تمرین سری ۳ جبرخطی

سارا آذرنوش ۹۸۱۷۰۹۶۲۸

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear transformation determined $A_{2\times 2}$ ①

S parallelogram in $\mathbb{R}^2 \Longrightarrow \{\text{area of } T(S)\} = |\det A| \cdot \{\text{area of } S\}$

T determined $A_{3\times 3}$, S parallelepiped in $\mathbb{R}^3$ ②

$$\Longrightarrow \{\text{Volume of } T(S)\} = |\det A| \cdot \{\text{volume of } S\}$$

---

①: $A = [a_1 \ \ a_2] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ متوازی‌الاضلاع را به صورت جمع وزن‌دار ۲ بردار b_1, b_2 می‌نویسیم

$$S = \{s_1 b_1 + s_2 b_2 : 0 \leq s_1, s_2 \leq 1\}$$

$$T(s_1 b_1 + s_2 b_2) = s_1 T(b_1) + s_2 T(b_2) = s_1 A b_1 + s_2 A b_2$$

$\hookrightarrow T(S)$: با استفاده از ماتریس $[Ab_1 \ \ Ab_2]$ مشخص می‌شود

$$B = [b_1 \ \ b_2] \Rightarrow \underbrace{[Ab_1 \ \ Ab_2]}_{AB_{2\times 2}}$$

$$\underbrace{\{\text{area of } T(S)\} = |\det AB|}_{\text{تعریف}} = |\det A| \cdot |\det B| \to \{\text{area of } S\}$$

T تبدیل می‌کند $p + S \longrightarrow T(p) + T(S)$ یکی از ویژگی‌های مهم است اما در مساحت همان تأثیری ندارد

بردار ، متوازی‌الاضلاع

$$\{\text{area of } T(p+S)\} = \{\text{area of } T(S)\} = |\det A| \cdot \{\text{area of } S\}$$

$T(p+S) = T(p) + T(S)$, $\{\text{area of } S\} = \{\text{area of } S+p\}$

② $A = [a_1 \ a_2 \ a_3]$ ..... $\mathbb{R}^3$

$$S = \{s_1 b_1 + s_2 b_2 + s_3 b_3 : 0 \leq s_1, s_2, s_3 \leq 1\}$$

$$T(s_1 b_1 + s_2 b_2 + s_3 b_3) = s_1 T(b_1) + s_2 T(b_2) + s_3 T(b_3) =$$
$$= s_1 A b_1 + s_2 A b_2 + s_3 A b_3$$

$$B = [b_1 \ b_2 \ b_3] \to [Ab_1 \ \ Ab_2 \ \ Ab_3] = AB_{3\times 3}$$

$$\underbrace{\{\text{Volume of } T(S)\} = |\det AB|}_{\text{طبق تعریف}} = |\det A| \, |\det B| \to \{\text{Volume of } S\}$$