdot c = \|a\|\|c\| \cos\theta_{bc}$$

$\vdots$

$$\rightarrow \underbrace{\theta_{ab} + \theta_{bc} + \theta_{cd} + \theta_{da}}_{X} = 360$$

از طرفی

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow X > 360 \quad X$$

پس برای بیشتر برقرار نمی باشد و حداکثر ۳ بردار یافت می شود

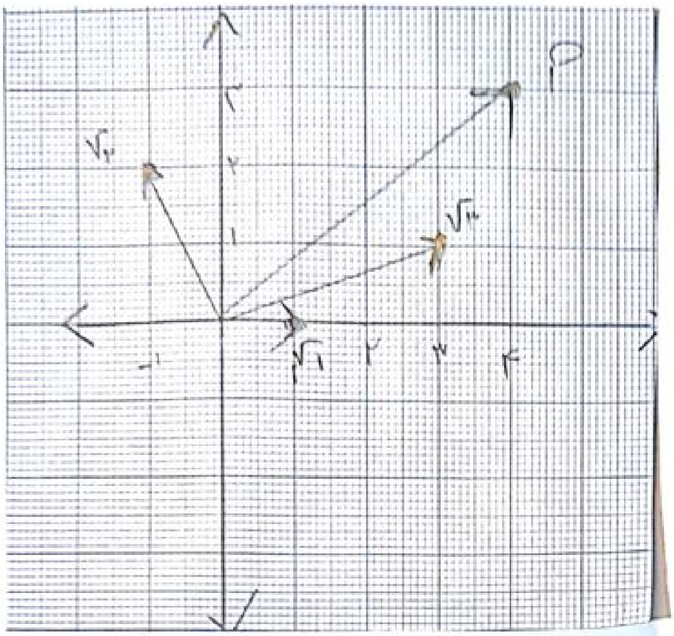
Scanned by CamScanner

$$V_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\qquad V_3=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$$
$$V_2=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}\qquad P=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$$

۲) رسم ؟

چرا P یک ترکیب affine از $V_1 V_2 V_3$ است ؟

ترکیب affine برای P ؟



توضیح: هر نقطه P از فضای n بعدی یک ترکیب affine از بردارهای V_1 و ... V_n است $\Longleftrightarrow$ $P-V_1$ ترکیب خطی از $V_2-V_1 \dots V_p-V_1$ باشد ، $1\leq i\leq p$, $i\neq 2$

$$P-V_1=C_2(V_2-V_1)+C_3(V_3-V_1)+\dots+C_p(V_p-V_1) \quad (*)$$
$$P=V_1(1-C_2-\dots-C_p)+\dots \quad (\star)$$

$$\Rightarrow\quad P-V_1=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$$
$$V_2-V_1=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$$
$$V_3-V_1=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

در $(*)$ جایگذاری می‌کنیم

$$\longrightarrow \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2C_2\\2C_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2C_3\\1C_3\end{bmatrix}$$

$$C_3=2$$
$$C_2=1/2$$

یک ترکیب خطی است پس P یک ترکیب affine از بردارهای $V_1,\dots,V_n$ است

$$(\star)\to P=V_1(1-C_2-C_3)+C_2V_2+C_3V_3$$

مانند بالا
$$\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+C_2\left(\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)+C_3\left(\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$$
$$\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

$$C_2=1/2$$
$$C_3=2\longrightarrow P=-3/2\,V_1+1/2\,V_2+2V_3$$
$$C_1=-3/2$$