سارا آذرنوش ۹۸۱۷۵۰۹۹۸

۱)

$$f = \frac{\sqrt{5}e^2}{3} \longrightarrow ۰/۰۷۴۵ \times ۲/۷۱۸ \times ۲/۷۱۸ = ۵/۵۰۶$$

$$\frac{\sqrt{5}e^2}{3} = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}e\right)e \begin{cases} e = ۲/۷۱۸ + e_1 \longrightarrow e_e \le ۱/۲ \times ۱۰^{-4} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} = ۰/۷۴۵ + e_2 \longrightarrow e_x \le ۱/۲ \times ۱۰^{-4} \end{cases} \longrightarrow f_{(x)} = xy$$

e_x ، e_y

$$e_f \le e_x |2xy| + e_y |y^2|$$

$$\max(e_f) = ۱/۲ \times ۱۰^{-4} \left(۲ \times \frac{\sqrt{5}}{3} \times e_1 + e^2\right) = ۵/۷۲۱ \times ۱۰^{-4}$$

$$\frac{۳۴}{۹} ۵/۵۰۷ \pm ۵/۷۲۱ \times ۱۰^{-4}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$X^T A X = -2 \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 - x_2^2 = -2$$

$$X^T B X = 9 \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 2x_2^2 = 9$$

$$D = \begin{vmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_1 & 4x_2 \end{vmatrix} = 8x_1x_2 - 4x_1x_2 = 4x_1x_2$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -x_1^2 + x_2^2 - 2 & -2x_2 \\ 2x_1^4 - 2x_2^2 + 9 & 4x_2 \end{vmatrix} = -4x_1^2x_2 + 4x_2^3 - 12x_2 + 6x_1^4x_2 - 4x_2^3 + 18x_2$$

$$= -4x_1^2x_2 \mp 6x_1^4x_2 + 6x_2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2x_1 & -x_1^2 + x_2^2 - 2 \\ 2x_1 & -x_1^2 - 2x_2^2 + 9 \end{vmatrix} = -2x_1^3 - 4x_1x_2^2 - 18x_1 - 2x_1^3 - 2x_1x_2^2 + 6x_1$$

$$= -6x_1x_2^2 - 12x_1$$

$x_1 = 0.8$, $x_2 = 2$ $\longrightarrow$ $D = 6.4$, $D_1 = 11.7952$, $D_2 = -28.8$

$x_1 = 2.8$

$x_2 = 2$

$f(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$ $\quad x_0, x_1, \dots, x_n$ متساوی الفاصله

$h \quad x \in [0, 1]$

[illegible] , h_{max} ? $\quad \varepsilon \leq 10^{-4}$

$$\varepsilon' = f(x) - P_n(x) \leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} r(r-1)\dots(r-n) f^{(n+1)}(t)$$

٤)

x	١,٢	١,٣	١,٤	١,٥	١,٦
$f(x)$	٠,١٨٢٣	٠,٢٦٢٤	٠,٣٣٦٥	٠,٤٠٥٥	٠,٤٧

x_i	$f(x_i)$	1st	2nd	3rd
١,٢	٠,١٨٢٣			
١,٣	٠,٢٦٢٥	٠,٠٨٢		
١,٤	٠,٣٣٦٥	٠,٠٧٣	-٠,٠٠٧٢	
١,٥	٠,٤٠٥٥	٠,٠٦٩	-٠,٠٠٤	٠,٠٠٤٢
١,٦	٠,٤٧	٠,٠٦٤٥	-٠,٠٠٤٥	-٠,٠٠٠٥

$$٠,١٨٢٣ + \left(\frac{x-٠,١}{٠,١}\right)٠,٠٨١٢ + \frac{x-٠,١}{٠,١} \times \left(\frac{x-٠,١}{٠,١} - ١\right)\left(\frac{-٠,٠٠٨٢}{٢}\right)$$

$$= ٠,١٨٢٣ + ٠,٨١٢x - ٠,٠٨١٢ - ٠,٤١x^2 + ٠,١٢٢x - ٠,٠٠٨٢$$

$$P_n(x) = -٠,٤١x^2 + ٠,٩٣٥x + ٠,٠٩٢٩$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{٢h} \longrightarrow f'(١,٤) = \frac{f(١,٤+٠,١) - f(١,٤-٠,١)}{٢\times ٠,١}$$

$$= \frac{f(١,٥) - f(١,٣)}{٠,٢}$$

$$f'(١,٤) = -٠,٧١٣$$

$T_n \longrightarrow$ ذوزنقه

$M_n \longrightarrow$ نقطه میانی $\longrightarrow n$

$S_{2n} \longrightarrow$ $\frac{1}{3}$ سیمپسون $\longrightarrow 2n$

$$\int_a^b f_{(x)}\, dx$$

$$\frac{1}{3}(2M_n + T_n) = S_{2n}$$

$$T_n = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + f_n\right)$$

$$M_n = h\left[f(x_0 + \frac{h}{2}) + f(x_1 + \frac{h}{2}) \dots + f(x_{n-1} + \frac{h}{2})\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) h$$

