تمرین ۲

ساراآذرنوش ۹۸۱۷۰۶۶۸

۱) حذف گوسی

$$x_1+3x_2-2x_3+4x_4+x_5=7$$
$$2x_1+6x_2+5x_4+2x_5=5$$
$$4x_1+11x_2+8x_3+5x_5=7$$
$$x_1+3x_2+2x_3+x_4+x_5=-2$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 1 & 7 \\ 2 & 6 & 5 & 5 & 2 & 5 \\ 4 & 11 & 8 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & -1 & 16 & -16 & 1 & -25 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 & -9 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 10 & -10 & 1 & -25 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 & -9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 16 & -16 & 1 & -25 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -16 & 16 & -1 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 0 & -9/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -19/2 & 4 & 71/2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 0 & -9/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19/2 \\ -4 \\ 3/4 \\ \vdots \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 71/2 \\ -11 \\ -9/4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

[illegible]

$\varepsilon = 0/001$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 &= 7 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= -1 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1/5(8 - x_2 + x_3) \\ x_2 &= -1/4(7 - x_1 - x_3) \\ x_3 &= 1/4(1 + x_1 - x_2) \end{aligned} \xrightarrow{x_1 = x_2 = x_3}$$

$k=0$

$x_1 = 8/5 = 1/6$

$x_2 = -7/4 = -1/75$

$x_3 = 1/4 = 0/25$

$k=1$

$x_1 = 1/5(8 + 7/4 + 1/4) = 2$

$x_2 = -1/4(7 - 8/5 - 1/4) = -1/2875$

$x_3 = 1/4(1 + 8/5 + 7/4) = 1/0875$

$k=2$

$x_1 = 1/5(8 + 1/2875 + 1/0875) = 2/075$

$x_2 = -1/4(7 - 2 - 1/0875) = -0/978125$

$x_3 = 1/4(1 + 2 + 1/2875) = 1/0718$

$k=3$

$x_1 = 1/5(8 + 0/97811 + 1/0718) = 2/00998$

$x_2 = -1/4(7 - 2/075 - 1/0718) = -0/9633$

$x_3 = 1/4(1 + 2/075 - 0/97811) = 1/0133$

$k=4$

$x_1 = 1/5(8 + 0/9633 + 1/0133) = 2/0193$

$x_2 = -1/4(7 - 2/0098 - 1/0133) = -0/99418$

$x_3 = 1/4(1 + 2/0098 + 0/9933) = 0/9933$

اختلاف کمتر از 10^{-3}

الف)

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix},\quad x_0=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$y_0=Ax_0=\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-1\\-1\end{bmatrix}\longrightarrow 5\begin{bmatrix}1\\-1/5\\-1/5\end{bmatrix}$$

$$y_1=Ax_1=\begin{bmatrix}13/5\\1/5\\1/5\end{bmatrix}\longrightarrow 13/5\begin{bmatrix}1\\1/13\\1/13\end{bmatrix}$$

$$y_2=Ax_2=\begin{bmatrix}3.1538\\-0.0769\\-0.0769\end{bmatrix}\longrightarrow 3.1538\begin{bmatrix}1\\-0.0244\\-0.0244\end{bmatrix}$$

$$y_3=Ax_3=\begin{bmatrix}2.9512\\0.0244\\0.0244\end{bmatrix}\longrightarrow 2.9512\begin{bmatrix}1\\-0.0082\\0.0082\end{bmatrix}$$

$$y_4=Ax_4=\begin{bmatrix}3.0164\\-0.0082\\-0.0082\end{bmatrix}\longrightarrow 3.0164\begin{bmatrix}1\\-0.0027\\-0.0027\end{bmatrix}$$

$$y_5=Ax_5=\begin{bmatrix}2.9946\\0.0027\\0.0027\end{bmatrix}\longrightarrow 2.9946\begin{bmatrix}1\\0.0009\\0.0009\end{bmatrix}$$

$$y_6=Ax_6=\begin{bmatrix}3.0018\\0.0009\\-0.0009\end{bmatrix}\longrightarrow 3.0018\begin{bmatrix}1\\0.0003\\0.0003\end{bmatrix}$$

$$|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon\ ,\ |c_{k+1}-c_k|<\varepsilon$$

