تمرین ۳: ماتریس

اسما آذرلوش ۹۸۱۷۰۹۴۸

۱)

ماتریس $A_{n\times n} \Rightarrow \exists X_{n\times n}$ ماتریس $,\ AX - XA = I_n$

trace $\rightarrow Tr(AX - XA) = Tr(AX) - Tr(XA)$
$X \in M_n \quad Tr(AX) = Tr(XA)$
$\Rightarrow Tr(AX - XA) = 0 \quad (1)$

$Tr(I_n) = n \quad (2)$

پس طرف معادله (1) برابر صفر است و سمت دیگر (2) بزرگتر مساوی ۲ است بنابراین تساوی برقرار نیست
و هیچ ماتریسی وجود ندارد که در این رابطه صدق کند

۲)

$A \in M_n \ ,\ k \in \mathbb{N} \ ,\ A^k = 0$

الف) $I - A$ دارای وارون‌پذیر است

ب) $I + A$ " " $(k = 2n+1)$

$I^2 - A^k = -1 \times (I - A) \times (I + A + A^2 + \dots A^{k-1})$
$I \quad 0$

$I = (I - A)\underbrace{(-I - A - A^2 - \dots - A^{k-1})}_{(I-A)^{-1}}$

$\rightarrow$ دارای $I - A$ است پس $I - A$ دارای وارون‌پذیر است

$k = 2n+1$

$I^1 - A^k = -1 \times (A + I) \times (I - A + A^2 - \dots + A^{k-1})$
$I \quad 0$

$I = (A + I)\underbrace{(-I + A - A^2 + \dots - A^{k-1})}_{(A+I)^{-1}}$

$\rightarrow$ دارای $I + A$ است پس $I + A$ دارای وارون‌پذیر است

۱۲,

$t_i \in \mathbb{R}$

$$w_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^{n-1} \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & t_{m-1} & & \cdots & t_{m-1}^{n-1} \end{bmatrix}$$

الف) $m \geq n \Leftarrow W$ مستقل خطی

مستقل خطی $\rightarrow$ $w_0 = 0, w_1 = 0, \ldots, w_{n-1} = 0$ تنها زمانی برابر صفر

$$w_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + w_1 \begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{m-1} \end{bmatrix} + \cdots + w_{n-1} \begin{bmatrix} t_0^{n-1} \\ t_1^{n-1} \\ \vdots \\ t_{m-1}^{n-1} \end{bmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} t_0 \rightarrow w_0 + w_1 t_0 + \cdots + w_{n-1} t_0^{n-1} = 0 \\ t_1 \rightarrow w_0 + w_1 t_1 + \cdots + w_{n-1} t_1^{n-1} = 0 \\ \vdots \\ t_{m-1} \rightarrow w_0 + w_1 t_{m-1} + \cdots + w_{n-1} t_{m-1}^{n-1} = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow w_0 + w_1 x + \cdots + w_{n-1} x^{n-1} = 0 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0 = t_0 \\ x_1 = t_1 \\ \vdots \\ x_{m-1} = t_{m-1} \end{array}\right\} \text{ m ریشه}$$

درجه $n-1$ $\rightarrow$ حداقل m ریشه $\rightarrow$ ضرایب ثابت $= 0$

$m \geq n \rightarrow w_0 = w_1 = \cdots = w_{n-1} = 0 \Rightarrow$ مستقل خطی است.

Scanned by CamScanner

۱۴ (الف

$Rank(A_{m\times n}) = 1 \iff u, v \neq 0 ,\ A = uv^T$

$*)\ rank(A) = 1 \Rightarrow u, v \neq 0 ,\ A = uv^T$

هر ستون ضریبی از $\rightarrow A = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_mb_1 & \cdots & \cdots & a_mb_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \times [b_1 \ \cdots \ b_n]$

rank = 1

$\Rightarrow$ هر ستون ترکیب خطی از مجموعه‌ی تک عضوی بردارها است

بردارهای پایه تک عضوی $\leftarrow$ هر ستون به صورت ضریبی از یک بردار است

$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = v$

$\Rightarrow A = uv^T$

$*)\ u, v \neq 0 ,\ A = uv^T \Rightarrow rank(A) = 1$

$u = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \longrightarrow A = uv^T = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_n \\ a_mb_1 & \cdots & a_mb_n \end{bmatrix}$

هر ستون یک ضریب ثابت دارد (یک ضریب ثابت از u و یک عضو v است) و بنابراین تمام آن‌ها مستقل خطی هستند پس رتبه آن ۱ است

و قابل ساخت هستند

۱ ـ ب

$A \in M_n ,\ rank(A) = 1 \Rightarrow trace(A)A = A^2$

$(1) \rightarrow rank(A) = 1 \Rightarrow A = uv^T$

$v^Tu = \sum_{i=1}^{n} v_iu_i = \sum_{i=1}^{n} (v_iu_i) = trace(A)$

$A^2 = (uv^T)^2 = u(v^Tu)v^T = u(trace(A))v^T = trace(A)\,uv^T = trace(A)\,A$

$\boxed{A^2 = trace(A)A}$

۱۵)

T تبدیل خطی non : T وارون پذیر (one-to-one) $\Leftrightarrow$ A ماتریس وارون پذیر ؟

آیا $S(x) = A^{-1}x$? $\forall x$ موجود $S(T(x)) = x$?, $T(S(x)) = x$?

*) ماتریس A وارون پذیر $\Rightarrow$ T وارون پذیر

$x_1, x_2 \in R^n$

$T(x_1) = T(x_2) \Rightarrow Ax_1 = Ax_2 \rightarrow A(x_1 - x_2) = 0$

$x_1 - x_2 \in ker(A)$ $\xrightarrow{A \text{ وارون پذیر}}$ $ker(A) = \{0\} \rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow$ T وارون پذیر

*) A ماتریس وارون پذیر $\Leftarrow$ T وارون پذیر

فرض خلف کنیم ۲ مقدار موجود است $x_1, x_2 \in ker(A)$, $x_1 \neq x_2$ $\Big\} \rightarrow Ax_1 \neq Ax_2$ T one to one

$x_1, x_2 \in ker(A) \Rightarrow Ax_1 = Ax_2 = 0$ $\Rightarrow$ تنها یک عنصر است که نشان داد نمی‌تواند ۲ مقدار باشد

و $ker(A)$ تنها ۱ مقدار دارد $\Rightarrow$ $Ax = 0$ تنها یک جواب دارد $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow A$ وارون پذیر است

*) $S(x) = A^{-1}x$ یکتاست

$T(x) = Ax$ وارون پذیر $\quad S(x) = A^{-1}x$ یکتاست ؟

A وارون پذیر (ح) $\xrightarrow{?}$ A^{-1} یکتاست

فرض خلف کنیم یکتا نیست $\quad x_1 \quad x_2$

$Ax_1 = I$, $Ax_2 = I$ $\Rightarrow x_1 A x_1 = x_2 I \Rightarrow x_1 = x_2 \rightarrow$ تنها یک مقدار موجود است

A^{-1} یکتاست $\Rightarrow$ $A^{-1}x$ یکتاست

*) $T(x) = Ax$, $S(x) = A^{-1}x$ $\Big\}$ $\rightarrow S(T(x)) = S(Ax) = \underbrace{A^{-1}A}_{I}x = x$

$\rightarrow T(S(x)) = T(A^{-1}x) = \underbrace{AA^{-1}}_{I}x = x$