



## جبر خطی

نیم سال اول ۰۱-۰۰

حمیدرضا ربیعی-مریم رضایی

زمان تحویل: تئوری: ۱۵ مهر

عملی: ۲۲ مهر

تمرین اول

فضای برداری

## بخش تئوری

۱. فرض کنید که  $\|x\| = \|y\| = 1$  باشد. مشخص کنید که هر کدام از گزاره های زیر الزما صحیح است یا الزما غلط و یا بستگی به مقادیر عناصر  $x$  و  $y$  دارد.

(آ)

$$(x - y)^T(x - y) = 2(1 - x^T y)$$

(ب)

$$\|x - \frac{1}{2} * y\|^2 = \frac{5}{4} - x^T y$$

(ج)

$$\frac{x^T y}{x^T x} - \frac{y^T y}{x^T y y^T y} = 0$$

(د)

$$\|y + \frac{2}{3}x\|^2 = \frac{4}{9}(1 + 4x^T y)$$

(ه)

$$x^T x + x^T x - 2y^T y = x^T y$$

(و)

$$\frac{\frac{1}{2} * x^T x * \frac{1}{2} y^T y}{y^T(\frac{1}{4} y)} + \frac{\|x\|^2}{\|x\|^2 \|y\|^3} - \frac{y^T y y^T y}{x^T x} = 1$$

۲. فرض کنید هر یک از بردارهای  $b_1, \dots, b_k$  یک ترکیب خطی از بردارهای  $a_1, \dots, a_m$  و  $c$  یک ترکیب خطی از  $b_1, \dots, b_k$  باشد. ثابت کنید  $c$  یک ترکیب خطی از  $a_1, \dots, a_m$  است.

۳. شما باید  $n$  مواد اولیه را به مقدار داده شده توسط بردار  $n$  تایی  $q$  خریداری کنید بطوریکه که مقدار  $q_i$  مقدار مواد اولیه  $i$  است که باید خریداری کنید. مجموعه ای  $K$  تایی از تأمین کنندگان، مواد اولیه را با قیمتی که توسط بردارهای  $n$  تایی  $p_1, \dots, p_n$  ارائه می دهند. (توجه داشته باشید که  $p_k$  یک بردار  $n$  تایی است و  $(pk)_i$  قیمتی است که تأمین کننده  $k$  به ازای هر واحد مواد اولیه  $i$  می گیرد.) ما فرض می کنیم که همه مقادیر و قیمت ها مثبت هستند. اگر فقط باید یک تأمین کننده را انتخاب کنید، چگونه این کار را انجام می دهید؟ در پاسخ شما باید از نماد برداری استفاده شود.

یک مشاور به شما می گوید که تقسیم سفارش خود به دو و انتخاب دو تأمین کننده و سفارش  $q * \frac{1}{2}$  (یعنی نیمی از مقادیر) از هر کدام، بهتر خواهد بود. (یعنی هزینه کل بهتری دریافت کنید). او استدلال می کند که تنوع تأمین کنندگان بهتر است. آیا او راست می گوید؟ در این صورت، نحوه یافتن دو تأمین کننده ای را که برای پر کردن نیمی از سفارش استفاده می کنید، توضیح دهید.

۴. 200 بردار داریم که طول هر کدام  $4 * 10^6$  می باشد.

(آ) چند بایت لازم است همه ی بردارها را ذخیره کنیم؟

(ب) چند  $flops$  لازم است تا یک ترکیب خطی از آن ها (با 200 ضرب ناصفر) محاسبه شود؟

(ج) عملیات قسمت ب ( روی کامپیوتری با توانایی  $1Gflop/s$  چقدر طول می کشد؟) (نیازی به محاسبه ی دقیق جواب نیست)

۵. (آ) آیا سه بردار  $u, v, w$  در صفحه  $xy$  وجود دارند به صورتی که حاصل ضرب داخلی دوه‌دو آن‌ها عددی منفی باشد؟

(ب) حداکثر چند بردار در صفحه  $xy$  میتوان یافت که حاصل ضرب داخلی دوه‌دو آن‌ها منفی باشد؟

۶. نقاط  $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, p = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$  از  $affine$  یک ترکیب  $p$  باید یک  $affine$  از  $v_1, v_2, v_3$  باشد. سپس ترکیب  $affine$  برای  $p$  را پیدا کنید. (راهنمایی: ابعاد  $aff\{v_1, v_2, v_3\}$  چیست؟)

### بخش عملی

۱. در این سوال قصد استفاده از تعدادی از توابع مهم کتابخانه *Numpy* را داریم. بدین ترتیب در سه خط اعداد سه آرایه های  $a, b, c$  به عنوان ورودی داده می شوند. در ادامه موارد زیر را حساب کرده و به ترتیب هر کدام را در یک خط پرینت کنید

(آ) زاویه ی دو بردار  $a, b$  را محاسبه کنید

(ب) بردار اندازه ی واحد عمود بر دو بردار  $a, c$  را محاسبه کنید

(ج) مساحت بین دو بردار  $a, b$  را محاسبه کنید

(د) بردار بلوکی  $result = [a, b, c]$  را محاسبه کنید

(ه) بردار بلوکی  $result = [a|b|c]$  را محاسبه کنید

۲. در این سوال قصد محاسبه ی اطلاعات مربوط به سن افراد یک شهر را داریم. به عنوان ورودی آرایه ای به طول ۱۰۰ از اعداد بزرگتر از صفر داده خواهد شد که نشان دهنده ی توزیع سن افراد است. به طوری که عضو  $i$ ام آرایه  $(0 \leq i \leq 99)$  نشان دهنده ی تعداد افرادی است که دارای سن  $i$  هستند. (می توان فرض کرد هیچ فردی با سن بالاتر از ۹۹ وجود ندارد و همه ی اعضای آرایه بزرگتر از صفر هستند.) مقادیر زیر را با توجه به این توزیع محاسبه کنید. و هر کدام را در یک خط به ترتیب پرینت کنید.

(آ) تعداد کل جمعیت

(ب) تعداد کل افراد با سن بیشتر از ۶۰ سال

(ج) میانگین سن جمعیت

(د) سن اکثر افراد این جمعیت (مد جمعیت)