

Remerciement

Nous tenons à remercier **ALLAH** le tout puissant, de nous avoir guidé vers le droit chemin, de nous avoir donné le courage et la volonté pour réaliser ce modeste travail, et pour surmonter toutes les difficultés que nous avons rencontrées au long de nos années d'études.

Nous tenons à remercier très chaleureusement *Mr. le professeur* **HAMDI Fayçal**, notre encadreur, qui a dirigé notre travail avec dévouement jusqu'à son achèvement et pour sa disponibilité, son exigence et son ouverture scientifique, son enthousiasme très communicatif, son encouragement, ses précieux conseils et pour le soutien qu'il nous a apporté tout au long de la préparation de ce mémoire.

Nous voudrions exprimer notre reconnaissance à notre promotrice au sein de l'entreprise Crédit populaire d'Algérie (CPA), *Mme* **OULAI Hafida**, pour la proposition de ce sujet, et pour l'aide précieuse.

Nous tenons à remercier *Mr* **AICHE Rachid** pour avoir accepté d'assurer la présidence de notre jury de mémoire. Nous aimerons lui manifester notre profonde gratitude pour sa disponibilité et son attention.

Nous adressons aussi nos remerciements à l'examineur de ce mémoire, *Mr* **LARD-JANE Tayeb** , qui nous fait l'honneur d'être membre du Jury.

Enfin nous tenons à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicaces

Je tiens, à la fin de ce travail, à remercier ALLAH le tout puissant de m'avoir donné la foi et de m'avoir permis d'en arriver là.

Je dédie ce modeste travail :

A la lumière de
mes jours, la source de mes ef-
forts, la flamme de mon cœur,
ma vie et mon bonheur,
ma maman *Noura*
que j'adore.
♡

A mon exemple
éternel, mon soutien moral et
source de bonheur, celui qui
s'est toujours sacrifié pour me
voir réussir, que dieu te
garde, à toi mon père.
Houcine.
♡

*A mon chère frère Mohamed Ishak et à mes chères sœurs Mouna, Sara, Zouina, Amani,
Malak et Meryam Sirine, à mes nièces Arine et Lodjaine ; A tous mes oncles, mes
tantes, mes cousin et mes cousines ;*

A mon promoteur Mr. le professeur HAMDI Fayçal ;

A mon binôme SAHRAOUI Meriem qui m'aider pour ce mémoire ;

A mes amis, camarades de l'USTHB et d'ailleurs

A toute personne qui mérite l'appréciation et le respect de ma part.

♡Merci à vous♡

Sabah

INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
1 Mélange de Modèles Autorégressifs	4
1.1 Séries Financières	4
1.1.1 Les principales propriétés des séries financières	4
1.2 Mélange de Modèles Autorégressifs	6
1.3 Propriétés probabilistes d'un modèle <i>MAR</i>	6
1.3.1 Espérance conditionnelle	6
1.3.2 Variance conditionnelle	7
1.3.3 Fonction d'autocorrélation	8
1.3.4 Fonction prédictive au pas m	9
1.3.5 Étude de stationnarité	10
1.4 Inférence statistique	17
1.4.1 Estimation des paramètres du modèle <i>MAR</i> par la méthode du maximum de vraisemblance	17
1.4.2 Erreur standard de l'estimation	20
1.4.3 Matrice d'information de Fisher	20
1.4.4 Identification et sélection des ordres d'un modèle <i>MAR</i>	28
1.5 Étude de simulation	28
2 Mélange de Modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques	32
2.1 Rappel sur Les Modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques	32
2.1.1 Propriétés des processus <i>ARCH</i>	33
2.2 Mélange de Modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques	33
2.3 Propriétés probabilistes d'un modèle <i>MAR – ARCH</i>	35
2.3.1 Espérance conditionnelle	35
2.3.2 Variance conditionnelle	36
2.3.3 Étude de la stationnarité	37
2.3.4 Fonction d'autocorrélation et le Moments d'ordre quatre	41
2.4 Inférence statistique	44
2.4.1 Estimation des paramètres du modèle <i>MAR – ARCH</i>	44
2.4.2 Estimation de l'erreur standard	48

2.4.3	Calcul de la matrice d'information observée	48
2.4.4	Critère de sélection d'un modèle $MAR - ARCH$	59
2.5	Étude de simulation	59
3	APPLICATION	62
3.1	Étude de la série DZD/USD	63
3.2	Étude de la série DZD/EUR	78
3.3	Étude de la série DZD / GBP	88
3.4	Étude de la série DZD / JPY	97
	CONCIUSION GÉNÉRALE	106
	Bibliographie	111
	RÉSUMÉ	112

Alà barakati Ellah

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les échanges internationaux entre les pays ont créé le besoin d'un instrument qui facilite la transformation de la monnaie nationale en devise étrangère. Cet instrument n'est autre que le taux de change. Ainsi, ce dernier peut être défini comme étant la valeur d'une monnaie nationale par rapport à celle d'un autre pays. De nos jours, le taux de change représente un symbole de la puissance économique et aussi politique du fait qu'il est au cœur des relations économiques et financières internationales et qu'à travers ce dernier on peut évaluer l'évolution de la situation économique.

La volatilité du taux de change désigne les mouvements de court et de moyen terme qui écartent le taux de change de sa tendance. Cette notion renvoie donc non seulement au caractère variable du taux de change, mais surtout à l'instabilité de son mouvement et à l'incertitude qui y est attachée. Ainsi, prévoir les fluctuations de cette variable étant une tâche de plus en plus difficile pour les économistes. Plusieurs indicateurs économiques influencent la variation du taux de change, comme : le prix du pétrole, la croissance économique, la stabilité politique,...etc.

Cette prévision permet aux agents économiques de prendre les mesures adéquates pour diminuer le risque de change.

L'évolution du cours de change au cours du temps peut être vue comme une série chronologique. Cette dernière, appelée aussi série temporelle, est une suite d'observations à des dates différentes en étudiant des valeurs numériques indicées par le temps. Les séries chronologiques interviennent dans beaucoup de domaines tels que : le domaine des affaires, la finance, la mécanique et les sciences naturelles,...etc.

Une variété de techniques disponibles permet d'analyser le grand nombre de données dans ces domaines.

L'analyse des séries chronologiques permet d'étudier des événements qui interviennent dans le passé et le présent dans le but de prévoir leur situation dans un futur relativement proche tout en construisant le modèle le plus fidèle à la réalité. Les modèles linéaires autorégressifs moyennes mobiles (*ARMA*) sont les plus utilisés en analyse des séries chro-

nologiques. Cette classe de modèles a connu un développement remarquable grâce au théorème de Wold(1938). Ils peuvent être construits suivant un raisonnement décrit par Box et Jenkins (méthodologie de Box et Jenkins). Cette méthodologie permet l'identification du modèle, l'estimation de ses paramètres et finalement sa validation.

Les méthodes utilisées dans l'analyse des séries temporelles sont fondées sur l'hypothèse de stationnarité. Pour cela, on appellera la série étudiée une série stationnaire qui présente une allure dénuée de tendance et/ou saisonnalité. Cependant, dans les phénomènes économiques, on est souvent confronté à des chroniques non stationnaires. Par conséquent, on doit avant toute les choses, chercher à le "stationnariser", c'est-à-dire trouver une transformation stationnaire de ce processus pour un processus "TS" (trend Stationnary) et la méthode de filtre à la différence si le processus est "DS" (difference Stationnary) .utilisons les tests des racines unitaires ont été mis au point, les plus répandus sont ceux de Dickey Fuller simple et augmenté pour détecter la nature de la non stationnarité.

Cependant, depuis quelques années, de nombreuses études empiriques ont montré que la forme linéaire ne permet pas toujours de caractériser des dynamiques telles que le changement de régime, la multimodalité et la volatilité. Cette dernière traduite statistiquement par l'instabilité de la variance conditionnelle. Elle constitue l'une des plus importantes caractéristiques des séries financières. Vue ce constat, les modèles linéaires (la classe des modèles *ARMA*), se révèlent insuffisants et incapables de modéliser de telles séries. En effet, il est connu que la classe des modèles autorégressifs conditionnellement Hétéroscédastiques *ARCH*, introduite par Engle (1982), a montré une grande flexibilité dans la modélisation des séries financières, et a contribué, par ailleurs, à la refonte de la théorie financière de façon à inclure la dépendance temporelle de la volatilité.

Pour mieux modéliser les séries financières, Wong et Li (2000, 2001) ont proposé les modèles *MAR*(*MélangedeModèlesAutorégressifs*). Ces modèles sont supposés être simples, faciles à traiter analytiquement et à estimer. Les modèles *MAR – ARCH* (Mélange de Modèles Autorégressifs à erreurs *ARCH*), une généralisation des modèles *MAR*, sont introduits par Wong et Li (2001). Cette classe de modèles a montré sa performance et sa flexibilité par rapport aux modèles linéaires usuels pour modéliser des séries chronologiques et expliquer leur hétéroscédasticité. Ils sont composés d'un mélange de K modèles autorégressifs à erreurs *ARCH* possédant des propriétés qui les rendent capables de modéliser des séries chronologiques avec distribution conditionnelle multimodale et avec hétéroscédasticité.

Dans le but de limiter les risques de changes, le Crédit Populaire d'Algérie nous a proposé d'étudier et d'analyser la volatilité stochastique du taux de change des monnaies suivantes : Le Dinar algérien (*DZD*) face aux : Dollar américain (*USD*), la Monnaie Européenne (*EUR*), la Livre Sterling (*GBP*), le Yen Japonais (*JPY*). L'objectif principal de ce mémoire est d'étudier le sens de variation du taux de change du dinars pour

pouvoir anticiper son évolution afin de prendre des décisions qui permettent d'améliorer sa situation et de trouver une solution à sa baisse.

Notre travail comprend une introduction générale et trois chapitres. Le premier chapitre est consacré à l'étude de la classe du Mélange de Modèles Autorégressifs (MAR).

Le deuxième chapitre porte sur l'étude de la classe du Mélange de Modèles Autorégressifs à erreurs $ARCH$ ($MAR - ARCH$).

Le troisième chapitre est consacré à la modélisation du taux de change par les modèles : $SARIMA$, MAR et $MAR - ARCH$.

Nous achevons notre travail par une conclusion générale qui contient une étude comparative entre les différentes modélisations, $SARIMA$, MAR et $MAR - ARCH$.

CHAPITRE 1

MÉLANGE DE MODÈLES AUTORÉGRESSIFS

Les premiers modèles introduits dans la littérature de l'analyse des séries chronologiques sont les modèles linéaires, comme : AR , MA , $ARMA$. Il s'agit de modéliser les processus stationnaires en supposant la non-variabilité de la variance conditionnelle dans le temps. Cette hypothèse ne représente pas la réalité, notamment dans les séries financières où ce facteur est soumis au changement en fonction du temps. Pour cela, le recours aux modèles non-linéaires, pouvant prendre en considération ce changement est indispensable.

On s'intéresse dans ce présent chapitre à la classe de mélange de modèles autorégressifs. Nous débutons par quelques propriétés de la série financière qui représente la principale motivation de l'étude de cette classe, et nous donnons un aperçu sur la classe de mélange de modèles autorégressifs.

1.1 Séries Financières

Les séries financières décrivant l'évolution des phénomènes financiers au cours du temps, comparées à d'autres séries chronologiques, ont quelques spécificités telles que : la volatilité et son comportement en "clusters", la persistance, l'excès de kurtosis, l'asymétrie (skewness) et d'autres.

1.1.1 Les principales propriétés des séries financières

Les séries de prix d'actif et de rendements présentent généralement un certain nombre de propriétés similaires suivant leur périodicité. Soit P_t le prix d'un actif à la date t et T_t

le logarithme de rendement correspondant :

$$T_t = \log(P_t) - \log(P_{t-i}) = \log(1 + R_t)$$

d'où $R_t = (P_t - P_{t-i})/P_{t-i}$ désigne la variation relative des prix.

Les séries de prix d'actif et de rendements sont d'ailleurs sans unité, ce qui facilite la comparaison entre elles.

On distingue 8 principales propriétés[3] que nous allons successivement aborder :

Propriété 1.1 (*stationnarité*)

Les processus P_t sont non-stationnaires : les trajectoires de prix sont généralement proches d'une marche aléatoire sans terme constant. Et, en revanche, les séries des rendements ont des trajectoires compatibles avec la stationnarité au second ordre.

Propriété 1.2 (*Autocorrélations des carrés des variations de prix*)

Les faibles autocorrélations de la série (r_t) la rendent proche d'un bruit blanc (sauf pour des rendements définis sur des périodes très courtes, de l'ordre d'une vingtaine de minutes) Néanmoins, la série (r_t^2) est souvent fortement corrélée. Ce qui n'est pas compatible avec une hypothèse de bruit blanc.

Propriété 1.3 (*Queues de distribution épaisses*)

Les distributions empiriques des séries des rendements, on s'aperçoit que l'hypothèse de normalité est rejetée. En particulier, au niveau des queues, la décroissance est généralement plus faible que dans le cas gaussien, i.e. en $\exp(-x^2/2)$. On parle alors de distribution leptokurtique.

Propriété 1.4 (*Clusters de Volatilité* (regroupement des extrêmes)

Empiriquement, de fortes valeurs, ou de fortes variations, tendent à être suivies par d'autres grandes variations.

Propriété 1.5 (*Queues épaisses conditionnelles*)

Souvent, même une fois corrigées de la volatility clustering (en utilisant des modèles de type GARCH, par exemple), les séries ont des résidus possédant encore des queues épaisses (même si cela est moins important que la distribution non conditionnelle, i.e. la distribution des rendements).

Propriété 1.6 (*Effet de levier*)

Cette propriété, notée par Brock en 1976 repose sur l'observation du fait qu'il existe une asymétrie entre l'impact des valeurs passées positives et des valeurs passées négatives. Les baisses de cours tendent à provoquer un accroissement de la volatilité supérieure à celui induit par une hausse du cours, de même amplitude

Propriété 1.7 (Saisonnalité)

La volatilité tend à augmenter lorsque les marchés ferment (week end ou jours fériés). On parle alors d'accumulation d'information.

Propriété 1.8 (Asymétrie perte/gain)

Ormis dans le cas des taux de change, il y a généralement asymétrie de la distribution : il y a plus de mouvements forts à la baisse qu'à la hausse.

1.2 Mélange de Modèles Autorégressifs

Le mélange de modèles autorégressifs est un modèle à changement de régimes introduit depuis environ deux décennies par Wong et Li. Ce modèle constitue l'une des formulations possibles de la grande famille des modèles non-linéaires. Ainsi, il fait partie d'un domaine important de la statistique. Sa définition est donnée dans le paragraphe suivant qui introduit aussi la notation utilisée dans la suite de ce mémoire :

Définition 1 *Un processus $\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$, suit un mélange de K modèles autorégressif, d'ordre p_1, p_2, \dots, p_K , noté $MAR(K; p_1, p_2, \dots, p_K)$, s'il est donné par :*

$$F(x_t | \Omega_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \Phi \left(\frac{x_t - \phi_{k,0} - \phi_{k,1}x_{t-1} - \dots - \phi_{k,p_k}}{\sigma_k} \right) \quad (1.1)$$

où $\Phi(\cdot)$ et $F(\cdot | \Omega_{t-1})$ sont respectivement la distribution cumulative de la loi normale centrée réduite et la distribution cumulative conditionnelle de x_t , sachant les valeurs passées du processus x_t jusqu'au temps $t-1$. Les proportions de mélange α_k , tel que $k = 1, \dots, K$, sont des réelles strictement positives et leur somme vaut un.

1.3 Propriétés probabilistes d'un modèle MAR

Dans cette section, nous allons toucher aux points essentiels concernant l'étude de modèle MAR , tels que : l'espérance, la variance, la fonction d'autocorrélation et la fonction prédictive au pas m , ainsi qu'une étude sur la stationnarité.

1.3.1 Espérance conditionnelle

La formule de la moyenne conditionnelle d'un modèle $MAR(K; p_1, p_2, \dots, p_K)$ est donnée par :

$$E(x_t | \Omega_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k (\phi_{k,0} + \dots + \phi_{k,p_k} x_{t-p_k}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \mu_{t,k}$$

où

$$\mu_{t,k} = \phi_{k,0} + \dots + \phi_{k,p_k} x_{t-p_k}$$

Preuve On a

$$E(x_t | \Omega_{t-1}) = \int_{\mathbb{R}} x_t \frac{dF(x_t | \Omega_{t-1})}{dx_t} dx_t = \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_k}{\sigma_k} \int_{\mathbb{R}} x_t \varphi\left(\frac{x_t - \mu_{t,k}}{\sigma_k}\right) dx_t$$

on pose le changement de variable suivant :

$$z_t = \frac{x_t - \mu_{t,k}}{\sigma_k}$$

Alors, on obtient :

$$\begin{aligned} E(x_t | \Omega_{t-1}) &= \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_k}{\sigma_k} \int_{\mathbb{R}} (z_t \sigma_k + \mu_{t,k}) \varphi\left(\frac{(z_t \sigma_k + \mu_{t,k}) - \mu_{t,k}}{\sigma_k}\right) \sigma_k dz_t \\ &= \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_k}{\sigma_k} \int_{\mathbb{R}} (z_t \sigma_k + \mu_{t,k}) \varphi(z_t) \sigma_k dz_t \end{aligned}$$

On peut encore écrire :

$$E(x_t | \Omega_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \sigma_k \int_{\mathbb{R}} z_t \varphi(z_t) dz_t + \sum_{k=1}^K \alpha_k \mu_{t,k} \int_{\mathbb{R}} \varphi(z_t) dz_t$$

Et comme φ est la densité de la loi normal centré réduite, $\int_{\mathbb{R}} z_t \varphi(z_t) dz_t = E(z_t) = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \varphi(z_t) dz_t = 1$

Par conséquent

$$E(x_t | \Omega_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \mu_{t,k}$$

1.3.2 Variance conditionnelle

La variance conditionnelle de x_t est donnée par la formule suivante :

$$Var(x_t | \Omega_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \sigma_k^2 + \sum_{k=1}^K \alpha_k \mu_{t,k}^2 - \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k \mu_{t,k} \right)^2$$

Preuve Soit

$$E(x_t^2 | \Omega_{t-1}) = \int_{\mathbb{R}} x_t^2 \frac{dF(x_t | \Omega_{t-1})}{dx_t} dx_t = \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_k}{\sigma_k} \int_{\mathbb{R}} x_t^2 \varphi\left(\frac{x_t - \mu_{t,k}}{\sigma_k}\right) dx_t$$

On pose le même changement de variable précédent :

$$z_t = \frac{x_t - \mu_{t,k}}{\sigma_k}$$

On retrouve :

$$\begin{aligned} E(x_t^2 | \Omega_{t-1}) &= \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_k}{\sigma_k} \int_{\mathbb{R}} [(z_t^2 \sigma_k^2 + 2z_t \sigma_k \mu_{t,k} + \mu_{t,k}^2) \varphi(z_t) \sigma_k dz_t] \\ &= \sum_{k=1}^K \alpha_k \left[\sigma_k^2 \int_{\mathbb{R}} z_t^2 \varphi(z_t) dz_t + \int_{\mathbb{R}} 2z_t \sigma_k \mu_{t,k} \varphi(z_t) dz_t + \int_{\mathbb{R}} \mu_{t,k}^2 \varphi(z_t) dz_t \right] \end{aligned}$$

Puisque $\int_{\mathbb{R}} z_t^2 \varphi(z_t) dz_t = \text{Var}(z_t) = 1$, $\int_{\mathbb{R}} z_t \varphi(z_t) dz_t = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \varphi(z_t) dz_t = 1$

On déduit :

$$E(x_t^2 | \Omega_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k (\sigma_k^2 + \mu_{t,k}^2)$$

et comme $\text{Var}(x_t | \Omega_{t-1}) = E(x_t^2 | \Omega_{t-1}) - (E(x_t | \Omega_{t-1}))^2$, alors la variance conditionnelle de x_t peut s'écrire

$$\text{Var}(x_t | \Omega_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \sigma_k^2 + \sum_{k=1}^K \alpha_k \mu_{t,k}^2 - \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k \mu_{t,k} \right)^2$$

Remarque 1.1 :

- Le terme $\sum_{k=1}^K \alpha_k \mu_{t,k}^2 - \left[\sum_{k=1}^K \alpha_k \mu_{t,k} \right]^2$ n'est nul que si $\mu_{t,1} = \mu_{t,2} = \dots = \mu_{t,K}$.
- La valeur de la variance conditionnelle est importante quand les $\mu_{t,k}$ sont différents. Dans ce cas, la distribution conditionnelle devra être multimodale.
- La valeur minimale de la variance conditionnelle est atteinte quand les $\mu_{t,k}$ sont égales. Nous appelons cette valeur minimale $\sum_{k=1}^K \alpha_k \sigma_k^2$, la ligne basse de la variance conditionnelle ou volatilité.

1.3.3 Fonction d'autocorrélation

La fonction d'autocorrélation mesure la corrélation de la série avec elle-même décalée de j périodes notée ρ_j .

La fonction d'autocorrélation d'un processus $MAR(K; p_1, p_2, \dots, p_K)$ stationnaire est définie par :

$$\rho_j = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,i} \right) \rho_{|j-i|}$$

où $\phi_{k,i} = 0$, pour $i > p_k$.

Dans la suite de ce chapitre, on prends $p = \max(p_1, \dots, p_K)$ Sous l'hypothèse de stationnarité du second ordre de x_t , on a : $\forall j = 1, \dots, p_k, k = 1, \dots, K$

$$\text{cov}(x_t, x_{t-j}) = \gamma(j)$$

Sans perdre de généralité, on suppose que $\phi_{k,0} = 0$ pour $k = 1, \dots, K$ on a pour $j = 1, \dots, p_k$

$$\begin{aligned} \text{cov}(x_t, x_{t-j}) &= E(x_t x_{t-j}) \\ &= E(E(x_t x_{t-j} | \Omega_{t-1})) = E(x_{t-j} E(x_t | \Omega_{t-1})) \\ &= E \left\{ x_{t-j} \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k (\phi_{k,1} x_{t-1} + \dots + \phi_{k,p_k} x_{t-p_k}) \right) \right\} \\ &= \sum_{k=1}^K \alpha_k [\phi_{k,1} \gamma(|j-1|) + \dots + \phi_{k,p_k} \gamma(|j-p_k|)] \\ &= \sum_{k=1}^K \alpha_k \sum_{i=1}^p \phi_{k,i} \gamma(|j-i|) \end{aligned}$$

Par suit

$$\rho_j = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,i} \right) \rho_{|j-i|}$$

Remarque 1.2 :

- La fonction d'autocorrélation au retard j d'un processus MAR stationnaire au second ordre est similaire à la fonction d'autocorrélation d'un processus AR
- les équations de ρ_j sont similaires aux équations de Yull-Walker pour un processus AR où les coefficients $\sum_{k=1}^K \phi_{k,i}$ remplacent les coefficients du $i^{\text{ème}}$ retard du processus AR.

1.3.4 Fonction prédictive au pas m

La fonction prédictive au premier pas $F(x_{t+1} | \Omega_t)$ est facile à calculer en se basant sur la définition du modèle. Le calcul de la fonction prédictive au pas m , $F(x_{t+m} | \Omega_t)$ n'est pas direct. Granger et Trasvirta (1993) ont donné une importance aux prévisions aux pas m basées sur les modèles non linéaires. Wong et Li (2000) ont proposé trois approches pour le calcul des distributions prédictives au pas m . Ce sont : l'approche naïve, exacte et l'approche Monte Carlo. Ils ont utilisé la distribution prédictive au deuxième pas $F(x_{t+2} | \Omega_t)$ pour l'illustration de ces approches. Dans l'approche naïve, nous utilisons la

prévision au premier pas $\hat{x}_{t+1} = E(x_{t+1}|\Omega_t)$ comme une vraie valeur de y_{t+1} . Nous aurons ainsi :

$$F(x_{t+2}|\Omega_t) \simeq F(x_{t+2}|\Omega_t, \hat{x}_{t+1} = x_{t+1})$$

Cette approche est simple, mais elle néglige toute information fournie par la forme $F(x_{t+1}|\Omega_t)$. Concernant le modèle MAR , l'information perdue peut être importante puisque $F(x_{t+1}|\Omega_t)$ peut être multimodale. Une meilleure approche consiste à calculer la fonction prédictive au deuxième pas exacte par :

$$F(x_{t+2}|\Omega_t) = \int F(x_{t+2}|\Omega_{t-1}, x_{t+1})f(x_{t+1}|\Omega_t)dx_{t+1}$$

Cette intégration peut être complexe lors du traitement analytique, c'est pourquoi l'utilisation des méthodes numériques dont l'approche *MonteCarlo* peut être la plus adéquate. L'approximation de *MonteCarlo* de la distribution prédictive au deuxième pas est donnée par :

$$F(x_{t+2}|\Omega_t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F(x_{t+2}|\Omega_t, x_{t+1}^j)$$

où $\{x_{t+1}^j, j = 1, \dots, N\}$ est un échantillon généré à partir de $F(x_{t+1}|\Omega_t)$

1.3.5 Étude de stationnarité

Nous allons, dans ce qui suit, étudier les conditions nécessaires et suffisantes pour la stationnarité au premier au second ordre d'un modèle $MAR(K; p_1, p_2, \dots, p_K)$.

Théorème 1 (Wong et Li, 2000)

Le processus $\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant une représentation $MAR(K; p_1, p_2, \dots, p_K)$ est stationnaire au premier ordre si et seulement si toutes les racines du polynôme

$$1 - \sum_{i=1}^p \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,i} \right) z^{-i} \quad (1.2)$$

soient de module strictement inférieur à l'unité, où $\phi_{k,i} = 0$ pour $i > p_k$.

Preuve On sait que

$$E(x_t|\Omega_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k (\phi_{k,0} + \phi_{k,1}x_{t-1} + \dots + \phi_{k,p}x_{t-p})$$

Donc,

$$\begin{aligned} E(x_t) &= E(E(x_t|\Omega_{t-1})) = \sum_{k=1}^K \alpha_k (\phi_{k,0} + \phi_{k,1}E(x_{t-1}) + \dots + \phi_{k,p}E(x_{t-p})) \\ &= \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,0} + E(x_{t-1}) \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,1} + \dots + E(x_{t-p}) \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,p} \end{aligned}$$

Par suit

$$\begin{aligned} \mu_t &= \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,0} + \mu_{t-1} \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,1} + \dots + \mu_{t-p} \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,p} \\ &= \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,0} + \sum_{i=1}^p \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,i} \right) \mu_{t-i} \end{aligned}$$

où $\mu_{t-i} = E(x_{t-i})$ et $\phi_{k,i} = 0$ pour $i > p$

La moyenne du processus satisfait une équation linéaire aux différences non homogène d'ordre p . Alors, une condition nécessaire et suffisante pour que cette dernière équation admette une solution finie est que toutes les racines du polynôme

$$1 - \sum_{i=1}^p \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,i} \right) z^{-i} = 0$$

soient de module strictement inférieurs à l'unité.

Théorème 2 (Wong et Li, 2000)

Supposons que le processus $\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant une représentation $MAR(K; 1, 1, \dots, 1)$ soit stationnaire au premier ordre. Une conditions nécessaire et suffisante pour que x_t soit stationnaire au second ordre est

$$|\alpha_1 \phi_{1,1}^2 + \alpha_2 \phi_{2,1}^2 + \dots + \alpha_K \phi_{K,1}^2| < 1 \quad (1.3)$$

Preuve

Supposons que notre processus $MAR(K, 1, 1, \dots, 1)$ est stationnaire au premier ordre. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} E(x_t^2 | \Omega_{t-1}) &= \sum_{k=1}^K \alpha_k [\sigma_k^2 + (\phi_{k,0} + \phi_{k,1}x_{t-1})^2] \\ &= \sum_{k=1}^K \alpha_k [\sigma_k^2 + \phi_{k,0}^2 + \phi_{k,1}^2 x_{t-1}^2 + 2\phi_{k,0}\phi_{k,1}x_{t-1}] \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} E(x_t^2) &= E(E(x_t^2 | \Omega_{t-1})) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \{ \sigma_k^2 + \phi_{k,0}^2 + 2\phi_{k,0}\phi_{k,1}E(x_{t-1}) + \phi_{k,1}^2 E(x_{t-1}^2) \} \\ &= a_0 + a_1 E(x_{t-1}^2) \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned} a_0 &= \sum_{k=1}^K \{ \sigma_k^2 + \phi_{k,0}^2 + 2(\phi_{k,0}\phi_{k,1})E(x_{t-1}) \} \\ a_1 &= \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,1}^2 \end{aligned}$$

A partir de cette dernière équation, il est clair que le moment d'ordre deux du processus satisfait une équation au différence non homogène d'ordre 1. Alors, une condition nécessaire et suffisante pour que cette dernière équation admette une solution finie est que la racine du polynôme

$$1 - a_1 z^{-1} = 0$$

soit de module strictement inférieure à l'unité, i.e.

$$|\alpha_1 \phi_{1,1}^2 + \alpha_2 \phi_{2,1}^2 + \dots + \alpha_K \phi_{K,1}^2| < 1$$

Théorème 3 (Wong et Li, 2000)

Supposons que le processus $\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant une représentation $MAR(K; 2, 2, \dots, 2)$ soit stationnaire au premier ordre. Une conditions nécessaire et suffisante pour que x_t soit stationnaire au second ordre est

$$a_1 + a_2 < 1, a_2 - a_1 < 1 \quad \text{et} \quad |a_2| < 1 \quad (1.4)$$

où

$$a_1 = \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,1}^2$$

et

$$a_2 = \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,2}^2 + \frac{2 \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,1} \phi_{k,2} \right) \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,1} \right)}{1 - \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,2}}$$

Preuve

Supposons que notre processus $MAR(K; 2, 2, \dots, 2)$ est stationnaire au premier ordre, et sans prendre en généralité, on suppose que $\phi_{k,0} = 0$. Nous avons

$$\begin{aligned} E(x_t^2) &= E \left(E(x_t^2 | \Omega_{t-1}) \right) \\ &= E \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k \left(\sigma_k^2 + \phi_{k,1}^2 x_{t-1}^2 + 2\phi_{k,1}\phi_{k,2} x_{t-1}x_{t-2} + \phi_{k,2}^2 x_{t-2}^2 \right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^K \alpha_k \left(\sigma_k^2 + \phi_{k,1}^2 E(x_{t-1}^2) + 2\phi_{k,1}\phi_{k,2} E(x_{t-1}x_{t-2}) + \phi_{k,2}^2 E(x_{t-2}^2) \right) \end{aligned}$$

Posons

$$\gamma_{t,0} = E(x_t^2) \quad \text{et} \quad \gamma_{t,1} = E(x_t x_{t-1})$$

Alors

$$\gamma_{t,0} = \sum_{k=1}^K \alpha_k \left(\sigma_k^2 + \phi_{k,1}^2 \gamma_{t-1,0} + 2\phi_{k,1}\phi_{k,2} \gamma_{t-1,1} + \phi_{k,2}^2 \gamma_{t-2,0} \right)$$

Or

$$\begin{aligned}
 \gamma_{t,1} &= E(x_t, x_{t-1}) = E(x_{t-1} E(x_t | \Omega_{t-1})) \\
 &= E\left(x_{t-1} \sum_{k=1}^K \alpha_k (\phi_{k,1} x_{t-1} + \phi_{k,2} x_{t-2})\right) \\
 &= \sum_{k=1}^K \alpha_k (\phi_{k,1} E(x_{t-1}^2) + \phi_{k,2} E(x_{t-2})) \\
 &= \sum_{k=1}^K \alpha_k (\phi_{k,1} \gamma_{t-1,0} + \phi_{k,2} \gamma_{t-2,1})
 \end{aligned}$$

Si le processus x_t est stationnaire au second ordre, alors $\gamma_{t,1} = \gamma_{t-1,1}$ par conséquent

$$\gamma_{t,1} = \frac{\sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,1}}{1 - \sum_{k=1}^K \phi_{k,2} \gamma_{t-1,0}}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
 \gamma_{t,0} &= \sum_{k=1}^K \alpha_k \sigma_k^2 + \left\{ \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,1}^2 + \frac{2(\alpha_k \phi_{k,1} \phi_{k,2}) \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,1} \right)}{1 - \sum_{k=1}^K \phi_{k,2}} \right\} \gamma_{t-1,0} + \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,2}^2 \gamma_{t-2,0} \\
 &= a_0 + a_1 \gamma_{t-1,0} + a_2 \gamma_{t-2,0}
 \end{aligned}$$

Ainsi, le moment d'ordre deux satisfait une équation linéaire aux différences non homogène d'ordre deux. Alors, une condition nécessaire et suffisante pour que le processus $\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$ admette une solution stationnaire au second ordre et que toutes les racines du polynôme caractéristique

$$1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} = 0$$

Soient de modules inférieurs à l'unité, i.e.,

$$a_1 + a_2 < 1 \quad \text{et} \quad a_2 - a_1 < 1 \quad \text{et} \quad |a_2| < 1$$

Théorème 4 (Saikkonen, 2007)

Supposons que le processus $\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant une représentation $MAR(K; p_1, p_2, \dots, p_K)$. Une condition suffisante pour que x_t soit stationnaire au second ordre est

$$\rho \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k A(k) \otimes A(k) \right) < 1 \tag{1.5}$$

où $\rho(A)$ désigne le rayon spectral de la matrice A , \otimes représente le produit kronecker et A est donné par

$$A(k) = \begin{pmatrix} \phi_1(k)\phi_2(k) \dots \phi_p(k) & \phi_p(k) \\ I_{(p-1) \times (p-1)} & 0_{p-1 \times 1} \end{pmatrix}$$

Stationnarité au second ordre

Supposons que le processus $\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$ satisfait une représentation $MAR(K, p_1, p_2, \dots, p_K)$ soit stationnaire au premier ordre. Soit $\{z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ une séquence de variable aléatoire i.i.d de loi de probabilité $P(z_t = k) = \alpha_k, k = 1, \dots, K$. Maintenant on peut écrire notre modèle comme suit :

$$x_t = \phi_{z_t,0} + \sum_{i=1}^p \phi_{z_t,i} x_{t-1} + \sigma_{z_t} e_{z_t,k}$$

où $\phi_{k,i} = 0$, pour $i > p_k$, et la fonction de distribution de $e_{t,k}$ et Φ_k pour tout $k = 1, \dots, K$. Quand le modèle MAR est représenté par la dernière équation, la structure de dépendance doit être spécifié. On suppose que $e_{t,k}$ est indépendante de x_t et est aussi indépendante du passé x_s de notre processus. On suppose que le choix d'une composante du modèle au temps t ne dépend pas de Ω_{t-1} et $\{e_{t,k}, t \geq 1, k = 1, \dots, K\}$.

