سارا آذرنوش ۹۸۱۷۰۴۴۸

۱/

$u, v \in V$ $\langle u, v\rangle = 0 \iff \forall a \in \mathbb{R},\ \|u\| \leq \|u + av\|$

V حقیقی

① $\langle u, v\rangle = 0 \implies \|u\| \leq \|u + av\|, \ \forall a \in \mathbb{R}$

$\langle u, av\rangle = \bar{a}\langle u, v\rangle = 0 \ , u \perp av$

$\|u + av\|^2 = \|u\|^2 + \|av\|^2 \geq \|u\|^2$

$\implies \|u + av\| \geq \|u\|$

② $\langle u, v\rangle = 0 \impliedby \|u\| \leq \|u + av\| \ , \forall a \in \mathbb{R}$

$\|u\|^2 \leq \|u + av\|^2 = \|u\|^2 + \langle u, av\rangle + \langle av, u\rangle + \|av\|^2$

$\leq \|u\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle u, av\rangle + \|av\|^2$

$0 \leq \underbrace{2\mathrm{Re}(a\langle u, v\rangle)}_{2au^Tv} + |a|^2\|v\|^2$

$\forall a \in \mathbb{R} \rightarrow a = \frac{-1}{\|v\|^2}(u^Tv)$

$2au^Tv + a^2\|v\|^2 \geq 0 \longrightarrow (u^Tv)^2\left(-2 + \frac{1}{\|v\|^2}\|v\|^2\right) \geq 0 \longrightarrow -(u^Tv)^2 \geq 0$

$(u^Tv)^2 \leq 0$

$(u^Tv)^2 \geq 0 \longrightarrow$ توان ۲

$(u^Tv)^2 \leq 0 \longrightarrow$ بدست آوردیم

$\implies (u^Tv)^2 = 0 \longrightarrow \langle u, v\rangle = 0$

۲

$f(x) = \|x\|$ $\quad a^T(x-z)+b$

$z \neq 0$

$$f \simeq f(z) + (\nabla f(z))^T \cdot (x-z) = f(z) + \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right|_z (x_1 - z_1) + \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right|_z (x_2 - z_2) + \cdots \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right| (x_n - z_n)$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial(\|x\|)}{\partial x_i} = \frac{\partial(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2})}{\partial x_i} = \frac{\cancel{2}x_i}{\cancel{2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 \cdots x_n^2}} = \frac{x_i}{\|x\|} = \nabla f(x)$$

$$f(z) + \underbrace{\frac{z^T}{\|z\|}}_{a}\frac{(x-z)}{} = a^T(x-z) + b$$

$a \to \dfrac{z}{\|z\|}$

$b \to f(z) = \|z\|$

۳/ الف)

$$\|w - \tfrac{1}{2}(u+v)\|^2 = \frac{\|w-u\|^2 + \|w-v\|^2}{2} - \frac{\|u-v\|^2}{4}$$

$$\|w - \tfrac{1}{2}(u+v)\|^2 = \|w^2 + w\cdot(u+v) + \tfrac{1}{4}(u^2+v^2+2u\cdot v)\|$$

$$= \|w^2 + \tfrac{1}{4}u^2 + \tfrac{1}{4}v^2 + \underbrace{\tfrac{1}{2}u\cdot v}\, - \underbrace{w\cdot u} - \underbrace{w\cdot v}\| + \tfrac{1}{4}u^2 + \tfrac{1}{4}v^2 - \tfrac{1}{4}u^2 - \tfrac{1}{4}v^2$$

$$= \|\tfrac{1}{2}(w^2+u^2-2w\cdot u) + \tfrac{1}{2}(w^2+v^2-2w\cdot v) - \tfrac{1}{4}(u^2-v^2+2u\cdot v)\|$$

$$= \|\tfrac{1}{2}(w-u)^2 + \tfrac{1}{2}(w-v)^2 - \tfrac{1}{4}(u-v)^2\|$$

$$= \frac{\|w-u\|^2 + \|w-v\|^2}{2} - \frac{\|u-v\|^2}{4} \quad \checkmark$$

ب) اتفاق وجود دارد

$$u, v \in C \longrightarrow \tfrac{1}{2}(u+v) \in C$$

برهان خلف:

فرض می کنیم هر ۲ نزدیک‌ترین نقاط به w در C هستند

$$\forall v \in C: \|w-u\| \leq \|w-v\|$$

$$\|w-u\| = \|w-v\| = \min$$

$$\|w - \underbrace{\tfrac{1}{2}(u,v)}_{\text{فاصله بیشتر}}\| \geq \|w-u\|$$

$$\rightarrow \|w - \tfrac{1}{2}(u,v)\|^2 \geq \|w-u\|^2$$

$$= \frac{\|w-u\|^2 + \|w-v\|^2}{2} - \frac{\|u-v\|^2}{4} \geq \|w-u\|^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\|w-v\|^2}{\cancel{2}} - \frac{\|u-v\|^2}{4} \geq \frac{\|w-u\|^2}{\cancel{2}}}_{\text{برابرند}} \longrightarrow \frac{\|u-v\|^2}{4} \leq 0$$

توان ۲ همیشه بزرگتر مساوی صفر است

تنها حالت ← $\|u-v\|^2 = 0$ ← $u = v$ ← یک نقطه حداکثر وجود دارد

Scanned by CamScanner

۴) تمام پاسخ های سیستم همگن

$$10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$$

$$x_1 = 0.3x_2 + 0.2x_3$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3x_2 + 0.2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

$$x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0.3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u} + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v}$$

$x_2, x_3 \rightarrow$ free varibles

$x_2 u + x_3 v$ ترکیب خطی

پاسخ صفر است

Span $\{u, v\}$

۵)

$P_1 \to x_1 - ۴x_۲ + ۳x_۳ - x_۴ = ۰$

$P_۲ \to ۲x_1 - ۸x_۲ + ۷x_۳ + x_۴ = ۰$

$$\begin{pmatrix} ۱ & -۴ & ۳ & -۱ \\ ۲ & -۸ & ۷ & ۱ \end{pmatrix} \xrightarrow{-۲P_1 + P_۲} \begin{pmatrix} ۱ & -۴ & ۳ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳ \end{pmatrix} \xrightarrow{-۳P_۲ + P_1} \begin{pmatrix} ۱ & -۴ & ۰ & -۱۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}$$

$x_۲ , x_۴ \to$ free varibles

$x_۳ = -۳x_۴$

$x_1 = ۴x_۲ + ۱۰x_۴$

free varibles = ۱ ; ۲ بعد = D

$$\begin{pmatrix} ۴ \\ ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} ۱۰ \\ ۰ \\ -۳ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

۶.

$u \perp v$

$(u+v) \perp (u-v) \implies |u| = |v|$

$(u+v)\cdot(u-v) = ۰$

$= u.(u.v) + v.(u-v)$

$= u.u - u.v + u.v - v.v$

$= u.u - v.v$

$\to u.u = v.v \to |u|^۲ = |v|^۲ \to |u| = |v|$.

۷

$f = x+۱$

$g = ۹x - ۵ \implies f \perp g$

$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = ۰ \implies f \perp g$

$\int_a^b (x+۱)(۹x-۵) = ۰ \quad \int_a^b (۹x^۲ + ۴x - ۵)\,dx = ۳x^۳ + ۲x^۲ - ۵x \Big|_a^b$

$b = ۱$
$a = ۰$ $\to ۳ + ۲ - ۵ = ۰$ ✓

Scanned by CamScanner