بسمه تعالی

جبر خطی

نیم‌سال اول ۰۰-۰۱

حمیدرضا ربیعی - مریم رمضانی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

تمرین پنجم — مقدار ویژه - بردار ویژه - فاکتورگیری — زمان تحویل بخش تئوری: ۱۲ دی ساعت ۲۳:۵۹

امتیاز تمرین: ۱۰۰ + ۱۰ — زمان تحویل بخش عملی: ۱۷ دی ساعت ۲۳:۵۹

بخش تئوری

۱. (۱۵ نمره) فرض کنید $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس A باشد. موارد زیر را اثبات کنید.

(آ) $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = trace(A)$

(ب) $\lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_n = det(A)$

۲. (۱۰ نمره) اگر داشته باشیم $f(x,y) = 4x^2 + 10y^2$ به نحوی که $x^2 + y^2 \leq 4$ ، مقدار کمینه و بیشینه‌ی f را به کمک حل معادلات ضرایب لاگرانژ بدست بیاورید.

۳. (۱۰ نمره) اگر A و A^+ به صورت زیر تعریف شده باشند.

$$A = \sum_1^r \sigma_i u_i v_i^T$$

$$A^+ = \sum_1^r \frac{v_i u_i^T}{\sigma_i}$$

اثبات کنید

(آ)

$$A^+ A = \sum_1^r v_i v_i^T$$

(ب)

$$(A^+ A)^2 = A^+ A$$

۴. (۱۵ نمره) فرض کنید $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ و

$$R_i = \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} |a_{ij}|$$

الفـ نشان دهید اگر $R_i < |a_{ii}|$ به ازای هر i، $1 \leq i \leq n$ آنگاه A وارون‌پذیر است.

بـ نتیجه بگیرید که هر مقدار ویژه A متعلق به مجموعه زیر است.

$$\cup_{i=1}^n \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq R_i\}$$

ج ـ تعبیر هندسی حکم بالا چیست؟

۵. (۱۵ نمره) ماتریس A را بصورت روبه‌رو درنظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 12 & 5 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

(آ) نشان دهید که ماتریس A تجزیه LU ندارد.

(ب) سطرهای ماتریس A را بنحوی جابه‌جا کنید که ماتریس جدید دارای تجزیه LU باشد و سپس تجزیه LU ماتریس جدید را به‌دست آورید.

(ج) در پایان هم دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 12x_2 + 5x_3 &= -4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= -17 \end{aligned}$$

۶. (۱۰ نمره) فرض کنید A یک ماتریس ۳ قطری از مرتبه $n \times n$ باشد. تعریف ماتریس ۳ قطری به صورت زیر است:

$$a_{ij} = 0 \qquad for \quad |i-j| > 1.$$

با توجه به این تعریف به سوال زیر پاسخ دهید.

نشان دهید که اگر بتوان روش حذف گاوسی بدون جابجایی را روی یک ماتریس ۳ قطری اعمال کرد، آنگاه در تجزیه‌ی LU آن، هر کدام از ماتریس‌های L و U ماتریس‌هایی ۲ قطری به شکل زیر هستند:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ & l_{32} & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & l_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & & & \\ & u_{22} & u_{23} & & \\ & & u_{33} & \ddots & \\ & & & \ddots & u_{n-1n} \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

معادل انگلیسی ماتریس‌های ۳قطری و ۲قطری به ترتیب $tridiagonal$ و $bidiagonal$ است.

بخش عملی

۱. فاکتور گیری (۳۵ نمره)

نوت‌بوک مربوط به سوال عملی ضمیمه شده است.