Pour $k = 1, \dots, K$ on définit A_k par

$$A_k = \begin{pmatrix} \phi_1(k)\phi_2(k) \dots \phi_p(k) & \phi_p(k) \\ I_{(p-1) \times (p-1)} & 0_{p-1 \times 1} \end{pmatrix}$$

Soit A l'espérance de A_{z_t} . Alors

$$A = E(A_{z_t}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k A_k$$

Pour $t \geq 0$, soit $X_t = (x_t, \dots, x_{t+1-p})'$ un vecteur de p valeurs de notre série $\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$.

Alors le processus vectoriel $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est d'ordre un

$$X_{t+1} = c_{z_{t+1}} + A_{z_{t+1}} X_t + e_{t+1, z_{t+1}}$$

où

$$\begin{aligned} e_{t+1, z_{t+1}} &= (\sigma_{k1} + e_{t+1, z_{t+1}}, 0, \dots, 0)' \\ c_{z_{t+1}} &= (\phi_{z_{t+1},0}, 0, \dots, 0)' \end{aligned}$$

On pose $\mu = E(x_t)$. Alors $E(X_t) = \mu \mathbf{1}$, ainsi pour le processus centré

$$X_{t+1} - \mu \mathbf{1} = d_{z_{t+1}} + A_{z_{t+1}}(X_t - \mu \mathbf{1}) + e_{t+1, z_{t+1}}$$

où

$$d_{z_{t+1}} = c_{z_{t+1}} - \mu \mathbf{1} + A_{z_{t+1}} \mu \mathbf{1} \quad \text{et} \quad \mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)'$$

or

$$\begin{aligned} \text{var}(X_{t+1} - \mu \mathbf{1}) &= \text{var}(d_{z_{t+1}} + A_{z_{t+1}}(X_t - \mu \mathbf{1})) + \text{var}(e_{t+1, z_{t+1}}) \\ &= \text{var}(d_{z_{t+1}}) + \text{var}\{A_{z_{t+1}}(X_t - \mu \mathbf{1})\} + \text{var}(e_{t+1, z_{t+1}}), \\ C_{t+1, t+1} &= \Delta + E\{A_{z_{t+1}} C_{t, t} A_{z_{t+1}}^t\} + Q \\ &= E\{A_{z_{t+1}} C_{t, t} A_{z_{t+1}}^t\} + \Delta_1 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} C_{t, s} &= \text{cov}(X_t, X_s), \\ \Delta &= \text{var}(d_{z_t} + 1) \\ Q &= \text{var}(e_{t+1, z_{t+1}}), \\ \Delta_1 &= \Delta + Q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\{A_{z_{t+1}} C_{t, t} A_{z_{t+1}}^t\} &= E\{(A + U_{z_{t+1}}) C_{t, t} (A + U_{z_{t+1}})^t\} \\ &= AC_{t, t} A^t + E\{U_{z_{t+1}} C_{1, 1} U_{z_{t+1}}^t\}. \end{aligned}$$

Théorème 5 (Boshnakov, 2009)

soit $\lambda(A \otimes A + E\{U_{z_{t+1}} \otimes U_{z_{t+1}}\}) < 1$ et $\Delta_t \neq 0$. Le processus $\{x_t, t = 1 - p, \dots, 0, 1, 2, \dots\}$, est stationnaire au second ordre si et seulement si le vecteur initial $(x_0, x_{1-p}, \dots, x_{-p})'$ muni d'une moyenne $\mu \mathbf{1}$, où μ est un scalaire, et la matrice de variance-covariance $C_{0,0}$, soit solution de l'équation

$$C_{0,0} = AC_{0,0}A' + E\{U_{z_{t+1}} C_{0,0} U_{z_{t+1}}'\} + \Delta_1.$$

Où $\lambda(A \otimes A + E\{U_{z_{t+1}} \otimes U_{z_{t+1}}\})$ est le maximum des modules des valeurs propres de la matrice $A \otimes A + E\{U_{z_{t+1}} \otimes U_{z_{t+1}}\}$.

Remarque 1.3 :

Un mélange d'un modèle autorégressif stationnaire et un modèle autorégressif non stationnaire peut donner un modèle stationnaire.

1.4 Inférence statistique

1.4.1 Estimation des paramètres du modèle MAR par la méthode du maximum de vraisemblance

Dans le but de détailler cette approche, nous allons définir d'une manière précise la fonction de vraisemblance pour le modèle $MAR(K; p_1, p_2, \dots, p_K)$. Ensuite, nous passons à la description du principe général de l'algorithme EM .

Afin d'utiliser l'algorithme EM , nous devons avoir des données incomplètes, i.e. une partie des données est observée et une autre n'est pas observée. Nous supposons que les données complètes existent. Ici les données observées sont : $X = (x_1, \dots, x_n)'$, il y a aussi les données manquantes notées $Z_t = (Z_1, \dots, Z_n)$, où $Z_t = (Z_{t,1}, \dots, Z_{t,K})'$, dont chaque composante $z_{t,k}$ vaut 1 ou 0 selon l'observation x_t est générée ou pas par le $k^{\text{ème}}$ modèle de mélange.

Pour une réalisation donnée $X = (x_1, \dots, x_n)'$ du modèle $MAR(K; p_1, p_2, \dots, p_K)$, la fonction de vraisemblance conditionnelle du vecteur des paramètres $\theta = (\alpha', \theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_K)'$, avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{K-1})'$ et $\theta_k = (\phi_{k,0}, \phi_{k,1}, \dots, \phi_{k,p_k}, \sigma_k)'$ pour $k = 1, \dots, K$, est donnée par :

$$\begin{aligned} l(x; \theta) &= \prod_{t=p+1}^n \prod_{k=1}^K [f(x_t | \Omega_{t-1}, z_{t,k} = 1, \theta) P(z_{t,k} = 1)]^{z_{t,k}} \\ &= \prod_{t=p+1}^n \prod_{k=1}^K \left[\frac{\alpha_k}{\sigma_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{e_{t,k}^2}{2\sigma_k^2}\right) \right]^{z_{t,k}} \end{aligned}$$

où

$$e_{t,k} = x_t - \phi_{k,0} - \phi_{k,1}x_{t-1} - \dots - \phi_{k,p_k}x_{t-p_k}$$

Il est plus facile de maximiser la log-vraisemblance au lieu de la fonction de vraisemblance elle-même. Si θ maximise $\log(l)$, alors il maximise également l . Cela est dû à la monotonie de la fonction logarithme. La fonction log-vraisemblance s'écrit :

$$\mathcal{L} = \sum_{t=p+1}^n \left\{ \sum_{k=1}^K z_{t,k} \log(\alpha_k) - \sum_{k=1}^K z_{t,k} \log(\sigma_k) - \sum_{k=1}^K \frac{z_{t,k} e_{t,k}^2}{2\sigma_k^2} \right\} \quad (1.6)$$

En général, la maximisation de la fonction de vraisemblance ne possède pas une solution analytique. C'est pour cela qu'il est nécessaire de recourir à des méthodes itératives. Dans

la partie suivante, nous allons expliquer en détails, la façon de trouver le maximum de vraisemblance en utilisant l'algorithme *EM*.

Algorithme *EM* L'algorithme *EM* (Expectation-Maximisation) a été proposé par Dempster, Laird et Rubin en 1977. C'est une procédure générale pour maximiser la vraisemblance. Elle est adaptée à de nombreuses situations décrites sous forme de problèmes avec des données incomplètes. Dans le cadre des modèles *MAR*, cet algorithme procède en deux étapes successives :

- L'étape E (Expectation) consiste à calculer l'espérance de la *log*-vraisemblance des données complétées conditionnellement aux variables observables. Nous supposons que les paramètres du modèle *MAR* sont connus et estimons les valeurs des données manquantes z par leur espérances conditionnelles aux valeurs observées x_t et aux paramètres θ .

$$\begin{aligned}\tau_{t,k} &= E(1_{(z_{t,k}=1)}|\Omega_t, \hat{\theta}) = E(\tau_{t,k}|\Omega_t, \hat{\theta}) \\ &= P(z_{t,k} = 1|\Omega_t, \hat{\theta}) \\ &= \frac{P(z_{t,k} = 1)f(x_t|z_{t,k} = 1|\Omega_{t-1}, \hat{\theta})}{\sum_{k=1}^K P(z_{t,k} = 1)f(x_t|z_{t,k} = 1|\Omega_{t-1}, \hat{\theta})} \\ &= \frac{\hat{\alpha}_k(1/\hat{\sigma}_k)\varphi(e_{t,k}/\hat{\sigma}_k)}{\sum_{k=1}^K \hat{\alpha}_k(1/\hat{\sigma}_k)\varphi(e_{t,k}/\hat{\sigma}_k)}\end{aligned}$$

$\hat{\theta}$ est obtenu par l'étape M.

Le terme $E(z_{t,k}|\Omega_{t-1}, \hat{\theta})$ est la probabilité que l'observation x_t provienne de la $k^{\text{ème}}$ composante de la distribution conditionnelle du mélange, sachant le passé jusqu'à l'instant $t - 1$. Cette probabilité a posteriori sera dénotée $\tau_{t,k}$.

- L'étape M (maximisation) consiste à estimer les paramètres du modèle par la maximisation de la fonction *log*-vraisemblance, en résolvant le système d'équations

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_k} = 0$$

Pour $k = 1, \dots, K$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_k} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left\{ \sum_{t=p+1}^n \sum_{k=1}^K z_{t,k} \log(\alpha_k) \right\} \\ &= \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{z_{t,k}}{\alpha_k} - \frac{z_{t,K}}{\alpha_K} \right) = 0\end{aligned}$$

En remplaçant $z_{t,k}$ par son espérance conditionnelle, on retrouve

$$\sum_{t=p+1}^n \tau_{t,k} = \frac{\alpha_k}{\alpha_K} \sum_{t=p+1}^n \tau_{t,K}$$

On peut encore écrire

$$\sum_{t=p+1}^n \sum_{k=1}^K \tau_{t,k} = \frac{1}{\alpha_K} \sum_{k=1}^K \alpha_k \sum_{t=p+1}^n \tau_{t,K}$$

et puisque $\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1$ et $\sum_{k=1}^K \tau_{t,k} = 1$, alors

$$\hat{\alpha}_k = \frac{\sum_{t=p+1}^n \tau_{t,k}}{n - p}$$

D'autre part, on a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma_k} = \frac{\partial}{\partial \sigma_k} \left\{ \sum_{t=p+1}^n \left(- \sum_{k=1}^K z_{t,k} \log(\sigma_k) - \sum_{k=1}^K \frac{z_{t,k} e_{t,k}^2}{2\sigma_k^2} \right) \right\} = 0$$

Par suite

$$\sum_{t=p+1}^n \frac{\tau_{t,k}}{\sigma_k} \left(\frac{e_{t,k}^2}{\sigma_k^2} - 1 \right) = 0$$

ce qui donne

$$\hat{\sigma}_k = \left\{ \frac{\sum_{t=p+1}^n \tau_{t,k} (x_t - \hat{\phi}_{k,0} - \hat{\phi}_{k,1} x_{t-1} - \dots - \hat{\phi}_{k,p_k} x_{t-p_k})^2}{\sum_{t=p+1}^n \tau_{t,k}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Et enfin, on a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,i}} = \frac{\partial}{\partial \phi_{k,i}} \left\{ \sum_{t=p+1}^n \left(- \sum_{k=1}^K \frac{z_{t,k} e_{t,k}^2}{2\sigma_k^2} \right) \right\} = \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{z_{t,k} \mu(x_t, i) e_{t,k}}{\sigma_k^2} \right) = 0$$

où

$$\mu(x_t, i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ x_{t-i} & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

pour $i = 0, 1, \dots, p_k$ le vecteur $\hat{\phi}_{k,0}, \hat{\phi}_{k,1}, \dots, \hat{\phi}_{k,p_k}$ satisfait le système d'équations suivant :

$$\sum_{t=p+1}^n \tau_{t,k} \mu(x_t, i) x_t = \sum_{j=0}^{p_k} \hat{\phi}_{k,j} \sum_{t=p+1}^n \tau_{t,k} \mu(x_t, j) \mu(x_t, i)$$

Ce dernier peut s'écrire sous forme matricielle $A\Phi = b$, tel que

$$A = \begin{pmatrix} \sum_{t=p+1}^n \tau_{t,k} \mu(x_t, 0) & \sum_{t=p+1}^n \tau_{t,k} \mu(x_t, 1) & \dots & \sum_{t=p+1}^n \tau_{t,k} \mu(x_t, p_k) \\ \sum_{t=p+1}^n \tau_{t,k} \mu(x_t, 1) & \sum_{t=p+1}^n \tau_{t,k} \mu(x_t, 1) \mu(x_t, 1) & \dots & \sum_{t=p+1}^n \tau_{t,k} \mu(x_t, p_k) \mu(x_t, 1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=p+1}^n \tau_{t,k} \mu(x_t, p_k) & \sum_{t=p+1}^n \tau_{t,k} \mu(x_t, 1) \mu(x_t, p_k) & \dots & \sum_{t=p+1}^n \tau_{t,k} \mu(x_t, p_k) \mu(x_t, p_k) \end{pmatrix}, \Phi = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{k,0} \\ \hat{\phi}_{k,1} \\ \vdots \\ \hat{\phi}_{k,p_k} \end{pmatrix}$$

et

$$b = \left(\sum_{t=p+1}^n \tau_{t,k} x_t \quad \sum_{t=p+1}^n \tau_{t,k} x_t \mu(x_t, 1) \quad \dots \quad \sum_{t=p+1}^n \tau_{t,k} x_t \mu(x_t, p_k) \right)$$

Ces deux étapes sont répétées itérativement jusqu'à la convergence et l'obtention d'un estimateur du maximum de vraisemblance.

1.4.2 Erreur standard de l'estimation

Après avoir présenté le problème de l'estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance via l'algorithme *EM*, nous nous intéressons dans la partie suivante à déterminer l'erreur standard de ces paramètres en utilisant le principe de l'information manquante (Louis, 1982). En d'autres termes, l'erreur standard peut être obtenue à partir de la matrice d'information observée. Cette dernière peut être déterminée en retranchant la matrice d'information manquante I_m de la matrice d'information complète I_c .

$$I_{obs} = I_c - I_m = E \left(-\frac{\partial^2 \mathcal{L}(x; \theta)}{\partial \theta \partial \theta^t} \middle| \theta, \Omega_n \right)_{\theta=\hat{\theta}} - var \left(\frac{\partial \mathcal{L}(x; \theta)}{\partial \theta} \middle| \theta, \Omega_n \right)_{\theta=\hat{\theta}}$$

La matrice de variance-covariance de l'estimateur $\hat{\theta}$, est donnée par l'inverse de la matrice d'information observée.

La variance de l'estimateur $\hat{\alpha}_K$ est donnée par la formule suivante :

$$\sum_{k=1}^{K-1} var(\hat{\alpha}_k) + \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{l=1; l \neq k}^{K-1} cov(\hat{\alpha}_k \hat{\alpha}_l)$$

1.4.3 Matrice d'information de Fisher

Nous avons présenté dans la section précédente l'estimation de l'erreur standard à partir de la matrice d'information. Nous nous intéressons dans ce qui va suivre à déterminer les formules de calcul de cette matrice (matrice d'information complète et matrice d'information manquante).

Nous commençons par la détermination des dérivées secondes de la fonction *log*-vraisemblance par rapport aux paramètres θ .

Pour $k = 1, \dots, K - 1$

$$-\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \alpha_k^2} = -\frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left\{ \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{z_{t,k}}{\alpha_k} - \frac{z_{t,K}}{\alpha_K} \right) \right\} = \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{z_{t,k}}{\alpha_k^2} + \frac{z_{t,K}}{\alpha_K^2} \right)$$

Pour $k = 1, \dots, K-1$ avec $k \neq l$

$$-\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \alpha_l \partial \alpha_k} = -\frac{\partial}{\partial \alpha_l} \left\{ \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{z_{t,k}}{\alpha_k} - \frac{z_{t,K}}{\alpha_K} \right) \right\} = \sum_{t=p+1}^n \frac{z_{t,K}}{\alpha_K^2}$$

Pour $k = 1, \dots, K$ et $i, j = 0, \dots, p_k$

$$-\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,i} \partial \phi_{k,j}} = -\frac{\partial}{\partial \phi_{k,j}} \left\{ \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{z_{t,k} \mu(x_t, i) e_{t,k}}{\sigma_k^2} \right) \right\} = \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{z_{t,k} \mu(x_t, i) \mu(x_t, j)}{\sigma_k^2} \right)$$

Pour $k = 1, \dots, K$

$$-\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \sigma_k^2} = -\frac{\partial}{\partial \sigma_k} \left\{ \sum_{t=p+1}^n \frac{z_{t,k}}{\sigma_k} \left(\frac{e_{t,k}^2}{\sigma_k^2} - 1 \right) \right\} = \sum_{t=p+1}^n \frac{z_{t,k}}{\sigma_k^2} \left(\frac{3e_{t,k}^2}{\sigma_k^2} - 1 \right)$$

Pour $k = 1, \dots, K, i = 0, \dots, p_k$

$$-\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \sigma_k \partial \phi_{k,i}} = -\frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left\{ \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{z_{t,k} \mu(x_t, i) e_{t,k}}{\sigma_k^2} \right) \right\} = \sum_{t=p+1}^n \frac{2z_{t,k} \mu(x_t, i) e_{t,k}}{\sigma_k^3}$$

Les autres dérivées sont nulles.

La matrice d'information complète, I_c , peut être définie comme étant une matrice diagonale par blocs

$$I_c = \begin{pmatrix} I_{c0} & & & \\ & I_{c1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_{ck} \end{pmatrix}$$

La matrice I_{c0} est une matrice carrée de dimension $K-1$, donnée par

$$I_{c0} = E \left\{ -\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \alpha \partial \alpha'} \middle| \theta, X \right\} = \{I_{c0}(k, l)\}$$

Pour $k = 1, \dots, K - 1$

$$I_{c0}(k, k) = E \left\{ -\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \alpha_k^2} \middle| \theta, X \right\} = \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{E(z_{t,k} | \theta, X)}{\alpha_k^2} + \frac{E(z_{t,K} | \theta, X)}{\alpha_K^2} \right) = \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{\tau_{t,k}}{\alpha_k^2} + \frac{\tau_{t,K}}{\alpha_K^2} \right)$$

Pour $k, l = 1, \dots, K - 1, k \neq l$

$$I_{c0}(k, l) = E \left\{ -\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \alpha_l^2} \middle| \theta, X \right\} = \sum_{t=p+1}^n \frac{E(z_{t,K} | \theta, X)}{\alpha_K^2} = \sum_{t=p+1}^n \frac{\tau_{t,K}}{\alpha_K^2}$$

La matrice $I_{ck}, k = 1, \dots, K$ est une matrice carrée de dimension $p_k + 2$, donnée par

$$I_{c,k} = E \left\{ -\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \theta_k \partial \theta'_k} \middle| \theta, X \right\} = \{I_{c,k}(i, j)\}$$

Pour $i, j = 0, \dots, p_k$

$$I_{c,k}(i+1, j+1) = E \left\{ -\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,i} \partial \phi_{k,j}} \middle| \theta, X \right\} = \sum_{t=p+1}^n \frac{E(z_{t,k} | \theta, X) \mu(x_t, i) \mu(x_t, j)}{\sigma_k^2} = \sum_{t=p+1}^n \frac{\tau_{t,k} \mu(x_t, i) \mu(x_t, j)}{\sigma_k^2}$$

Pour $i, j = p_k + 2$

$$I_{ck}(p_k+2, p_k+2) = E \left\{ -\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \sigma_k^2} \middle| \theta, X \right\} = \sum_{t=p+1}^n \frac{E(z_{t,k} | \theta, X)}{\sigma_k^2} \left(\frac{3e_{t,k}^2}{\sigma_k^2} - 1 \right) = \sum_{t=p+1}^n \frac{\tau_{t,k}}{\sigma_k^2} \left(\frac{3e_{t,k}^2}{\sigma_k^2} - 1 \right)$$

Pour $i = 0, \dots, p_k$

$$\begin{aligned} I_{ck}(i+1, p_k+2) &= I_{ck}(p_k+2, i+1) = E \left\{ -\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \sigma_k \partial \phi_{k,i}} \middle| \theta, X \right\} = \sum_{t=p+1}^n \frac{2E(z_{t,k} | \theta, X) \mu(x_t, i) e_{t,k}}{\sigma_k^3} \\ &= \sum_{t=p+1}^n \frac{2\tau_{t,k} \mu(x_t, i) e_{t,k}}{\sigma_k^3} \end{aligned}$$

D'autre part, on peut écrire la matrice d'information manquante I_m comme suit :

$$I_m = \begin{pmatrix} I_{m00} & & & & \\ I_{m10} & I_{m11} & & & \\ I_{m20} & I_{m21} & I_{m22} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ I_{mK0} & I_{mK1} & I_{mK2} & \cdots & I_{mK,K} \end{pmatrix}$$

Ici, nous avons donné seulement la partie triangulaire inférieure de la matrice I_m car cette dernière est une matrice symétrique.

La matrice $I_{m_{00}}$ est une matrice carrée de dimension $K - 1$, donnée par :

$$I_{m_{00}} = \text{var} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \middle| \theta, X \right\} = \{I_{m_{00}}(k, l)\}$$

Pour $k = 1, \dots, K - 1$

$$\begin{aligned} I_{m_{00}}(k, k) &= \text{var} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_k} \middle| \theta, X \right\} = \text{var} \left\{ \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{z_{t,k}}{\alpha_k} - \frac{z_{t,K}}{\alpha_K} \right) \middle| \theta, X \right\} \\ &= \sum_{t=p+1}^n \text{var} \left(\frac{z_{t,k}}{\alpha_k} - \frac{z_{t,K}}{\alpha_K} \middle| \theta, X \right) + 2 \sum_{t=p+1}^n \sum_{t'=p+1}^n \text{cov} \left(\frac{z_{t,k}}{\alpha_k} - \frac{z_{t,K}}{\alpha_K}, \frac{z_{t',k}}{\alpha_k} - \frac{z_{t',K}}{\alpha_K} \right) \\ &= \sum_{t=p+1}^n \left\{ \text{var} \left(\frac{z_{t,k}}{\alpha_k} \middle| \theta, X \right) + \text{var} \left(\frac{z_{t,K}}{\alpha_K} \middle| \theta, X \right) - 2 \text{cov} \left(\frac{z_{t,k}}{\alpha_k}, \frac{z_{t,K}}{\alpha_K} \right) \right\} \\ &= \sum_{t=p+1}^n \left\{ \frac{\tau_{t,k}(1 - \tau_{t,k})}{\alpha_k^2} + \frac{\tau_{t,K}(1 - \tau_{t,K})}{\alpha_K^2} + \frac{2\tau_{t,k}\tau_{t,K}}{\alpha_k\alpha_K} \right\} \end{aligned}$$

Pour $k, l = 1, \dots, K - 1, k \neq l$

$$\begin{aligned} I_{m_{00}}(k, l) &= \text{cov} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_k}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_l} \middle| \theta, X \right\} = \text{cov} \left\{ \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{z_{t,k}}{\alpha_k} - \frac{z_{t,K}}{\alpha_K} \right), \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{z_{t,l}}{\alpha_l} - \frac{z_{t,K}}{\alpha_K} \right) \middle| \theta, X \right\} \\ &= \sum_{t=p+1}^n \left\{ \frac{\text{cov}(z_{t,k}, z_{t,l} | \theta, X)}{\alpha_k \alpha_l} - \frac{\text{cov}(z_{t,k}, z_{t,K} | \theta, X)}{\alpha_k \alpha_K} - \frac{\text{cov}(z_{t,l}, z_{t,K} | \theta, X)}{\alpha_l \alpha_K} + \frac{\text{var}(z_{t,K} | \theta, X)}{\alpha_K^2} \right\} \\ &= \sum_{t=p+1}^n \left\{ \frac{\tau_{t,k}\tau_{t,K}}{\alpha_k\alpha_K} + \frac{\tau_{t,l}\tau_{t,K}}{\alpha_l\alpha_K} - \frac{\tau_{t,k}\tau_{t,l}}{\alpha_k\alpha_l} + \frac{\tau_{t,K}(1 - \tau_{t,K})}{\alpha_K^2} \right\} \end{aligned}$$

La matrice $I_{m_{kk}}, k = 1, \dots, K$ est une matrice de dimension $(p_k + 2) \times (p_k + 2)$

$$I_{m_{kk}} = \text{var} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_k} \middle| \theta, Y \right\} = \{I_{m_{kk}}(i, j)\}$$

Pour $i, j = 0, \dots, p_k$

$$\begin{aligned}
 I_{m_{kk}}(i+1, j+1) &= cov \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,i}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,j}} \middle| \theta, X \right\} \\
 &= cov \left\{ \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{z_{t,k} \mu(x_t, i) e_{t,k}}{\sigma_k^2} \right), \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{z_{t,k} \mu(x_t, j) e_{t,k}}{\sigma_k^2} \right) \middle| \theta, X \right\} \\
 &= \sum_{t=p+1}^n var(z_{t,k} | \theta, X) \frac{\mu(x_t, i) \mu(x_t, j) e_{t,k}^2}{\sigma_k^4} \\
 &= \sum_{t=p+1}^n \frac{\tau_{t,k} (1 - \tau_{t,k}) \mu(x_t, i) \mu(x_t, j) e_{t,k}^2}{\sigma_k^4}
 \end{aligned}$$

Pour $i, j = p_k + 2$

$$\begin{aligned}
 I_{m_{kk}}(p_k + 2, p_k + 2) &= var \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma_k} \middle| \theta, X \right\} = var \left\{ \sum_{t=p+1}^n \frac{z_{t,k}}{\sigma_k} \left(\frac{e_{t,k}^2}{\sigma_k^2} - 1 \right) \middle| \theta, X \right\} \\
 &= \sum_{t=p+1}^n var(z_{t,k} | \theta, X) \left\{ \frac{1}{\sigma_k} \left(\frac{e_{t,k}^2}{\sigma_k^2} - 1 \right) \right\}^2 \\
 &= \sum_{t=p+1}^n \frac{\tau_{t,k} (1 - \tau_{t,k})}{\sigma_k^2} \left(\frac{e_{t,k}^2}{\sigma_k^2} - 1 \right)^2
 \end{aligned}$$

Pour $i = 0, \dots, p_k$

$$\begin{aligned}
 I_{m_{kk}}(i+1, p_k + 2) &= I_{m_{kk}}(p_k + 2, i+1) = cov \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,i}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma_k} \middle| \theta, X \right\} \\
 &= cov \left\{ \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{z_{t,k} \mu(x_t, i) e_{t,k}}{\sigma_k^2} \right), \sum_{t=p+1}^n \frac{z_{t,k}}{\sigma_k} \left(\frac{e_{t,k}^2}{\sigma_k^2} - 1 \right) \middle| \theta, X \right\} \\
 &= \sum_{t=p+1}^n \frac{\tau_{t,k} (1 - \tau_{t,k}) \mu(x_t, i) e_{t,k}}{\sigma_k^3} \left(\frac{e_{t,k}^2}{\sigma_k^2} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

La matrice $I_{m_{k0}}, k = 1, \dots, K-1$ est une matrice de dimension $(K-1) \times (p_k + 2)$, donnée

$$I_{m_{k,0}} = cov \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_k}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \middle| \theta, X \right\} = \{I_{m_{k0}}(i, j)\}$$

Pour $i = 0, \dots, p_k$

$$\begin{aligned}
 I_{m_{k0}}(i+1, k) &= cov \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,i}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_k} \middle| \theta, X \right\} \\
 &= cov \left\{ \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{z_{t,k} \mu(x_t, i) e_{t,k}}{\sigma_k^2} \right), \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{z_{t,k}}{\alpha_k} - \frac{z_{t,K}}{\alpha_K} \right) \middle| \theta, X \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t=p+1}^n \left\{ \left(\frac{\text{var}[(z_{t,k}|\theta, X)]}{\alpha_k} - \frac{\text{cov}(z_{t,k}, z_{t,K}|\theta, X)}{\alpha_K} \right) \frac{\mu(x_t, j)e_{t,k}}{\sigma_k^2} \right\} \\
&= \sum_{t=p+1}^n \left\{ \left(\frac{1 - \tau_{t,k}}{\alpha_k} + \frac{\tau_{t,K}}{\alpha_K} \right) \frac{\tau_{t,k}\mu(x_t, i)e_{t,k}}{\sigma_k^2} \right\}
\end{aligned}$$

Pour $i = 0, \dots, p_k$, $l, k = 1, \dots, K - 1, l \neq k$

$$\begin{aligned}
I_{m_{k0}}(i + 1, l) &= \text{cov} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,i}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_l} \middle| \theta, X \right\} \\
&= \text{cov} \left\{ \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{z_{t,k}\mu(x_t, i)e_{t,k}}{\sigma_k^2} \right), \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{z_{t,l}}{\alpha_l} - \frac{z_{t,K}}{\alpha_K} \right) \middle| \theta, X \right\} \\
&= \sum_{t=p+1}^n \left(-\frac{\text{cov}(z_{t,k}, z_{t,K}|\theta, X)}{\alpha_K} + \frac{\text{cov}(z_{t,k}, z_{t,l}|\theta, X)}{\alpha_l} \right) \frac{\mu(x_t, i)e_{t,k}}{\sigma_k^2} \\
&= \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{\tau_{t,K}}{\alpha_K} - \frac{\tau_{t,l}}{\alpha_l} \right) \frac{\tau_{t,k}\mu(x_t, i)e_{t,k}}{\sigma_k^2}
\end{aligned}$$

Pour $i = p_k + 2$, $l = k$

$$\begin{aligned}
I_{m_{k0}}(p_k + 2, k) &= \text{cov} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma_k}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_k} \middle| \theta, X \right\} \\
&= \text{cov} \left\{ \sum_{t=p+1}^n \frac{z_{t,k}}{\sigma_k} \left(\frac{e_{t,k}^2}{\sigma_k^2} - 1 \right), \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{z_{t,k}}{\alpha_k} - \frac{z_{t,K}}{\alpha_K} \right) \middle| \theta, X \right\} \\
&= \sum_{t=p+1}^n \left\{ \left(\frac{\text{var}(z_{t,k}|\theta, X)}{\alpha_k} - \frac{\text{cov}(z_{t,k}, z_{t,K}|\theta, X)}{\alpha_K} \right) \frac{1}{\sigma_k} \left(\frac{e_{t,k}^2}{\sigma_k^2} - 1 \right) \right\} \\
&= \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{1 - \tau_{t,k}}{\alpha_k} + \frac{\tau_{t,K}}{\alpha_K} \right) \frac{\tau_{t,k}}{\sigma_k} \left(\frac{e_{t,k}^2}{\sigma_k^2} - 1 \right)
\end{aligned}$$

Pour $i = p_k + 2$, $l, k = 1, \dots, K - 1, l \neq k$

$$\begin{aligned}
I_{m_{k0}}(p_k + 2, l) &= \text{cov} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma_k}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_l} \middle| \theta, X \right\} \\
&= \text{cov} \left\{ \sum_{t=p+1}^n \frac{z_{t,k}}{\sigma_k} \left(\frac{e_{t,k}^2}{\sigma_k^2} - 1 \right), \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{z_{t,l}}{\alpha_l} - \frac{z_{t,K}}{\alpha_K} \right) \middle| \theta, X \right\} \\
&= \sum_{t=p+1}^n \left(-\frac{\text{cov}(z_{t,k}, z_{t,K}|\theta, X)}{\alpha_K} + \frac{\text{cov}(z_{t,k}, z_{t,l}|\theta, X)}{\alpha_l} \right) \frac{1}{\sigma_k} \left(\frac{e_{t,k}^2}{\sigma_k^2} - 1 \right) \\
&= \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{\tau_{t,K}}{\alpha_K} - \frac{\tau_{t,l}}{\alpha_l} \right) \frac{\tau_{t,k}}{\sigma_k} \left(\frac{e_{t,k}^2}{\sigma_k^2} - 1 \right)
\end{aligned}$$

La matrice $I_{m_{K0}}$ est une matrice de dimension $(K - 1) \times (p_K + 2)$, donnée par :

$$I_{m_{K,0}} = cov \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_K}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \middle| \theta, X \right\} = \{I_{m_{K0}}(i, j)\}$$

Pour $i = 0, \dots, p_K, \quad k = 1, \dots, K - 1$

$$\begin{aligned} I_{m_{K0}}(i + 1, k) &= cov \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{K,i}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_k} \middle| \theta, X \right\} \\ &= cov \left\{ \sum_{t=p+1}^n \frac{z_{t,K} \mu(x_t, i) e_{t,K}}{\sigma_K^2}, \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{z_{t,k}}{\alpha_k} - \frac{z_{t,K}}{\alpha_K} \right) \middle| \theta, X \right\} \\ &= \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{cov(z_{t,k}, z_{t,K} | \theta, X)}{\alpha_k} - \frac{var(z_{t,K} | \theta, X)}{\alpha_K} \right) \frac{\mu(x_t, i) e_{t,K}}{\sigma_K^2} \\ &= \sum_{t=p+1}^n \left(-\frac{\tau_{t,k}}{\alpha_k} - \frac{1 - \tau_{t,K}}{\alpha_K} \right) \frac{\tau_{t,K} \mu(x_t, i) e_{t,K}}{\sigma_K^2} \end{aligned}$$

