میان ترم جبر خطی /

سارا آذرنوش ۹۸۱۷۰۶۴۸

۱) الف)

$\|x\|_2 = \sqrt{4+0+16+\underbrace{9/4+11/4}_{5}} = \sqrt{25} = 5$

$\|x\|_\infty \Rightarrow \max(2, 0, \ldots) = 4$

ب)

$\|y\|_2 = \sqrt{2^{2t} + \underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{1}} = \sqrt{2^{2t}+1}$

$\|y\|_\infty = \max(2^t + \sin t + \cos t) = 2^t \quad t>0$

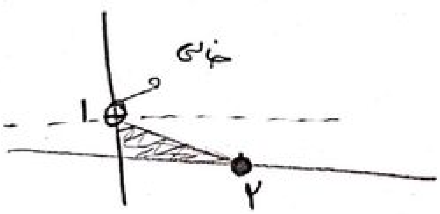
۲) در مجموعه ما، ۸ > ۲ که ۲ طبق قضیه ⇐ مستقل خطی نیست ⇐ affine independent نیست

۳)

$\underset{1\times 2 \;\; 2\times 10 \;\; 10\times 2}{ABC}$ → AB → ۱×۱۰

→ BC → ۲×۲ ✓ بهتر است

۴)



→ Convex → affine + مثبت

Convex hull → کوچکترین و مناسب‌ترین کاورس

۵) طبق تعریف گفته شده در اسلاید

$u \cdot v = \mathrm{trace}(u \otimes v)$

۶) شکل را با ماتریس مجاورت مدل می‌کنم و تا توان ۲ می‌رسانم

$$1)\; \begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x & 0 & 1 & 1 \\ y & 1 & 1 & 1 \\ z & 1 & 1 & 1 \end{array} \rightarrow 2)\; \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

$A^T = -A$

۱۱) نادرست، نه الزوماً مانند طاس ... x^2 , x را برقرار است

۱۲) درست ← $x^TAx = (x^TAx)^T = x^TA^Tx \to x^T(-A)x \to x^TAx = 0$

۱۳) درست ← onetoone ← هر عدد فقط با یکی و اندازه برد و دامنه یکی است چون مربع است ← پوشا
پوشا هست و هم یکی ← باید برابر و تک به تک باشند ← onetoone

۱۴) نادرست ← ردیف‌ها هستند ستون‌ها الزوماً مستقل نیستند

۱۵) نادرست ← مثبت نیز هستند ← پس convex ← متغیر + affine

۱۶) درست ← هم ارز هستند ← رنک یکسان ← فضای ستون‌ها برابر

$u_c = u_1 \times u_2 = [\text{[illegible]}] \times [\text{[illegible]}] = [\text{[illegible]}]$

۲)

$\hat{u}_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{u_1}{\sqrt{۸}}$

$\hat{u}_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{u_2}{\sqrt{۲۹}}$

$\hat{u}_c = \frac{u_c}{\|u_c\|} = \frac{u_c}{۱۴۸}$

ب.۱

$\cos\theta_1 = \frac{۲}{\sqrt{۵}} \rightarrow \theta_1 = \arccos\left(\frac{۲}{\sqrt{۵}}\right)$

$\cos\theta_2 = \frac{۲}{\sqrt{۲۹}} \rightarrow \theta_2 = \arccos\left(\frac{۲}{\sqrt{۲۹}}\right)$

$\cos\theta_c = \frac{۵}{\sqrt{۱۴۵}} \rightarrow \theta_c = \arccos\left(\frac{۵}{۱۴۶}\right)$

۳) ماتریس

$A^k = 0$

$$\underset{I}{\cancel{I^2}} - \underset{0}{\cancel{A^k}} = -1 \times (I - A)(I + A + A^2 + \dots + A^{k-1})$$

$$I = (I - A)\underbrace{(-I - A - A^2 \dots - A^{k-1})}_{(I-A)^{-1}}$$

Scanned by CamScanner

$AB = 0, \; A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\dim(\ker(A)) + \dim(\ker(B)) \geq n$

$\downarrow$

$\leq \dim \ker(AB)$

$x \in \ker(AB) \Longleftrightarrow Bx \in \ker A \to x \in B^{-1}(\ker A \cap \operatorname{im} B)$

$\longrightarrow \ker B \oplus (\ker A \cap \operatorname{im} B)$

$$\xrightarrow{\dim} \dim \ker(AB) = \dim(\ker B \oplus (\ker A \cap \operatorname{im} B))$$

$$= \dim(\ker(B)) + \dim(\underbrace{\ker A \cap \operatorname{im} B}_{\subseteq \ker A}))$$

$$\Rightarrow \dim(\ker(AB)) \leq \dim(\ker(B)) + \dim(\ker(A))$$

$AB = 0 \Longrightarrow \operatorname{Im} B \subset \ker A \to \dim \operatorname{Im} B \leq \dim \ker A =$

$\dim \mathbb{R}^n - \dim \cancel{\operatorname{Im} A} = n - \dim \cancel{\operatorname{Im}} A$

$\dim(\ker(AB)) \geq n$

[redacted]

$$\begin{aligned} ۴a - ۲b + c &= ۵ \\ a - ۱b + ۱c &= ۲ \\ a + b + c &= ۰ \\ ۴a + ۲b + c &= ۳ \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} ۴ & -۲ & ۱ & ۵ \\ ۱ & -۱ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۲ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$