۱) سارا آذرنوش ۹۸۱۷۱۳۹۸

الف)

$$f(x) = x + \sqrt{x+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_i = 0.5 + 0.2i \\ i = 0,1,2,3,4 \end{array}\right\} \rightarrow 0.5,\ 0.7,\ 0.9,\ 1.1,\ 1.3$$

الف)

$f(0.9),\ f(1.05)$?

ب)

$* \ x = 0.8$ کران بالای خطای

تا ۲ رقم اعشار قطع می‌کنم

x_i	fx_i	first	2nd order	3rd
0.5	1.72			
0.7	2	0.28		
0.9	2.28	0.28	0	
1.1	2.55	0.28	0	×
1.3	2.82	0.28	0	

$h = 0.2 \rightarrow$ forword $\Rightarrow x_0 = 0.5\ ,\ r = \frac{x-0.5}{0.2}$

$\rightarrow$ backword $\Rightarrow x_0 = 1.3\ ,\ r = \frac{x-1.3}{0.2}$

$\rightarrow$ Central $\Rightarrow x_0 = 0.9\ ,\ r = \frac{x-0.9}{0.2}$

forward $\rightarrow P_1(x) = 1.72 + 0.28\left(\frac{x-0.5}{0.2}\right) = 1.4x + 1.02 \rightarrow 0.9 \rightarrow 1.86$
$\rightarrow 1.05 \rightarrow 2.49$

backword $= 2.82 + 0.28\left(\frac{x-1.3}{0.2}\right) = 1.4x + 1.1 \rightarrow 0.9 \rightarrow 1.84$
$\rightarrow 1.05 \rightarrow 2.47$

Central $P_c(x) = 2.28 + 0.28\left(\frac{x-0.9}{0.2}\right) = 1.4x + 1.01 \rightarrow 0.9 \rightarrow 1.85$
$\rightarrow 1.05 \rightarrow 2.48$

ب)

$$E_n = f(x) - P_n(x) \leq \frac{f^{n+1}}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

$$\varepsilon \leq (\overset{0.8}{x} - 0.5)(x-0.7)(x-0.9)(x-1.1)(x-1.3)\ \frac{f^4}{4!} \qquad f^4 \longrightarrow \frac{-945}{64(1+x)^{11/2}} \leq -0.58$$

$$\leq 0.3 \times 0.1 \times -0.1 \times -0.3 \times -0.5 \times \frac{-5.8 \times 10^{-1}}{4!\ 4}$$

$$\leq -7.25 \times 10^{-5}$$

Scanned by CamScanner

۱۲

$f_{(x)} = \sqrt{x}$

$\varepsilon \leq 5 \times 10^{-8}$

$$\varepsilon_n \leq \underbrace{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}_{\leq n!\,h^{n+1}} \frac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!}$$

$$n=2 \rightarrow \varepsilon_n \leq \frac{f^{3}(t)}{3!} \times 2!\,h^{3}$$

$f'(t) = \frac{1}{2} t^{-1/2}$

$f''(t) = -\frac{1}{4} t^{-3/2}$

$f'''(t) = \frac{3}{8} t^{-5/2}$

$$t=1 \rightarrow \frac{h^3}{3} \times \frac{3}{8} \cdot 1^{-5/2} \leq 5 \times 10^{-8}$$

$\boxed{h \leq 0.0281}$ $\quad h = \frac{1}{n} \rightarrow n \simeq 35.7 \rightarrow \boxed{36}$

۱۳

الف)

$x_1 = x_2 = \dots = x_n$

$f[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}] = \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}$?

$x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h,\ \dots,\ x_n = x_0 + nh$

$f[x_1, x_2] = \frac{f_2 - f_1}{h} = f'(x_1)$

$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{2h} = \frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{2h} = \frac{1}{2} f''(x_1)$

$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{\frac{1}{2} f''(x_2) - \frac{1}{2} f''(x_1)}{3h} = \frac{1}{6} f'''(x_1)$

$\Rightarrow f[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_1)$

ب)

$\xrightarrow[\text{میانگین } x_i]{\text{مشتق } f}$

$f[x_1, x_2, \dots, x_n] \overset{?}{=} \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$

$a_i = F[i]$

$P_{n-1}(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + \dots + a_{n-1}(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})$

$P_{n-1}^{(n-1)}(x) = a_{n-1}(n-1)!$, $f(x) - P_{n-1}(x) = b_n \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$

$f^{(n-1)} = P_{n-1}^{(n-1)} + b_n n! x - b_n (n-1)! (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

$\to a_{n-1}(n-1)!$

$\Rightarrow = \frac{1}{(n-1)!} \times \left(b_n n! \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n!}\right) - b_n \cancel{(n-1)!}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + a_{n-1}\cancel{(n-1)!}\right)$

$= b_n(x_1 + x_2 + \dots x_n) - b_n(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + a_{n-1}$

