غزل چهار ... محاسبات عددی
خانم دکتر ... فرد

لیلا ... ۹۸۱۷۰۴۱۸

تا ۴ رقم اعشار قطع می‌کنیم

$h=0.1 \ , \ h=0.25 \ , \ h=0.5 \qquad \int_0^1 x^2 \ln(x)\,dx$

$h=0.1 \longrightarrow n=10$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	0	-0.0023	-0.0644	-0.1083	-0.1466	-0.1732	-0.1838	-0.1747	-0.1428	-0.0853	0

$$\int_0^1 x^2\ln(x) = 0.1(0-0.0023-0.0644-0.1083-0.1466-0.1732-0.1838-0.1747-0.1428-0.0853) = 0.1102$$

$h=0.25 \rightarrow n=4$

x	0	0.25	0.5	0.75	1
y	0	-0.0866	-0.1733	-0.1618	0

$$\int_0^1 x^2\ln(x) = 0.25(0-0.0866-0.1733-0.1618) = 0.1054$$

$h=0.5 \longrightarrow n=2$

x	0	0.5	1
y	0	-0.1733	0

$$\int_0^1 x^2\ln(x) = 0.5(0-0.1733) = 0.0866$$

۲)

$T(h) \rightarrow$ تقریب ذوزنقه $\rightarrow = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2f(a+h) + \dots + f(a+nh)\right)$

$S(h) \rightarrow$ سیمپسون $\rightarrow = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(a+h) + \dots + f(a+nh)\right)$

$$\frac{4T(h/2) - T(h)}{3} = S(h/2)$$

یکی درمیان جملات را دو برابر ضرب ندارد

$$\frac{4T(h/2) - T(h)}{3} = \frac{\left(\cancel{4}^{2}\, h/\cancel{4}2\left(f(a) + 2f(a+h/2) + \dots + f(b)\right)\right) - \left(h/2\left(f(a) + 2f(a+h) + \dots + f(b)\right)\right)}{3}$$

$$= \frac{h}{6}\Big(\underbrace{(2f(a) - f(a))}_{f(a)} + 4f(a+h/2) + \underbrace{2(2f(a+h) - f(a+h))}_{2f(a+h)} + \dots + \underbrace{(2f(b) - f(b))}_{f(b)}\Big) \quad (1)$$

$$S(h/2) = h/6\left(f(a) + 4f(a+h/2) + \dots + f(b)\right) \quad (2)$$

$(1) = (2)$ پس ارتباط بالا بین تقریب‌ها برقرار است.

۱۴ $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$

x_i	۰	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{6\pi}{12}$
f_i	۰	۰٫۲۵۸۸۲	۰٫۵	۰٫۷۰۷۱۱	۰٫۸۶۶۰۳	۰٫۹۶۵۹۳	۱
سیمپسون ۱/۳	۰	$4f_1=$ ۱٫۰۳۵۲۸	$2f_2=1$	$4f_3=$ ۲٫۸۲۸۴۴	$2f_4=$ ۱٫۷۳۲۰۶	$4f_5=$ ۳٫۸۶۳۷۲	۱
سیمپسون ۳/۸	۰	$3f_1=$ ۰٫۷۷۶۴۶	$3f_2=$ ۱٫۵	$2f_3=$ ۱٫۴۱۴۲۲	$3f_4=$ ۲٫۵۹۸۰۹	$3f_5=$ ۲٫۸۹۷۷۹	۱
ذوزنقه	۰	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	۱

$h=\pi/12 \xrightarrow{\text{ذوزنقه}} \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = \frac{\pi}{24}\left(0 + ۰٫۲۵۸۸۲ + ۰٫۵ + ۰٫۷۰۷۱۱ + ۰٫۸۶۶۰۳ + ۰٫۹۶۵۹۳\right)$

$= \frac{\pi}{24} \times$ ۳٫۲۹۸۶۹ $\simeq$ ۰٫۴۳۱۷

سیمپسون ۱/۳ $\to \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = \pi/36\,(0 + ۱٫۰۳۵۲۸ + 1 + ۲٫۸۲۸۴۴ + ۱٫۷۳۲۰۶ + ۳٫۸۶۳۷۲ + 1)$

$= \frac{\pi}{36} \times$ ۱۱٫۴۵۹۵۰ $\simeq$ ۱٫۰۰۰۰۲۳

سیمپسون ۳/۸ $\to \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = \frac{\pi}{32}\left(0 + ۰٫۷۷۶۴۶ + ۱٫۵ + ۱٫۴۱۴۲۲ + ۲٫۵۹۸۰۹ + ۲٫۸۹۷۷۹ + 1\right)$

