تمرین ٤

$M_{p\times p}$

لیسا آزادفروش ۹۸۱۷۰۴۶۸

۱)

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \to M_{q\times q}$$

$$A \times A^{-1} = I$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ 0 & A'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}$$

1) $A_{11}A'_{11} + A_{12}A'_{12} = I_p \longrightarrow A_{11}^{-1}$

2) $A_{11}A'_{12} + A_{12}A'_{22} = 0 \longrightarrow -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}$

3) $A_{22}A'_{21} = 0 \longrightarrow 0$

4) $A_{22}A'_{22} = I_q \longrightarrow A_{22}^{-1}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

۲) الف)

$X_{m\times m}$, $Y_{m\times n}$

استقرا روی n

$$\det\begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} = \det(X) \xrightarrow{n=1} \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{1+i+m} a_{ij} \det A_{i} = (-1)^{2(m+1)} \det X = \det X$$

استقرا: ادعا برای n = 1 درست است برای n+1 اثبات کنیم

$$\det\begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} X & Y' & y'' \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{1+m+i} a_{ij} \det A_i = (-1)^{2(m+1)} \det\begin{bmatrix} X & Y' \\ 0 & I \end{bmatrix} = \det(X)$$

برای n+1 نیز درست است پس استقرا برقرار است

ب)

$A_{m\times n}$, $B_{n\times m}$

$$\det\begin{bmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{bmatrix} = \det(A)\det(B)$$

$$\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{bmatrix}}_{Y}\underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix}}_{X}}_{Z} = \begin{bmatrix} AB & A \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\det(X) = \det(X^T) = \det(I) = 1$$

$$\det(Z) = \underbrace{\cancel{\det(X)}}_{1}\det(Y) = \det\begin{bmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{bmatrix} = \det(AB) = \det(A)\det(B)$$

س۳

الف)

$A_{n\times n}$, $V = x^T A x$, x بردار ستونی

$$\frac{\partial v}{\partial x} = x^T(A + A^T)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^T A (x+h) - x^T A x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^T A x + x^T A h + h^T A x + h^T A h - x^T A x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^T A h + x A^T h + h^T A h}{h} = \lim_{h \to 0} (x^T A + x^T A^T + h^T A) = x^T A + x^T A^T = x^T (A + A^T)$$

A ماتریس مربعی وارون پذیر

$$\frac{\partial A^{-1}}{\partial \alpha} = -A^{-1} \frac{\partial A}{\partial \alpha} A^{-1}$$

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = 0 \longrightarrow \frac{dA}{d\alpha} A^{-1} + A \frac{dA^{-1}}{d\alpha} \to \cancel{-A A^{-1}} \frac{dA^{-1}}{d\alpha} = -A^{-1} \frac{dA}{d\alpha} A^{-1}$$

۴) الف

$f = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + a_4 xy + a_5 xz + a_6 yz$ quadratic

$$x^T A x = \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^T}_{x^T} \begin{bmatrix} a_1 & \frac{a_4}{2} & \frac{a_5}{2} \\ \frac{a_4}{2} & a_2 & \frac{a_6}{2} \\ \frac{a_5}{2} & \frac{a_6}{2} & a_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{x}$$

ب)

$y = 9x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 \,, \; x^T x = 1 \rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \,, \; 0 \le x_i^2 \le 1$

$y = 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 6x_1^2 + x_2^2 = 6x_1^2 + x_2^2 + 3$

$\rightarrow x_1, x_2 = 0 \quad x_3 = 1 \rightarrow y = 3 \rightarrow \min$

$\rightarrow x_2, x_3 = 0 \quad x_1 = 1 \rightarrow y = 9 \rightarrow \max$

Scanned by CamScanner

$A^T A x > 0 \longrightarrow A \neq 0$ و $A > 0$

(۵

الف) ماتریس مثبت معین وارون پذیر؟

$$\longrightarrow \det(A)^2 = \det(A) = \det(A^T) = \det(A^T A) \neq 0$$

$\longrightarrow \det(A) \neq 0 \longrightarrow$ A وارون پذیر

ب) آیا ماتریس غیر متقارن می تواند مثبت نیمه معین باشد؟ بله

اگر $(x-y)^2$ و x^2+y^2 باشد $\longrightarrow x_1 = y \longrightarrow x^T A x = 0$

$x_1 \neq y \longrightarrow x^T A x > 0$

$$[x \quad y]\begin{bmatrix} \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ یا } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow x^2+y^2 \geq 0 \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow (x-y)^2 \geq 0$$

پ) آیا ... مثبت معین ؟ بله

$$[x \quad y]\begin{bmatrix} \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$x, y \neq 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow x^2+y^2 > 0$$

ج) $A \in R^{m \times n}$ ثابت کنید. AA^T و A^TA مثبت معین

$$x^T A A^T x = (Ax)(Ax)^T = \|A^T x\|^2 \geq 0$$

$$x^T A^T A x = (Ax)^T (Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0$$

$\mathrm{rank}(A) = \min(m, n) \longrightarrow x = 0 \longrightarrow Ax = 0 \;,\; A^T x = 0$

$\longrightarrow x \neq 0 \longrightarrow \|Ax\|^2 > 0$, $\|A^T x\| > 0 \longrightarrow AA^T, A^TA$ معین

۴)

الف) $A^T A$ = ماتریس نیمه معین مثبت ?

$$x^T A^T A x = x^T A^T \times A x = (Ax)^T A x = \|Ax\|^2 \geq ۲$$

ب) $null(A) = \{0\} \Rightarrow A = \text{full rank} \Rightarrow Ax = 0$

$\rightarrow x \neq 0 \quad \|Ax\|^2 > 0$

$\rightarrow x = 0 \quad \|Ax\|^2 \geq 0$