



جبر خطی

نیم سال اول ۰۱-۰۰
حمیدرضا ربیعی - مریم رضانی

زمان تحویل: ۸ آبان ساعت ۲۳:۵۹
ارسال با تاخیر تا ساعت ۱۶ دوشنبه ۱۰ آبان

توابع خطی - استقلال خطی

تمرین دوم
امتیاز تمرین: ۱۰۰ + ۲۰

بخش تئوری

۱. (۱۵ نمره) بردارهای $u, v \in V$ را در نظر بگیرید که V یک فضای برداری حقیقی است. ثابت کنید $\langle u, v \rangle = 0$ اگر و تنها اگر به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$\|u\| \leq \|u + av\|.$$

۲. (۵ نمره) رابطه‌ای کلی برای تقریب تیلور تابع $f(x) = \|x\|$ حول بردار ناصفر z تا مرتبه اول بدست آورید. (نکته: اگر این رابطه را به صورت $\hat{f}(x) = a^T(x - z) + b$ نشان دهیم، هدف پیدا کردن بردارهای a و b خواهد بود.)

۳. (۵ نمره) بردارهای u, v و w را عضو فضای برداری V در نظر بگیرید. نشان دهید:

$$\|w - \frac{1}{2}(u + v)\|^2 = \frac{\|w - u\|^2 + \|w - v\|^2}{2} - \frac{\|u - v\|^2}{4}.$$

(ب) (۱۰ نمره) حال C را زیرمجموعه‌ی V در نظر بگیرید با این ویژگی که اگر $u, v \in C$ ، آنگاه $\frac{1}{2}(u + v) \in C$. برداری مانند $w \in V$ در نظر گرفته و نشان دهید حداکثر یک نقطه در C وجود دارد که نزدیک‌ترین نقطه به w است. به عبارت دیگر نشان دهید حداکثر یک $u \in C$ وجود دارد به طوری که

$$\forall v \in C : \|w - u\| \leq \|w - v\|$$

[راهنمایی: از رابطه قسمت (آ) بهره بگیرید.]

۴. (۷.۵ نمره) یک تساوی خطی می‌تواند به عنوان مجموعه‌ای تساوی ساده به کار برده شود. تمامی پاسخ‌های سیستم همگن زیر را توصیف کنید.

$$10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$$

۵. (۷.۵ نمره) پایه‌ای برای مجموعه جواب سیستم معادلات زیر بیابید:

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 8x_2 + 7x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

۶. (۱۰ نمره) u و v بردارهای متعامد هستند. اگر $u+v$ و $u-v$ نیز متعامد باشند نشان دهید $\|u\| = \|v\|$.

۷. (۱۰ نمره) نشان دهید چند جمله‌ای $f = x+1$ و $g = 9x-5$ متعامد هستند.

۸. (امتیازی - ۱۰ نمره) ثابت کنید که دو نرم برداری $\|\cdot\|_\alpha$ و $\|\cdot\|_\beta$ در فضای برداری معادل هم هستند، اگر و فقط اگر برای هر بردار u در این فضا مقادیر عددی مانند $c_1 > 0$ ، $c_2 > 0$ وجود داشته باشند که $c_1\|u\|_\alpha \leq \|u\|_\beta \leq c_2\|u\|_\alpha$

بخش عملی

۱. بعد فضای ستونی (۴۰ نمره)

یکی از مهمترین زیرفضاهای مربوط به یک ماتریس، فضای ستونی آن است. فضای ستونی یک ماتریس از تمامی ترکیب خطی‌های ستون‌های آن تشکیل شده است. در این سوال باید با استفاده از زبان پایتون، بعد این فضا را بدست آورید.

ورودی

در خط اول دو عدد طبیعی m و n می‌آید که به ترتیب تعداد سطرها و ستون‌های ماتریس است. در m خط بعدی، در هر خط n عدد می‌آید که خط i ام نشان‌دهنده سطر i ام ماتریس است.

خروجی

بعد فضای ستونی ماتریس را چاپ کنید.

مثال

نمونه ۱

ورودی:

```
5 3
168 11 17
42 10 -3
6 10 -9
-78 -15 2
0 8 -8
```

خروجی:

```
2
```

نمونه ۲

ورودی:

```
4 7
-221 91 143 -39 130 -260 -130
-340 140 220 -60 200 -400 -200
-17 7 11 -3 10 -20 -10
-6 -9 1 -19 -7 5 -3
```

خروجی:

```
2
```

محدودیت ۱: نمی‌توانید در کد خود از `np.linalg` استفاده کنید.

محدودیت ۲: باید از الگوریتم Gram-Schmidt استفاده کنید.