$= a_{n-1} = F_{[n-1]} = f[x_1, x_2, \dots, x_n]$

۱۴

$\cos x = f(x)$

الف) $x_۰ = ۰ \;,\; x_۱ = ۰٫۵ \;,\; x_۲ = ۱$

$$f[x_۰, x_۱] = \frac{\cos(۰٫۵) - \cos(۰)}{۰٫۵} = -۰٫۲۴۴۸$$

$$f[x_۱, x_۲] = \frac{\cos(۱) - \cos(۰٫۵)}{۱ - ۰٫۵} = -۰٫۶۷۴۵$$

$$f[x_۰, x_۱, x_۲] = \frac{-۶٫۷۴۵ \times ۱۰^{-۱} + ۲٫۴۴۸ \times ۱۰^{-۱}}{۱} = -۰٫۴۲۹۷$$

ب) $0 \leq x \leq 1 \;,\; P_n(x) \;,\; x_i = i/n ,\; i = ۰, ۱, \dots, n$

$$\lim_{n \to \infty} P_n(x) = \cos x$$

$$E_n \leq f(x) - P(x) = \frac{1}{(n+1)!} \underbrace{f^{(n+1)}(\xi_n)}_{\cos((n+1)\pi/2 + x) \leq 1} \underbrace{\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)}_{\leq n!\, h^{n+1}}$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \times n!\, \underbrace{h}_{1/n}{}^{n+1} = \frac{n!}{(n+1)!\, n^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)(n^{n+1})}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{(n+1) n^{n+1}} = 0 \longrightarrow \lim_{n \to \infty} E_n = 0 \;,\; E_n \to \overset{\cos x}{\cancel{f(x)}} - P(x)$$

$$\Longrightarrow \lim_{n \to \infty} P_n(x) = \cos(x)$$

۵) الف

$$f_{(x)} = A \sin x + B / x$$

$f_1 \qquad f_2$

$x \rightarrow$	۱	۲	۳	۴	۵
$f_{(x)} \rightarrow$	۳	۴	۷	۱۰	۹

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} f_1 f_1 & \sum_{i=1}^{n} f_{12} \\ \sum_{i=1}^{n} f_2 f_1 & \sum_{i=1}^{n} f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} f_1 y_i \\ \sum_{i=1}^{n} f_2 y \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{5} \sin x_i^2 & \sum_{i=1}^{5} \frac{\sin x_i}{x_i} \\ \sum_{i=1}^{5} \frac{\sin x_i}{x_i} & \sum_{i=1}^{5} 1/x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{5} y \sin x \\ \sum_{i=1}^{5} y/x \end{bmatrix}$$

	x	y	$\sin x^2$	$\sin x / x$	$1/x^2$	$y \sin x$	y/x
	۱	۳	۰٫۷۰۸	۰٫۸۴۱	۱	۲٫۵۲۴	۳
	۲	۴	۰٫۸۲۶	۰٫۴۵۵	$1/4$ = ۰٫۲۵	۳٫۶۳۷	۲
	۳	۷	۰٫۰۲	۰٫۰۴۷	$1/9$ = ۰٫۱۱۱	۰٫۹۸۸	$7/3$ = ۲٫۳۳
	۴	۱۰	۰٫۵۷۳	-۰٫۱۸۹	$1/16$ = ۰٫۰۶۲	-۷٫۵۶۸	$10/4$ = ۲٫۵
	۵	۹	۰٫۰۰۸	۰٫۱۷	$1/25$ = ۰٫۰۴	-۰٫۱۷۸۴	$9/5$ = ۱٫۸
$\sum$	۱۵	۳۳	۲٫۱۳۶	۰٫۹۴۳	۱٫۴۶۳	۰٫۳۴۶	۱۱٫۶۳۳

۲٫۱۳۶A + ۰٫۹۴۳B = ۰٫۳۴۶ $\rightarrow$ A = -۴٫۸۷۴۶۶

۰٫۹۴۳A + ۱٫۴۶۳B = ۱۱٫۶۳۳ $\qquad$ B = ۱۱٫۱۴۷

ب)

$$f(x) = y = \frac{1}{(a_0 + a_1 x)^3} \longrightarrow \underbrace{\sqrt[3]{\frac{1}{y}}} = a_0 + a_1 x$$

x	y	x^2	$\sqrt[3]{1/y}$	$x\sqrt[3]{1/y}$
0	1	0	1	0
1	$\frac{64}{1000}$	1	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{10}$
2	$\frac{8}{1000}$	4	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$
4	$\frac{1}{1000}$	16	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$
Σ 7	1.073	21	1.7	1.2

$$a_0(n+1) + a_1\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) = \sum_{i=0}^{n} y_i \xrightarrow{n=3} 4a_0 + 7a_1 = 1.7$$

$$a_0\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) + a_1\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \longrightarrow 7a_0 + 21a_1 = 1.2$$

$$-12a_0 - \cancel{21a_1} = -5.1$$

$$7a_0 + \cancel{21a_1} = 1.2$$

$$-5a_0 = -3.9 \longrightarrow a_0 = 0.78$$

$$a_1 \simeq -0.203$$