تمرین ۶ جبرخطی

سارا آذرنوش ۹۸۱۷۰۶۲۸

۱) الف) b فضای ستونی از A ← جواب $Ax-b$ least_squares

درست - هرجوابی ... درست باشد $|Ax-b|=0$ است پس جواب least-squares است

$Ax=b$

۲) least-squares نزدیک‌ترین نقطه در فضای ستونی A به b است

درست -

۳) اگر جواب منحصر به فرد $Ax=b$ ، $\hat{x}$ باشد ⟸ $\hat{x}=(A^TA)^{-1}A^Tb$

$\forall x\in\mathbb{R}^n: |Ax^n-b|\leq|Ax-b|$

نادرست -

$(A^TA)^{-1}A^Tb = A^{-1}(A^T)^{-1}b = A^{-1}b \rightarrow \hat{x}$ جواب اکثریت درست ⟶ لزوما درست نیست

۲)

الف) SVD ماتریس A

ساده شده A

ج) حداقل نرم جواب معادله مربعات $Ax=b$

$A=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\\3&6\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$A^TA=\begin{bmatrix}14&28\\28&56\end{bmatrix}$

$\det(A^TA-\lambda I)=0 \rightarrow \begin{vmatrix}14-\lambda & 28\\ 28 & 56-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2-70\lambda=0$ $\rightarrow 70 \xrightarrow{\text{I}} \begin{bmatrix}1/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\end{bmatrix}$, $\rightarrow 0 \rightarrow \begin{bmatrix}-2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\end{bmatrix}$

$A^TAV=\lambda V \rightarrow (A^TA-\lambda I)V=0$ I

$\Sigma=\begin{bmatrix}\sqrt{70}&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$ $V^T=\begin{bmatrix}\sqrt{5}/5 & 2\sqrt{5}/5\\ 2\sqrt{5}/5 & -\sqrt{5}/5\end{bmatrix}$ $A=U\Sigma V^T = A(V^T)^{-1}=U\Sigma$

$AV=U\Sigma$

$\begin{bmatrix}1&2\\2&4\\3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{5}/5 & 2\sqrt{5}/5\\ 2\sqrt{5}/5 & -\sqrt{5}/5\end{bmatrix}=U\begin{bmatrix}\sqrt{70}&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix} \longrightarrow U=\begin{bmatrix}\sqrt{14}/14 & d_1 & d_2\\ 2\sqrt{14}/14 & d_3 & d_4\\ 3\sqrt{14}/14 & d_5 & d_6\end{bmatrix}$

$U=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{14}}{14} & \frac{-2\sqrt{5}}{5} & -\frac{3\sqrt{70}}{70}\\ \frac{2\sqrt{14}}{14} & \sqrt{5}/5 & \frac{-6\sqrt{70}}{70}\\ \frac{3\sqrt{14}}{14} & 0 & \frac{5\sqrt{70}}{70}\end{bmatrix}$

(۵

$$A = U\Sigma V^T \Rightarrow A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T \rightarrow A^{+} = V\Sigma^{+}U^T$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۵}}{۵} & \frac{۲\sqrt{۵}}{۵} \\ \frac{۲\sqrt{۵}}{۵} & \frac{-\sqrt{۵}}{۵} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۷۰}} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۱۴}}{۱۴} & \frac{۲\sqrt{۱۴}}{۱۴} & \frac{۳\sqrt{۱۴}}{۱۴} \\ \frac{-۲\sqrt{۵}}{۵} & \frac{\sqrt{۵}}{۵} & ۰ \\ \frac{-۳\sqrt{۷۰}}{۷۰} & \frac{-۶\sqrt{۷۰}}{۷۰} & \frac{۵\sqrt{۷۰}}{۷۰} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۷۰} & \frac{۲}{۷۰} & \frac{۳}{۷۰} \\ \frac{۲}{۷۰} & \frac{۴}{۷۰} & \frac{۶}{۷۰} \end{bmatrix}$$

(۶

$$x = A^{+}b = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۷۰} & \frac{۲}{۷۰} & \frac{۳}{۷۰} \\ \frac{۲}{۷۰} & \frac{۴}{۷۰} & \frac{۶}{۷۰} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۶}{۷۰} \\ \frac{۱۲}{۷۰} \end{bmatrix}$$

$$\|x\| = \sqrt{\left(\frac{۶}{۷۰}\right)^۲ + \left(\frac{۱۲}{۷۰}\right)^۲} = \frac{۶\sqrt{۵}}{۷۰}$$

لاپلاسین $L = D - A$

D: ماتریس قطری و هر درایه قطری متناظر با مجموع درایه های سطر

A: ماتریس مجاورت گراف

الف) بردار ۱ همواره بردار ویژه ماتریس لاپلاسین و متناظر با مقدار ویژه صفر است.

$$L = D - A$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11}=0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \end{bmatrix}$$

$$L \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{v} = 0 \qquad Lv = \underbrace{\lambda}_{0} v$$

همه صفرها ← ۱ بردار ویژه متناظر مقدار ویژه صفر است.