Pour $k = 1, \dots, K - 1$

$$\begin{aligned} I_{m_{K0}}(p_K + 2, k) &= cov \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma_K}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_k} \middle| \theta, X \right\} \\ &= cov \left\{ \sum_{t=p+1}^n \frac{z_{t,K}}{\sigma_K} \left(\frac{e_{t,K}^2}{\sigma_K^2} - 1 \right), \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{z_{t,k}}{\alpha_k} - \frac{z_{t,K}}{\alpha_K} \right) \middle| \theta, X \right\} \\ &= \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{cov(z_{t,k}, z_{t,K} | \theta, X)}{\alpha_K} - \frac{var(z_{t,K} | \theta, X)}{\alpha_K} \right) \frac{1}{\sigma_K} \left(\frac{e_{t,K}^2}{\sigma_K^2} - 1 \right) \\ &= \sum_{t=p+1}^n \left(-\frac{\tau_{t,k}}{\alpha_k} - \frac{1 - \tau_{t,K}}{\alpha_K} \right) \frac{\tau_{t,K}}{\sigma_K} \left(\frac{e_{t,K}^2}{\sigma_K^2} - 1 \right) \end{aligned}$$

La matrice $I_{m_{kl}}, k = 2, \dots, K, 1 \leq l < k$ est une matrice de dimension $(p_k + 2) \times (p_l + 2)$, donnée par :

$$I_{m_{k,l}} = cov \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_k}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_l} \middle| \theta, X \right\} = \{I_{m_{kl}}(i, j)\}$$

Pour $i = 0, \dots, p_k, j = 0, \dots, p_l$

$$\begin{aligned} I_{m_{kl}}(i + 1, j + 1) &= cov \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,i}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{l,j}} \middle| \theta, X \right\} \\ &= cov \left\{ \sum_{t=p+1}^n \frac{z_{t,k} \mu(x_t, i) e_{t,k}}{\sigma_k^2}, \sum_{t=p+1}^n \left(\frac{z_{t,l} \mu(x_t, i) e_{t,l}}{\sigma_l^2} \right) \middle| \theta, X \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t=p+1}^n \frac{\text{cov}(z_{t,k}, z_{t,l} | \theta, X) \mu(x_t, i) \mu(x_t, j) e_{t,k} e_{t,l}}{\sigma_k^2 \sigma_l^2} \\
&= \sum_{t=p+1}^n -\frac{\tau_{t,k} \tau_{t,l} \mu(x_t, i) \mu(x_t, j) e_{t,k} e_{t,l}}{\sigma_k^2 \sigma_l^2}
\end{aligned}$$

Pour $i = p_k + 2, j = p_l + 2$

$$\begin{aligned}
I_{m_{kl}}(p_k + 2, p_l + 2) &= \text{cov} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma_k}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma_l} \middle| \theta, X \right\} \\
&= \text{cov} \left\{ \sum_{t=p+1}^n \frac{z_{t,k}}{\sigma_k} \left(\frac{e_{t,k}^2}{\sigma_k^2} - 1 \right), \sum_{t=p+1}^n \frac{z_{t,l}}{\sigma_l} \left(\frac{e_{t,l}^2}{\sigma_l^2} - 1 \right) \middle| \theta, X \right\} \\
&= \sum_{t=p+1}^n \frac{\text{cov}(z_{t,k}, z_{t,l} | \theta, X)}{\sigma_k \sigma_l} \left(\frac{e_{t,k}^2}{\sigma_k^2} - 1 \right) \left(\frac{e_{t,l}^2}{\sigma_l^2} - 1 \right) \\
&= \sum_{t=p+1}^n -\frac{\tau_{t,k} \tau_{t,l}}{\sigma_k \sigma_l} \left(\frac{e_{t,k}^2}{\sigma_k^2} - 1 \right) \left(\frac{e_{t,l}^2}{\sigma_l^2} - 1 \right)
\end{aligned}$$

Pour $i = 1, \dots, p_k$

$$\begin{aligned}
I_{m_{kl}}(i + 1, p_l + 2) &= \text{cov} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,i}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma_l} \middle| \theta, X \right\} \\
&= \text{cov} \left\{ \sum_{t=p+1}^n \frac{z_{t,l} \mu(x_t, i) e_{t,k}}{\sigma_k^2}, \sum_{t=p+1}^n \frac{z_{t,k}}{\sigma_l} \left(\frac{e_{t,l}^2}{\sigma_l^2} - 1 \right) \middle| \theta, X \right\} \\
&= \sum_{t=p+1}^n \frac{\text{cov}(z_{t,k} z_{t,l} | \theta, X) \mu(x_t, i) e_{t,k}}{\sigma_k^2 \sigma_l} \left(\frac{e_{t,l}^2}{\sigma_l^2} - 1 \right) \\
&= \sum_{t=p+1}^n -\frac{\tau_{t,k} \tau_{t,l} \mu(x_t, i) e_{t,k}}{\sigma_k^2 \sigma_l} \left(\frac{e_{t,l}^2}{\sigma_l^2} - 1 \right)
\end{aligned}$$

Pour $j = 1, \dots, p_l$

$$\begin{aligned}
I_{m_{kl}}(p_k + 2, j + 1) &= \text{cov} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma_k}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{l,j}} \middle| \theta, X \right\} \\
&= \text{cov} \left\{ \sum_{t=p+1}^n \frac{z_{t,k}}{\sigma_k} \left(\frac{e_{t,k}^2}{\sigma_k^2} - 1 \right), \sum_{t=p+1}^n \frac{z_{t,l} \mu(x_t, j) e_{t,l}}{\sigma_l^2} \middle| \theta, X \right\} \\
&= \sum_{t=p+1}^n \frac{\text{cov}(z_{t,k}, z_{t,l} | \theta, X) \mu(x_t, j) e_{t,l}}{\sigma_k \sigma_l^2} \left(\frac{e_{t,k}^2}{\sigma_k^2} - 1 \right) \\
&= \sum_{t=p+1}^n -\frac{\tau_{t,k} \tau_{t,l} \mu(x_t, j) e_{t,l}}{\sigma_k \sigma_l^2} \left(\frac{e_{t,k}^2}{\sigma_k^2} - 1 \right)
\end{aligned}$$

1.4.4 Identification et sélection des ordres d'un modèle MAR

Wong et Li (2000) ont étudié la performance de la sélection d'un modèle MAR en utilisant deux approches.

Ils ont étudié le performance des critères AIC et BIC basés sur la fonction de log-vraisemblance complète donnée par l'algorithme EM , après l'estimation des données manquantes. Ils ont étudié également les critères AIC^* et BIC^* basés sur la fonction de densité donnée dans la définition du modèle MAR (équation(1.1)). Vu la bonne performance du critère BIC^* , ils ont suggéré d'utiliser de ce dernier dans la sélection d'un modèle MAR .

Le critère BIC^* , défini par Wong et Li (2000) est donné par :

$$BIC^* = -2l^* + \log(n - p) \left(3K - 1 + \sum_{k=1}^K p_k \right)$$

où

$$l^* = \sum_{t=p+1}^n \log \{f(x_t | \Omega_{t-1})\}$$

l'objective est de choisir le K et les ordre de composantes qui minimise ce critère.

1.5 Étude de simulation

Afin d'illustrer la performance de l'algorithme EM dans l'estimation des paramètres d'un modèle généré par un processus de la classe MAR , nous allons présenter une étude de simulation de la méthode choisie.

Dans le but de réaliser les simulations nécessaires, nous avons utilisé l'outil de simulation $MATLAB$. Nous avons simulé 1000 séries à partir d'un modèle $MAR(3; 2, 1, 3)$ pour plusieurs tailles ($n = 250, 500, 750, 1000$). Les vraies valeurs des paramètres de processus générateur des séries, la moyenne empirique, l'écart type empirique et l'écart type théorique de leurs estimations sont reportés dans les tables (1.1) – (1.4).

k		α_k	σ_k	ϕ_{k0}	ϕ_{k1}	ϕ_{k2}	ϕ_{k3}
1	Vraie valeur	0,4000	1.000	0.0000	0.9000	-0.6000	—
	Moyenne empirique	0.403	0.9728	0.0016	0.9000	-0.6002	—
	Ecart type empirique	0.0413	0.1072	0.1338	0.0136	0.0142	—
	Ecart type théorique	0.0405	0.0875	0.1308	0.0128	0.0151	—
2	Vraie valeur	0.3000	1.0000	0.0000	-0.5000	—	—
	Moyenne empirique	0.2997	0.9795	0.0103	-0.4997	—	—
	Ecart type empirique	0.0349	0.1028	0.1425	0.0140	—	—
	Ecart type théorique	0.0359	0.1063	0.1511	0.0136	—	—
3	Vraie valeur	0.3000	5.0000	-5.0000	1.5000	-0.7400	0.1200
	Moyenne empirique	0.2972	4.7959	-5.0998	1.4848	-0.7348	0.1153
	Ecart type empirique	0.0376	0.4878	0.7840	0.0987	0.1023	0.0983
	Ecart type théorique	0.0353	0.4720	0.8075	0.1005	0.0997	0.1184

TABLE 1.1 – Résultat de simulation pour 1000 réapplications d'un modèle MAR(3,2,1,3), avec n=250

k		α_k	σ_k	ϕ_{k0}	ϕ_{k1}	ϕ_{k2}	ϕ_{k3}
1	Vraie valeur	0,4000	1.000	0.0000	0.9000	-0.6000	—
	Moyenne empirique	0.3990	0.9865	0.00046	0.8998	-0.5996	—
	Ecart type empirique	0.0281	0.0771	0.0918	0.0082	0.0085	—
	Ecart type théorique	0.0270	0.0803	0.1083	0.0093	0.0094	—
2	Vraie valeur	0.3000	1.0000	0.0000	-0.5000	—	—
	Moyenne empirique	0.3008	0.9923	-0.0016	-0.4997	—	—
	Ecart type empirique	0.0245	0.0774	0.0977	0.0086	—	—
	Ecart type théorique	0.0232	0.0614	0.0837	0.0067	—	—
3	Vraie valeur	0.3000	5.0000	-5.0000	1.5000	-0.7400	0.1200
	Moyenne empirique	0.3002	4.9041	-5.0447	1.4943	-0.7388	0.1180
	Ecart type empirique	0.0249	0.3267	0.5216	0.0583	0.0634	0.0576
	Ecart type théorique	0.0264	0.2872	0.4549	0.0434	0.0556	0.0488

TABLE 1.2 – Résultat de simulation pour 1000 réapplications d'un modèle MAR(3,2,1,3), avec n=500

k		α_k	σ_k	ϕ_{k0}	ϕ_{k1}	ϕ_{k2}	ϕ_{k3}
1	Vraie valeur	0,4000	1.000	0.0000	0.9000	-0.6000	—
	Moyenne empirique	0.4008	0.9932	0.0017	0.9001	-0.6002	—
	Ecart type empirique	0.0231	0.0591	0.0743	0.0067	0.0068	—
	Ecart type théorique	0.0234	0.0675	0.0743	0.0085	0.0039	—
2	Vraie valeur	0.3000	1.0000	0.0000	-0.5000	—	—
	Moyenne empirique	0.2999	0.9926	-0.0010	-0.4997	—	—
	Ecart type empirique	0.0205	0.0596	0.0839	0.0068	—	—
	Ecart type théorique	0.0191	0.0658	0.0966	0.0099	—	—
3	Vraie valeur	0.3000	5.0000	-5.0000	1.5000	-0.7400	0.1200
	Moyenne empirique	0.2993	4.9373	-5.0271	1.4983	-0.7397	0.1179
	Ecart type empirique	0.0207	0.2702	0.4111	0.0441	0.0493	0.0448
	Ecart type théorique	0.0221	0.2652	0.4080	0.0511	0.0599	0.0470

TABLE 1.3 – Résultat de simulation pour 1000 réapplications d'un modèle MAR(3,2,1,3), avec n=750

k		α_k	σ_k	ϕ_{k0}	ϕ_{k1}	ϕ_{k2}	ϕ_{k3}
1	Vraie valeur	0,4000	1.000	0.0000	0.9000	-0.6000	—
	Moyenne empirique	0.4000	0.9943	0.00099	0.8999	-0.5995	—
	Ecart type empirique	0.0202	0.0499	0.0649	0.0056	0.0061	—
	Ecart type théorique	0.0200	0.0524	0.0648	0.0066	0.0069	—
2	Vraie valeur	0.3000	1.0000	0.0000	-0.5000	—	—
	Moyenne empirique	0.3001	0.9929	-0.0028	-0.5002	—	—
	Ecart type empirique	0.0173	0.0540	0.0692	0.0055	—	—
	Ecart type théorique	0.0178	0.0515	0.0708	0.0063	—	—
3	Vraie valeur	0.3000	5.0000	-5.0000	1.5000	-0.7400	0.1200
	Moyenne empirique	0.2999	4.9528	-5.0219	1.4993	-0.7383	0.1182
	Ecart type empirique	0.0178	0.2328	0.3507	0.0366	0.0408	0.0382
	Ecart type théorique	0.0181	0.2222	0.3531	0.0337	0.0369	0.0368

TABLE 1.4 – Résultat de simulation pour 1000 réapplications d'un modèle MAR(3,2,1,3), avec n=1000

Interprétation des résultats

A partir des quatre tables, nous constatons que :

- Les moyennes empiriques d'estimations sont très proches des vraies valeurs.
- Les écarts types empiriques et théoriques obtenus sont généralement assez petits.
- Lorsque la taille devient importante, les écart types tendent vers zéro, donc nous en déduisons que les estimateurs des paramètres sont consistants.
- Au cours des simulations, nous avons constaté que plus la taille de l'échantillon augmente plus les estimations sont précises.

CHAPITRE 2

MÉLANGE DE MODÈLES AUTORÉGRESSIFS CONDITIONNELLEMENT HÉTÉROSCÉDASTIQUES

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté la classe de mélange de modèles autorégressifs (MAR) proposée par Wong et Li (2000). Cette classe montre une aptitude à reproduire plusieurs caractéristiques observées dans les séries financières, tels que : la multimodalité, le changement de régime,...etc. Cependant, les autocorrélations des carrées des observations, générées à partir d'un modèle MAR , sont nulles. Une telle propriété est rarement vérifiée en pratique des séries financières. Ce constat rend la classe des modèles MAR insuffisante pour modéliser des données financières.

Afin de pallier cette difficulté, Wong et Li (2001) ont introduit la classe de mélange de modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques ($MAR - ARCH$). Dans ce chapitre, nous donnons un bref aperçu sur le modèle Autorégressif Conditionnellement Hétéroscédastique ($ARCH$) et nous présentons le modèle $MAR - ARCH$.

2.1 Rappel sur Les Modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques

Les séries financières possèdent des caractéristiques qui ne peuvent pas être prises en compte par la modélisation linéaire ($SARIMA$), dont la plus remarquable est la variabilité instantanée, nommée "volatilité". Engle (1982) a proposé une nouvelle classe de modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques ($ARCH$) pour prendre en considération cette volatilité expliquée par la variance conditionnelle dépendante du temps.

Définition 2 On dit que le processus $\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$ suit un processus $ARCH(q)$, s'il est défini par une équation de la forme :

$$\begin{cases} x_t &= \varepsilon_t \sqrt{h_t} \\ h_t &= \beta_0 + \sum_{i=1}^q \beta_i x_{t-i}^2 \end{cases}$$

où ε_t est un bruit blanc faible tel que $E(\varepsilon_t) = 0$ et $E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$ et $\beta_0 > 0, \beta_i \geq 0, i = 0, \dots, q$

2.1.1 Propriétés des processus $ARCH$

Si x_t est un processus $ARCH$, alors il a les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(x_t) = 0 \\ E(x_t | \Omega_{t-1}) = 0 \quad \text{où} \quad \Omega_{t-1} = x_{t-1}, x_{t-2}, \dots \\ V(x_t) = \frac{\beta_0}{1 - \sum_{i=1}^q \beta_i} \quad \text{si} \quad \sum_{i=1}^q \beta_i < 1. \\ V(x_t | \Omega_{t-1}) = \beta_0 + \beta_1 x_{t-1}^2 + \dots + \beta_q x_{t-q}^2 \\ Cov(x_t, x_{t+h}) = \sigma_h = 0, \forall h > 0 \\ Cov(x_t, x_{t+h} | \Omega_{t-1}) = 0. \end{array} \right.$$

Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à [3].

2.2 Mélange de Modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques

La classe de mélange de modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques est noté $MAR-ARCH(K; p_1, \dots, p_K; q_1, \dots, q_K)$. Ces processus sont définis comme suit :

Définition 3 Un processus $\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$, suit un mélange de K modèles autorégressifs à erreurs $ARCH$, d'ordre p_1, p_2, \dots, p_K et q_1, q_2, \dots, q_K , noté $MAR-ARCH(K; p_1, \dots, p_K; q_1, \dots, q_K)$, s'il est défini par :

$$F(x_t | \Omega_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \Phi \left(\frac{e_{t,k}}{\sqrt{h_{t,k}}} \right) \quad (2.1)$$

avec

$$e_{t,k} = x_t - \phi_{k,0} - \phi_{k,1}x_{t-1} - \dots - \phi_{k,p_k}x_{t-p_k}$$

$$h_{t,k} = \beta_{k,0} + \beta_{k,1}e_{t-1,k}^2 + \dots + \beta_{k,q_k}e_{t-q_k,k}^2,$$

où $\Phi(\cdot)$ et $F(\cdot)$ sont, respectivement, la distribution cumulative de la loi normal centrée

réduite et la distribution cumulative conditionnelle de x_t , sachant les valeurs passées du processus x_t jusqu'au temps $t - 1$. Les constantes $\alpha_k, \beta_{k,0}, k = 1, 2, \dots, K$, sont des réelles strictement positives tels que $\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1$ et les constantes $\beta_{k,i}, i = q_1, \dots, q_k$, sont des réelles positives.

Considérons le modèle particulier *MAR* stationnaire défini par

$$F(x_t | \Omega_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \Phi\left(\frac{x_t}{\sigma_k}\right)$$

Il est clair que le moment d'ordre 4 pour un modèle *MAR* est donné par :

$$E(x_t^4) = E(E(x_t^4 | \Omega_{t-1})) = E\left(\sum_{k=1}^K \int_{\mathbb{R}} \frac{\alpha_k}{\sigma_k} x_t^4 \varphi\left(\frac{x_t}{\sigma_k}\right) dx_t\right)$$

où

$$\frac{1}{\sigma_k} \varphi\left(\frac{x_t}{\sigma_k}\right) = \Phi\left(\frac{x_t}{\sigma_k}\right)'$$

faisons le changement de variable suivant

$$z_t = \frac{x_t}{\sigma_k}$$

On obtient :

$$E(x_t^4) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \sigma_k^4 E\left(\int_{\mathbb{R}} z_t^4 \varphi(z_t)\right) dz_t$$

Comme z_t suit une loi $N(0, 1)$ et $\mu_4 = 3\sigma_k^4$

Donc

$$E(x_t^4) = 3 \sum_{k=1}^K \alpha_k \sigma_k^4$$

D'où la kurtosis de x_t est donnée par :

$$3 \frac{\sum_{k=1}^K \alpha_k \sigma_k^4}{\left(\sum_{k=1}^K \alpha_k \sigma_k^2\right)^2}$$

qui doit être supérieure à 3 lorsque $\sum_{k=1}^K \alpha_k \sigma_k^4$ est supérieure à $\left(\sum_{k=1}^K \alpha_k \sigma_k^2\right)^2$, à moins que $\sigma_1 = \dots = \sigma_K$. Cette propriété est importante dans la modélisation des séries chronologiques financières car les distributions empiriques des séries financières, en général, sont caractérisées par des queues épaisses relativement à la distribution normal et d'une

kurtosis supérieure à 3. Cependant, considérons l'espérance du produit de x_t^2 et x_{t-h}^2 .

$$\begin{aligned} E(x_t^2 x_{t-h}^2) &= E\left(E\left(x_{t-h}^2 x_t^2 | \Omega_{t-1}\right)\right) = E\left(x_{t-h}^2 E\left(x_t^2 | \Omega_{t-1}\right)\right) \\ &= E\left(x_{t-h}^2 \sum_{k=1}^K \alpha_k \sigma_k^2\right) \\ &= \sum_{k=1}^K \alpha_k \sigma_k^2 E(x_{t-h}^2) = \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k \sigma_k^2\right)^2 = E(x_t^2) E(x_{t-h}^2) \end{aligned}$$

car

$$E\left(E\left(x_t^2 | \Omega_{t-1}\right)\right) = E\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\alpha_k}{\sigma_k} x_t^2 \varphi\left(\frac{x_t}{\sigma_k}\right) dx_t\right) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \sigma_k^2$$

Par conséquent, toutes les autocorrélations des carrées x_t^2 sont nulles, ce qui est rarement vérifié dans la pratique des séries financières. L'absence de la structure d'autocorrélation dans les carrées caractérise l'insuffisance de la modélisation des données financières par la classe des modèles *MAR*.

2.3 Propriétés probabilistes d'un modèle *MAR-ARCH*

2.3.1 Espérance conditionnelle

L'espérance conditionnelle de x_t s'écrit :

$$E(x_t | \Omega_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k (\phi_{k,0} + \dots + \phi_{k,p_k} x_{t-p_k}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \mu_{t,k}$$

où

$$\mu_{t,k} = \phi_{k,0} + \dots + \phi_{k,p_k} x_{t-p_k}$$

Preuve

On a

$$E(x_t | \Omega_{t-1}) = \int_{\mathbb{R}} x_t \frac{dF(x_t | \Omega_{t-1})}{dx_t} dx_t = \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_k}{\sqrt{h_{t,k}}} \int_{\mathbb{R}} x_t \varphi\left(\frac{e_{t,k}}{\sqrt{h_{t,k}}}\right) dx_t$$

faisons le changement de variable suivant

$$z_t = \frac{e_{t,k}}{\sqrt{h_{t,k}}}$$

Par suite

$$\begin{aligned} E(x_t|\Omega_{t-1}) &= \sum_{k=1}^K \alpha_k \sqrt{h_{t,k}} \int_{\mathbb{R}} z_t \varphi(z_t) dz_t + \sum_{k=1}^K \alpha_k \mu_{t,k} \int_{\mathbb{R}} \varphi(z_t) dz_t \\ &= \sum_{k=1}^K \alpha_k \mu_{t,k} \end{aligned}$$

2.3.2 Variance conditionnelle

On peut écrire la variance conditionnelle de x_t de la manière suivante :

$$Var(x_t|\Omega_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k h_{t,k} + \sum_{k=1}^K \alpha_k \mu_{t,k}^2 - \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k \mu_{t,k} \right)^2$$

Preuve

Par définition, on a

$$E(x_t^2|\Omega_{t-1}) = \int_{\mathbb{R}} x_t^2 \frac{dF(x_t|\Omega_{t-1})}{dx_t} dx_t = \int_{\mathbb{R}} x_t^2 \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_k}{\sqrt{h_{t,k}}} \left(\frac{x_t - \phi_{k,0} - \sum_{i=0}^{p_k} \phi_{k,i} x_{t-i}}{\sqrt{h_{t,k}}} \right) dx_t.$$

Faisons le même changement de variable précédent

$$z_{t,k} = \frac{e_{t,k}}{\sqrt{h_{t,k}}}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} E(x_t^2|\Omega_{t-1}) &= \sum_{k=1}^K \alpha_k \left[\int_{\mathbb{R}} z_t^2 h_{t,k} \varphi(z_t) dz_t + \int_{\mathbb{R}} 2z_t \sqrt{h_{t,k}} \mu_{t,k} \varphi(z_t) dz_t + \int_{\mathbb{R}} \mu_{t,k}^2 \varphi(z_t) dz_t \right] \\ &= \sum_{k=1}^K \alpha_k [h_{t,k} + \mu_{t,k}^2] \end{aligned}$$

et comme $Var(x_t|\Omega_{t-1}) = E(x_t^2|\Omega_{t-1}) - (E(x_t|\Omega_{t-1}))^2$, alors la variance conditionnelle de x_t peut s'écrire comme suit

$$Var(x_t|\Omega_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k h_{t,k} + \sum_{k=1}^K \alpha_k \mu_{t,k}^2 - \left[\sum_{k=1}^K \alpha_k \mu_{t,k} \right]^2$$

Une caractéristique importante du modèle $MAR - ARCH$ est sa grande flexibilité de modéliser le changement de la variance conditionnelle résultant de la différence dans les

moyennes conditionnelles des K composantes. Cette caractéristique est donnée par le second et le troisième termes de la variance conditionnelle. Quant au premier terme rend possible la modélisation de l'hétéroscédasticité de la variance des erreurs passées.

2.3.3 Étude de la stationnarité

Dans cette partie nous allons présenter les conditions de stationnarité au premier et au second ordre pour les modèles $MAR - ARCH$ qui sont données par le premier et le deuxième théorème de Wong et Li (2001) ainsi que leurs démonstrations. Les conditions de stationnarité au second ordre sont données pour le cas restrictif $MAR-ARCH(K; 1, \dots, 1; q_1, \dots, q_K)$.

Théorème 6 (Wong et Li, 2001)

Le processus $\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant une représentation $MAR-ARCH(K; p_1, p_2, \dots, p_K; q_1, q_2, \dots, q_K)$ est stationnaire au premier ordre si et seulement si toutes les racines du polynôme

$$1 - \sum_{i=1}^p \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,i} \right) z^{-i} \quad (2.2)$$

soient de module strictement inférieure à l'unité.

Dans la suite de ce chapitre, on prendra $p = \max(p_1, \dots, p_K)$ et $q = \max(q_1, \dots, q_K)$.

Preuve

Nous avons

$$E(x_t | \Omega_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k (\phi_{k,0} + \phi_{k,1}x_{t-1} + \dots + \phi_{k,p}x_{t-p})$$

Alors

$$E(x_t) = E(E(x_t | \Omega_{t-1})) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,0} + E(x_{t-1}) \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,1} + \dots + E(x_{t-p}) \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,p},$$

ce qui donne

$$\mu_t = a_0 + a_1\mu_{t-1} + \dots + a_p\mu_{t-p}$$

où

$$\mu_{t-i} = E(x_{t-i}), \text{ et } a_i = \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,i}, i = 0, \dots, p$$

Ainsi, la moyenne du processus satisfait une équation linéaire aux différences non homogène d'ordre p . Alors, une condition nécessaire et suffisante pour que cette dernière équation admette une solution finie est que toutes les racines du polynôme

$$1 - \sum_{i=1}^p \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,i} \right) z^{-i} = 0$$

soient de module strictement inférieure à l'unité.

Théorème 7 (Wong et Li, 2001)

Supposons que $\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant une représentation $MAR-ARCH(K; 1, \dots, 1; q_1, \dots, q_K)$ soit stationnaire au premier ordre. Une condition nécessaire et suffisante pour que le processus soit stationnaire au second ordre est que les racines z_1, z_2, \dots, z_p de l'équation

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{k=1}^K \alpha_k (\beta_{k,1} + \phi_{k,1}^2) z^{-1} - \sum_{i=2}^q \sum_{k=1}^K \alpha_k \left\{ \beta_{k,i} + \beta_{k,i-1} \phi_{k,1} \left(\phi_{k,1} - 2 \sum_{j=1}^K \alpha_j \phi_{j,1} \right) \right\} z^{-i} \\ - \sum_{k=1}^K \alpha_k \beta_{k,q} \phi_{k,1} \left\{ \phi_{k,1} - 2 \sum_{j=1}^K \alpha_j \phi_{j,1} \right\} z^{-q-1} = 0 \end{aligned}$$

soient toutes à l'intérieur du cercle unitaire, où $\beta_{k,i} = 0$ pour $i > q_k$.

Preuve soit $\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus $MAR - ARCH(K, 1, 1, \dots, 1, q_1, \dots, q_K)$ stationnaire en moyenne.

Nous avons alors,

$$\begin{aligned} E(x_t^2 | \Omega_{t-1}) &= \int_{\mathbb{R}} x_t^2 \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_k}{\sqrt{h_{t,k}}} \varphi \left(\frac{x_t - \phi_{k,0} - \phi_{k,1} x_{t-1}}{\sqrt{\beta_{k,0} + \beta_{k,1} e_{t-1,k}^2 + \dots + \beta_{k,q} e_{t-q,k}^2}} \right) dx_t \\ &= \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_k}{\sqrt{h_{t,k}}} \int_{\mathbb{R}} (\sqrt{h_{t,k}} z_t + \phi_{k,0} + \phi_{k,1} x_{t-1})^2 \varphi(z_t) \sqrt{h_{t,k}} dz_t \\ &= \sum_{k=1}^K \alpha_k h_{t,k} + \sum_{k=1}^K \alpha_k (\phi_{k,0} + \phi_{k,1} x_{t-1})^2 \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
 E(x_t^2) &= E(E(x_t^2 | \Omega_{t-1})) = E \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k h_{t,k} + \sum_{k=1}^K \alpha_k (\phi_{k,0} + \phi_{k,1} x_{t-1})^2 \right) \\
 &= E \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k \left(\beta_{k,0} + \sum_{i=1}^q \beta_{k,i} e_{t-i,k}^2 \right) + \sum_{k=1}^K \alpha_k (\phi_{k,0} + \phi_{k,1} x_{t-1})^2 \right) \\
 &= \sum_{k=1}^K \alpha_k \beta_{k,0} + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q \alpha_k \beta_{k,i} E(e_{t-i,k}^2) + \sum_{k=1}^K \alpha_k E((\phi_{k,0} + \phi_{k,1} x_{t-1})^2) \\
 &= \sum_{k=1}^K \alpha_k \beta_{k,0} + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q \alpha_k \beta_{k,i} E(e_{t-i,k}^2) + \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,0}^2 + \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,1}^2 E(x_{t-1}^2) \\
 &\quad + 2 \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,0} \phi_{k,1} E(x_{t-1})
 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
 E(e_{t-i,k}^2) &= E \left\{ (x_{t-i} - \phi_{k,0} - \phi_{k,1} x_{t-i-1})^2 \right\} \\
 &= E \left\{ x_{t-i}^2 - 2x_{t-i} (\phi_{k,0} + \phi_{k,1} x_{t-i-1}) + (\phi_{k,0} + \phi_{k,1} x_{t-i-1})^2 \right\} \\
 &= E(x_{t-i}^2) - 2\phi_{k,0} E(x_{t-i}) - 2\phi_{k,1} E(x_{t-i} x_{t-i-1}) + \phi_{k,0}^2 \\
 &\quad + 2\phi_{k,0} \phi_{k,1} E(x_{t-i-1}) + \phi_{k,1}^2 E(x_{t-i-1}^2)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 E(x_{t-i} x_{t-i-1}) &= E \left(E(x_{t-i} x_{t-i-1} | \Omega_{t-i-1}) \right) = E \left(x_{t-i-1} E(x_{t-i} | \Omega_{t-i-1}) \right) \\
 &= E \left\{ x_{t-i-1} \sum_{k=1}^K \alpha_k (\phi_{k,0} + \phi_{k,1} x_{t-i-1}) | \Omega_{t-i-1} \right\} \\
 &= \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,0} E(x_{t-i-1}) + \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,1} E(x_{t-i-1}^2)
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 E(e_{t-i,k}^2) &= E(x_{t-i}^2) - 2\phi_{k,0} E(x_{t-i}) + 2\phi_{k,0} \phi_{k,1} E(x_{t-i-1}) + \phi_{k,1}^2 E(x_{t-i-1}^2) \\
 &\quad - 2\phi_{k,1} \left\{ \sum_{l=1}^K \alpha_l \phi_{l,0} E(x_{t-i-1}) + \sum_{l=1}^K \alpha_l \phi_{l,1} E(x_{t-i-1}^2) \right\} + \phi_{k,0}^2
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 E(x_t^2) &= \sum_{k=1}^K \alpha_k \beta_{k,0} + \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,0}^2 + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q \alpha_k \phi_{k,0}^2 \beta_{k,i} + 2 \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,0} \phi_{k,1} E(x_{t-1}) \\
 &\quad - 2 \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q \alpha_k \phi_{k,0} \beta_{k,i} E(x_{t-1}) + 2 \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q \alpha_k \phi_{k,0} \phi_{k,1} \beta_{k,i} E(x_{t-i-1}) \\
 &\quad - 2 \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q \sum_{l=1}^K \alpha_k \phi_{k,1} \phi_{l,0} \beta_{k,i} \alpha_l E(x_{t-i-1}) + \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,1}^2 E(x_{t-1}^2) + \sum_{i=1}^q \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,1}^2 \beta_{k,i} E(x_{t-i}^2) \\
 &\quad - 2 \sum_{i=1}^q \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K \alpha_k \phi_{k,1} \phi_{l,1} \beta_{k,i} \alpha_l E(x_{t-i-1}^2) + \sum_{i=1}^q \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,1}^2 \beta_{k,i} E(x_{t-i-1}^2) \\
 &= \sum_{k=1}^K \alpha_k \beta_{k,0} + \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,0}^2 + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q \alpha_k \phi_{k,0}^2 \beta_{k,i} + 2 \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,0} \phi_{k,1} E(x_{t-1}) \\
 &\quad - 2 \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q \alpha_k \phi_{k,0} \beta_{k,i} E(x_{t-1}) + 2 \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q \alpha_k \phi_{k,0} \phi_{k,1} \beta_{k,i} E(x_{t-i-1}) \\
 &\quad - 2 \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q \sum_{l=1}^K \alpha_k \phi_{k,1} \phi_{l,0} \beta_{k,i} E(x_{t-i-1}) + \sum_{k=1}^K \alpha_k (\phi_{k,1}^2 + \beta_{k,1}) E(x_{t-1}^2) \\
 &\quad + \sum_{i=2}^q \sum_{k=1}^K \alpha_k \beta_{k,i} E(x_{t-i}^2) - 2 \sum_{j=2}^{q+1} \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K \alpha_k \phi_{k,1} \phi_{l,1} \beta_{k,j-1} \alpha_l E(x_{t-j}^2) \\
 &\quad + \sum_{j=2}^{q+1} \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,1}^2 \beta_{k,j-1} E(x_{t-j}^2)
 \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$E(x_t^2) = a_0 + \sum_{i=1}^{q+1} a_i E(x_{t-i}^2)$$

où

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \sum_{k=1}^K \alpha_k \beta_{k,0} + \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,0}^2 + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q \alpha_k \phi_{k,0}^2 \beta_{k,i} + 2 \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,0} \phi_{k,1} E(x_{t-1}) \\
 &\quad - 2 \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q \alpha_k \phi_{k,0} \beta_{k,i} E(x_{t-1}) + 2 \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q \alpha_k \phi_{k,0} \phi_{k,1} \beta_{k,i} E(x_{t-i-1}) \\
 &\quad - 2 \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q \sum_{l=1}^K \alpha_k \phi_{k,1} \phi_{l,0} \beta_{k,i} \alpha_l E(x_{t-i-1}) \\
 a_1 &= \sum_{k=1}^K \alpha_k (\phi_{k,1}^2 + \beta_{k,1}) \\
 a_i &= \sum_{k=1}^K \alpha_k \left(\beta_{k,i} + \phi_{k,1} \beta_{k,i-1} \left(\phi_{k,1} - 2 \sum_{l=1}^K \alpha_l \phi_{l,1} \right) \right), i = 2, \dots, q \\
 a_{q+1} &= \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,1} \beta_{k,q} \left(\phi_{k,1} - 2 \sum_{l=1}^K \phi_{l,1} \alpha_l \right)
 \end{aligned}$$

Ainsi, le moment d'ordre deux du processus satisfait une équation linéaire au différence non homogène d'ordre $q + 1$. Alors, une condition nécessaire et suffisante pour que cette dernière équation admette une solution finie est que toutes les racines du polynôme

$$1 - \sum_{k=1}^K \alpha_k (\beta_{k,1} + \phi_{k,1}^2) z^{-1} - \sum_{i=2}^q \sum_{k=1}^K \alpha_k \left\{ \beta_{k,i} + \beta_{k,i-1} \phi_{k,1} \left(\phi_{k,1} - 2 \sum_{j=1}^K \alpha_j \phi_{j,1} \right) \right\} z^{-i} - \sum_{k=1}^K \alpha_k \beta_{k,q} \phi_{k,1} \left\{ \phi_{k,1} - 2 \sum_{j=1}^K \alpha_j \phi_{j,1} \right\} z^{-q-1} = 0$$

soient de module strictement inférieur à l'unité.