$= \frac{\pi}{32} \times$ ۱۰٫۱۸۷۷۹ $\simeq$ ۱٫۰۰۰۱۳

$$\int_1^2 \frac{\sin^2 x}{x}\, dx$$

$$x = 1/2\, t + 3/2$$
$$dx = 1/2\, dt \longrightarrow \int_{-1}^{1} \frac{\sin^2(1/2\, t + 3/2)}{1/2\, t + 3/2}\, 1/2\, dt = \int_{-1}^{1} \frac{\sin^2(1/2\, t + 3/2)}{t+3}$$

$f(t)$

$P_0(x) = 1$
$P_1(x) = x$

$$P_2(x) = 1/2\,\big((2\times 2 - 1)\, x \times x - (2-1)\big) = 1/2\,(3x^2 - 1)$$
$$P_3(x) = 1/3\,\big((6-1)\, x \times 1/2\,(3x^2 - 1) - 2x\big) = 1/2\,(5x^3 - 3x)$$
$$P_3'(x) = 3/2\,(5x^2 - 1) \rightarrow \omega_i = \frac{2}{(1 - x_i^2)(P_3'(x_i))^2}$$

$x_i = \pm 1/\sqrt{3}$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1$

$x_i = 0, \pm\sqrt{3/5}$, $\omega_1 = 8/9$, $\omega_2 = 5/9$, $\omega_3 = 5/9$

۲ نقطه‌ای $\Rightarrow \dfrac{\sin^2\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{3}} + 3} + \dfrac{\sin^2\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)}{-1/\sqrt{3} + 3} = 0.2446 + 0.3919 = 0.638$

۳ نقطه‌ای $\Rightarrow 8/9 \times \dfrac{\sin^2(3/2)}{3} + 5/9 \times \dfrac{\sin^2\left(3/2 + \sqrt{3/5}\right)}{3 + \sqrt{3/5}} + 5/9\, \dfrac{\sin^2\left(3/2 - \sqrt{3/5}\right)}{3 - \sqrt{3/5}} = 0.6384$

ب)

$$\int_{۰}^{۱} x^{۲} \ln x\,dx = ۱/۳\, x^{۳} \ln x - \frac{x^{۳}}{۹} \Big|_{۰}^{۱} = -۱/۹ \simeq -۰٫۱۱۱۱$$

$h = ۱/۳$

x_i	۰	۱/۳	۲/۳	۱
f_i	۰	−۰٫۱۲۲	−۰٫۱۸۰۲	۰

$$\frac{۱}{۳} \times \left(-۰٫۱۲۲ + (-۰٫۱۸۰۳)\right) = -۰٫۱۰۰۸ \qquad err = ۰٫۰۱۰۳$$

$h = ۱/۹$

x_i	۰	۱/۹	۲/۹	۳/۹	٤/۹	۵/۹	۶/۹	۷/۹	۸/۹	۱
f_i	۰	−۰٫۰۲۷۱	−۰٫۰۷٤۳	−۰٫۱۲۲۱	−۰٫۱٤۰۲	−۰٫۱۸۱٤	−۰٫۱۸۰۲	−۰٫۱٥۲	−۰٫۰۹۳۱	۰

$$\int_{۰}^{۱} x^{۲} \ln x\,dx = ۱/۹\,(-۰٫۰۲۷۱ - ۰٫۰۷٤۳ - ۰٫۱۲۲۱ - ۰٫۱٤۰۲ - ۰٫۱۸۱٤ - ۰٫۱۸۰۲ - ۰٫۱٥۲$$

$$-۰٫۰۹۳۱) = -۰٫۱۱۰۰٤ \qquad err = ۰٫۰۰۱۰۷$$

$$f(x \pm h) = f(x) \pm h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) \pm \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{2h^4}{4!} f^{(4)}(x) + O(h^6)$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} - \frac{2h^2}{4!} f^{(4)}(x) + O(h^4)$$

$$f(x \pm 2h) = f(x) \pm 2h f'(x) + \frac{4h^2}{2!} f''(x) \pm \frac{8h^3}{3!} f'''(x) \dots$$

$$f(x+2h) + f(x-2h) = 2f(x) + 4h^2 f''(x) + \frac{32h^4}{4!} f^{(4)}(x) + O(h^6)$$

$$f''(x) = \frac{f(x-2h) + f(x+2h) - 2f(x)}{4h^2} + \frac{h^2}{3} f^{(4)}(x) + O(h^4)$$

$$f''(x) = \frac{16 f(x+h) + 16 f(x-h) - 30 f(x) - f(x-2h) - f(x+2h)}{12h^2}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{9x}$$

$$h = 0.4 \longrightarrow f''(0.5) = \frac{16 f(0.9) + 16 f(0.1) - 30 f(0.5) - f(-0.3) - f(1.3)}{0.4^2 \times 12} \simeq 3.152$$

$h = 0.3 \longrightarrow 3.821$

$h = 0.2 \longrightarrow 3.958$

$h = 0.1 \longrightarrow 3.978$

$h = 0.05 \longrightarrow 3.972$