ب)

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(L - \lambda I) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

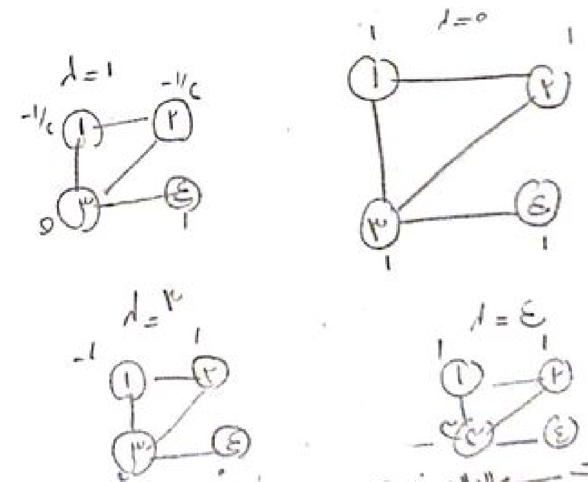
$$\lambda^4 + 5\lambda^2 - 4\lambda = 0 \rightarrow 0,\ 1,\ 3,\ 4$$

$$\lambda = 0 \rightarrow v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 1 \rightarrow v = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 3 \rightarrow v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 4 \rightarrow v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$



ج) ثابت کنید مثبت ← لاپلاسین ماتریس + نیمه معین

$$Q = x^T L x = x^T (D - A) x$$

$$= x^T D x - x^T A x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \underbrace{D_i}_{\sum_{j=1}^{n} A_{ij}} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j A_{ij}$$

$$2Q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j A_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (x_i - x_j)^2$$

$$Q = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (x_i - x_j)^2 \geq 0 \rightarrow$$ مثبت نیمه معین

۴) مقادیر ویژه لاپلاسین ↑ ← شباهت گره‌های مجاور در بردار ویژه متناظر است ناهموارتر می‌شود

$$Lv = \lambda v$$

$$v^T L v = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (v_i - v_j)^2$$

$$v^T L v = v^T \lambda v = \lambda \|v\|^2 = \lambda \longrightarrow \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (v_i - v_j)^2 = \lambda$$

با افزایش λ فاصله بین هر جفت عنصر بردار ویژه افزایش می‌یابد و ناهموارتر می‌شود

۵) گراف منتظم k-

$$L = D - A$$

$$\begin{bmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -1 & \dots & -1 \\ -1 & k & \dots & -1 \\ \vdots & & & \\ -1 & -1 & \dots & k \end{bmatrix}$$

$$Lv = \lambda v \longrightarrow (kI - A - \lambda I)\, v = 0 \longrightarrow (A - (\lambda - k) I)\, v = 0$$

$r = Ax,\ r \in R^{M},\ A \in R^{M \times N},\ x \in R^{N} \longrightarrow \frac{dr}{dA}$

$$\frac{dr}{dA} = \begin{bmatrix} \frac{dr_1}{dA} \\ \frac{dr_2}{dA} \\ \vdots \\ \frac{dr_m}{dA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dr_1}{dA_{11}} & \frac{dr_1}{dA_{12}} & \cdots & \frac{dr_1}{dA_{1n}} \\ \vdots & & & \\ \frac{dr_1}{dA_{m1}} & \cdots & \cdots & \frac{dr_1}{dA_{mn}} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \frac{dr_m}{dA_{11}} & \frac{dr_m}{dA_{12}} & \cdots & \frac{dr_m}{dA_{1n}} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{dr_m}{dA_{m1}} & \frac{dr_m}{dA_{m2}} & \cdots & \frac{dr_m}{dA_{mn}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$R \in R^{M \times N},\ f: R^{M \times N} \longrightarrow R^{N \times N}$

$f(R) = R^T R =: K \in R^{N \times N}$

$\rightarrow \frac{dK}{dR}$

$$\frac{dK}{dR} = \begin{bmatrix} \frac{dK_{11}}{dR} & \frac{dK_{12}}{dR} & \cdots & \frac{dK_{1n}}{dR} \\ \frac{dK_{21}}{dR} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \\ \frac{dK_{n1}}{dR} & \frac{dK_{n2}}{dR} & \cdots & \frac{dK_{nn}}{dR} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dK_{11}}{dR_{11}} & \frac{dK_{11}}{dR_{12}} & \frac{dK_{11}}{dR_{1n}} \\ \vdots & \vdots & \\ \frac{dK_{11}}{dR_{m1}} & \cdots & \frac{dK_{11}}{dR_{mn}} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} \frac{dK_{1n}}{dR_{11}} & \frac{dK_{1n}}{dR_{12}} & \cdots & \frac{dK_{1n}}{dR_{1n}} \\ \vdots & & & \\ \frac{dK_{1n}}{dR_{m1}} & \frac{dK_{1n}}{dR_{m2}} & \cdots & \frac{dK_{1n}}{dR_{mn}} \end{bmatrix} \\ \vdots & & \\ \begin{bmatrix} \frac{dK_{m1}}{dR_{11}} & \frac{dK_{m1}}{dR_{12}} & \cdots \frac{dK_{m1}}{dR_{1n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{dK_{m1}}{dR_{m1}} & \cdots & \frac{dK_{m1}}{dR_{mn}} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} \frac{dK_{mn}}{dR_{11}} & \frac{dK_{mn}}{dR_{12}} & \cdots & \frac{dK_{mn}}{dR_{1n}} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{dK_{mn}}{dR_{m1}} & \frac{dK_{mn}}{dR_{m2}} & \cdots & \frac{dK_{mn}}{dR_{mn}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$