Remarque 2.1 :

le mélange d'un modèle AR – ARCH non stationnaires et un modèle AR – ARCH stationnaire peut donner un modèle stationnaire.

2.3.4 Fonction d'autocorrélation et le Moments d'ordre quatre

Soit un processus $x_t, t \in \mathbb{Z}$ généré par un modèle $MAR - ARCH$. S'il est stationnaire au second ordre alors les autocorrélations associées sont identiques à celles d'un processus MAR . Pour le retard d'ordre j , la fonction d'autocorrélation est notée ρ_j , $j = 1, \dots, p$ et s'écrit :

$$\rho_j = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,i} \right) \rho_{|j-i|}$$

En effet, sous l'hypothèse de stationnaire du second ordre de x_t , on a

$$cov(x_t, x_{t-j}) = \gamma(j), \forall j = 1, \dots, p_k, \quad \text{et} \quad k = 1, \dots, K$$

Sans perdre de généralité, on suppose que la moyenne de x_t est nulle tout en posant $\phi_{k,0} = 0$, pour $k = 1, \dots, K$

Donc, pour tout $j = 1, \dots, p_k$, et $k = 1, \dots, K$, on a

$$\begin{aligned}
 cov(x_t, x_{t-j}) &= E(x_t x_{t-j}) \\
 &= E(E(x_t x_{t-j} | \Omega_{t-1})) = E(x_{t-j} E(x_t | \Omega_{t-1})) \\
 &= E \left\{ x_{t-j} \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k (\phi_{k,1} x_{t-1} + \dots + \phi_{k,p_k} x_{t-p_k}) \right) \right\} \\
 &= \sum_{k=1}^K \alpha_k [\phi_{k,1} E(x_{t-j} x_{t-1}) + \dots + \phi_{k,p_k} E(x_{t-j} x_{t-p_k})] \\
 &= \sum_{k=1}^K \alpha_k [\phi_{k,1} \gamma(|j-1|) + \dots + \phi_{k,p_k} \gamma(|j-p_k|)]
 \end{aligned}$$

Donc

$$E(x_t x_{t-j}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \sum_{i=1}^p \phi_{k,i} \gamma(|j-i|), j = 1, \dots, p$$

Par suit

$$\rho_j = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,i} \right) \rho_{|j-i|}$$

Remarque 2.2 :

- Les autocorrélations des séries chronologiques générées par un processus $MAR - ARCH$ sont semblables à celles du modèle MAR qui sont à leur tour semblable à celles du modèle AR .
- Les équations de ρ_j satisfont un système d'équation similaires à celui de Yull – Walker pour un processus $AR(p)$ classique, où le coefficient $\sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_{k,i}$ remplace le coefficient du $i^{\text{ème}}$ retard processus $AR(p)$.

Nous présentons la condition d'existence du moment d'ordre quatre du modèle $MAR - ARCH(K; 0, \dots, 0; 1, \dots, 1)$ avec $\phi_{k,0} = 0; k = 1, \dots, K$ dans le prochain théorème.

Théorème 8 (Wong et Li, 2001)

Le moment d'ordre quatre d'un processus $MAR - ARCH(K; 0, \dots, 0; 1, 1, \dots, 1)$ stationnaire existe si et seulement si

$$\sum_{k=1}^K \alpha_k \beta_{k,i}^2 < \frac{1}{3}.$$

Preuve D'après la définition du modèle, nous avons :

$$F(x_t|\Omega_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \Phi\left(\frac{x_t}{\sqrt{h_{t,k}}}\right).$$

En effet , le moment d'ordre quatre de x_t est donnée :

$$\begin{aligned} E(x_t^4) &= E\left(E\left(x_t^4|\Omega_{t-1}\right)\right) = E\left(\sum_{k=1}^K \int_{\mathbb{R}} \frac{\alpha_k}{\sqrt{h_{t,k}}} x_t^4 \varphi\left(\frac{x_t}{\sqrt{h_{t,k}}}\right) dx_t\right) \\ &= \sum_{k=1}^K \alpha_k E\left(\int_{\mathbb{R}} h_{t,k}^2 z_t^4 \varphi(z_t) dz_t\right) = 3 \sum_{k=1}^K \alpha_k E(h_{t,k}^2) \\ &= 3 \sum_{k=1}^K \alpha_k \beta_{k,0}^2 + 6 \sum_{k=1}^K \alpha_k \beta_{k,0} \beta_{k,1} E(x_{t-1}^2) + 3 \sum_{k=1}^K \alpha_k \beta_{k,1}^2 E(x_{t-1}^4) \end{aligned}$$

D'où

$$E(x_t^4) = a_0 + a_1 E(x_{t-1}^4)$$

avec

$$\begin{aligned} a_0 &= 3 \sum_{k=1}^K \alpha_k \left[\beta_{k,0}^2 + 2\beta_{k,0} \beta_{k,1} E(x_{t-1}^2) \right] \\ a_1 &= 3 \sum_{k=1}^K \alpha_k \beta_{k,1}^2 \end{aligned}$$

A partir de cette dernière équation, il est clair que le moment d'ordre quatre du processus satisfait une équation aux différences non homogène d'ordre 1. Alors, une condition nécessaire et suffisante pour que cette dernière équation admette une solution finie est que la racine du polynôme

$$1 - a_1 z^{-1} = 0$$

soit de module strictement inférieure à l'unité,

$$|3 \sum_{k=1}^K \alpha_k \beta_{k,1}^2| < 1$$

Donc

$$\sum_{k=1}^K \alpha_k \beta_{k,1}^2 < \frac{1}{3}.$$

Remarque 2.3 :

- La condition d'existence du moment d'ordre quatre d'un processus $MAR-ARCH(K; 0, 0, \dots, 0; 1, \dots, 1)$ est identique à celle du modèle $ARCH(1)$ en remplaçant β_1^2 par le terme

$$\sum_{k=1}^K \alpha_k \beta_{k,1}^2$$

- Les moments d'ordre un et trois sont nuls alors que le moment d'ordre deux est donné par :

$$\frac{\sum_{k=1}^K \alpha_k \beta_{k,0}}{1 - \sum_{k=1}^K \alpha_k \beta_{k,1}}$$

2.4 Inférence statistique

L'inférence statistique nous permet d'avoir la valeur numérique des paramètres inconnus d'une loi de probabilité d'une population ou d'une partie de la population. Ainsi, dans cette section, nous allons aborder l'estimation des paramètres du modèle $MAR-ARCH$ et l'estimation des erreurs standard à partir la matrice d'information observée.

2.4.1 Estimation des paramètres du modèle $MAR-ARCH$

Dans cette section, nous allons étudier l'estimation des paramètres d'un modèle $MAR-ARCH$ en utilisant le même principe que nous avons déjà fait avec le modèle MAR .

Supposons que le n -vecteur d'observations $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ est généré par le modèle $MAR-ARCH$. Soit $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ et $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ les vecteurs contenant, respectivement, les données complètes et les données manquantes, où $Z_t = (Z_{t,1}, Z_{t,2}, \dots, Z_{t,K})$ est un vecteur de dimension K , dont chaque composante $Z_{t,k}$ est égale à 1 si l'observation x_t est générée par le $k^{\text{ème}}$ modèle du mélange et 0 ailleurs.

Pour une réalisation donnée $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ du modèle (2.1), la fonction de vraisemblance conditionnelle du vecteur des paramètres $\theta = (\alpha, \theta_1, \beta_1, \dots, \theta_K, \beta_K)'$, avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{K-1})'$ et $\theta_k = (\phi_{k,0}, \phi_{k,1}, \dots, \phi_{k,p_k})'$, $k = 1, 2, \dots, K$, peut être exprimée comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x|\Omega_{t-1}) &= \prod_{t=p+1}^n f(x_t|z_t, \Omega_{t-1})P(Z_t = z_t) \\ &= \prod_{t=p+1}^n \prod_{k=1}^K [f(x_t|Z_{t,k} = 1, \Omega_{t-1})P(z_{t,k} = 1)]^{z_{t,k}} \\ &= \prod_{t=p+1}^n \prod_{k=1}^K \left[\frac{\alpha_k}{\sqrt{h_{t,k}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{e_{t,k}^2}{2h_{t,k}}\right) \right]^{Z_{t,k}} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction log-vraisemblance conditionnelle normalisée est définie par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{N} \sum_{t=p+q+1}^n \mathcal{L}_t \propto \frac{1}{N} \sum_{t=p+q+1}^n \left\{ \sum_{k=1}^K z_{t,k} \log(\alpha_k) - \sum_{k=1}^K \frac{z_{t,k}}{2} \log(h_{t,k}) - \sum_{k=1}^K \frac{z_{t,k} e_{t,k}^2}{2h_{t,k}} \right\}, \quad (2.3)$$

où $N = n - p - q$. L'estimation des paramètres d'un modèle $MAR - ARCH$ demeure analogue à celle de l'estimation d'un modèle MAR , à laquelle viennent s'ajouter quelques complications. L'algorithme EM reste un algorithme de base pour l'estimation des paramètres d'un modèle $MAR - ARCH$. Il comporte :

Étape Expectation (E) Une étape d'évaluation de l'espérance (E), où on suppose que les paramètres du modèle $MAR - ARCH$ sont connus et on estime les valeurs des données manquantes Z par leurs espérances conditionnelles aux valeurs observées (x_1, x_2, \dots, x_n) et aux paramètres θ . Comme la variable aléatoire $Z_{t,k}$ est une variable indicatrice, alors cette espérance conditionnelle, notée $\tau_{t,k}$, est exactement la probabilité que l'observation x_t provienne de la $k^{ème}$ composante de la distribution conditionnelle du mélange, sachant le passé jusqu'à l'instant $t - 1$ et le vecteur des paramètres θ . Il est facile de vérifier que

$$\tau_{t,k} = \frac{\alpha_k}{\sqrt{h_{t,k}}} \varphi\left(\frac{e_{t,k}}{\sqrt{h_{t,k}}}\right) \left\{ \sum_{l=1}^K \frac{\alpha_l}{\sqrt{h_{t,k}}} \varphi\left(\frac{e_{t,k}}{\sqrt{h_{t,k}}}\right) \right\}^{-1},$$

$$k = 1, 2, \dots, K; t = p + q + 1$$

Étape Maximisation (M) Une étape de maximisation, où on estime les paramètres en maximisant la vraisemblance trouvée à l'étape E . En d'autres termes, on estime les paramètres du modèles par la maximisation de la fonction log-vraisemblance donnée par (2.3), en résolvant le système d'équations

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha_k} = 0, \quad \frac{\partial l}{\partial \phi_{k,i}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial l}{\partial \beta_{k,i}} = 0$$

Mais d'abord, il faudra passer par le calcul des dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \alpha_k} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{t=p+q+1}^n \sum_{k=1}^K z_{t,k} \log(\alpha_k) \right\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{t=p+q+1}^n \left(\frac{z_{t,k}}{\alpha_k} - \frac{z_{t,K}}{\alpha_K} \right), \quad k = 1, 2, \dots, K - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial l}{\partial \phi_{k,i}} &= \frac{\partial}{\partial \phi_{k,i}} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{t=p+q+1}^n \left(- \sum_{k=1}^K \frac{z_{t,k}}{2} \log(h_{t,k}) - \sum_{k=1}^K \frac{z_{t,k} e_{t,k}^2}{2h_{t,k}} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{N} \left\{ \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,k}}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) - \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,k} e_{t,k}}{2h_{t,k}} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \right\}\end{aligned}$$

$$k = 1, 2, \dots, K; i = 0, 1, \dots, q_k$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial l}{\partial \beta_{k,i}} &= \frac{\partial}{\partial \beta_{k,i}} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{t=p+q+1}^n \left(- \sum_{k=1}^K \frac{z_{t,k}}{2} \log(h_{t,k}) - \sum_{k=1}^K \frac{z_{t,k} e_{t,k}^2}{2h_{t,k}} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{N} \left\{ \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,k}}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) \right\}, k = 1, 2, \dots, K; i = 0, 1, \dots, q_k\end{aligned}$$

où

$$\frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} = \begin{cases} -1 & \text{si } i = 0 \\ -x_{t-i} & \text{si } 0 < i \leq p_k \end{cases}$$

$$\frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} = 2 \sum_{j=1}^{q_k} \beta_{k,j} e_{t-j,k} \left(\frac{\partial e_{t-j,k}}{\partial \phi_{k,i}} \right)$$

et

$$\frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,i}} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ e_{t-i,k}^2 & \text{si } 0 < i \leq q_k. \end{cases}$$

Pour l'estimation du paramètres α_k , $k = 1, 2, \dots, K-1$

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha_k} = 0 \Rightarrow \frac{1}{N} \sum_{t=p+q+1}^n \left(\frac{z_{t,k}}{\alpha_k} - \frac{z_{t,K}}{\alpha_K} \right) = 0$$

et en remplaçant la statistique exhaustive par son espérance, on aura :

$$\sum_{t=p+q+1}^n \sum_{k=1}^K \tau_{t,k} = \frac{1}{\alpha_K} \sum_{k=1}^K \alpha_k \sum_{t=p+q+1}^n \tau_{t,K}$$

alors

$$\alpha_K = \frac{\sum_{t=p+q+1}^n \tau_{t,K}}{n - p - q}$$

il est claire que

$$\hat{\alpha}_k = \frac{1}{n - p - q} \sum_{t=p+q+1}^n \tau_{t,k}$$

pour $k = 1, 2, \dots, K - 1$. Pour β_k et θ_k , la résolution des équations des dérivées premières de la fonction vraisemblance ne donne pas des solutions explicites. D'où le recours aux méthodes numériques. On peut utilise la méthode de *Newton – Raphson*.

Pour $l, k = 1, 2, \dots, K$ avec $l \neq k$, on a

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \theta_k \partial \theta_l} = \frac{\partial^2 l}{\partial \beta_k \partial \beta_l} = \frac{\partial^2 l}{\partial \theta_k \partial \beta_l} = 0.$$

Les approximations des dérivées de second ordre de la *log*-vraisemblance par rapport aux paramètres dans chaque composante sont données par :

pour $i, j = 0, 1, \dots, p_k$

$$-\frac{\partial^2 l}{\partial \phi_{k,i} \partial \phi_{k,j}} \simeq \frac{1}{N} \sum_{t=p+q+1}^n z_{t,k} \left(\frac{1}{2h_{t,k}^2} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,j}} + \frac{1}{h_{t,k}} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,j}} \right)$$

Pour $i, j = 0, 1, \dots, q_k$

$$-\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_{k,i} \partial \beta_{k,j}} \simeq \frac{1}{N} \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,k}}{2h_{t,k}^2} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,i}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,j}}$$

et pour $i = 0, 1, \dots, p_k, j = 0, 1, \dots, q_k$, on a

$$-\frac{\partial^2 l}{\partial \phi_{k,i} \partial \beta_{k,j}} \simeq 0$$

Pour des valeurs initiales $\theta_k^{(0)}, \beta_k^{(0)}$, les termes de θ_k, β_k de la suite récursive, sont données par

$$\theta_k^{(i+1)} = \theta_k^{(i)} - \left\{ \left(\frac{\partial^2 l}{\partial \theta_k \partial \theta_k} \right)_{\theta_k^{(i)} \beta_k^{(i)}} \right\}^{-1} \left(\frac{\partial l}{\partial \theta_k} \right)_{\theta_k^{(i)} \beta_k^{(i)}}$$

$$\beta_k^{(i+1)} = \beta_k^{(i)} - \left\{ \left(\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_k \partial \beta_k} \right)_{\theta_k^{(i+1)} \beta_k^{(i)}} \right\}^{-1} \left(\frac{\partial l}{\partial \beta_k} \right)_{\theta_k^{(i+1)} \beta_k^{(i)}}$$

où $\theta_k^{(i)}, \beta_k^{(i)}$ sont les valeurs obtenues dans la $i^{ème}$ itération. Les estimateurs $\hat{\theta}_k, \hat{\beta}_k$

sont obtenus en itérant les deux étape E et M , jusqu'à la convergence.

2.4.2 Estimation de l'erreur standard

L'estimation de l'erreur standard des paramètres estimés par l'algorithme EM sera faite d'une manière analogue à celle de l'estimation de l'erreur d'un modèle MAR .

La matrice d'information observées I_{obs} peut être obtenue en retranchant la matrice d'information manquante, I_m de la matrice d'information complète I_c . Elle est définie comme suit :

$$I_{obs} = I_c - I_m = E \left(-N \frac{\partial^2 l}{\partial \theta \partial \theta^t} \middle| \theta, \Omega_n \right)_{\theta=\hat{\theta}} - var \left(N \frac{\partial l}{\partial \theta} \middle| \theta, \Omega_n \right)_{\theta=\hat{\theta}}$$

La matrice de variance-covariance de l'estimateur $\hat{\theta}$ est donnée par l'inverse de la matrice d'information observée.

La variance d'estimateur $\hat{\alpha}_K$ est donnée par la formule suivante :

$$\sum_{k=1}^{K-1} var(\hat{\alpha}_k) + \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{l=1; l \neq k}^{K-1} cov(\hat{\alpha}_k, \hat{\alpha}_l).$$

2.4.3 Calcul de la matrice d'information observée

Les formules pour le calcul de la matrice d'information manquante I_m , ainsi que la matrice d'information complète I_c pour les modèles $MAR - ARCH$ sont exposés dans ce qui suit.

Les dérivées secondes de la fonction \log -vraisemblance par rapport à α_k sont données par :

Pour $k = 1, \dots, K - 1$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_k \partial \alpha'_k} &= -\frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{t=p+q+1}^n \left(\frac{z_{t,k}}{\alpha_k} - \frac{z_{t,k}}{\alpha_K} \right) \right\} \\ &= -\frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{t=p+q+1}^n \left(\frac{z_{t,k}}{\alpha_k} - z_{t,k} \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{K-1} \alpha_k} \right) \right) \right\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{t=p+q+1}^n \left(\frac{z_{t,k}}{\alpha_k^2} + \frac{z_{t,K}}{\alpha_K^2} \right). \end{aligned}$$

Pour $k, l = 1, \dots, K - 1$, avec $k \neq l$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_l \partial \alpha_k} &= -\frac{\partial}{\partial \alpha_l} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{t=p+q+1}^n \left(\frac{z_{t,k}}{\alpha_k} - \frac{z_{t,k}}{\alpha_K} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,k}}{\alpha_K^2} \end{aligned}$$

Les dérivées secondes de la fonction *log*-vraisemblance par rapport à θ_k et β_k sont données par les formules suivantes respectivement :

$$-\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_{k,i} \partial \beta_{k,j}} \simeq \frac{1}{N} \sum_{t=p+q+1}^n z_{t,k} \left(\frac{1}{2h_{t,k}^2} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,j}} + \frac{1}{h_{t,k}} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,j}} \right)$$

et

$$-\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_{k,i} \partial \beta_{k,j}} \simeq \frac{1}{N} \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,k}}{2h_{t,k}^2} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,i}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,j}}$$

La matrice d'information complète I_c peut être définie comme étant une matrice diagonale par bloc.

$$I_c = \begin{pmatrix} I_{c_0} & & & & \\ & I_{c_{11}} & & & \\ & & I_{c_{12}} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I_{c_{K1}} \\ & & & & & I_{c_{K2}} \end{pmatrix}$$

La matrice I_{c_0} est une matrice carrée de dimension $K - 1$, donnée par

$$I_{c_0} = E \left\{ -N \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha^2} \middle| \theta, X \right\} = \{ I_{c_0}(k, l) \}.$$

Pour $k = 1, \dots, K - 1$

$$\begin{aligned} I_{c_0}(k, k) &= E \left\{ \sum_{t=p+q+1}^n \left(\frac{z_{t,k}}{\alpha_k^2} + \frac{z_{t,K}}{\alpha_K^2} \right) \middle| \theta, X \right\} \\ &= \sum_{t=p+q+1}^n \left(\frac{\tau_{t,k}}{\alpha_k^2} + \frac{\tau_{t,K}}{\alpha_K^2} \right) \end{aligned}$$

Pour $k, l = 1, \dots, K - 1; l \neq k$

$$\begin{aligned} I_{c_0}(k, l) &= E \left\{ \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,K}}{\alpha_K^2} \middle| \theta, X \right\} \\ &= \sum_{t=p+q+1}^n \frac{\tau_{t,K}}{\alpha_K^2} \end{aligned}$$

La matrice $I_{c_{k1}}, k = 1, \dots, K$ est une matrice carrée de dimension $p_k + 1$, donnée par :

$$I_{c_{k1}} = E \left\{ -N \frac{\partial^2 l}{\partial \theta_k \partial \theta'_k} \middle| \theta, X \right\} = \{I_{c_{k1}}(i, j)\}.$$

Pour $i, j = 0, \dots, p_k$

$$\begin{aligned} I_{c_{k1}}(i + 1, j + 1) &= E \left\{ \sum_{t=p+q+1}^n z_{t,k} \left(\frac{1}{2h_{t,k}^2} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,j}} + \frac{1}{h_{t,k}^2} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,j}} \right) \middle| \theta, X \right\} \\ &= \sum_{t=p+q+1}^n \tau_{t,k} \left(\frac{1}{2h_{t,k}^2} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,j}} + \frac{1}{h_{t,k}^2} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,j}} \right) \end{aligned}$$

La matrice $I_{c_{k2}}, k = 1, \dots, K$ est une matrice carrée de dimension $q_k + 1$ donnée par :

$$I_{c_{k2}} = E \left\{ -N \frac{\partial^2 l}{\partial \beta_k \partial \beta'_k} \middle| \theta, X \right\} = \{I_{c_{k2}}(i, j)\}.$$

Pour $i, j = 0, \dots, q_k$

$$\begin{aligned} I_{c_{k2}}(i + 1, j + 1) &= E \left\{ \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,k}}{2h_{t,k}^2} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,i}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,j}} \middle| \theta, X \right\} \\ &= \sum_{t=p+q+1}^n \frac{\tau_{t,k}}{2h_{t,k}^2} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,i}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,j}} \end{aligned}$$

D'autre part, on peut écrire la matrice d'information manquante I_m comme suit

$$I_m = \begin{pmatrix} I_{m00} & & & & \\ I_{m10} & I_{m11} & & & \\ I_{m20} & I_{m21} & I_{m22} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ I_{mK0} & I_{mK1} & I_{mK2} & \cdots & I_{mK,K} \end{pmatrix}$$

Ici, nous avons donné seulement la partie triangulaire inférieure de la matrice I_m , car cette dernière est une matrice symétrique.

La matrice $I_{m_{00}}$ est une matrice carrée de dimension $K-1$, donnée par

$$I_{m_{00}} = \text{var} \left\{ N \frac{\partial l}{\partial \alpha} \middle| \theta, X \right\} = I_{m_{00}}(k, l)$$

Pour $k = 1, \dots, K-1$

$$\begin{aligned} I_{m_{00}}(k, k) &= \text{var} \left\{ \sum_{t=p+q+1}^n \left(\frac{z_{t,k}}{\alpha_k} - \frac{z_{t,K}}{\alpha_K} \right) \middle| \theta, X \right\} \\ &= \sum_{t=p+q+1}^n \text{var} \left(\frac{z_{t,k}}{\alpha_k} - \frac{z_{t,K}}{\alpha_K} \middle| \theta, X \right) + 2 \sum_{t'=p+q+1}^n \sum_{t=p+q+1}^n \text{cov} \left(\frac{z_{t,k}}{\alpha_k} - \frac{z_{t,K}}{\alpha_K}, \frac{z_{t',k}}{\alpha_k} - \frac{z_{t',K}}{\alpha_K} \right) \\ &= \sum_{t=p+q+1}^n \left\{ \text{var} \left(\frac{z_{t,k}}{\alpha_k} \middle| \theta, X \right) + \text{var} \left(\frac{z_{t,K}}{\alpha_K} \middle| \theta, X \right) - 2 \text{cov} \left(\frac{z_{t,k}}{\alpha_k}, \frac{z_{t,K}}{\alpha_K} \middle| \theta, X \right) \right\} \\ &= \sum_{t=p+q+1}^n \left\{ \frac{\tau_{t,k}(1 - \tau_{t,k})}{\alpha_k^2} + \frac{\tau_{t,K}(1 - \tau_{t,K})}{\alpha_K^2} + \frac{2\tau_{t,k}\tau_{t,K}}{\alpha_k\alpha_K} \right\} \end{aligned}$$

Pour $k, l = 1, \dots, K-1$ et $k \neq l$

$$\begin{aligned} I_{m_{00}}(k, l) &= \text{cov} \left\{ N \frac{\partial l}{\partial \alpha_k}, N \frac{\partial l}{\partial \alpha_l} \middle| \theta, X \right\} \\ &= \text{cov} \left\{ \sum_{t=p+q+1}^n \left(\frac{z_{t,k}}{\alpha_k} - \frac{z_{t,K}}{\alpha_K} \right), \sum_{t=p+q+1}^n \left(\frac{z_{t,l}}{\alpha_l} - \frac{z_{t,K}}{\alpha_K} \right) \right\} \\ &= \sum_{t=p+q+1}^n \left\{ \frac{\text{cov}(z_{t,k}z_{t,l} \middle| \theta, X)}{\alpha_k\alpha_l} - \frac{\text{cov}(z_{t,k}z_{t,K} \middle| \theta, X)}{\alpha_k\alpha_K} - \frac{\text{cov}(z_{t,l}z_{t,K} \middle| \theta, X)}{\alpha_l\alpha_K} + \frac{\text{var}(z_{t,K} \middle| \theta, X)}{\alpha_K^2} \right\} \\ &= \sum_{t=p+q+1}^n \left\{ \frac{\tau_{t,k}\tau_{t,K}}{\alpha_k\alpha_K} + \frac{\tau_{t,l}\tau_{t,K}}{\alpha_l\alpha_K} - \frac{\tau_{t,k}\tau_{t,l}}{\alpha_k\alpha_l} + \frac{\tau_{t,K}(1 - \tau_{t,K})}{\alpha_K^2} \right\} \end{aligned}$$

La matrice $I_{m_{kk}}, k, l = 1, \dots, K$ est une matrice carrée de dimension $(p_k + q_k + 2) \times (p_k + q_k + 2)$ elle peut être partitionnée comme suit :

$$I_{m_{kk}} = \begin{pmatrix} I_{m_{kk}}^{\theta\theta} & \\ I_{m_{kk}}^{\beta\theta} & I_{m_{kk}}^{\beta\beta} \end{pmatrix}$$

La matrice $I_{m_{kk}}^{\theta\theta}, k = 1, \dots, K$ est donnée par

$$I_{m_{kk}}^{\theta\theta} = \text{var} \left\{ N \frac{\partial l}{\partial \theta_k} \middle| \theta, X \right\} = I_{m_{kk}}^{\theta\theta}(i, j)$$

Pour $i, j = 0, \dots, p_k$

$$\begin{aligned} I_{m_{kk}}^{\theta\theta}(i+1, j+1) &= \text{cov} \left\{ N \frac{\partial l}{\partial \phi_{k,i}}, N \frac{\partial l}{\partial \phi_{k,j}} \middle| \theta, X \right\} \\ &= \text{cov} \left\{ \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,k}}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) - \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,k} e_{t,k}}{h_{t,k}} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}}, \right. \\ &\quad \left. \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,k}}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,j}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) - \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,k} e_{t,k}}{h_{t,k}} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,j}} \middle| \theta, X \right\} \\ &= \sum_{t=p+q+1}^n \left\{ \text{var}(z_{t,k} | \theta, X) \left\{ \frac{1}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) - \frac{e_{t,k}}{h_{t,k}} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \frac{1}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,j}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) - \frac{e_{t,k}}{h_{t,k}} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,j}} \right\} \right\} \\ &= \sum_{t=p+q+1}^n \left\{ \tau_{t,k}(1 - \tau_{t,k}) \left\{ \frac{1}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) - \frac{e_{t,k}}{h_{t,k}} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \frac{1}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,j}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) - \frac{e_{t,k}}{h_{t,k}} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,j}} \right\} \right\} \end{aligned}$$

La matrice $I_{m_{kk}}^{\beta\beta}, k = 1, \dots, K$ est donnée par

$$I_{m_{kk}}^{\beta\beta} = \text{var} \left\{ N \frac{\partial l}{\partial \beta_k} \middle| \theta, X \right\} = \{ I_{m_{kk}}^{\beta\beta}(i, j) \}$$

.

