



## جبر خطی

نیم سال اول ۰۰-۰۱  
حمیدرضا ربیعی - مریم رضانی

تمرین سوم: ماتریس‌ها	زمان تحویل: تئوری: ۱ آذر ساعت ۱۶:۰۰، عملی: ۷ آذر ساعت ۲۳:۵۹
امتیاز تمرین: ۱۰ + ۱۰۰	ارسال با تاخیر: تئوری: امکان پذیر نیست، عملی: ۸ آذر ساعت ۱۷:۰۰

## بخش تئوری

لطفا توجه بفرمایید که امکان ارسال با تاخیر برای بخش تئوری وجود ندارد.

۱. (۱۰ نمره) ثابت کنید که اگر  $A$  یک ماتریس  $n \times n$  باشد، هیچ ماتریسی مانند  $X$  به ابعاد  $n \times n$  وجود ندارد که در معادله

$$AX - XA = I_n$$

صدق کند.

۲. فرض کنید که  $A$  یک ماتریس مربعی  $n \times n$  باشد. اگر یک عدد طبیعی مانند  $k$  وجود داشته باشد که به ازای آن رابطه

$$A^k = 0$$

برقرار باشد،

(آ) (۱۰ نمره) ثابت کنید که ماتریس  $I - A$  وارون پذیر است.

(ب) (۱۰ نمره) اگر  $k$  فرد باشد، ثابت کنید که ماتریس  $I + A$  نیز وارون پذیر است.

۳. ماتریس  $W$  را به ابعاد  $m \times n$  به فرم زیر در نظر بگیرید. ( $t_i$ ها اعداد حقیقی هستند)

$$W_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 & \dots & t_0^{n-1} \\ 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 & \dots & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_{m-1} & t_{m-1}^2 & t_{m-1}^3 & \dots & t_{m-1}^{n-1} \end{bmatrix}$$

(آ) (۱۰ نمره) ثابت کنید در صورتی که  $m \geq n$  باشد، ستون‌های ماتریس  $W$  مستقل خطی هستند.

۴. (آ) (۱۰ نمره) ثابت کنید که رتبه ماتریس  $A$  به ابعاد  $m \times n$  برابر ۱ است اگر و تنها اگر دو بردار ناصفر  $u$  و  $v$  به طول های  $m$  و  $n$  وجود داشته باشند که

$$A = uv^T$$

(ب) (۱۰ نمره) اگر ماتریس  $A$  یک ماتریس مربعی  $n \times n$  با رتبه ۱ باشد، ثابت کنید که

$$A^2 = \text{trace}(A)A$$

۵. (۱۵ نمره) فرض کنید که  $T$  یک تبدیل خطی از فضای  $n$  بعدی به فضای  $n$  بعدی و  $A$  یک ماتریس استاندارد برای این تبدیل باشد. ثابت کنید که  $T$  یک تبدیل وارون پذیر است اگر و تنها اگر  $A$  یک ماتریس وارون پذیر باشد. همچنین نشان دهید که در این حالت تبدیل خطی  $S$  که اینگونه تعریف می شود  $S(x) = A^{-1}x$  یک تابع یکتاست که دارای دو ویژگی  $S(T(x)) = x$  و  $T(S(x)) = x$  برای تمام  $x$  های فضای  $n$  بعدی است.

### بخش عملی

لطفاً برای سوالات این بخش از روش های جبر خطی استفاده کنید.

۱. (۲۰ نمره) گراف  $G$  را با مجموعه راس های  $V$  و یال های  $E$  در نظر بگیرید. فاصله یک راس تا راس دیگر برابر تعداد یال هایی است که در کوتاه ترین مسیر بین دو راس قرار دارد. فاصله راس  $v_i$  از بقیه رئوس را در نظر بگیرید. بیشینه این فاصله ها را عدد شعاعی راس  $v_i$  می نامیم. در این گراف راسی را بیابید که کوچک ترین عدد شعاعی را نسبت به بقیه رئوس داشته باشد.
۲. (۱۵ نمره) شما در این مسئله باید یک شبه فیوناچی را پیاده سازی کنید. در مرحله اول  $k$  جمله به عنوان ورودی داده می شود و این  $k$  جمله هر یک در ضرایب  $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  ضرب شده و با هم جمع می شوند تا جمله بعدی را بسازند. جملات بعدی هم به همین ترتیب و با در نظر گرفتن  $k$  جمله آخر ساخته می شوند. جمله  $n$ ام این شبه فیوناچی را به دست آورید.