



جبر خطی

نیم سال اول ۱۴۰۰-۱۴۰۱

حمیدرضا ربیعی - مریم رمضانی

تمرین ششم کمترین مربعات - SVD - کاربرد ماتریس - تنسور زمان تحویل: ۲۲ دی ساعت ۲۳:۵۹ امتیاز تمرین: ۱۰۰ ارسال با تاخیر تا ساعت ۱۷ دوشنبه ۲۷ دی

بخش تئوری

۱. (۱۵ نمره) درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید و برای هر مورد توضیح مختصری بنویسید (A یک ماتریس $m \times n$ است).

الف) اگر b یک فضای ستونی از A باشد، آنگاه هر پاسخ برای $Ax = b$ یک پاسخ $least - squares$ است.
 ب) پاسخ $least - squares$ نزدیک ترین نقطه از فضای ستونی A به b است.

ج) اگر \hat{x} یک پاسخ $least - square$ برای $Ax = b$ باشد، آنگاه $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$

۲. (۲۰ نمره) ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ و بردار $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

الف) SVD ماتریس A را به دست آورید.

ب) ماتریس شبه وارون A را حساب کنید.

ج) حداقل نرم جواب مسئله حداقل مربعات را برای معادله $Ax = b$ به دست آورید.

۳. (۵۰ نمره) در مبحث کار با گراف ها علاوه بر ماتریس مجاورت برای گراف ماتریس دیگری تحت عنوان ماتریس لاپلاسیان تعریف می شود، این ماتریس بصورت زیر تعریف می شود،

$$L = D - A$$

که در آن A ماتریس مجاورت گراف است و D یک ماتریس قطری است که مؤلفه هر قطر آن مجموع درایه های ماتریس مجاورت در همان سطر می باشد.

الف) تحقیق کنید که بردار واحد همواره بردار ویژه ماتریس لاپلاسیان و متناظر با مقدار ویژه صفر است .

ب) فرض کنید ماتریس لاپلاسیان برای یک گراف به شکل زیر تعریف شده باشد گراف متناظر را رسم کنید و با محاسبه مقادیر و بردار ویژه ماتریس لاپلاسیان و مرتب کردن مقادیر ویژه و بردار ویژه های متناظر آن ها مقادیر بردارهای ویژه را روی رأس های متناظر آن ها بکشید، مشاهده شما از رفتار گراف وقتی مقادیر ویژه بزرگ می شوند چیست ؟ (مقادیری که روی رأس ها می کشید یک سیگنال گرافی روی گراف تشکیل می دهند و مشاهده خود را باید از رفتار این سیگنال روی گراف بنویسید .)

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ج) نشان دهید اگر یک گراف بدون جهت داشته باشیم در این صورت ماتریس لاپلاسیان یک ماتریس مثبت نیمه معین است.

د) با استفاده از نتیجه قسمت قبل نشان دهید هر چه مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسیان افزایش پیدا بکنند، سیگنال گرافی که روی گراف تعریف می‌کنیم که همان بردار ویژه متناظر است، ناهموارتر میشود.

ه) نشان دهید اگر گراف منظم k -باشد، بردارهای ویژه ماتریس‌های مجاورت و لاپلاسیان با هم برابر بوده و رابطه بین مقادیر ویژه آن‌ها را پیدا کنید.

فرض کنید بخواهیم ماتریس لاپلاسیان را نرمال کنیم یعنی درایه‌های روی قطر اصلی آن را یک کنیم، برای این منظور ماتریس نرمال شده را بصورت زیر تعریف می‌کنند:

$$L_N = D^{-\frac{1}{2}} L D^{-\frac{1}{2}}$$

و) نشان دهید که مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسیان نرمال شده در بازه $[0, 2]$ قرار دارند و اگر مقدار ویژه ای با مقدار ۲ داشته باشیم، آنگاه گراف دو بخشی است.

راهنمایی: (می‌توان با تغییر دادن درایه‌های بردار v در رابطه زیر اعدادی تولید کرد که در بازه بین کمترین و بیشترین مقدار ویژه ماتریس قرار بگیرند.)

$$\frac{\mathbf{v}^T L \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}$$

۴. (۱۵ نمره)

الف) فرض کنید:

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{f} \in \mathbf{R}^M, \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{M \times N}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$$

محاسبه کنید $\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{A}}$

ب) فرض کنید:

$$\mathbf{R} \in \mathbf{R}^{M \times N}, \mathbf{f} : \mathbf{R}^{M \times N} \rightarrow \mathbf{R}^{N \times N}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^T \mathbf{R} =: \mathbf{K} \in \mathbf{R}^{N \times N}$$

محاسبه کنید $\frac{d\mathbf{K}}{d\mathbf{R}}$