Pour $i, j = 0, \dots, q_k$

$$\begin{aligned} I_{m_{kk}}^{\beta\beta}(i+1, j+1) &= \text{cov} \left\{ N \frac{\partial l}{\partial \beta_{k,i}}, N \frac{\partial l}{\partial \beta_{k,j}} \middle| \theta, X \right\} \\ &= \text{cov} \left\{ \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,k}}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right), \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,k}}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,j}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) \middle| \theta, X \right\} \\ &= \sum_{t=p+q+1}^n \frac{\text{var}(z_{t,k} | \theta, X)}{4h_{t,k}^2} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,i}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,j}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right)^2 \\ &= \sum_{t=p+q+1}^n \frac{\tau_{t,k}(1 - \tau_{t,k})}{4h_{t,k}^2} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,i}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,j}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right)^2 \end{aligned}$$

La matrice $I_{m_{kk}}^{\beta\theta}$, $k = 1, \dots, K$ est donnée par

$$I_{m_{kk}}^{\beta\theta} = cov \left\{ N \frac{\partial l}{\partial \beta_k}, N \frac{\partial l}{\partial \theta_k} \middle| \theta, X \right\} = \{ I_{m_{kk}}^{\beta\theta}(i, j) \}$$

pour $i = 0, \dots, q_k, j = 0, \dots, p_k$

$$\begin{aligned} I_{m_{kk}}^{\beta\theta}(i+1, j+1) &= cov \left\{ N \frac{\partial l}{\partial \beta_{k,i}}, N \frac{\partial l}{\partial \phi_{k,j}} \middle| \theta, X \right\} \\ &= cov \left\{ \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,k}}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right), \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,k}}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,j}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,k} e_{t,k}}{h_{t,k}} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,j}} \middle| \theta, X \right\} \\ &= \sum_{t=p+q+1}^n \left\{ var(z_{t,k} | \theta, X) \left\{ \frac{1}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \frac{1}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,j}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) - \frac{e_{t,k}}{h_{t,k}} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,j}} \right\} \right\} \\ &= \sum_{t=p+q+1}^n \left\{ \tau_{t,k}(1 - \tau_{t,k}) \left\{ \frac{1}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \frac{1}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,j}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) - \frac{e_{t,k}}{h_{t,k}} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,j}} \right\} \right\} \end{aligned}$$

La matrice $I_{m_{k0}}$, $k = 1, \dots, K-1$ est une matrice de dimension $(p_k + q_k + 2) \times (K-1)$, elle peut être partitionner comme suit :

$$I_{m_{k0}} = \begin{pmatrix} I_{m_{k0}}^{\theta} \\ I_{m_{k0}}^{\beta} \end{pmatrix}$$

La matrice $I_{m_{k0}}^{\theta}$, $k = 1, \dots, K-1$ est donnée par :

$$I_{m_{k0}}^{\theta} = cov \left\{ N \frac{\partial l}{\partial \theta_k}, N \frac{\partial l}{\partial \alpha} \middle| \theta, X \right\} = \{ I_{m_{k0}}^{\theta}(i, j) \}.$$

Pour $i = 0, \dots, p_k$

$$\begin{aligned}
 I_{m_{k0}}^\theta(i+1, k) &= cov \left\{ N \frac{\partial l}{\partial \phi_{k,i}}, N \frac{\partial l}{\partial \alpha_k} \middle| \theta, X \right\} \\
 &= cov \left\{ \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,k}}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,k} e_{t,k}}{h_{t,k}} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}}, \sum_{t=p+q+1}^n \left(\frac{z_{t,k}}{\alpha_k} - \frac{z_{t,K}}{\alpha_K} \right) \middle| \theta, X \right\} \\
 &= \sum_{t=p+q+1}^n \left\{ \left\{ \frac{var(z_{t,k} | \theta, X)}{\alpha_k} - \frac{cov(z_{t,k}, z_{t,K} | \theta, X)}{\alpha_K} \right\} \right. \\
 &\quad \left. \times \left\{ \frac{1}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) - \frac{e_{t,k}}{h_{t,k}} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \right\} \right\} \\
 &= \sum_{t=p+q+1}^n \left\{ \left\{ \frac{\tau_{t,k}(1 - \tau_{t,k})}{\alpha_k} + \frac{\tau_{t,k}\tau_{t,K}}{\alpha_K} \right\} \left\{ \frac{1}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) - \frac{e_{t,k}}{h_{t,k}} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

Pour $i = 0, \dots, p_k, l = 1, \dots, K-1, et \quad l \neq k$

$$\begin{aligned}
 I_{m_{k0}}^\theta(i+1, l) &= cov \left\{ N \frac{\partial l}{\partial \phi_{k,i}}, N \frac{\partial l}{\partial \alpha_l} \middle| \theta, X \right\} \\
 &= cov \left\{ \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,k}}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) - \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,k} e_{t,k}}{h_{t,k}} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}}, \right. \\
 &\quad \left. \sum_{t=p+q+1}^n \left(\frac{z_{t,l}}{\alpha_l} - \frac{z_{t,K}}{\alpha_K} \right) \middle| \theta, X \right\} \\
 &= \sum_{t=p+q+1}^n \left\{ \left\{ \frac{cov(z_{t,k}, z_{t,l} | \theta, X)}{\alpha_l} - \frac{cov(z_{t,k}, z_{t,K} | \theta, X)}{\alpha_K} \right\} \right. \\
 &\quad \left. \times \left\{ \frac{1}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) - \frac{e_{t,k}}{h_{t,k}} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \right\} \right\} \\
 &= \sum_{t=p+q+1}^n \left[\left\{ \frac{\tau_{t,k}\tau_{t,K}}{\alpha_K} - \frac{\tau_{t,k}\tau_{t,l}}{\alpha_l} \right\} \left\{ \frac{1}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) - \frac{e_{t,k}}{h_{t,k}} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \right\} \right]
 \end{aligned}$$

La matrice $I_{m_{k0}}^\beta, k = 1, \dots, K-1$ est donnée par :

$$I_{m_{k0}}^\beta = cov \left\{ N \frac{\partial l}{\partial \beta_k}, N \frac{\partial l}{\partial \alpha} \middle| \theta, X \right\} = \{ I_{m_{k0}}^\beta(i, j) \}$$

Pour $i = 0, \dots, q_k$

$$\begin{aligned}
 I_{m_{k0}}^\beta(i+1, k) &= cov \left\{ N \frac{\partial l}{\partial \beta_{k,i}}, N \frac{\partial l}{\partial \alpha_k} \middle| \theta, X \right\} \\
 &= cov \left\{ \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,k}}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right), \sum_{t=p+q+1}^n \left(\frac{z_{t,k}}{\alpha_k} - \frac{z_{t,K}}{\alpha_K} \right) \middle| \theta, X \right\} \\
 &= \left[\left\{ \frac{var(z_{t,k} | \theta, X)}{\alpha_k} - \frac{cov(z_{t,k}, z_{t,K} | \theta, X)}{\alpha_K} \right\} \times \left\{ \frac{1}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) \right\} \right] \\
 &= \left[\left\{ \frac{\tau_{t,k}(1 - \tau_{t,k})}{\alpha_k} + \frac{\tau_{t,k}\tau_{t,K}}{\alpha_K} \right\} \left\{ \frac{1}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) \right\} \right]
 \end{aligned}$$

Pour $i = 0, \dots, q_k, l = 1, \dots, K-1$, et $l \neq k$

$$\begin{aligned}
 I_{m_{k0}}^\beta(i+1, l) &= cov \left\{ N \frac{\partial l}{\partial \beta_{k,i}}, N \frac{\partial l}{\partial \alpha_l} \middle| \theta, X \right\} \\
 &= cov \left\{ \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,k}}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right), \sum_{t=p+q+1}^n \left(\frac{z_{t,l}}{\alpha_l} - \frac{z_{t,K}}{\alpha_K} \right) \middle| \theta, X \right\} \\
 &= \sum_{t=p+q+1}^n \left[\left\{ \frac{cov(z_{t,k}, z_{t,l} | \theta, X)}{\alpha_l} - \frac{cov(z_{t,k}, z_{t,K} | \theta, X)}{\alpha_K} \right\} \times \left\{ \frac{1}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) \right\} \right] \\
 &= \sum_{t=p+q+1}^n \left[\left\{ \frac{\tau_{t,k}\tau_{t,K}}{\alpha_K} - \frac{\tau_{t,k}\tau_{t,l}}{\alpha_l} \right\} \left\{ \frac{1}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) \right\} \right]
 \end{aligned}$$

La matrice $I_{m_{K0}}$ est une matrice de dimension $(p_K + q_K + 2) \times (K-1)$, elle peut être partitionnée comme suit

$$I_{m_{K0}} = \begin{pmatrix} I_{m_{K0}}^\theta \\ I_{m_{K0}}^\beta \end{pmatrix}$$

La matrice $I_{m_{K0}}^\theta$ est donnée par

$$I_{m_{K0}}^\theta = cov \left\{ N \frac{\partial l}{\partial \theta_K}, N \frac{\partial l}{\partial \alpha} \middle| \theta, X \right\} = \{ I_{m_{K0}}^\theta(i, j) \}$$

Pour $i = 0, \dots, q_K, l = 1, \dots, K - 1$

$$\begin{aligned}
 I_{m_{K0}}^\theta(i+1, l) &= cov \left\{ N \frac{\partial l}{\partial \phi_{K,i}}, N \frac{\partial l}{\partial \alpha_l} \middle| \theta, X \right\} \\
 &= cov \sum_{t=p+q+1}^n \left\{ \frac{z_{t,K}}{2h_{t,K}} \frac{\partial h_{t,K}}{\partial \phi_{K,i}} \left(\frac{e_{t,K}^2}{h_{t,K}} - 1 \right) - \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,K} e_{t,K}}{h_{t,K}} \frac{\partial e_{t,K}}{\partial \phi_{K,i}}, \right. \\
 &\quad \left. \sum_{t=p+q+1}^n \left(\frac{z_{t,l}}{\alpha_l} - \frac{z_{t,K}}{\alpha_K} \right) \middle| \theta, X \right\} \\
 &= \sum_{t=p+q+1}^n \left\{ \left\{ \frac{cov(z_{t,K}, z_{t,l} | \theta, X)}{\alpha_l} - \frac{var(z_{t,K} | \theta, X)}{\alpha_K} \right\} \right. \\
 &\quad \left. \times \left\{ \frac{1}{2h_{t,K}} \frac{\partial h_{t,K}}{\partial \phi_{K,i}} \left(\frac{e_{t,K}^2}{h_{t,K}} - 1 \right) - \frac{e_{t,K}}{h_{t,K}} \frac{\partial e_{t,K}}{\partial \phi_{K,i}} \right\} \right\} \\
 &= \sum_{t=p+q+1}^n \left\{ \left\{ -\frac{\tau_{t,l} \tau_{t,K}}{\alpha_l} - \frac{\tau_{t,K}(1 - \tau_{t,K})}{\alpha_K} \right\} \right. \\
 &\quad \left. \times \left\{ \frac{1}{2h_{t,K}} \frac{\partial h_{t,K}}{\partial \phi_{K,i}} \left(\frac{e_{t,K}^2}{h_{t,K}} - 1 \right) - \frac{e_{t,K}}{h_{t,K}} \frac{\partial e_{t,K}}{\partial \phi_{K,i}} \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

La matrice $I_{m_{K0}}^\beta$ est donnée par

$$I_{m_{K0}}^\beta = cov \left\{ N \frac{\partial l}{\partial \beta_K}, N \frac{\partial l}{\partial \alpha} \middle| \theta, X \right\} = \{ I_{m_{K0}}^\beta(i, j) \}.$$

Pour $i = 0, \dots, q_k, l = 1, \dots, K - 1$

$$\begin{aligned}
 I_{m_{K0}}^\beta(i+1, l) &= cov \left\{ N \frac{\partial l}{\partial \beta_{K,i}}, N \frac{\partial l}{\partial \alpha_l} \middle| \theta, X \right\} \\
 &= cov \left\{ \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,K}}{2h_{t,K}} \frac{\partial h_{t,K}}{\partial \beta_{K,i}} \left(\frac{e_{t,K}^2}{h_{t,K}} - 1 \right), \sum_{t=p+q+1}^n \left(\frac{z_{t,l}}{\alpha_l} - \frac{z_{t,K}}{\alpha_K} \right) \middle| \theta, X \right\} \\
 &= \sum_{t=p+q+1}^n \left[\left\{ \frac{cov(z_{t,K}, z_{t,l} | \theta, X)}{\alpha_l} - \frac{var(z_{t,K} | \theta, X)}{\alpha_K} \right\} \times \left\{ \frac{1}{2h_{t,K}} \frac{\partial h_{t,K}}{\partial \beta_{K,i}} \left(\frac{e_{t,K}^2}{h_{t,K}} - 1 \right) \right\} \right] \\
 &= \sum_{t=p+q+1}^n \left[\left\{ -\frac{\tau_{t,l} \tau_{t,K}}{\alpha_l} - \frac{\tau_{t,K}(1 - \tau_{t,K})}{\alpha_K} \right\} \left\{ \frac{1}{2h_{t,K}} \frac{\partial h_{t,K}}{\partial \beta_{K,i}} \left(\frac{e_{t,K}^2}{h_{t,K}} - 1 \right) \right\} \right]
 \end{aligned}$$

La matrice $I_{m_{kl}}, k = 2, \dots, K, 1 \leq l < k$ est une matrice de dimension $(p_k + q_k + 2) \times (p_l + q_l + 2)$, elle peut être partitionnée comme suit

$$I_{m_{kl}} = \begin{pmatrix} I_{m_{kl}}^{\theta\theta} & I_{m_{kl}}^{\theta\beta} \\ I_{m_{kl}}^{\beta\theta} & I_{m_{kl}}^{\beta\beta} \end{pmatrix}$$

La matrice $I_{m_{kl}}^{\theta\theta}$, $k = 2, \dots, K$, $1 \leq l < k$ est donnée par

$$I_{m_{kl}}^{\theta\theta} = \text{cov} \left\{ N \frac{\partial l}{\partial \theta_k}, N \frac{\partial l}{\partial \theta_l} \middle| \theta, X \right\} = \{ I_{m_{kl}}^{\theta\theta}(i, j) \}.$$

Pour $i = 0, \dots, p_k$, $j = 1, \dots, p_l$

$$\begin{aligned} I_{m_{kl}}^{\theta\theta}(i+1, j+1) &= \text{cov} \left\{ N \frac{\partial l}{\partial \phi_{k,i}}, N \frac{\partial l}{\partial \phi_{l,j}} \middle| \theta, X \right\} \\ &= \text{cov} \left\{ \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,k}}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) - \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,k} e_{t,k}}{h_{t,k}} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}}, \right. \\ &\quad \left. \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,l}}{2h_{t,l}} \frac{\partial h_{t,l}}{\partial \phi_{l,j}} \left(\frac{e_{t,l}^2}{h_{t,l}} - 1 \right) - \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,l} e_{t,l}}{h_{t,l}} \frac{\partial e_{t,l}}{\partial \phi_{l,j}} \middle| \theta, X \right\} \\ &= \sum_{t=p+q+1}^n \left\{ \text{cov}(z_{t,k}, z_{t,l} \middle| \theta, X) \left\{ \frac{1}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) - \frac{e_{t,k}}{h_{t,k}} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \frac{1}{2h_{t,l}} \frac{\partial h_{t,l}}{\partial \phi_{l,j}} \left(\frac{e_{t,l}^2}{h_{t,l}} - 1 \right) - \frac{e_{t,l}}{h_{t,l}} \frac{\partial e_{t,l}}{\partial \phi_{l,j}} \right\} \right\} \\ &= \sum_{t=p+q+1}^n \left\{ -\tau_{t,k}, \tau_{t,l} \left\{ \frac{1}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) - \frac{e_{t,k}}{h_{t,k}} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \frac{1}{2h_{t,l}} \frac{\partial h_{t,l}}{\partial \phi_{l,j}} \left(\frac{e_{t,l}^2}{h_{t,l}} - 1 \right) - \frac{e_{t,l}}{h_{t,l}} \frac{\partial e_{t,l}}{\partial \phi_{l,j}} \right\} \right\} \end{aligned}$$

La matrice $I_{m_{kl}}^{\beta\beta}$, $k = 2, \dots, K$, $1 \leq l < k$ est donnée par

$$I_{m_{kl}}^{\beta\beta} = \text{cov} \left\{ N \frac{\partial l}{\partial \beta_k}, N \frac{\partial l}{\partial \beta_l} \middle| \theta, X \right\} = \{ I_{m_{kl}}^{\beta\beta}(i, j) \}.$$

Pour $i = 0, \dots, q_k, j = 1, \dots, q_l$

$$\begin{aligned}
 I_{m_{kl}}^{\beta\beta}(i+1, j+1) &= cov \left\{ N \frac{\partial l}{\partial \beta_{k,i}}, N \frac{\partial l}{\partial \beta_{l,j}} \middle| \theta, X \right\} \\
 &= cov \left\{ \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,k}}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right), \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,l}}{2h_{t,l}} \frac{\partial h_{t,l}}{\partial \beta_{l,j}} \left(\frac{e_{t,l}^2}{h_{t,l}} - 1 \right) \middle| \theta, X \right\} \\
 &= \sum_{t=p+q+1}^n \left[cov(z_{t,k}, z_{t,l} | \theta, X) \left\{ \frac{1}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) \right\} \left\{ \frac{1}{2h_{t,l}} \frac{\partial h_{t,l}}{\partial \beta_{l,j}} \left(\frac{e_{t,l}^2}{h_{t,l}} - 1 \right) \right\} \right] \\
 &= \sum_{t=p+q+1}^n \left\{ -\tau_{t,k}, \tau_{t,l} \left[\frac{1}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) \right] \left[\frac{1}{2h_{t,l}} \frac{\partial h_{t,l}}{\partial \beta_{l,j}} \left(\frac{e_{t,l}^2}{h_{t,l}} - 1 \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

La matrice $I_{m_{kl}}^{\beta\theta}, k = 2, \dots, K, 1 \leq l < k$ est donnée par

$$I_{m_{kl}}^{\beta\theta} = cov \left\{ N \frac{\partial l}{\partial \beta_k}, N \frac{\partial l}{\partial \theta_l} \middle| \theta, X \right\} = \{ I_{m_{kl}}^{\beta\theta}(i, j) \}.$$

Pour $i = 0, \dots, q_k, j = 1, \dots, p_l$

$$\begin{aligned}
 I_{m_{kl}}^{\beta\theta}(i+1, j+1) &= cov \left[\left\{ N \frac{\partial l}{\partial \beta_{k,i}}, N \frac{\partial l}{\partial \phi_{l,j}} \middle| \theta, X \right\} \right] \\
 &= cov \left\{ \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,k}}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right), \right. \\
 &\quad \left. \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,l}}{2h_{t,l}} \frac{\partial h_{t,l}}{\partial \phi_{l,j}} \left(\frac{e_{t,l}^2}{h_{t,l}} - 1 \right) - \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,l} e_{t,l}}{h_{t,l}} \frac{\partial e_{t,l}}{\partial \phi_{l,j}} \middle| \theta, X \right\} \\
 &= \sum_{t=p+q+1}^n \left\{ cov(z_{t,k}, z_{t,l} | \theta, X) \left\{ \frac{1}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) \right\} \right. \\
 &\quad \left. \times \left\{ \frac{1}{2h_{t,l}} \frac{\partial h_{t,l}}{\partial \phi_{l,j}} \left(\frac{e_{t,l}^2}{h_{t,l}} - 1 \right) - \frac{e_{t,l}}{h_{t,l}} \frac{\partial e_{t,l}}{\partial \phi_{l,j}} \right\} \right\} \\
 &= \sum_{t=p+q+1}^n \left\{ -\tau_{t,k} \tau_{t,l} \left\{ \frac{1}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \beta_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) \right\} \right. \\
 &\quad \left. \times \left\{ \frac{1}{2h_{t,l}} \frac{\partial h_{t,l}}{\partial \phi_{l,j}} \left(\frac{e_{t,l}^2}{h_{t,l}} - 1 \right) - \frac{e_{t,l}}{h_{t,l}} \frac{\partial e_{t,l}}{\partial \phi_{l,j}} \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

La matrice $I_{m_{kl}}^{\theta\beta}, k = 2, \dots, K, 1 \leq l < k$ est donnée par

$$I_{m_{kl}}^{\theta\beta} = cov \left\{ N \frac{\partial l}{\partial \theta_k}, N \frac{\partial l}{\partial \beta_l} \middle| \theta, X \right\} = \{ I_{m_{kl}}^{\theta\beta}(i, j) \}.$$

Pour $i = 0, \dots, p_k, j = 1, \dots, q_l$

$$\begin{aligned}
 I_{m_{kl}}^{\theta\beta}(i+1, j+1) &= cov \left\{ N \frac{\partial l}{\partial \phi_{k,i}}, N \frac{\partial l}{\partial \beta_{l,j}} \middle| \theta, X \right\} \\
 &= cov \left\{ \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,k}}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) - \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,k} e_{t,k}}{h_{t,k}} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}}, \right. \\
 &\quad \left. \sum_{t=p+q+1}^n \frac{z_{t,l}}{2h_{t,l}} \frac{\partial h_{t,l}}{\partial \beta_{l,j}} \left(\frac{e_{t,l}^2}{h_{t,l}} - 1 \right) \middle| \theta, X \right\} \\
 &= \sum_{t=p+q+1}^n \left\{ cov(z_{t,k}, z_{t,l} | \theta, X) \left\{ \frac{1}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) - \frac{e_{t,k}}{h_{t,k}} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \right\} \right. \\
 &\quad \left. \times \left\{ \frac{1}{2h_{t,l}} \frac{\partial h_{t,l}}{\partial \beta_{l,j}} \left(\frac{e_{t,l}^2}{h_{t,l}} - 1 \right) \right\} \right\} \\
 &= \sum_{t=p+q+1}^n \left\{ -\tau_{t,k} \tau_{t,l} \left\{ \frac{1}{2h_{t,k}} \frac{\partial h_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \left(\frac{e_{t,k}^2}{h_{t,k}} - 1 \right) - \frac{e_{t,k}}{h_{t,k}} \frac{\partial e_{t,k}}{\partial \phi_{k,i}} \right\} \right. \\
 &\quad \left. \times \left\{ \frac{1}{2h_{t,l}} \frac{\partial h_{t,l}}{\partial \beta_{l,j}} \left(\frac{e_{t,l}^2}{h_{t,l}} - 1 \right) \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

2.4.4 Critère de sélection d'un modèle $MAR - ARCH$

La sélection d'un modèle $MAR - ARCH$ se fait par deux éléments. D'une part, il faudra choisir le nombre de composantes K et d'autre part, il s'agira de déterminer l'ordre de chaque composante. Comme dans le cadre des modèles MAR , Wong et Li (2001) ont suggéré d'identifier le modèle $MAR - ARCH$ par le critère BIC^* défini par :

$$BIC^* = -2Nl^* + \log(n - p - q) \left(3K - 1 + \sum_{k=1}^K p_k + \sum_{k=1}^K q_k \right).$$

Où

$$l^* = \frac{1}{N} \sum_{t=p_k+q_k+1}^n \log \{ f(x_t | \Omega_{t-1}) \} = \frac{1}{N} \sum_{t=p_k+q_k+1}^n \log \left\{ \frac{d}{d_{x_t}} F(x_t | \Omega_{t-1}) \right\}.$$

2.5 Étude de simulation

Afin d'illustrer la performance de l'algorithme EM dans l'estimation des paramètres d'un modèle généré par un processus de la classe $MAR - ARCH$, nous allons présenter une étude de simulation de la méthode choisie.

Dans le but de réaliser les simulations nécessaires, nous avons utilisé l'outil de simulation *MATLAB*. Nous avons simulé 1000 séries à partir d'un modèle $MAR - ARCH(2; 1, 1)$ pour plusieurs tailles ($n = 500, 750, 1000$). Les vraies valeurs des paramètres de processus générateur des séries, la moyenne empirique, l'écart type empirique et l'écart type

théorique de leurs estimations sont reportés dans les tables (2.1) – (2.3).

TABLE 2.1 – Résultat de simulation pour 1000 réapplications d'un modèle $MAR - ARCH(2, 1, 1)$, avec $n = 500$

k		α_k	$\phi_{k,0}$	$\phi_{k,1}$	$\beta_{k,0}$	$\beta_{k,1}$
1	Vraie valeur	0.5000	0.7000	1.0000	1.0000	0.5000
	Moyenne empirique	0.4909	0.6732	1.0076	1.8673	0.2728
	Écart type empirique	0.0411	0.4308	0.0194	1.0396	0.1188
	Écart type théorique	0.1029	0.0779	0.3037	0.5755	0.0704
2	Vraie valeur	0.5000	-0.7000	-1.0000	1.0000	0.5000
	Moyenne empirique	0.5091	-0.7017	-1.0042	1.4548	0.2770
	Écart type empirique	0.0411	0.0017	0.0028	0.3836	0.1315
	Écart type théorique	0.1029	0.1390	0.1517	0.3270	0.0932

TABLE 2.2 – Résultat de simulation pour 1000 réapplications d'un modèle $MAR - ARCH(2, 1, 1)$, avec $n = 750$

k		α_k	$\phi_{k,0}$	$\phi_{k,1}$	$\beta_{k,0}$	$\beta_{k,1}$
1	Vraie valeur	0.5000	0.7000	1.0000	1.0000	0.5000
	Moyenne empirique	0.4915	0.6885	1.0061	1.8353	0.2810
	Écart type empirique	0.0323	0.0347	0.0120	0.3836	0.0959
	Écart type théorique	0.0618	0.0512	0.1809	0.3856	0.0543
2	Vraie valeur	0.5000	-0.7000	-1.0000	1.0000	0.5000
	Moyenne empirique	0.5085	-0.7013	-1.0032	1.4135	0.2818
	Écart type empirique	0.0323	0.0007	0.0016	0.3042	0.1168
	Écart type théorique	0.0618	0.1812	0.1528	0.3463	0.0832

TABLE 2.3 – Résultat de simulation pour 1000 réapplications d'un modèle $MAR - ARCH(2, 1, 1)$, avec $n = 1000$

k		α_k	$\phi_{k,0}$	$\phi_{k,1}$	$\beta_{k,0}$	$\beta_{k,1}$
1	Vraie valeur	0.5000	0.7000	1.0000	1.0000	0.5000
	Moyenne empirique	0.4938	0.6905	1.0049	1.8118	0.2849
	Écart type empirique	0.0268	0.0159	0.0054	0.3037	0.0811
	Écart type théorique	0.0306	0.0537	0.1201	0.2900	0.0458
2	Vraie valeur	0.5000	-0.7000	-1.0000	1.0000	0.5000
	Moyenne empirique	0.5064	-0.7008	-1.0021	1.4227	0.2757
	Écart type empirique	0.0268	0.0004	0.0008	0.2572	0.0994
	Écart type théorique	0.0306	0.0512	0.1181	0.2716	0.0371

Interprétation des résultats

A partir des trois tables, nous constatons que :

- Les moyennes empiriques d'estimations sont très proches des vraies valeurs.
- Les écarts types empiriques et théoriques obtenus sont généralement assez petits.
- Lorsque la taille devient importante, les écart types tendent vers zéro, donc nous en déduisons que les estimateurs des paramètres sont consistants.
- Au cours des simulations, nous avons constaté que plus la taille de l'échantillon augmente plus les estimations sont précises, même chose pour le nombre d'itérations.

CHAPITRE 3

APPLICATION

Dans le but de trouver un modèle de prévision adéquat pouvant servir pour limiter les risques de change du dinar algérien (*DZD*), nous allons considérer quatre séries représentant le taux de change de ce dernier face au dollar américain (*USD*), à la monnaie européenne (*EUR*), la livre sterling (*GBP*) et le yen japonais (*JPY*). Nous disposons d'un historique de 2862 observations sur la période allant du 03/01/2005 à 31/12/2015 en considérant cinq jours par semaine, en ignorant les week-ends et le premier janvier de chaque année.

Afin d'atteindre l'objectif souhaité, nous proposons, dans un premier lieu, une modélisation de nos séries en employant une classe des modèles *SARIMA*. Pour cette modélisation, nous avons choisi Eviews qui est un logiciel assez performant en termes d'économétrie. Ensuite, nous essayons de modéliser les mêmes séries par le mélange de modèles autorégressifs (*MAR*), et le mélange de modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques (*MAR – ARCH*).

Pour cela, nous avons implémenté un ensemble de programmes sous *MATLAB* afin de :

- Tester la stationnarité au premier et au second ordre,
- Estimer les paramètres des modèles par la méthode de maximum du vraisemblance via l'algorithme *EM*,
- Tester la significativité des paramètres estimés en utilisant la matrice d'information de *Fisher*,
- Calculer le critère BIC^* des modèles candidats afin de sélectionner le meilleur modèle,
- Calculer la série ajustée ainsi que la série résiduelle,
- Trouver la distribution prédictive pour l'horizon un,
- Calculer la variance conditionnelle à partir du modèle estimé.

3.1 Étude de la série DZD/USD

Considérons la série US_t qui représente l'évolution de taux de change de dinar algérien face au dollar américain (USD) :

Analyse préliminaire

L'étude du graphe représentatif de l'évolution de la série US_t au fil du temps fournit à priori une idée globale sur la nature et les caractéristiques du processus qui la génère.

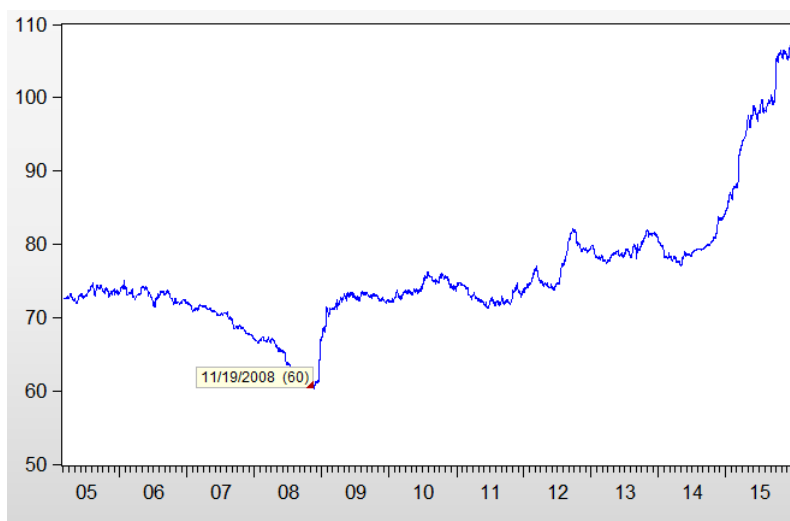


FIGURE 3.1 – Représentation graphique de la série US_t

Le graphique met en évidence une tendance à la hausse. Toutefois, on peut observer une légère baisse du cours de l'action à partir l'année 2008. Sur le plan économétrique, cette tendance à la hausse reflète que la série n'est pas stationnaire en espérance, et de même les fluctuations qui persistent démontrent qu'elle n'est pas stationnaire en variance. Pour vérifier cette affirmation, nous allons procéder à l'analyse des autocorrélations.

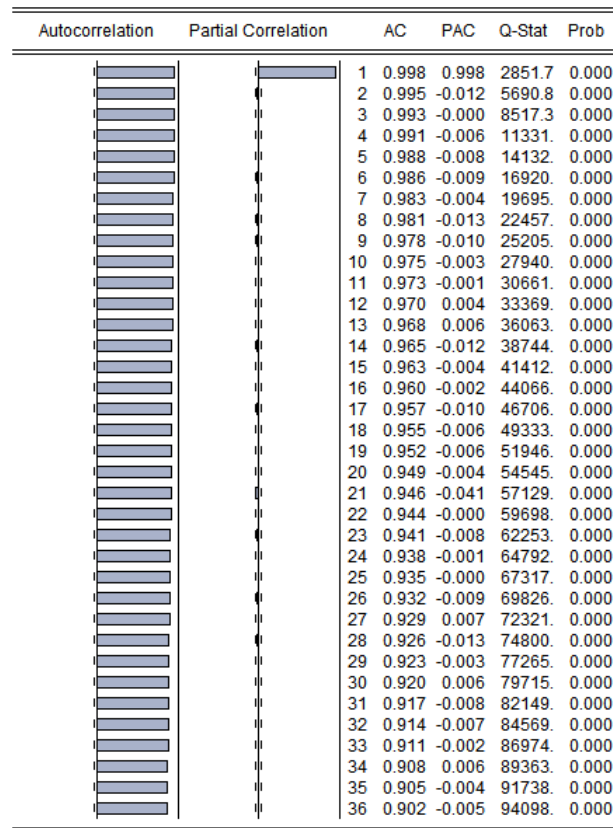


FIGURE 3.2 – Correlogramme de la série US_t

On constate que la fonction d'autocorrélation simple (colonne AC) décroît très lentement, cela est typique d'une série non stationnaire. En revanche, la fonction d'autocorrélation partielle (colonne PAC) a seulement son premier terme significativement différent de 0.

Cela nous ramène à l'utilisation d'une transformation logarithmique pour le rendre stationnaire

L'indice Économique

C'est un indicateur Économique qui permet de suivre l'évolution des valeurs économiques d'un certain bien comme l'indice de taux de change. La variation de prix relative à un certain bien est donnée par la formule :

$$R_t = \frac{US_t - US_{t-1}}{US_{t-1}}$$

et la formule suivante

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln(US_t) - \ln(US_{t-1}) = LUS_t - LUS_{t-1}$$

est une formule équivalente. C'est la série de rendement logarithmique du taux de change DZD/USD qui sera étudiée au lieu de la série, brute et différenciée.

La nouvelle série est notée $DLUS_t$. Le corrélogramme ainsi que le graphe de cette dernière $DLUS_t$ sont présentés dans la Figure (3.3) :

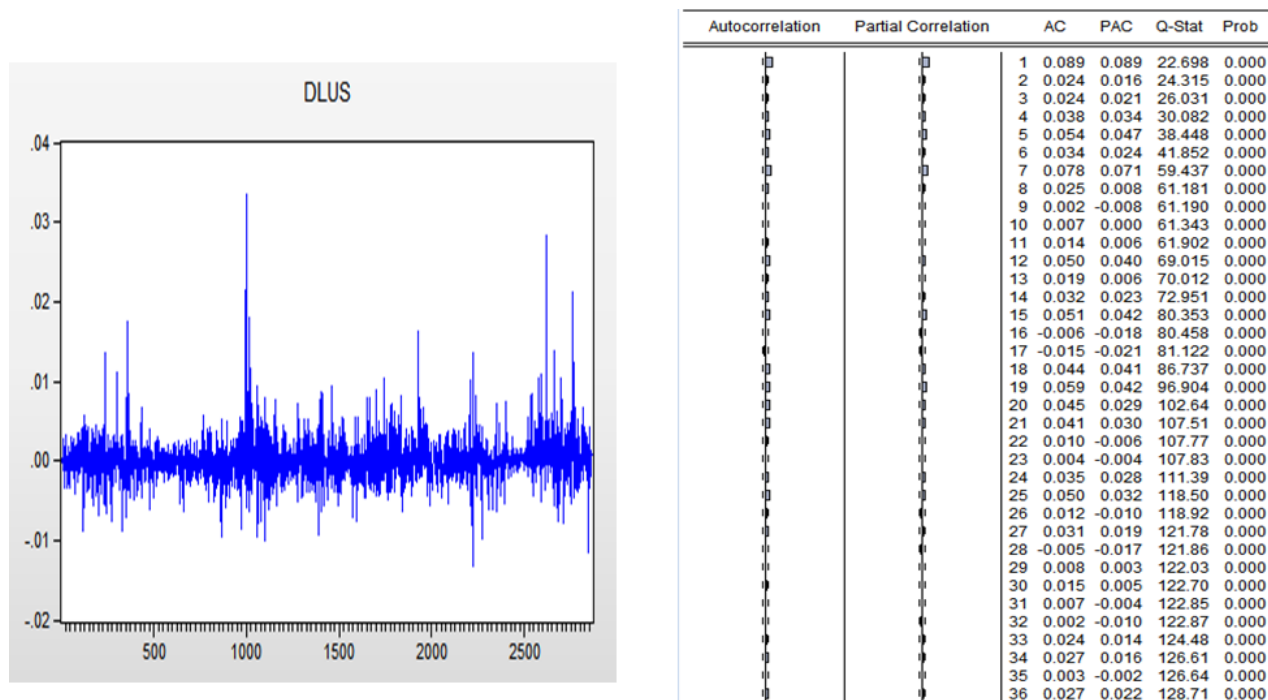


FIGURE 3.3 – Corrélogramme et le graphe de la série $DLUS_t$

Le corrélogramme de la série $DLUS_t$ (Figure 3.3) ne présente aucune forme particulière.

Identification du modèle $ARMA$

Pour identifier le modèle $ARMA$, il faut tout d'abord étudier la stationnarité puis il faut identifier l'ordre de modèle.

Étude de la stationnarité

Nous allons utiliser le test de ADF pour confirmer ou infirmer la stationnarité de notre série. Les tests de Dickey-Fuller sont des tests paramétriques permettant de mettre en évidence le caractère stationnaire ou non d'une chronique par la détermination d'une tendance déterministe ou stochastique.

Test de Dickey-Fuller Augmenté

On procède à l'estimation par la méthode des moindres carrés des trois modèles [1], [2] et [3] de Dickey-Fuller sur la série $DLUS_t$. Après avoir identifié le nombre de retards p , qui est égal à 0.

