



جبر خطی

نیم سال اول ۰۰-۰۱

حمیدرضا ربیعی - مریم رمضانی

تمرین چهارم ماتریسهای مثبت معین و مشتقهای ماتریس زمان تحویل: بخش تئوری: ۲۵ آذر، بخش عملی: ۲ دی
امتیاز تمرین: ۲۰+۱۰ ارسال با تاخیر: بخش تئوری: ۲۹ آذر، بخش عملی: ۶ دی

بخش تئوری

۱. (۱۵ نمره)

ماتریس A به فرم زیر را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

فرض کنید A_{11} یک ماتریس $p \times p$ و A_{22} یک ماتریس $q \times q$ باشد. با فرض آن که A یک ماتریس وارون پذیر است، وارون آن را بر حسب پارامترهای داده شده محاسبه کنید.

۲. (۲۰ نمره)

الف) ثابت کنید که اگر ماتریس X یک ماتریس مربعی $m \times m$ و ماتریس Y یک ماتریس $m \times n$ باشد، خواهیم داشت:

$$\det \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} = \det(X)$$

ب) فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $n \times m$ باشد، ثابت کنید

$$\det \begin{bmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{bmatrix} = \det(A) \det(B)$$

راهنمایی: حاصل ضرب زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix}$$

۳. (۱۵ نمره)

الف) فرض کنید x برداری n بعدی و A ماتریسی به ابعاد $n \times n$ باشد. حال بردار v را به صورت $v = x^T A x$ تعریف می کنیم. اثبات کنید

$$\frac{\partial v}{\partial x} = x^T (A + A^T)$$

ب) فرض کنید A ماتریسی مربعی و وارون پذیر باشد به طوری که تمام درایه های آن تابع پارامتر اسکالر α باشند. اثبات کنید

$$\frac{\partial A^{-1}}{\partial \alpha} = -A^{-1} \frac{\partial A}{\partial \alpha} A^{-1}$$

۴. (۱۵ نمره)

الف) جمله‌ی زیر را به فرم quadratic بنویسید.

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz$$

منظور از quadratic جمله‌ای به فرم $x^T Ax$ است که در این سوال $x = [x \ y \ z]^T$ است.

ب) حد بالا و پایینی برای جمله‌ی $Q(\vec{x}) = 9x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2$ با فرض $x^T x = 1$ به دست آورید.

۵. (۲۰ نمره)

با توجه به تعریف ماتریس‌های مثبت نیمه‌معین و مثبت معین به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) نشان دهید هر ماتریس مثبت معین وارون‌پذیر است. (راهنمایی: نشان دهید non-singular است)

ب) آیا یک ماتریس غیرمقتارن می‌تواند مثبت نیمه‌معین باشد؟

پ) آیا یک ماتریس غیرمقتارن می‌تواند مثبت معین باشد؟

ت) اگر ماتریس $A \in \mathcal{R}^{m \times n}$ رتبه کامل باشد، نشان دهید یا AA^T یا $A^T A$ مثبت معین هستند.

۶. (۱۵ نمره)

دو گزاره‌ی زیر را اثبات کنید.

الف) $A^T A$ یک ماتریس مثبت نیمه‌معین است.

ب) اگر $\text{null}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$ باشد، آنگاه $A^T A$ مثبت معین نیز می‌باشد.

بخش عملی

۱. (۲۰ نمره)

فرض کنید دستگاهی ساخته‌ایم که عبارت زیر را کمینه می‌کند.

$$A = A_0 + \lambda A_1 + \mu A_2 + \kappa A_3$$

که در آن λ, μ, κ ثابت‌های مثبت هستند و

$$\begin{aligned} A_0 &= \sum_{i=1}^n (u_i - y_i)^2 & A_1 &= \sum_{i=1}^n (y_i)^2 \\ A_2 &= \sum_{i=2}^n (y_i - y_{i-1})^2 & A_3 &= \sum_{i=2}^{n-1} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})^2 \end{aligned}$$

دستگاه به این صورت کار می‌کند که بردار $u \in \mathbb{R}^n$ را ورودی می‌گیرد و بردار $y \in \mathbb{R}^n$ را خروجی می‌دهد به طوری که عبارت داده شده، کمینه شود. حال شما باید برنامه‌ای بنویسید که با دریافت دو بردار u و y بتواند سه ثابت گفته شده را پیدا کند.

ورودی

- در خط اول عدد طبیعی n داده شده
- در خط دوم بردار u داده شده (به صورت سطری)
- در خط سوم بردار y داده شده (به صورت سطری)

خروجی

- در خط اول نزدیکترین عدد صحیح به ثابت λ چاپ شود.
- در خط دوم نزدیکترین عدد صحیح به ثابت μ چاپ شود.
- در خط سوم نزدیکترین عدد صحیح به ثابت κ چاپ شود.

نمونه ۱
ورودی:

3
5 -6 5
1 0 1

خروجی:

1
1
1

نمونه ۲
ورودی:

6
21.6 -26.9 56.45 -39.2 14.75 6.3
4 2 3 0 1 2

خروجی:

2
1
3