$$S_{2n} = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + f_{2n})$$

$$f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + f_{2n} = 2(f(x_0 + \frac{h}{2}) + f(x_1 + \frac{h}{2})) \dots$$
$$+ \frac{1}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots f_n)$$

$$y' = \frac{x-y}{2}$$

$y(0) = 1$ ۱۲

الف) با مقدار $h = 0{,}1$ $y(0{,}1)$

۱۵) آدامز - بشفورث مرتبه ۲ $y(0{,}2)$

$$f(x,y) = \frac{x+y}{2} \quad y_0 = 1 \quad x_0 = 0 \quad h = 0{,}1$$

$$y' = \frac{x+y}{2}$$

$$y'' = 1/2 + \frac{x+y}{4}$$

$$y''' = 1/4 + \frac{x+y}{8}$$

$$y_{n+1} = y_n + 0{,}1\,(x_n + y_n) + \frac{(0{,}1)^2}{2}\left(1/2 + x+y/4\right) + \frac{(0{,}1)^3}{6}\left(1/4 + x+y/8\right) + \frac{(0{,}1)^4}{24}\left(1/8 + x+y/16\right)$$

$$=$$

$$y_1 = 1 + \cancel{0{,}1\,(1)} + \frac{(0{,}1)^2}{2}\left(1/2 + 1/4\right)^{3/4} + \frac{(0{,}1)^3}{6}\left(1/4 + 1/8\right)^{3/8} + \frac{(0{,}1)^4}{24}\left(1/8 + 1/16\right)^{3/16}$$

$$y_1 = 1 + 0{,}1 + 3{,}75\times10^{-4} + 6{,}25\times10^{-5} + 7{,}8125\times10^{-7} = 3{,}81328125\times10^{-3}$$

$y(0{,}1) =$ ۱۰

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(3f_i - f_{i-1}\right)$$

$$y_1 = 1 + \frac{0{,}1}{2}\,($$

17

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1$$
$$2x_2 + 3x_3 - x_4 = -3$$
$$3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 2$$
$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2$$

$\longrightarrow$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1$$
$$2x_2 + 1x_3 + x_4 = -5$$
$$4x_2 - 4x_3 + 7x_4 = -1$$
$$6x_2 - x_3 + 5x_4 = -2$$

$\longrightarrow$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1$$
$$2x_2 + x_3 + x_4 = -5$$
$$-6x_3 + 5x_4 = -11$$
$$-4x_3 + 2x_4 = -17$$

$\longrightarrow$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1$$
$$2x_2 + x_3 + x_4 = -5$$
$$-6x_3 + 5x_4 = -11$$
$$8/6\, x_4 = -28/6$$

$$x_1 = 19/16$$
$$x_2 = 155/48$$
$$x_3 = -101/24$$
$$x_4 = -58/8$$

$\longrightarrow 3 \times 19/16 + 155/48 + 101/24 - 232/8 = -18 \neq 2 \longrightarrow$

جواب ندارد

۸۱

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \qquad x_۰ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$|a^k - a^{k-۱}| < ۱۰^{-۳} \longrightarrow ۰/۰۰۱$$

$$y_۰ = A x_۰ \rightarrow \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} \longrightarrow ۲ \begin{bmatrix} ۳/۲ \\ ۱ \end{bmatrix} \rightarrow ۱٫۵$$

$$y_۱ = A x_۱ \rightarrow \begin{bmatrix} ۴ \\ ۵/۲ \end{bmatrix} \longrightarrow ۵/۲ \begin{bmatrix} ۸/۵ \\ ۱ \end{bmatrix} \rightarrow ۱٫۶$$

$$y_۲ = A x_۲ \rightarrow \begin{bmatrix} ۲۱/۵ \\ ۱۳/۵ \end{bmatrix} \longrightarrow ۱۳/۵ \begin{bmatrix} ۲۱/۱۳ \\ ۱ \end{bmatrix} \rightarrow ۱٫۶۱۵$$

$$y_۳ = A x_۳ \rightarrow \begin{bmatrix} ۵۵/۱۳ \\ ۳۴/۱۳ \end{bmatrix} \longrightarrow ۳۴/۱۳ \begin{bmatrix} ۵۵/۳۴ \\ ۱ \end{bmatrix} \rightarrow ۱٫۶۱۷$$

$$y_۴ = A_۴ x \rightarrow \begin{bmatrix} ۱۴۴/۳۴ \\ ۸۹/۳۴ \end{bmatrix} \longrightarrow ۸۹/۳۴ \begin{bmatrix} ۱۴۴/۸۹ \\ ۱ \end{bmatrix} \rightarrow ۱٫۶۱۸$$

$$y_۵ = A_۵ x \rightarrow \begin{bmatrix} ۳۷۷/۸۹ \\ ۲۳۳/۸۹ \end{bmatrix} \longrightarrow ۲۳۳/۸۹ \begin{bmatrix} ۳۷۷/۲۳۳ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۱٫۶۱۸ \checkmark$$

$$۱٫۶۱۸ - ۱٫۶۱۷ = ۰/۰۰۱$$