- **Estimation des paramètres de modèle [3]** (avec tendance et avec constante)

$$\Delta y_t = \phi_1 y_{t-1} + \beta_t + c + \varepsilon_t$$

On commence par tester la significativité de la tendance en se référant aux tables de Dickey-Fuller. Le résultat du test sur la série $DLUS_t$ est donné dans la table suivante :

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-49.09004	0.0000
Test critical values: 1% level	-3.961251	
5% level	-3.411378	
10% level	-3.127538	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(DLUS)
 Method: Least Squares
 Date: 03/14/17 Time: 23:55
 Sample (adjusted): 3 2862
 Included observations: 2860 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
DLUS(-1)	-0.915096	0.018641	-49.09004	0.0000
C	-0.000170	0.000103	-1.651148	0.0988
@TREND(1)	2.06E-07	6.24E-08	3.294985	0.0010

R-squared	0.457549	Mean dependent var	1.44E-07
Adjusted R-squared	0.457169	S.D. dependent var	0.003733
S.E. of regression	0.002751	Akaike info criterion	-8.952987
Sum squared resid	0.021615	Schwarz criterion	-8.946737
Log likelihood	12805.77	Hannan-Quinn criter.	-8.950734
F-statistic	1204.916	Durbin-Watson stat	2.002080
Prob(F-statistic)	0.000000		

FIGURE 3.4 – Estimation de modèle [3]

De la Figure (3.4), on constate que l'hypothèse de l'existence d'une racine unitaire est rejetée, puisque la statistique de student associée à la variable endogène retardée $DLUS_t(-1)$ est égale à -49.09 , est inférieure aux valeurs critiques -3.9612 , -3.4114 et -3.1275 tabulées par Dickey-Fuller, respectivement aux seuils 1%, 5% et 10%. Il est clair également, de la Figure (3.4), que le coefficient de la tendance est significativement différent de zéro, car la $|t - statistic| = 3.2950 > 1.96$.

Identification de l'ordre de modèle

Pour identifier l'ordre p et q d'un processus $ARMA$, nous utilisons le corrélogramme de la série $DLUS_t$. D'après ce dernier, nous remarquons que la fonction d'autocorrélation simple possède des valeurs importantes aux retards $q = 1, 4, 5, 7, \dots$, et que la fonction d'autocorrélation partielle possède des valeurs importantes aux retards $p = 1, 4, 5, 7, \dots$,

Estimation de l'équation

L'application de la méthodologie de Box et Jenkins nous conduit à retenir un modèle $ARMA(7, 7)$ pour la série $DLUS_t$. L'estimation de ce processus par la méthode des moindres carrés ordinaire est représentée par la Figure (3.5) :

Dependent Variable: DLUS				
Method: Least Squares				
Date: 03/15/17 Time: 14:45				
Sample (adjusted): 9 2862				
Included observations: 2854 after adjustments				
Convergence achieved after 13 iterations				
MA Backcast: 2 8				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(7)	0.483318	0.092157	5.244525	0.0000
AR(4)	0.394490	0.090720	4.348445	0.0000
MA(1)	0.074609	0.015624	4.775385	0.0000
MA(4)	-0.387255	0.091136	-4.249204	0.0000
MA(7)	-0.427241	0.096100	-4.445777	0.0000
R-squared	0.021023	Mean dependent var	0.000136	
Adjusted R-squared	0.019648	S.D. dependent var	0.002769	
S.E. of regression	0.002741	Akaike info criterion	-8.958985	
Sum squared resid	0.021410	Schwarz criterion	-8.948550	
Log likelihood	12789.47	Hannan-Quinn criter.	-8.955222	
Durbin-Watson stat	1.990587			
Inverted AR Roots	.98	.49+.67i	.49-.67i	-.15+.94i
	-.15-.94i	-.83-.31i	-.83+.31i	
Inverted MA Roots	.95	.47+.66i	.47-.66i	-.16-.93i
	-.16+.93i	-.83-.30i	-.83+.30i	

FIGURE 3.5 – Résultat d'estimation d'un modèle ARMA(7,7)

Validation

Test sur les paramètres

On remarque que tous les paramètres du modèle sont significativement différents de zéro. En effet, les statistiques de Student associées sont en valeur absolue supérieures à 1,96, ce qui est confirmé par les probabilités de nullité des coefficients qui sont toutes inférieures à 0,05.

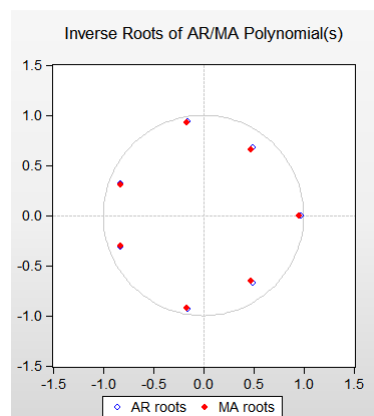


FIGURE 3.6 – Représentation graphique des inverses des racines

Graphique des inverses des racines D'après la représentation graphique des inverses des racines des polynômes de retards moyenne mobile et autorégressif, on s'aperçoit qu'ils sont tous supérieurs à 1 en module (leurs inverses sont en module, inférieurs à 1). Par conséquent, les conditions de stationnarité et d'inversibilité sont vérifiées. Le modèle estimé est alors stable.

Test sur les résidus

Test de normalité des résidus

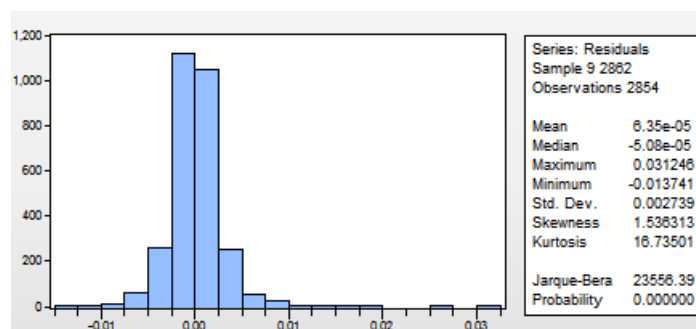


FIGURE 3.7 – Histogramme de la série résiduelle

De Figure (3.9), on peut constater que la statistique de Jaque-Berra qui est égale à 23556.39 est supérieure à la valeur théorique de $\chi^2_2=5.99$ au seuil de 5%. Par suite, nous rejetons l'hypothèse de normalité des résidus. Nous concluons que les résidus se comportent comme un bruit blanc non gaussien.

Test de nullité de la moyenne des résidus

La statistique de Student t – statistic est égale à 1.2386. Elle est inférieur à 1.96, ce qui nous amène à accepter l'hypothèse de nullité de la moyenne des résidus.

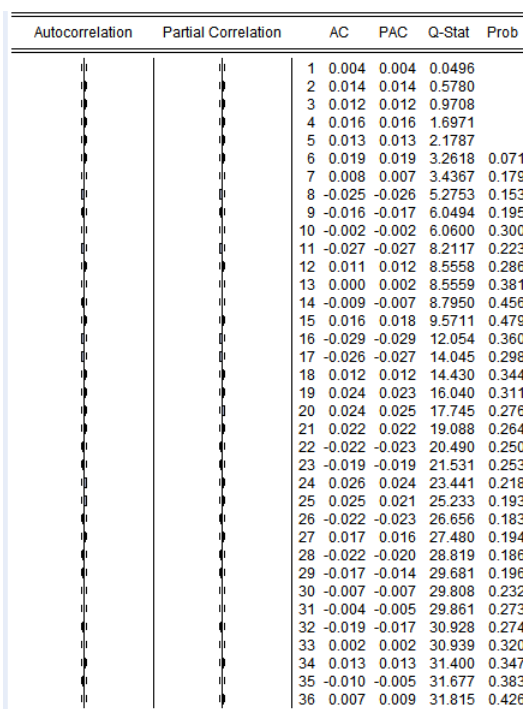


FIGURE 3.8 – Corrélogramme de la série résiduelle calculée à partir le modèle $ARIMA(7, 7)$

En analysant le corrélogramme des résidus, nous remarquons que les termes sont significativement nulles, donc il forment un bruit blanc, ce qui est confirmé par les probabilités

qui sont toutes supérieures à 0.05. Le résidu peut être assimilé à un processus bruit blanc.

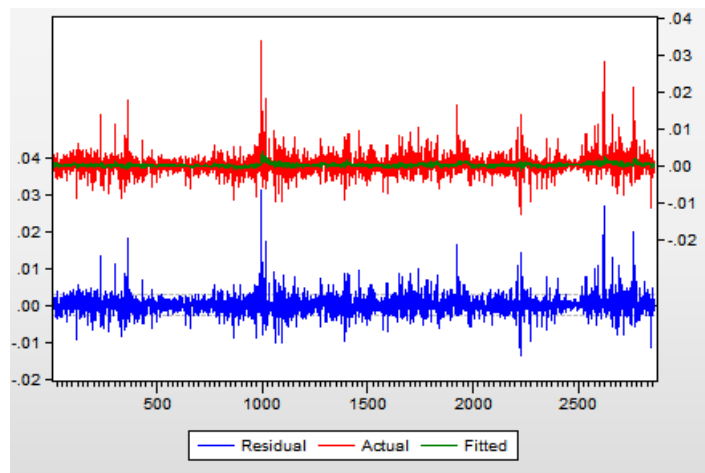


FIGURE 3.9 – Série actuelle, estimée et résiduelle

De la représentation graphique de la série résiduelle, réelle et estimée, Nous remarquons que le modèle $ARMA(7, 7)$ n'a pas bien expliqué la série $DLUS_t$.

Test ARCH :

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.174	0.174	86.206
		2	0.076	0.047	102.80
		3	0.049	0.029	109.75
		4	0.047	0.032	116.10
		5	0.104	0.090	147.33
		6	0.054	0.018	155.70
		7	0.112	0.092	191.84
		8	0.014	-0.030	192.42
		9	0.030	0.016	195.01
		10	0.034	0.012	198.29
		11	0.016	-0.003	199.03
		12	0.002	-0.022	199.05
		13	-0.011	-0.014	199.37
		14	0.020	0.011	200.54
		15	0.024	0.019	202.16
		16	0.013	0.000	202.63
		17	0.033	0.028	205.66
		18	0.022	0.014	207.08
		19	0.127	0.124	253.16
		20	0.073	0.031	268.36
		21	0.017	-0.016	269.22
		22	0.011	-0.008	269.60
		23	0.008	-0.004	269.77
		24	0.042	0.011	274.75
		25	0.030	0.004	277.37
		26	0.066	0.033	289.80
		27	0.007	-0.019	289.95
		28	0.017	0.012	290.77
		29	0.041	0.027	295.59
		30	0.042	0.026	300.57
		31	0.015	-0.009	301.18
		32	0.001	-0.001	301.19
		33	0.009	-0.005	301.44
		34	0.017	0.007	302.29
		35	0.007	-0.011	302.43
		36	0.011	-0.003	302.79

FIGURE 3.10 – Corrélogramme des carrés des résidus

A partir le corrélogramme des carrés des résidus, Nous remarquons qu'il y a des pics significatifs, Ceci est un signe de la présence d'un effet ARCH. Pour cette série le meilleur modèle obtenu selon le critère de schwarz est le modèle ARMA(7,7) à erreur GARCH(1,3).

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(7)	0.556419	0.112910	4.927987	0.0000
AR(4)	0.367752	0.110633	3.324068	0.0009
MA(1)	0.037372	0.015378	2.430280	0.0151
MA(4)	-0.361311	0.110494	-3.269945	0.0011
MA(7)	-0.524954	0.116335	-4.512412	0.0000
Variance Equation				
C	3.25E-07	4.07E-08	7.982778	0.0000
RESID(-1)^2	0.171969	0.009380	18.33345	0.0000
GARCH(-1)	0.231347	0.044187	5.235671	0.0000
GARCH(-2)	0.028537	0.039216	0.727683	0.4668
GARCH(-3)	0.533109	0.041513	12.84205	0.0000
R-squared	0.017792	Mean dependent var	0.000136	
Adjusted R-squared	0.016413	S.D. dependent var	0.002769	
S.E. of regression	0.002746	Akaike info criterion	-9.169242	
Sum squared resid	0.021481	Schwarz criterion	-9.148372	
Log likelihood	13094.51	Hannan-Quinn criter.	-9.161716	
Durbin-Watson stat	1.913311			
Inverted AR Roots	.99	.51+.69i	.51-.69i	-.16+.95i
	-.16-.95i	-.84-.33i	-.84+.33i	
Inverted MA Roots	.97	.50+.68i	.50-.68i	-.17+.94i
	-.17-.94i	-.84-.33i	-.84+.33i	

FIGURE 3.11 – Estimation des paramètres du modèle ARMA(7,7) à erreur GARCH(1,3)

En observant les valeurs des paramètres estimés (Figure(3.19)). On constat que les coefficients de l'équation de la variance $\alpha_0 = 3.25E - 07$ et $\alpha_1 = 0.17$ sont strictement positifs. Donc, la contrainte de positivité de la variance conditionnelle est vérifiée.

Afin de valider le modèle trouvé, nous avons appliquer un ensemble de tests sur les résidus, noté ε_t provenant de la modélisation de la série $DLUS_t$ par le modèle ARMA(7,7) à erreur GARCH(1,3), où nous avons accepté que les résidus Z_t forment un bruit blanc.

Par suite le modèle ARMA(7,7) à erreur GARCH(1,3) est validé pour représenter la série $DLUS_t$, et il s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} DLUS_t = 0.367DLUS_{t-4} + 0.556DLUS_{t-7} + \varepsilon_t + 0.037\varepsilon_{t-1} - 0.361\varepsilon_{t-4} - 0.524\varepsilon_{t-7} \\ \varepsilon_t = z_t \times \sqrt{h_t} \text{ et } h_t = 3.25E - 07 + 0.17\varepsilon_t^2 + 0.231h_{t-1} + 0.288h_{t-2} + 0.353h_{t-3}. \end{cases}$$

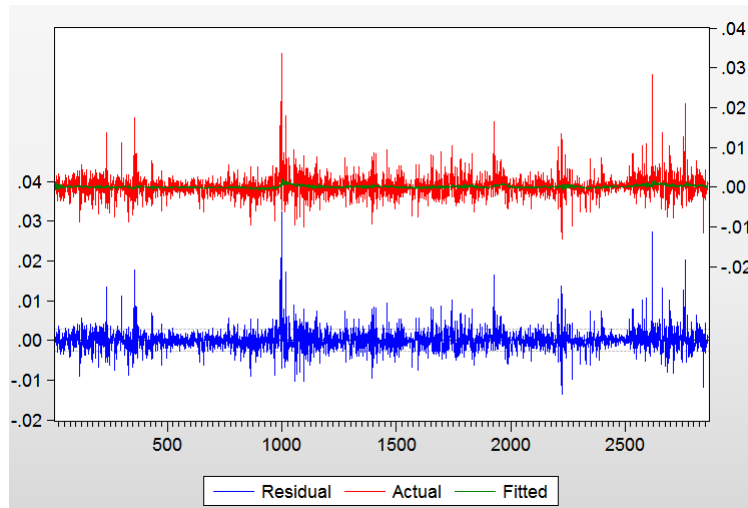


FIGURE 3.12 – Série réelle, estimée et résiduelle

Discussion

A partir l'histogramme de la série US_t (Figure 3.13), nous remarquons que la distribution empirique de notre série n'est pas unimodale, ce qui peut nous mène à utiliser la classe de mélange de modèle autorégressifs MAR pour la série stationnaire $DLUS_t$.

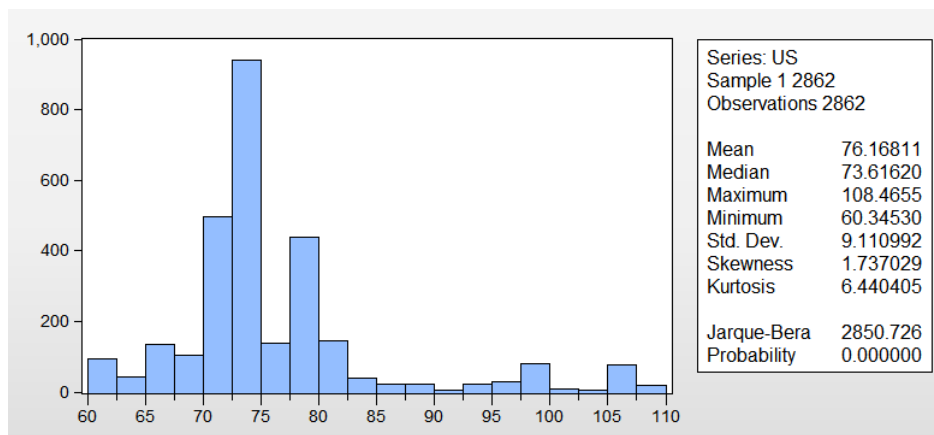


FIGURE 3.13 – Histogramme de la série US_t

Nous avons utilisé le critère de sélection BIC^* , afin de choisir le meilleur modèle MAR qui représente la série stationnaire $DLUS_t$, où nous avons supposé que le nombre maximum de modèles dans le mélange est égale à trois et l'ordre autorégressif maximum est égale à cinq. Parmi les modèles MAR estimé, nous avons :

TABLE 3.1 – Modèle MAR (3 ; 2,2,2)

k	α_k	$\phi_{k,0}$	$\phi_{k,1}$	$\phi_{k,2}$	σ_k
1	0.0962	0.0016	0.5457	0	0.0060
2	0.5304	0	0.1481	-0.0547	0.0015
3	0.3735	0	-0.2254	0	0.0023

TABLE 3.2 – Modèle MAR (2 ; 1,1)

k	α_k	$\phi_{k,0}$	$\phi_{k,1}$	σ_k
1	0.5398	-0.1263×10^{-3}	0.0495	0.0012
2	0.4602	0.4140×10^{-3}	0.1125	0.0038

Les valeurs du critère BIC^* des modèles estimés sont

Modèles	BIC^*
$MAR(3; 2, 2, 2)$	68.9547
$MAR(2; 1, 1)$	45.0433

En se basant sur le critère BIC^* , nous déduisons que le meilleur modèle MAR estimé est un mélange de deux modèles autorégressifs d'ordre 1 ($MAR(2; 1, 1)$).

Validation du modèle

Dans le cadre de validation de ce modèle, nous avons appliqué les différents tests suivants :

Test sur les paramètres

Pour le modèle $MAR(2; 1, 1)$ estimé, on constate que

La racine z du polynôme caractéristique (voir équation 4) égale à 0.0071 qui est inférieur à 1 en module. Donc le modèle est stationnaire au second ordre.

Test sur les résidus

Pour valider le modèle $MAR(2; 1, 1)$ estimé, nous avons vérifié que les résidus standardisés, qui consistent à diviser chaque résidu $\hat{e}_{t,k}$ par $(\hat{\sigma}_k)$, i.e.

$$\hat{\varepsilon}_{t,k} = \frac{\hat{e}_{t,k}}{(\hat{\sigma}_k)} = \frac{x_t - \hat{x}_t}{(\hat{\sigma}_k)}$$

où

$$\hat{x}_t = E\left(x_t | \Omega_{t-1}, \max_{l=1, \dots, K} \tau_{t,l} = \tau_{t,k}\right) = \hat{\phi}_{0,k} + \sum_{i=1}^{p_k} \hat{\phi}_{i,k} x_{t-i}$$

forment un bruit blanc..

la Figure (3.14) présente la série réelle, résiduelle et ajustée ainsi que la volatilité calculée à partir du modèle estimé.

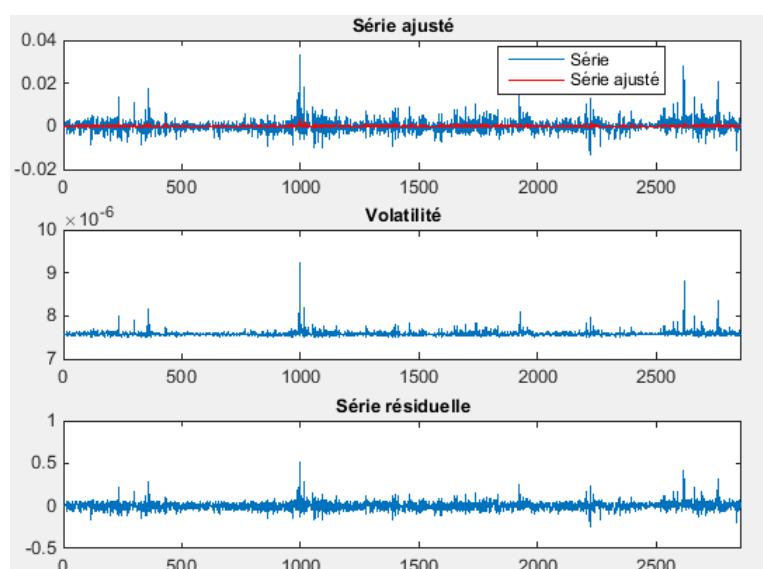


FIGURE 3.14 – Série résiduelle, ajustée, actuelle et la volatilité

Nous remarquons que le modèle MAR ajusté capture l'hétéroscédasticité conditionnelle.

1. Test de la nullité de la moyenne des résidus

La statistique $|M_t| = 0.0715$ est inférieure à 1.96. Donc, nous acceptons l'hypothèse que la moyenne de la série résiduelle est nulle.

2. Test d'autocorrélation

La Figure(3.15) présente la fonction d'autocorrélation simple et partielle des résidus avec l'intervalle de confiance.

On remarque de ce graphe, que les pics sont à l'intérieur de l'intervalle de confiance, ce qui

nous a permet de dire que les résidus forment un bruit blanc. Pour confirmer ou infirmer ce résultat nous avons appliqué le test de Ljung-Box.

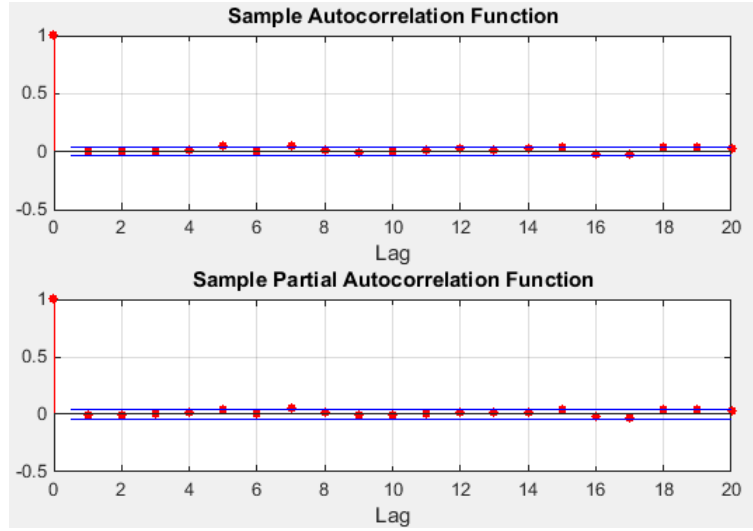


FIGURE 3.15 – Corrélogramme de la série résiduelle

Après le calcul, nous remarquons que, pour un retard $h = 200$, la statistique de Ljung-Box ($Q - stat$) est égale à 230.3011 qui est inférieure à la valeur théorique de $\chi^2(193) = 233.9943$, au seuil 5%. Donc les résidus forment un bruit blanc.

D'où, le modèle $MAR(2; 1, 1)$ est valide et il s'écrit sous la forme suivante

$$F(DLUS_t | \Omega_{t-1}) = 0.5398\Phi\left(\frac{e_{t,1}}{0.0012}\right) + 0.4602\Phi\left(\frac{e_{t,2}}{0.0038}\right)$$

où

$$\begin{cases} e_{t,1} = DLUS_t + 0.1263 \times 10^{-3} - 0.0495DLUS_{t-1} \\ e_{t,2} = DLUS_t - 0.4140 \times 10^{-3} - 0.1125DLUS_{t-1} \end{cases}$$

On vérifie l'absence de corrélation des résidus aux carrés à partir du corrélogramme des résidus aux carrés (Figure 3.16).

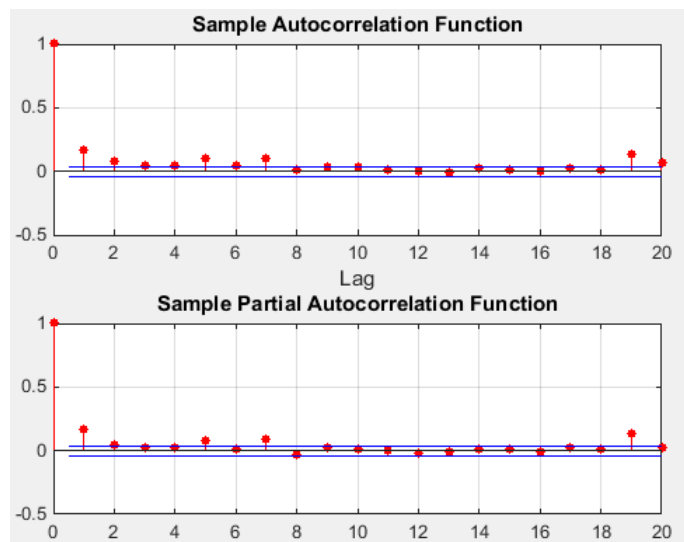


FIGURE 3.16 – Corrélogramme des résidus au carré

De la Figure(3.16), nous remarquons l'existence des pics à l'extérieur de l'intervalle de confiance ce qui confirme l'invalidité de l'hypothèse nulle d'absence d'autocorrélations des résidus aux carrés. Par suit, nous proposons de modéliser la série $DLUS_t$ par la classe de modèle MAR à erreur $ARCH$.

Nous avons utilisé le critère de sélection BIC^* , afin de choisir le mielleur modèle $MAR - ARCH$ qui représente la série stationnaire $dlus_t$, où nous avons supposé que le nombre maximum de modèles dans le mélange est égale à trois et l'ordre de la partie autorégressive ainsi que la partie $ARCH$ est égale à trois.

Dans les tableaux qui suivent, nous présentons quelques modèles estimés.

MAR-ARCH(2;1,1;1,1)

k	α_k	$\phi_{k,0}$	$\phi_{k,1}$	$\beta_{k,0}$	$\beta_{k,1}$
1	0,932443702	0	0,052360517	$3,17 \times 10^{-6}$	0,200622583
2	0,067556298	0	0	$2,94 \times 10^{-5}$	2,041604886

MAR-ARCH(2;1,1;1,1)

k	α_k	$\phi_{k,0}$	$\phi_{k,1}$	$\beta_{k,0}$	$\beta_{k,1}$
1	0,914679505	0	0,077490058	$4,54 \times 10^{-6}$	0,153824424
2	0,085320495	0	-1,000525499	$5,56 \times 10^{-8}$	3,359154119

Pour chaque modèle identifié, nous avons calculé le critère BIC^*

Modèles	BIC^*
MAR-ARCH(2;1,1;1,1)	37,1572
MAR-ARCH(2;1,1;1,1)	45,3622

Il est clair que le meilleur modèle $MAR - ARCH$ estimé, selon le critère BIC^* , est le modèle $MAR - ARCH(2; 1, 1; 1, 1)$ où $BIC^* = 37,1572$

Validation du modèle

Dans le but de savoir si le modèle $MAR - ARCH(2; 1, 1; 1, 1)$ proposé est valide pour représenter la série $DLUS_t$, nous avons effectué des tests sur les paramètres estimés, ainsi que des tests sur les résidus standardisés définit par

$$\hat{\varepsilon}_{t,k} = \frac{\hat{e}_{t,k}}{(\hat{h}_{t,k})^{1/2}} = \frac{x_t - \hat{x}_t}{(\hat{h}_{t,k})^{1/2}}$$

où

$$\hat{x}_t = E\left(x_t | \Omega_{t-1}, \max_{l=1, \dots, K} \tau_{t,l} = \tau_{t,k}\right) = \hat{\phi}_{0,k} + \sum_{i=1}^{p_k} \hat{\phi}_{i,k} x_{t-i} \quad \text{et} \quad \hat{h}_{t,k} = \hat{\beta}_{k,0} + \sum_{i=1}^{q_k} \hat{\beta}_{k,i} \hat{e}_{t-i,k}^2$$

Test de la nullité de la moyenne

La statistique $|M_t| = 1.3206$ est inférieure à 1.96. Donc, nous acceptons l'hypothèse que la moyenne de la série résiduelle est nulle.

Test d'autocorrélation

A partir du corrélogramme de la série résiduelle (Figure (3.17)), on constate que les pics sont à l'intérieur de l'intervalle de confiance, donc il n'y a pas de corrélation dans la série résiduelle, ce qui a été confirmé par l'application du test de Ljung-Box. En effet, pour $h = 200$. On a $Q - stat = 219.4289$ est inférieure à $\chi_{(194)}^2 = 233.9943$ au seuil 5%.

Par conséquent, les résidus se comportent comme un bruit blanc. D'où, le modèle $MAR - ARCH(2; 1, 1; 1, 1)$ est valide et il s'écrit sous la forme

$$F(DLUS_t | \Omega_{t-1}) = 0,932443702 \Phi\left(\frac{e_{t,1}}{\sqrt{h_{t,1}}}\right) + 0,067556298 \Phi\left(\frac{e_{t,2}}{\sqrt{h_{t,2}}}\right)$$

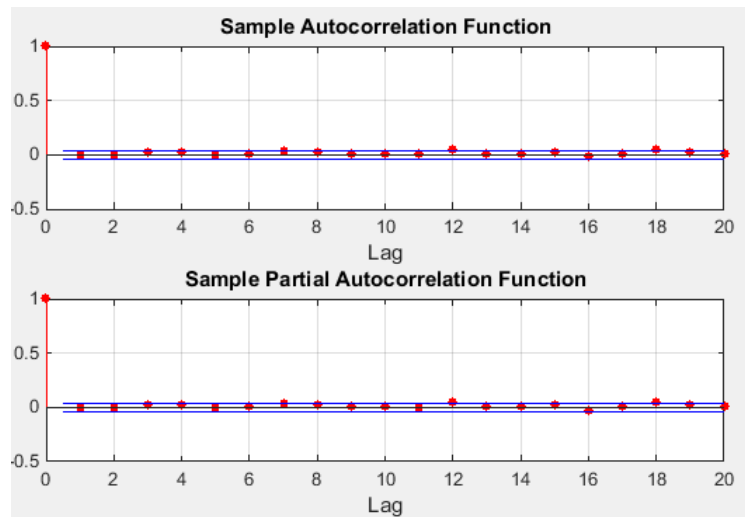


FIGURE 3.17 – Corrélogramme de la série résiduelle

où

$$\begin{cases} e_{t,1} = DLUS_t - 0.052361DLUS_{t-1} & \text{et } h_{t,1} = 3.17 \times 10^{-6} + 0.2006e_{t-1,1}^2 \\ e_{t,2} = DLUS_t & \text{et } h_{t,2} = 2.94 \times 10^{-5} + 2.0416e_{t-1,2}^2 \end{cases}$$

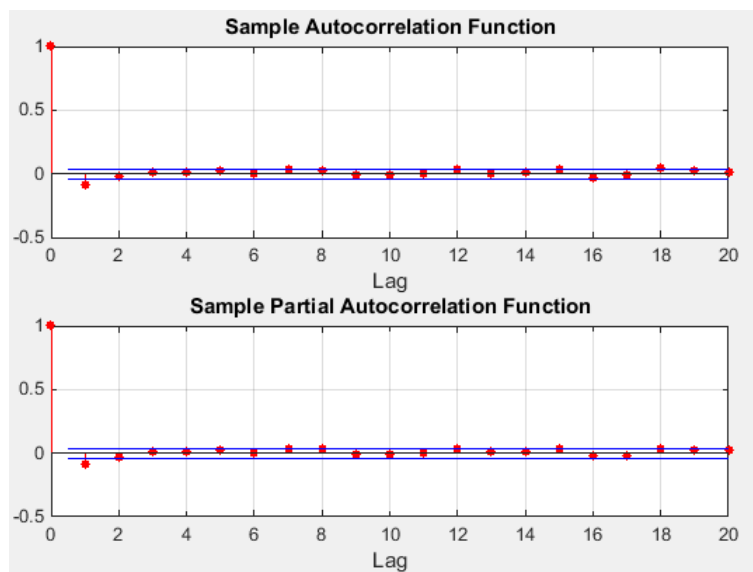


FIGURE 3.18 – Corrélogramme des résidus au carré

De la Figure (3.18), nous remarquons l'existence des pics à l'intérieur de l'intervalle de confiance, donc il n'y a pas de corrélation entre les résidus au carré.

La Figure (3.19) représente la série réelle $DLUS_t$, ainsi que les valeurs ajustées de cette série à partir du modèle $MAR - ARCH$ estimé la série résiduelle et la volatilité calculée à partir du même modèle.

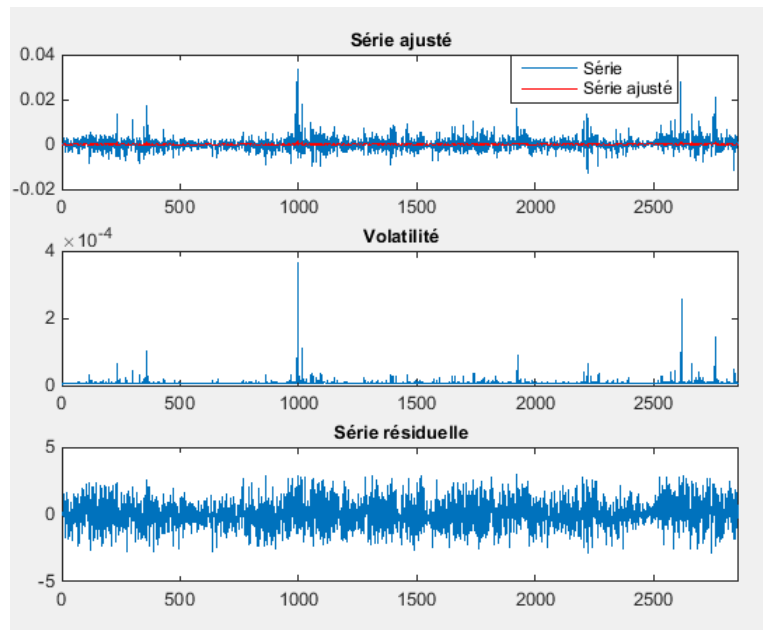


FIGURE 3.19 – Série actuelle, ajustée, résiduelle et la volatilité

3.2 Étude de la série DZD/EUR

La série DZD/EUR représente l'évolution de taux de change du dinar algérien face à la monnaie européenne, notée EU_t .