ب) با گرشگورین

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad |\lambda_1 - 3| \le (|0| + \cancel{|2|}^{\,2}) \quad 1 \le \lambda_1 \le 5$$

$$|\lambda_2 + 1| \le (0 + \cancel{0}) \quad \lambda_2 = -1$$

$$|\lambda_i - a_{ii}| \le \sum_{j=1,\, j \ne i}^{n} |a_{ij}| \quad |\lambda_3 + 2| \le (1 + \cancel{0}) \quad -3 \le \lambda_3 \le -1$$

ج) توانی ۲ مرحله اجرا شود؟

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -6 & 6 & -3 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = BX_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

مقدار ویژه ریشه نیز است

$$B_2 = BX_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = CX_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \longrightarrow -3\begin{bmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ -2 & 5-\lambda & -2 \\ -6 & 6 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27 = 0 \quad \begin{cases} 3 \\ -3 \end{cases}$$

$$C_2 = CX_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} \longrightarrow -3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مقدار ویژه ریشه نیز است

Scanned by CamScanner

عطاوس - سهیل

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۷ & ۱۳ \\ ۱ & ۵ & ۳ \\ ۱۲ & ۳ & -۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲۸ \\ ۷۴ \end{bmatrix} \qquad x_۰=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$۳x_۱+۷x_۲+۱۳x_۳=۱$$

$$x_۱+۵x_۲+۳x_۳=۲۸$$

$$۱۲x_۱+۳x_۲-۵x_۳=۷۴$$

$$x_۱=\frac{۱}{۳}\left(+۱-۷x_۲^{k}-۱۳x_۳^{k}\right)$$

$$x_۲=\frac{۱}{۵}\left(۲۸-x_۱^{k+۱}-۳x_۳^{k}\right) \longrightarrow$$

$$x_۳=-\frac{۱}{۵}\left(۷۴-۱۲x_۱^{k+۱}-۳x_۲^{k+۱}\right)$$

$k=۰$

$$\frac{۱}{۳}(۱-۰-۱۳)=-۴$$

$$\frac{۱}{۵}(۲۸+۴-۳)=۵٫۸$$

$$-\frac{۱}{۵}(۷۴+۴۸-۱۷٫۴)=-۲۱٫۳۲$$

$k=۱$

$$x_۱=\frac{۱}{۳}(۱-۷\times ۵٫۸+۱۳\times -۲۱٫۳۲)=۷۹٫۱۸۹۴$$

$$x_۲=\frac{۱}{۵}(۲۸-۷۹٫۱۸۹۴-۳\times -۲۱٫۳۲)=۲٫۵۵۴۷$$

$$x_۳=-\frac{۱}{۵}(۷۴-۱۲\times ۷۹٫۱۸۹۴-۳\times ۲٫۵۵۴۷)=۱۷۹٫۳۸۰۷$$

Scanned by CamScanner

۱۵) ژاکوبی و گاوس سایدل روی A همگرا؟

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P(x_{n+1} - x_n) = f - Ax_n$$

$$\det(A - P + \lambda P = 0)$$

$$|\lambda| < 1 \longrightarrow \underset{\text{iteration matrix}}{B = P^{-1}(P-A)}$$

ژاکوبی ←

$$P = \operatorname{diag}(A)$$

$$\det(A - P + \lambda P) = \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & -1 \\ -2 & 2\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 2\lambda \end{vmatrix} = 8\lambda^3 + 10\lambda = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{5/4}\, i$$

$$|\lambda_{2,3}| = 5/4 > 1$$

همگرا نیست

گاوس سایدل ←

$$P = \operatorname{diag}(A) + \operatorname{lower}(A)$$

$$\det(A + \lambda P - P) = \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & -1 \\ -2\lambda & 2\lambda & -2 \\ \lambda & \lambda & 2\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda(4\lambda^2 + 6\lambda - 1) = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{4}$$

$$\cong -1{,}651 \text{ و } 0{,}151$$

$$\longrightarrow |\lambda| < 1 \longrightarrow$$ همگراست

Scanned by CamScanner