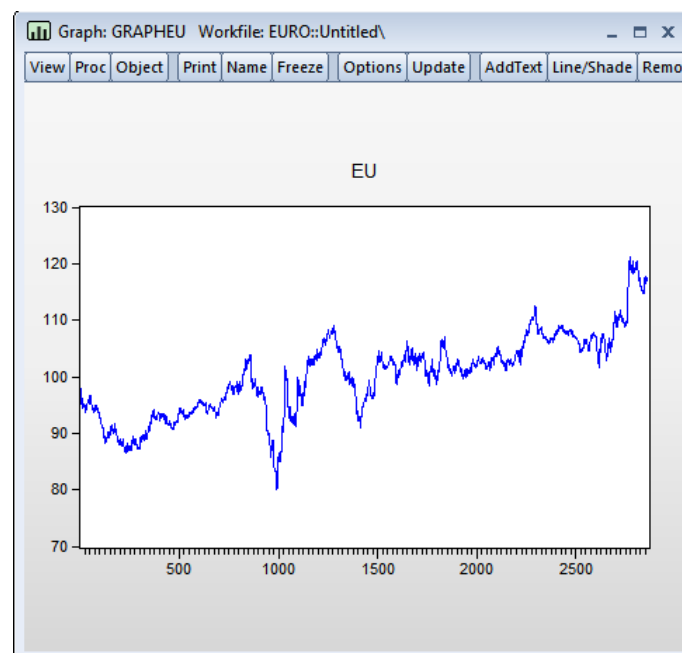


FIGURE 3.20 – Représentation graphique de la série EU_t

L'observation de la représentation graphique de la série brute EU_t (Figure(3.20)) permet de constater qu'elle possède une tendance à la hausse avec une variabilité qui paraît de plus en plus grande, et semblant donc non stationnaire au sens de la moyenne.

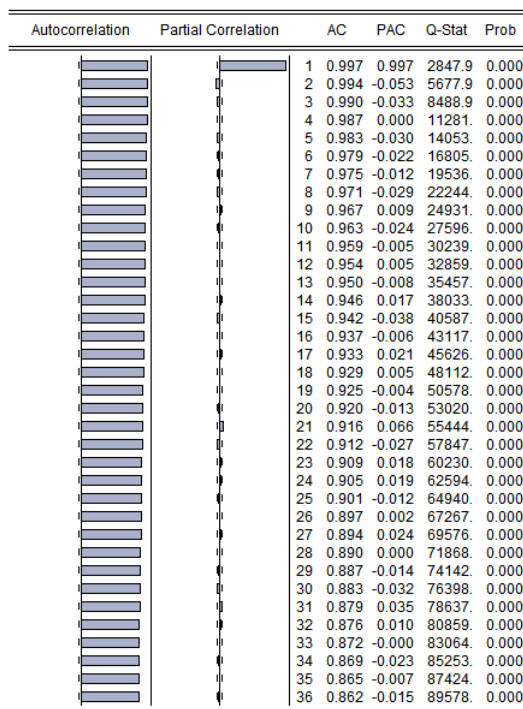


FIGURE 3.21 – Correlogramme de la série EU_t

Le correlogramme associé à la série EU_t (Figure (3.21)) confirme l'hypothèse que nous avons fait en ce qui concerne la non stationnarité de la série. En effet, nous remarquons que la fonction d'autocorrélation diminue lentement. Afin d'avoir une série stationnaire, nous proposons de travailler avec la série des rendements notée $DLEU_t$ définie par :

$$DLEU_t = \log(EU_t) - \log(EU_{t-1})$$

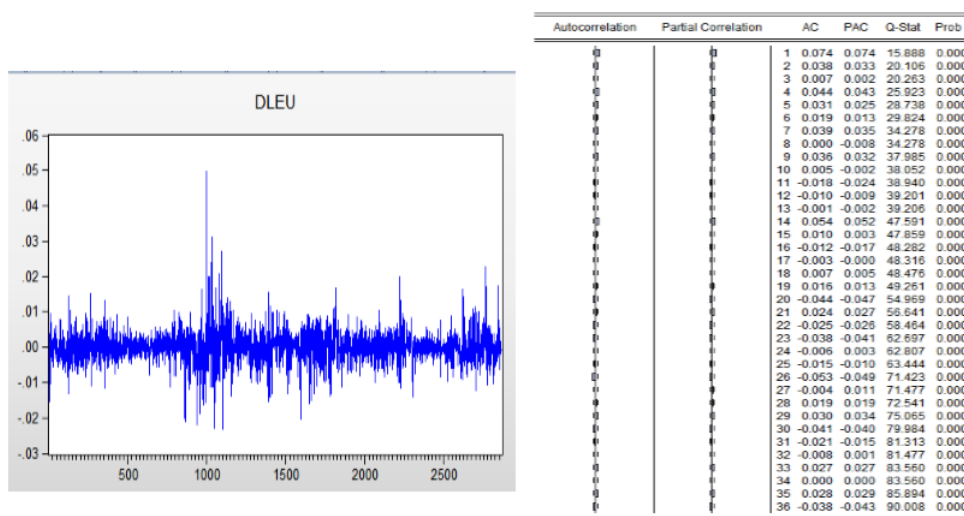


FIGURE 3.22 – Correlogramme et le graphe de la série $DLEU_t$

Le graphique des rendements nous laisse présager que la série $DLEU_t$ est stationnaire. Ce même graphe montre que cette série est volatile. On observe des regroupements de

volatilité. Nous remarquons aussi que cette volatilité évolue au cours du temps. Pour confirmer ou infirmer la stationnarité de notre série, on applique le test de Dickey-Fuller Augmenté qui nécessite d'abords de sélectionner le nombre de retard p . Pour cette série, on a trouvé que $p = 1$.

- **Estimation des paramètres de modèle [3]** (avec tendance et avec constante)

De la Figure (3.23), on constate que l'hypothèse de l'existence d'une racine unitaire

	t-Statistic	Prob.*		
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-35.26420	0.0000		
Test critical values:				
1% level	-3.961252			
5% level	-3.411379			
10% level	-3.127538			
*Mackinnon (1996) one-sided p-values.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(DLEU)				
Method: Least Squares				
Date: 03/06/17 Time: 00:44				
Sample (adjusted): 4 2862				
Included observations: 2859 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
DLEU(-1)	-0.895851	0.025404	-35.26420	0.0000
D(DLEU(-1))	-0.032794	0.018669	-1.756622	0.0791
C	-5.09E-05	0.000171	-0.297229	0.7663
@TREND(1)	7.89E-08	1.04E-07	0.760670	0.4469
R-squared	0.464674	Mean dependent var	5.23E-06	
Adjusted R-squared	0.464111	S.D. dependent var	0.006247	
S.E. of regression	0.004573	Akaike info criterion	-7.935845	
Sum squared resid	0.059708	Schwarz criterion	-7.927509	
Log likelihood	11348.29	Hannan-Quinn criter.	-7.932840	
F-statistic	826.0648	Durbin-Watson stat	2.000823	
Prob(F-statistic)	0.000000			

FIGURE 3.23 – Estimation de modèle [3]

est rejetée, puisque la statistique de student associée à la variable endogène retardée $DLEU_t(-1)$ est égale à -35.26 , est inférieure aux valeurs critiques -3.9612 , -3.4114 et -3.1275 tabulées par Dickey-Fuller, respectivement aux seuils 1%, 5% et 10%. Il est clair également, de la Figure (3.23), que le coefficient de la tendance est significativement égal à zéro, car la $|t - statistic| = 0.7606 > 1.96$.

Identification de l'ordre de modèle

D'après le corrélogramme 3.22 de la série $DLEU_t$ nous remarquons que la fonction d'autocorrélation simple possède des valeurs importantes aux retards $q = 1, 4, 5, 7, \dots$, et que la fonction d'autocorrélation partielle possède des valeurs importantes aux retards $p = 1, 4, 5, 7, \dots$,

Estimation de l'équation

L'application de la méthodologie de Box et Jenkins nous conduit à retenir un modèle $ARMA(1, 1)$ pour la série $DLEU_t$. Le résultat de l'estimation de ce modèle par la méthode des moindres carrés ordinaire est donnée dans la Figure (3.24)

Dependent Variable: DLEU				
Method: Least Squares				
Date: 06/09/17 Time: 18:34				
Sample (adjusted): 3 2862				
Included observations: 2860 after adjustments				
Convergence achieved after 7 iterations				
MA Backcast: 2				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.783463	0.081908	9.565119	0.0000
MA(1)	-0.728597	0.090512	-8.049717	0.0000
R-squared	0.010249	Mean dependent var	6.32E-05	
Adjusted R-squared	0.009903	S.D. dependent var	0.004595	
S.E. of regression	0.004572	Akaike info criterion	-7.937050	
Sum squared resid	0.059740	Schwarz criterion	-7.932884	
Log likelihood	11351.98	Hannan-Quinn criter.	-7.935548	
Durbin-Watson stat	1.970992			
Inverted AR Roots	.78			
Inverted MA Roots	.73			

FIGURE 3.24 – Résultat d'estimation d'un modèle ARMA(1,1)

Validation

Test sur les paramètres

On remarque que tous les paramètres du modèle sont significativement différents de zéro. En effet les statistiques de Student associées sont en valeur absolue supérieures à 1,96, ce qui est confirmé par les probabilités de nullité des coefficients qui sont toutes inférieures à 0,05.

Graphique des inverses des racines

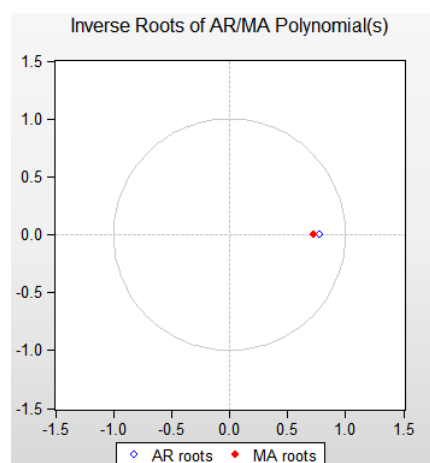
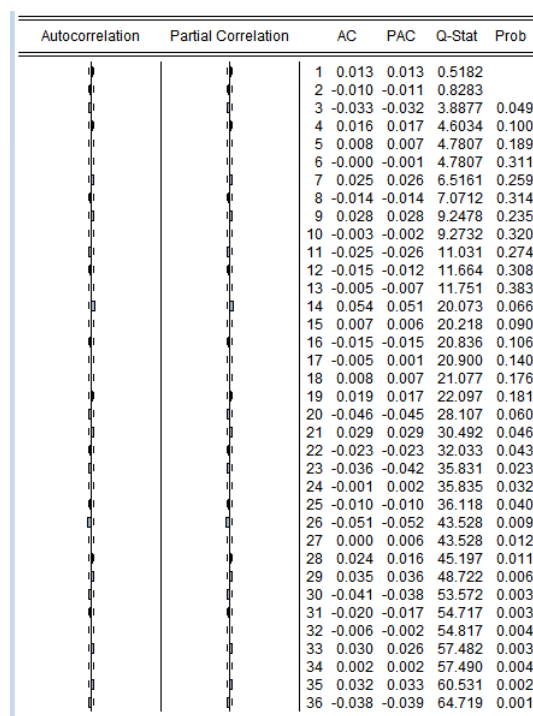


FIGURE 3.25 – Représentation graphique des inverses des racines

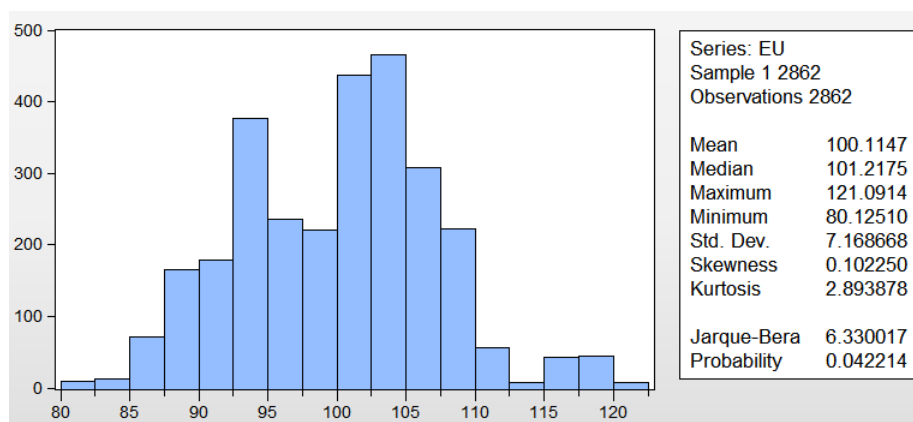
D'après la représentation graphique des inverses des racines des polynômes de retards moyenne mobile et autorégressif on s'aperçoit qu'ils sont tous supérieurs à 1 en module (leurs inverses sont en module, inférieurs à 1). Par conséquent, les conditions de stationnarité et d'inversibilité sont vérifiées. Le modèle estimé est alors stable.

Test sur les résidus

FIGURE 3.26 – Corrélrogramme de la série résiduelle calculée à partir le modèle $ARMA(1,1)$

En analysant le corrélrogramme des résidus , nous remarquons que les termes ne sont pas tous significativement nulles, donc il ne forment pas un bruit blanc, Par conséquent le modèle $ARMA(1,1)$ ne peut pas être .

A partir l'histogramme de la série EU_t (Figure 3.27), nous remarquons que la distrubution empirique de notre série est multimodale, ce qui nous conduit à utiliser la classe de mélange de modèle autorégressifs (MAR).

FIGURE 3.27 – Histogramme de la série EU_t

Parmi les modèles *MAR* estimé, nous avons :

Modèle MAR (2 ; 1,1)

k	α_k	$\phi_{k,0}$	$\phi_{k,1}$	σ_k
1	0.1620	0	0.4467	0.0084
2	0.8380	0	-0.0413	0.0032

Modèle MAR(3 ; 1, 1 ,1)

k	α_k	$\phi_{k,0}$	$\phi_{k,1}$	σ_k
1	0.1023	0	0.4953	0.0097
2	0.5088	0	-0.2008	0.0030
3	0.3889	0	0.2714	0.0037

Les valeurs du critère BIC^* des modèles estimés sont

Modèles	BIC^*
$MAR(2; 1, 1)$	30.3971
$MAR(3; 1, 1, 1)$	54.2439

Il est clair que le meilleur modèle *MAR* estimé, selon le critère BIC^* est le modèle $MAR(2; 1, 1)$.

Validation du modèle

Afin de valider le modèle trouvé, nous avons appliqué des tests sur les paramètres, ainsi que sur la série résiduelle standardisée. Le corrélogramme de cette dernière est présenté dans la Figure (3.28).

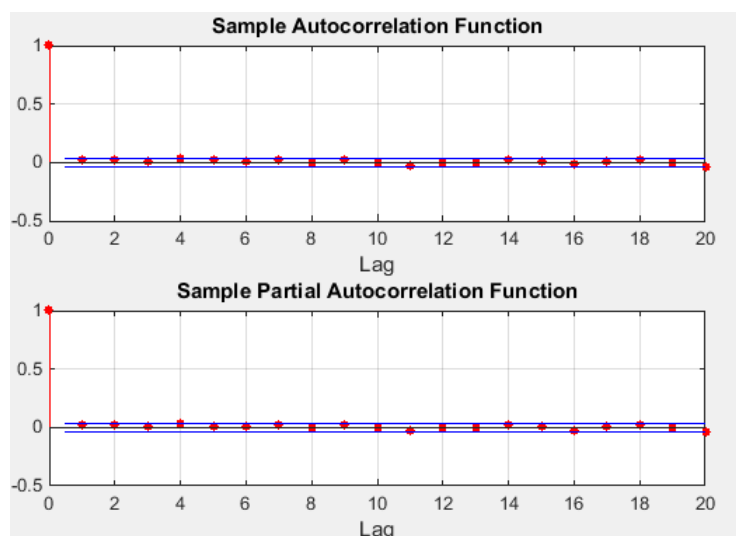


FIGURE 3.28 – Corrélogramme de la série résiduelle

la Figure (3.29) présente la série réelle, résiduelle et ajustée ainsi que la volatilité calculée à partir le modèle choisi.

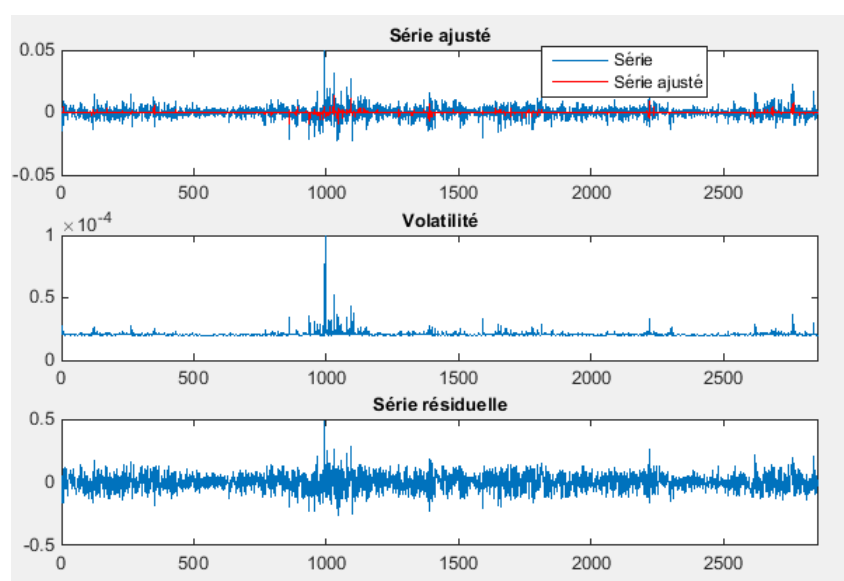


FIGURE 3.29 – Série résiduelle, ajustée, réelle et la volatilité

Nous constatons que la variance conditionnelle ou la volatilité calculée à partir le modèle estimé se rapproche de la volatilité de la série réelle.

Hypothèse nulle de (H_0)	Résultat	Décision
La stationnarité	$z=0.0338 < 1$	On accepte H_0
Nullité de la moyenne	$ M_t = 0.0375 < 1.96$	on accepte H_0
Non corrélation	$Q - stat = 230.4833 < \chi^2(195) = 233.9943$	on accepte H_0

L'analyse des fonction d'autocorrélation simple et partielle (Figure(3.28)) montrent qu'il n'existe pas une corrélation entre les résidus. D'autre part, le tableau ci-dessus, nous

concluons que les résidus du modèle forment bien un bruit blanc. Par conséquent, on peut valider le modèle $MAR(2; 1, 1)$ pour représenter la série $DLEU_t$. Le modèle obtenu s'écrit comme suit

$$F(DLEU_t|\Omega_{t-1}) = 0.1620\Phi\left(\frac{e_{t,1}}{0.0084}\right) + 0.8380\Phi\left(\frac{e_{t,2}}{0.0032}\right)$$

où

$$\begin{cases} e_{t,1} &= DLEU_t - 0.4467DLEU_{t-1} \\ e_{t,2} &= DLEU_t + 0.0413DLEU_{t-1} \end{cases}$$

La Figure (3.30) montre qu'il existe une corrélation entre les carrés des résidus. Par suite, on propose de modéliser la série $DLEU_t$ par la classe de modèle $MAR - ARCH$.

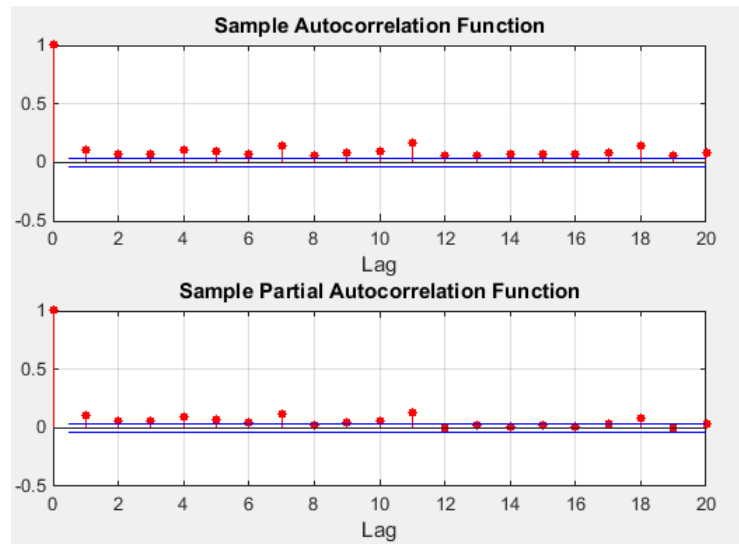


FIGURE 3.30 – Corrélogramme des résidus au carré

Parmi les modèle $MAR - ARCH$ proposé, nous avons trouvé que le meilleur modèle, selon le critère BIC^* , est le modèle $MAR - ARCH(2; 1, 1; 1, 1)$, avec un BIC^* égale à 38.1677

Pour valider le modèle obtenu, nous avons effectué des tests sur les paramètres et sur la série des résidus standardisés, où nous avons constaté, a partir du corrélogramme des résidus (Figure3.31), qu'il n'existe pas de corrélation entre les résidus.

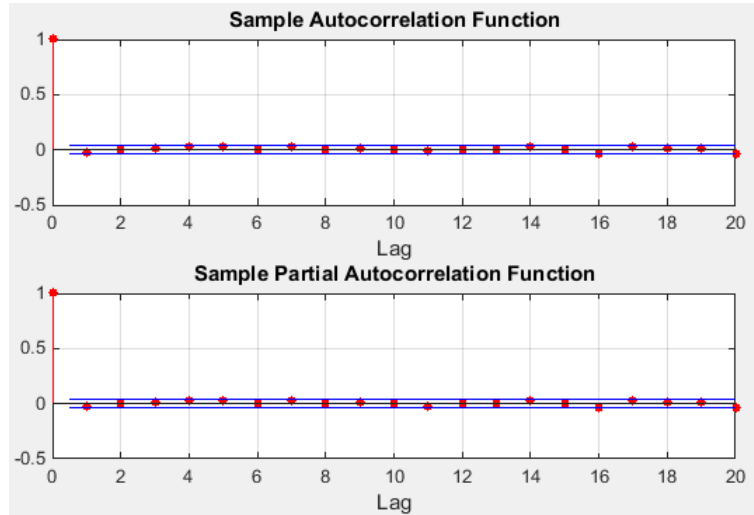


FIGURE 3.31 – Corrélogramme de la série résiduelle

Hypothèse nulle de (H_0)	Résultat	Décision
Nullité de la moyenne	$ M_t = 0.9093 < 1.96$	on accepte H_0
Non corrélation	$Q - stat = 208.2587 < \chi^2(194) = 233.9943$	on accepte H_0

L'analyse des fonction d'autocorrélation simple et partielle montrent qu'il n'existe pas une corrélation entre les résidus. D'autre part, le tableau ci-dessus, nous concluons que les résidus du modèle forment bien un bruit blanc. Par conséquent, on peut valider le modèle $MAR - ARCH(2; 1, 1; 1, 1)$ pour représenter la série $DLEU_t$. Le modèle obtenu s'écrit comme suit

$$F(DLEU_t | \Omega_{t-1}) = 0.8120\Phi\left(\frac{e_{t,1}}{\sqrt{h_{t,1}}}\right) + 0.1880\Phi\left(\frac{e_{t,2}}{\sqrt{h_{t,2}}}\right)$$

où

$$\begin{cases} e_{t,1} = DLEU_t \text{ et } h_{t,1} = 7,8738 \times 10^{-6} + 0,1410e_{t-1,1}^2 \\ e_{t,2} = DLEU_t + 0,7009DLEU_{t-1} \text{ et } h_{t,2} = 4,55484 \times 10^{-5} + 0,5962e_{t-1,2}^2 \end{cases}$$

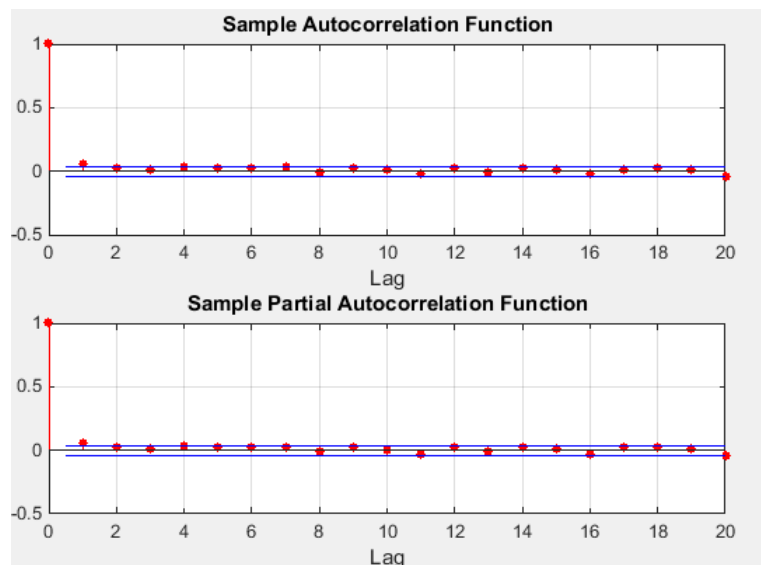


FIGURE 3.32 – Corrélogramme des résidus au carré

De la Figure (3.32), nous remarquons l'existence des pics à l'intérieur de l'intervalle de confiance, donc il n'y a pas de corrélation entre les résidus au carré.

La Figure (3.33) représente la série réelle $DLEU_t$, les valeurs ajustées de cette série à partir du modèle $MAR - ARCH$ estimé la série résiduelle ainsi que la volatilité calculée à partir du même modèle.

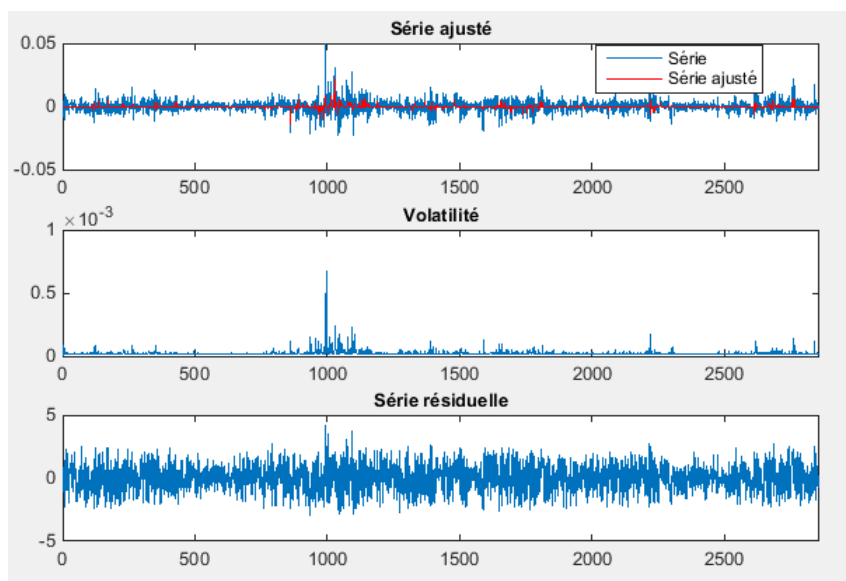


FIGURE 3.33 – Série résiduelle, ajustée, réelle et la volatilité

3.3 Étude de la série DZD / GBP

La série DZD/GBP représente l'évolution de taux de change du dinar algérien face à la livre Sterling, notée GBP_t .

Identification et estimation du modèle

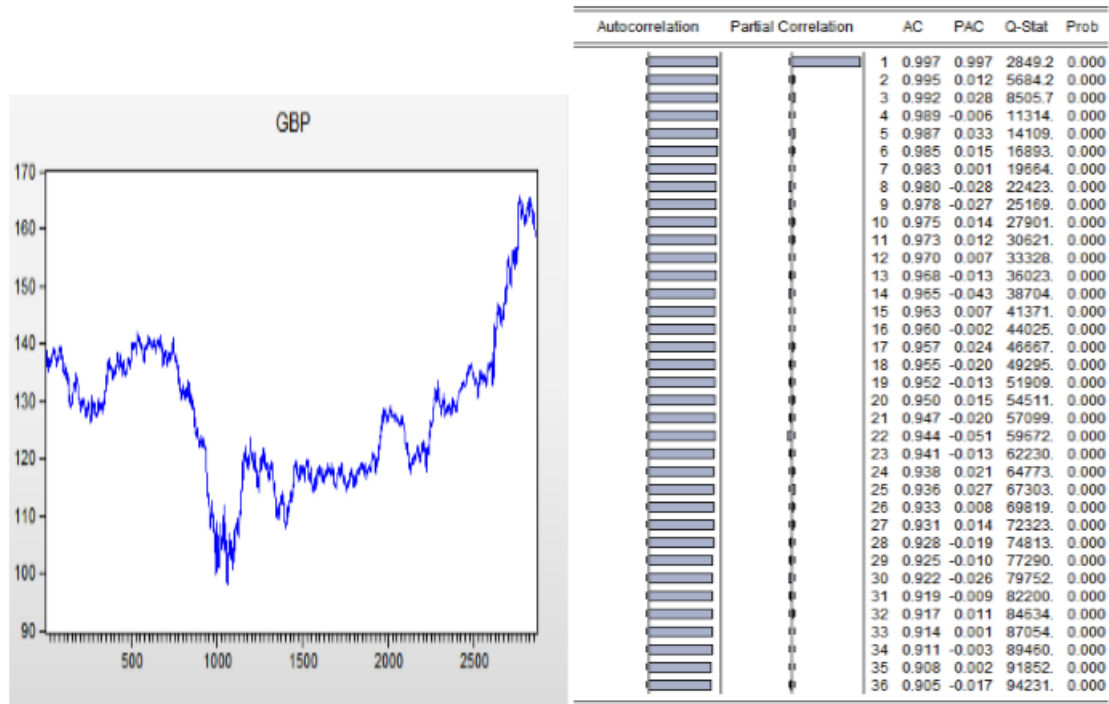


FIGURE 3.34 – Corrélogramme et le graphe de la série GBP_t

A partir du graphe et le corrélogramme de la série GBP_t (Figure 3.34), nous pouvons dire que la série est non stationnaire. Afin de confirmer ou infirmer la non stationnarité de la série, nous proposons d'appliquer le test ADF sur la série des rendements, notée $DLGBP_t$, définie par

$$DLGBP_t = \log GBP_t - \log GBP_{t-1}$$

Le corrélogramme ainsi que le graphe de cette nouvelle série sont présentés comme suit

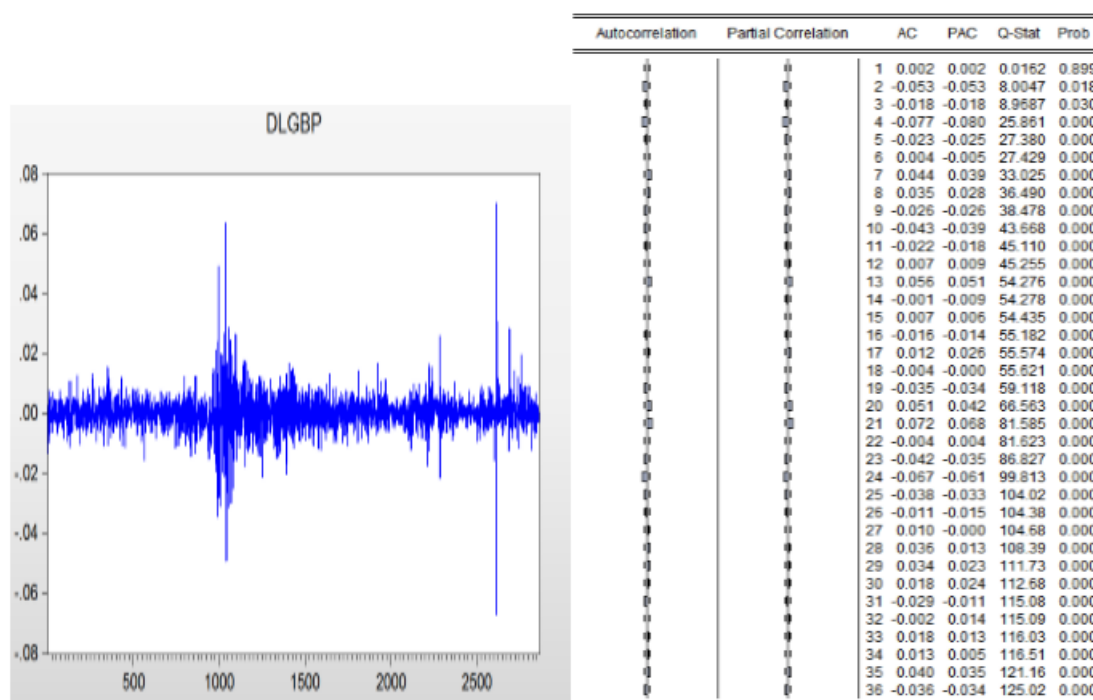


FIGURE 3.35 – Corrélogramme et le graphe de la série $DLGBP_t$

A partir du graphe et du corrélogramme associé à la série $DLGBP_t$, on peut dire que la série est stationnaire. Nous avons appliqué le test de Dickey Fuller Augmenté sur les trois modèles (avec tendance et constante, avec constante, et sans constante ni tendance).

Test de Dickey Fuller Augmenté

Nous avons d'abord estimé les paramètres du modèle (3) incluant une constante et trend.

		t-Statistic	Prob.*	
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-30.14549	0.0000	
Test critical values:	1% level	-3.961254		
	5% level	-3.411380		
	10% level	-3.127539		
*Mackinnon (1996) one-sided p-values.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(DLGBP)				
Method: Least Squares				
Date: 06/10/17 Time: 05:43				
Sample (adjusted): 6 2862				
Included observations: 2857 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
DLGBP(-1)	-1.159671	0.038469	-30.14549	0.0000
D(DLGBP(-1))	0.158268	0.032872	4.814622	0.0000
D(DLGBP(-2))	0.100207	0.026372	3.799719	0.0001
D(DLGBP(-3))	0.080975	0.018652	4.341370	0.0000
C	-0.000302	0.000221	-1.369855	0.1708
@TREND(1)	2.53E-07	1.33E-07	1.898406	0.0577
R-squared	0.504344	Mean dependent var	-3.40E-07	
Adjusted R-squared	0.503475	S.D. dependent var	0.008334	
S.E. of regression	0.005873	Akaike info criterion	-7.434898	
Sum squared resid	0.098328	Schwarz criterion	-7.422386	
Log likelihood	10626.75	Hannan-Quinn criter.	-7.430386	
F-statistic	580.1954	Durbin-Watson stat	2.004152	
Prob(F-statistic)	0.000000			

FIGURE 3.36 – Résultat du test de ADF à partir du modèle (3) sur la série $DLGBP_t$

De la Figure (3.36), on constate que l'hypothèse de l'existence d'une racine unitaire est rejetée, puisque la statistique de student associée à la variable endogène retardée $DLGBP_t(-1)$ est égale à (-30.14549) , est inférieure aux valeurs critiques -3.961254 , -3.411380 et -3.127539 tabulées par Dickey-Fuller, respectivement aux seuils 1%, 5% et 10%. Il est clair également, de la Figure (3.36), que le coefficient de la tendance est significativement égale à zéro, car la $|t - statistic| = 1.8984 < 1.96$.

Identification de l'ordre de modèle

Pour identifier l'ordre p et q d'un processus $ARMA$, nous utilisons le corrélogramme de la fonction d'autocorrélation et la fonction d'autocorrélation partiel de la série $DLGBP_t$. D'après ce corrélogramme, nous remarquons que la fonction d'autocorrélation simple possède des valeurs importantes aux retards $q = 1, 4, 5, 7, \dots$, et que la fonction d'autocorrélation partielle possède des valeurs importantes aux retards $p = 1, 4, 5, 7, \dots$,

Estimation de l'équation

L'application de la méthodologie de Box et Jenkins, nous conduit à retenir un modèle $ARMA(4, 7)$ pour la série $DLGBP_t$. L'estimation de ce processus par la méthode des moindres carrés ordinaire est représentée dans la figure suivante :

Dependent Variable: DLGBP				
Method: Least Squares				
Date: 06/10/17 Time: 18:03				
Sample (adjusted): 6 2862				
Included observations: 2857 after adjustments				
Convergence achieved after 4 iterations				
MA Backcast: -1 5				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(4)	-0.075354	0.018648	-4.040915	0.0001
MA(7)	0.041607	0.018704	2.224492	0.0262
R-squared	0.007486	Mean dependent var		5.29E-05
Adjusted R-squared	0.007138	S.D. dependent var		0.005899
S.E. of regression	0.005878	Akaike info criterion		-7.434439
Sum squared resid	0.098649	Schwarz criterion		-7.430268
Log likelihood	10622.10	Hannan-Quinn criter.		-7.432935
Durbin-Watson stat	2.003880			
Inverted AR Roots	.37-.37i	.37-.37i	-.37+.37i	-.37+.37i
Inverted MA Roots	.57-.28i	.57+.28i	.14+.62i	.14-.62i
	-.40-.50i	-.40+.50i	-.63	

FIGURE 3.37 – Résultat d'estimation d'un modèle ARMA(4,7)

Validation :

Test sur les paramètres

On remarque que tous les paramètres du modèle sont significativement différents de zéro. En effet les statistiques de Student associées sont en valeur absolue supérieures à 1,96, ce qui est confirmé par les probabilités de nullité des coefficients qui sont toutes inférieures à 0,05.

Test sur les résidus

En analysant le corrélogramme des résidus , nous remarquons que les termes ne sont pas tous significativement nuls, donc il ne forment pas un bruit blanc. Par conséquent le modèle $ARMA(4,7)$ ne peut pas être validé.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.002	-0.002	0.0123
		2	-0.055	-0.055	8.7201
		3	-0.014	-0.014	9.2593
		4	0.002	-0.001	9.2722
		5	-0.023	-0.025	10.827
		6	-0.004	-0.005	10.878
		7	-0.001	-0.003	10.879
		8	0.030	0.029	13.389
		9	-0.023	-0.023	14.843
		10	-0.043	-0.041	20.092
		11	-0.019	-0.021	21.080
		12	0.011	0.006	21.443
		13	0.054	0.053	29.962
		14	-0.007	-0.007	30.111
		15	0.002	0.006	30.120
		16	-0.008	-0.010	30.320
		17	0.027	0.028	32.358
		18	-0.002	0.001	32.375
		19	-0.038	-0.037	36.620
		20	0.043	0.041	41.898
		21	0.071	0.063	56.221
		22	-0.006	0.002	56.337
		23	-0.046	-0.034	62.337
		24	-0.062	-0.062	73.583
		25	-0.031	-0.037	76.298
		26	-0.009	-0.016	76.549
		27	0.003	0.003	76.571
		28	0.027	0.020	78.636
		29	0.036	0.030	82.340
		30	0.021	0.025	83.600
		31	-0.024	-0.011	85.217
		32	0.001	0.009	85.218
		33	0.021	0.011	86.527
		34	0.015	0.004	87.180
		35	0.034	0.035	90.592
		36	-0.040	-0.035	95.145

FIGURE 3.38 – Corrélogramme de la série résiduelle calculée à partir le modèle ARMA(4,7)

En observant l'histogramme de la série GBP_t (3.39), nous trouvons que la distribution empirique de notre série est multimodale, ce qui nous mène à utiliser la classe de mélange de modèles autorégressifs (MAR) pour modéliser la série stationnaire $DLGBP_t$.

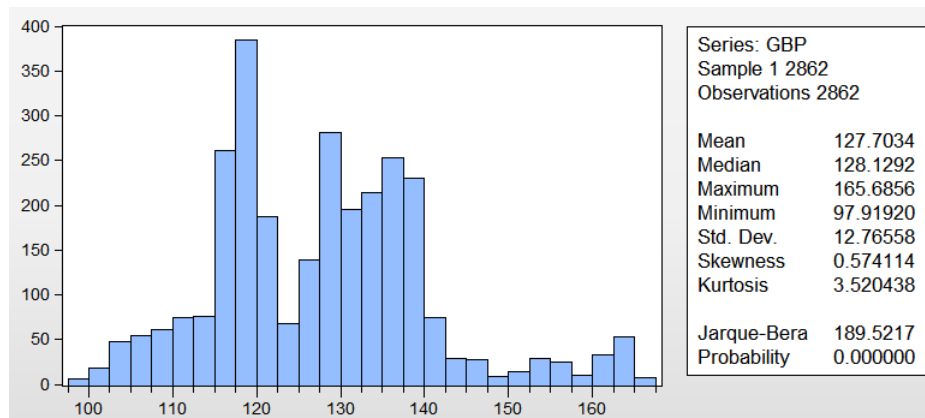


FIGURE 3.39 – Histogramme de la série GBP_t

Parmi les modèles MAR estimés, nous avons trouvé que le meilleur modèle, selon le critère BIC^* , est le modèle $MAR(3; 1, 1, 1)$ où BIC^* égale à 46.5376.

Validation du modèle

Afin de valider le modèle trouvé, nous avons appliqué des tests sur les paramètres, ainsi que sur la série résiduelle standardisée. le corrélogramme de cette dernière est présenté respectivement la Figure (3.40).

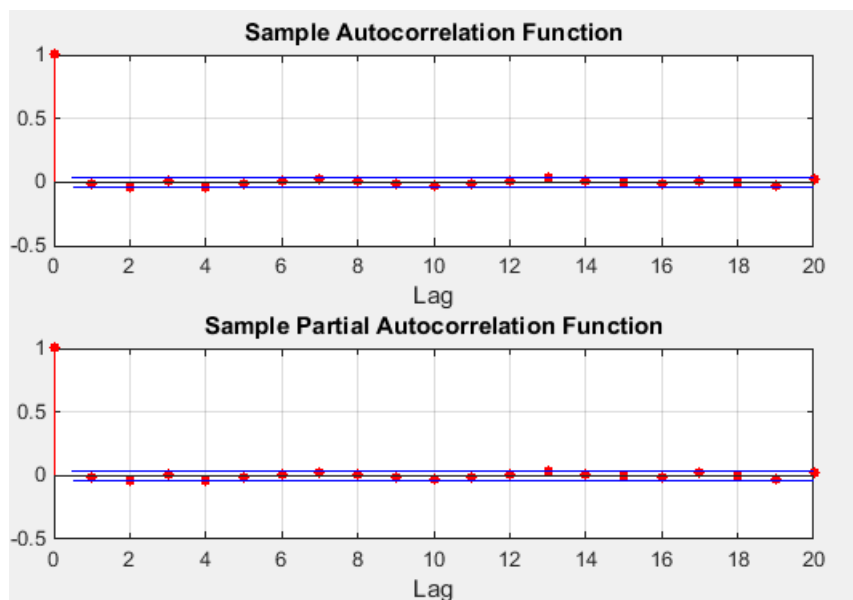


FIGURE 3.40 – Corrélogramme de la série résiduelle

la Figure (3.41) présente la série réelle, résiduelle et ajustée ainsi que la volatilité calculée à partir le modèle choisi.

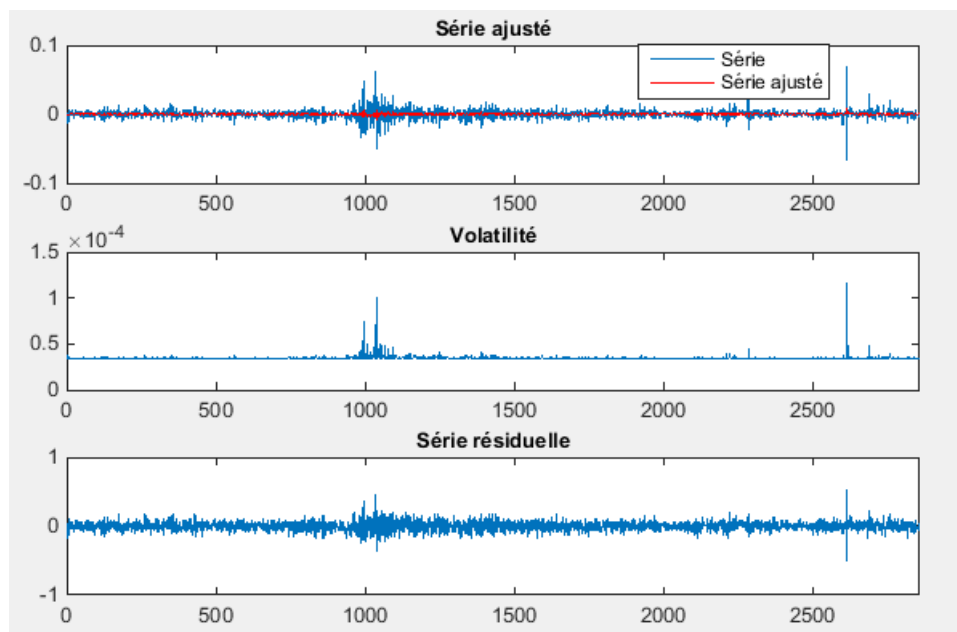


FIGURE 3.41 – Série résiduelle, ajustée, réelle et la volatilité

Hypothèse nulle de (H_0)	Résultat	Décision
La stationnarité	$z=0.0172$	On accepte H_0
Nullité de la moyenne	$ M_t = 0.037541 < 1.96$	on accepte H_0
Non corrélation	$Q - stat = 223.4182 < \chi^2(193) = 233.9943$	on accepte H_0

L'analyse des fonctions d'autocorrélations simple et partielle montrent qu'il n'existe pas une corrélation entre les résidus. D'autre part, d'après le tableau ci-dessus, nous concluons que les résidus du modèle forment bien un bruit blanc. Par conséquent, on peut valider le modèle $MAR(3; 1, 1, 1)$ pour représenter la série $DLGBP_t$. Le modèle obtenu s'écrit comme suit

$$F(DLGBP_t | \Omega_{t-1}) = 0.4609\Phi\left(\frac{e_{t,1}}{0.0053}\right) + 0.0514\Phi\left(\frac{e_{t,2}}{0.00181}\right) + 0.4878\Phi\left(\frac{e_{t,3}}{0.0030}\right)$$

où

$$\begin{cases} e_{t,1} = DLGBP_t + 0.1331DLGBP_{t-1} \\ e_{t,2} = DLGBP_t \\ e_{t,3} = DLGBP_t - 0.1329DLGBP_{t-1} \end{cases}$$

La Figure(3.42) montre qu'il existe une corrélation entre les carrés des résidus. Ainsi, nous proposons de modéliser la série $DLGBP_t$ par la classe de modèle $MAR - ARCH$.

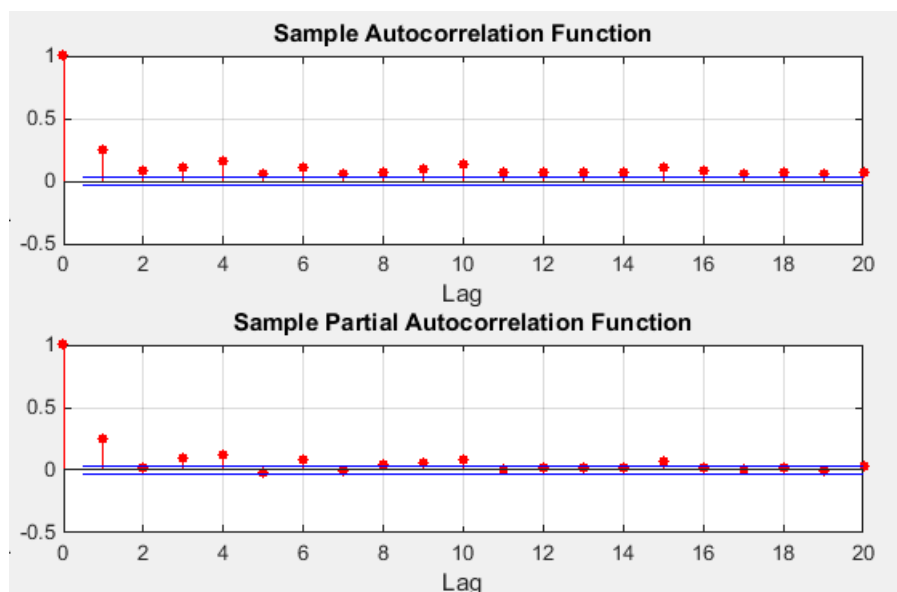


FIGURE 3.42 – Corrélogramme des résidus au carré

Parmi les modèles $MAR - ARCH$ proposés, nous avons trouvé que le meilleur modèle, selon le critère BIC^* , est le modèle $MAR - ARCH(2; 1, 1; 1, 1)$, avec un BIC^* égale à (38.5943)

Pour valider le modèle obtenu, nous avons effectué des tests sur les paramètres et sur la série des résidus standardisés où nous avons constaté, à partir du corrélogramme des résidus (Figure3.43), qu'il n'existe pas une corrélation entre les résidus.

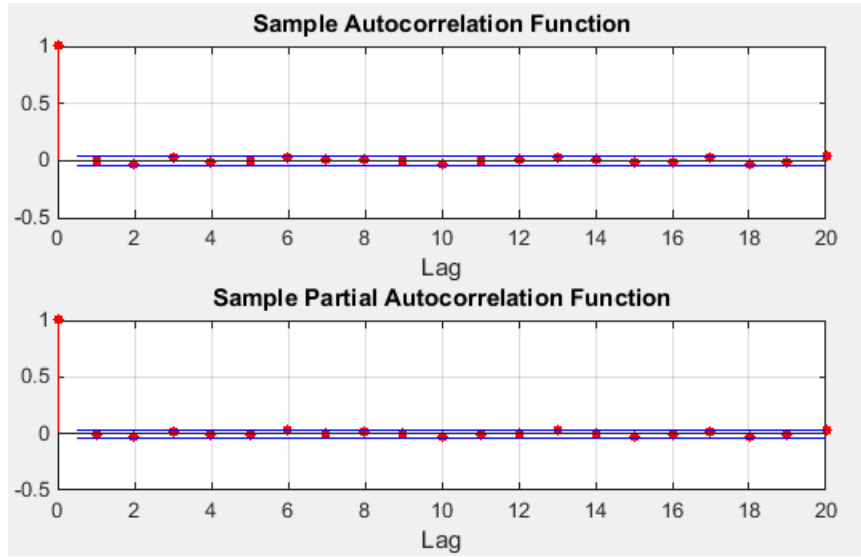


FIGURE 3.43 – Corrélogramme de la série résiduelle

Hypothèse nulle de (H_0)	Résultat	Décision
Nullité de la moyenne	$ M_t = 0.6383 < 1.96$	on accepte H_0
Non corrélation	$Q - stat = 222.5885 < \chi^2(194) = 233.9943$	on accepte H_0

L'analyse des fonctions d'autocorrélation simple et partielle montrent qu'il n'existe pas une corrélation entre les résidus. D'autre part, d'après le tableau ci-dessus, nous concluons que les résidus du modèle forment bien un bruit blanc. Par conséquent, on peut valider le modèle $MAR - ARCH(2; 1, 1; 1, 1)$ pour représenter la série $DLGBP_t$. Le modèle obtenu s'écrit comme suit

$$F(DLGBP_t | \Omega_{t-1}) = 0.0980 \Phi\left(\frac{e_{t,1}}{\sqrt{h_{t,1}}}\right) + 0.9020 \Phi\left(\frac{e_{t,2}}{\sqrt{h_{t,2}}}\right)$$

$$\begin{cases} e_{t,1} = DLGBP_t - 0.2486 DLGBP_{t-1} & \text{et } h_{t,1} = 1.2662 \times 10^{-4} + 1.1707 e_{t-1,1}^2 \\ e_{t,2} = DLGBP_t & \text{et } h_{t,2} = 1.2776 \times 10^{-5} + 0.1691 e_{t-1,2}^2 \end{cases}$$

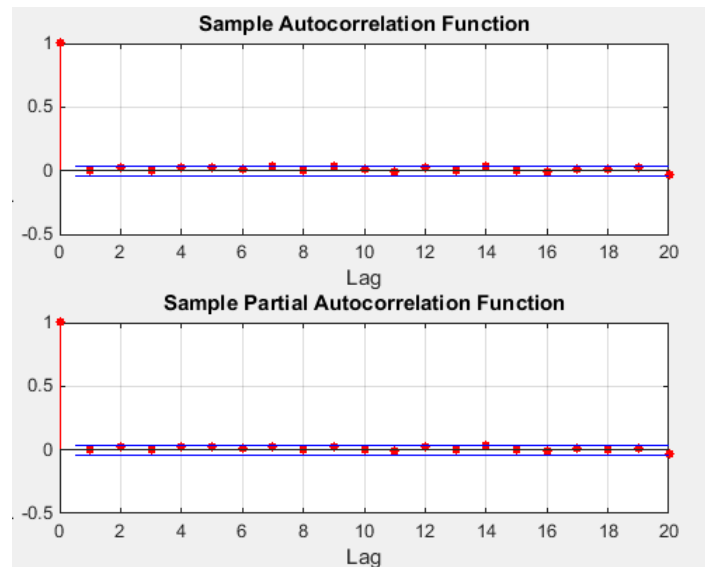


FIGURE 3.44 – Corrélogramme des résidus au carré

De la Figure (3.44), nous remarquons l'existence des pics à l'intérieur de l'intervalle de confiance, donc il n'y a pas de corrélation entre les résidus au carré. Les représentations graphiques de la série $DLGBP_t$, la série ajustée par le modèle estimé ainsi que la volatilité calculée à partir du modèle $MAR - ARCH(2; 1, 1; 1, 1)$ sont respectivement données par la Figure(3.45).

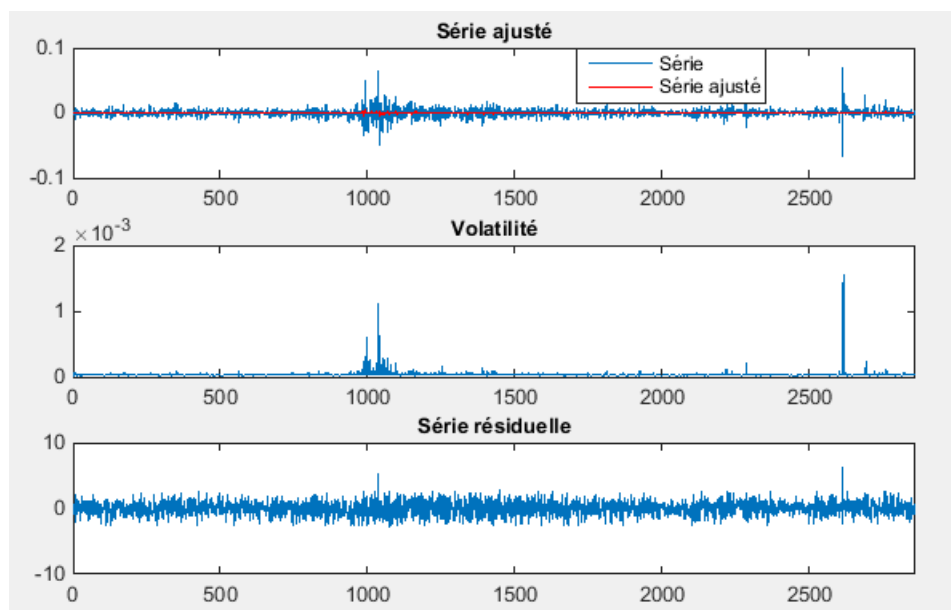


FIGURE 3.45 – Série résiduelle, ajustée, réelle et la volatilité

3.4 Étude de la série DZD / JPY

Considérons la série JPY_t qui représente l'évolution de taux de change de dinar algérien face au Yen Japonais (JPY).

Identification et estimation du modèle

A partir du graphe et le corrélogramme de la série JPY_t (Figures 3.46 et 3.47), nous pouvons dire que la série est non stationnaire. Afin de confirmer ou infirmer la non stationnarité de la série, nous proposons d'appliquer le test ADF sur la série des rendements, notée $DLJPY_t$, définie par

$$DLPY_t = \log JPY_t - \log JPY_{t-1}$$

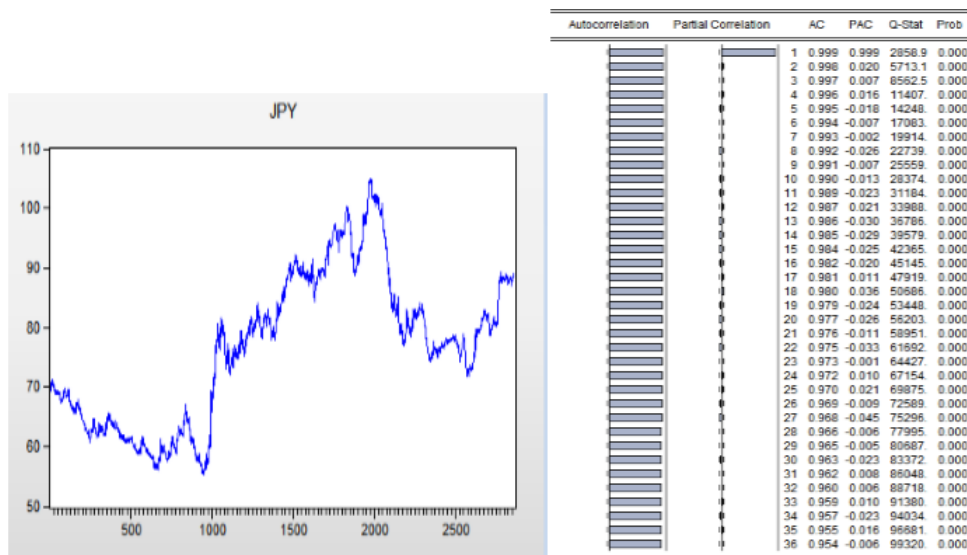
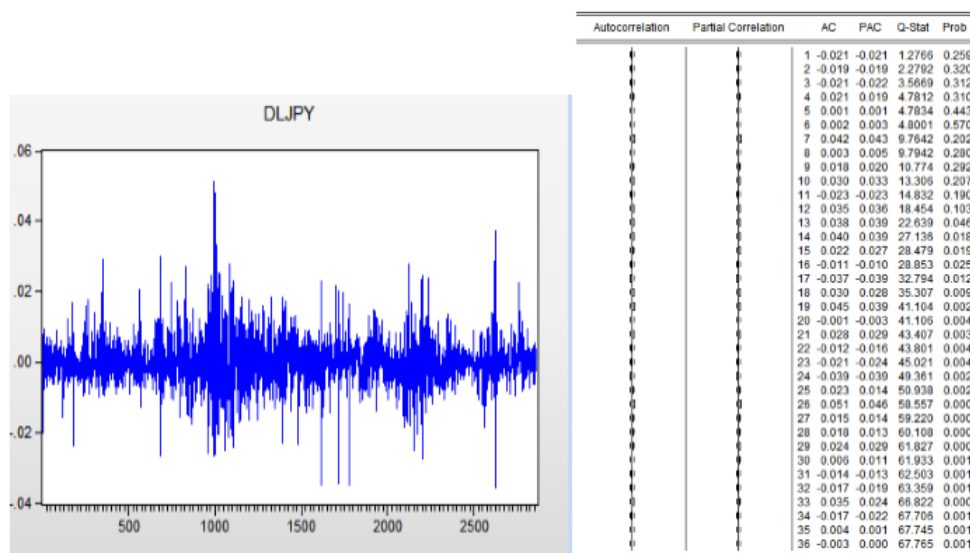


FIGURE 3.46 – Corrélogramme et le graphe de la série JPY_t

Le corrélogramme ainsi que le graphe de cette nouvelle série sont présentés comme suit

FIGURE 3.47 – Corrélogramme et le graphe de la série $DLJPY_t$

A partir du graphe et du corrélogramme associé à la série $DLJPY_t$ on peut dire que la série est stationnaire. Nous avons appliqué le test de Dickey Fuller Augmenté sur les trois modèles (avec tendance et constante, avec constante, et sans constante ni tendance).

Tset de Dickey Fuller Augmenté

Nous avons d'abord estime les paramètres du modèle (3) incluant une constante et trend.

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-54.59822	0.0000
Test critical values: 1% level	-3.961251	
5% level	-3.411378	
10% level	-3.127538	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(DLJPY)
 Method: Least Squares
 Date: 06/10/17 Time: 10:07
 Sample (adjusted): 3 2862
 Included observations: 2860 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
DLJPY(-1)	-1.021187	0.018704	-54.59822	0.0000
C	-2.19E-05	0.000253	-0.086746	0.9309
@TREND(1)	7.24E-08	1.53E-07	0.473466	0.6359
R-squared	0.510617	Mean dependent var	-1.02E-06	
Adjusted R-squared	0.510275	S.D. dependent var	0.009648	
S.E. of regression	0.006752	Akaike info criterion	-7.156998	
Sum squared resid	0.130237	Schwarz criterion	-7.150748	
Log likelihood	10237.51	Hannan-Quinn criter.	-7.154744	
F-statistic	1490.483	Durbin-Watson stat	1.996580	
Prob(F-statistic)	0.000000			

FIGURE 3.48 – Résultat du test de ADF à partir du modèle (3) sur la série $DLJPY_t$

De la Figure (3.48), on constate que l'hypothèse de l'existence d'une racine unitaire est rejetée, puisque la statistique de student associée à la variable endogène retardée $DLJPY_t(-1)$ est égale à (-54.59822) , est inférieure aux valeurs critiques (-3.961251) , (-3.411378) et (-3.127538) tabulées par Dickey-Fuller, respectivement aux seuils 1%, 5% et 10%. Il est clair également, de la Figure (3.48), que le coefficient de la tendance est significativement égale à zéro, car la $|t - statistic| = 0.473466 < 1.96$.

Identification de l'ordre de modèle

Pour identifier l'ordre p et q d'un processus $ARMA$, nous utilisons le corrélogramme de la fonction d'autocorrélation et la fonction d'autocorrélation partiel de la série $DLJPY$. D'après ce corrélogramme, nous remarquons que la fonction d'autocorrélation simple possède des valeurs importantes aux retards $q = 1, 4, 5, 7, \dots$, et que la fonction d'autocorrélation partielle possède des valeurs importantes aux retards $p = 1, 4, 5, 7, \dots$,

Estimation de l'équation

L'application de la méthodologie de Box et Jenkins nous conduit à retenir un modèle $ARMA(7,1)$ pour la série $DLJPY_t$, l'estimation de ce processus par la méthode des moindres carrés ordinaire est représentée dans la figure suivante :

Dependent Variable: DLJPY				
Method: Least Squares				
Date: 06/10/17 Time: 17:55				
Sample (adjusted): 9 2862				
Included observations: 2854 after adjustments				
Convergence achieved after 9 iterations				
MA Backcast: 8				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.911889	0.039096	23.32453	0.0000
AR(7)	0.033257	0.010969	3.031806	0.0025
MA(1)	-0.925500	0.037372	-24.76424	0.0000
R-squared	0.004956	Mean dependent var	8.23E-05	
Adjusted R-squared	0.004258	S.D. dependent var	0.006745	
S.E. of regression	0.006731	Akaike info criterion	-7.163184	
Sum squared resid	0.129162	Schwarz criterion	-7.156922	
Log likelihood	10224.86	Hannan-Quinn criter.	-7.160926	
Durbin-Watson stat	2.022912			
Inverted AR Roots	.96 -.05-.56i	.50-.38i -.47-.25i	.50+.38i -.47+.25i	-.05+.56i
Inverted MA Roots	.93			

FIGURE 3.49 – Résultat d'estimation d'un modèle $ARMA(7,1)$

Validation

Test sur les paramètres

On remarque que tous les paramètres du modèle sont significativement différents de zéro. En effet les statistiques de Student associées sont en valeur absolue supérieures à

1,96, ce qui est confirmé par les probabilités de nullité des coefficients qui sont toutes inférieures à 0,05.

Test sur les résidus

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.012	-0.012	0.3955
		2	-0.011	-0.011	0.7243
		3	-0.015	-0.015	1.3578
		4	0.028	0.028	3.6515 0.056
		5	0.008	0.008	3.8197 0.148
		6	0.010	0.010	4.0958 0.251
		7	0.014	0.016	4.6771 0.322
		8	-0.018	-0.018	5.5605 0.351
		9	-0.002	-0.003	5.5778 0.472
		10	0.013	0.012	6.0464 0.534
		11	-0.041	-0.043	10.943 0.205
		12	0.018	0.018	11.832 0.223
		13	0.025	0.025	13.645 0.190
		14	0.025	0.024	15.453 0.163
		15	0.009	0.013	15.661 0.207
		16	-0.024	-0.024	17.342 0.184
		17	-0.050	-0.051	24.426 0.041
		18	0.015	0.013	25.040 0.049
		19	0.031	0.026	27.739 0.034
		20	-0.013	-0.013	28.201 0.043
		21	0.015	0.020	28.845 0.050
		22	-0.024	-0.024	30.480 0.046
		23	-0.030	-0.030	33.027 0.034
		24	-0.048	-0.047	39.710 0.008
		25	0.014	0.009	40.287 0.010
		26	0.041	0.041	45.054 0.004
		27	0.006	0.008	45.164 0.006
		28	0.009	0.008	45.378 0.008
		29	0.015	0.021	46.031 0.009
		30	-0.002	0.002	46.049 0.013
		31	-0.020	-0.021	47.195 0.013
		32	-0.023	-0.026	48.662 0.013
		33	0.027	0.019	50.842 0.010
		34	-0.020	-0.023	52.042 0.010
		35	-0.001	0.000	52.043 0.014
		36	-0.006	0.002	52.150 0.018

FIGURE 3.50 – Corrélogramme de la série résiduelle calculée à partir le modèle ARMA(7,1)

En analysant le corrélogramme des résidus , nous remarquons que les termes ne sont pas tous significativement nulles, donc il ne forment pas un bruit blanc, par conséquent le modèle $ARMA(7, 1)$ ne peut pas être validé.

En observant l'histogramme de la série JPY_t (*Figure3.51*), nous trouvons que la distribution empirique de notre série est multimodale, ce qui nous mène à utiliser la classe de mélange de modèles autorégressifs (MAR) pour modéliser la série stationnaire $DLJPY_t$.

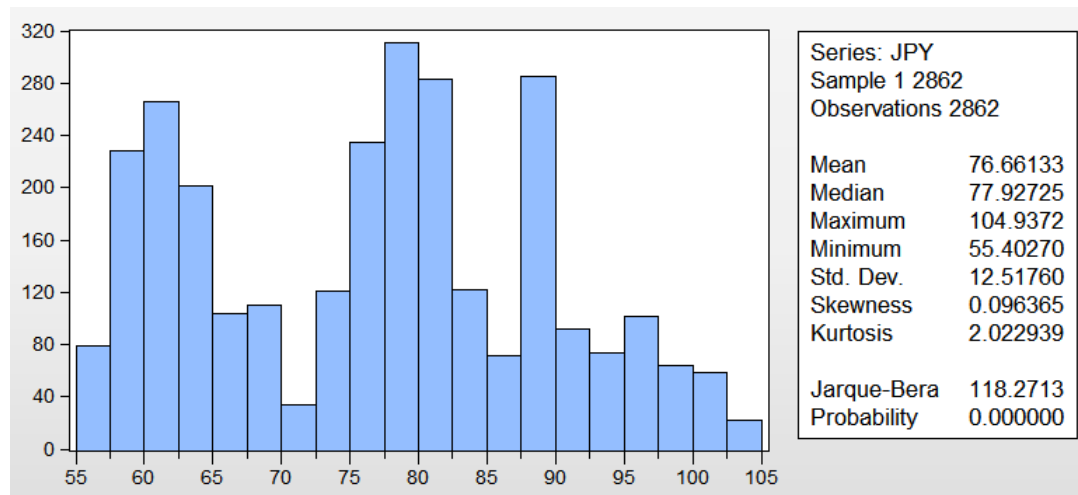


FIGURE 3.51 – Histogramme de la série JPY_t

Parmi les modèles MAR estimés, nous avons trouvé que le meilleur modèle, selon le critère BIC^* , est le modèle $MAR(3; 1, 1, 1)$ où BIC^* égale à 70.6770.

Validation du modèle

Afin de valider le modèle trouvé, nous avons appliqué des tests sur les paramètres, ainsi que sur la série résiduelle standardisée. Le corrélogramme de cette dernière est présenté dans la Figure (3.52).

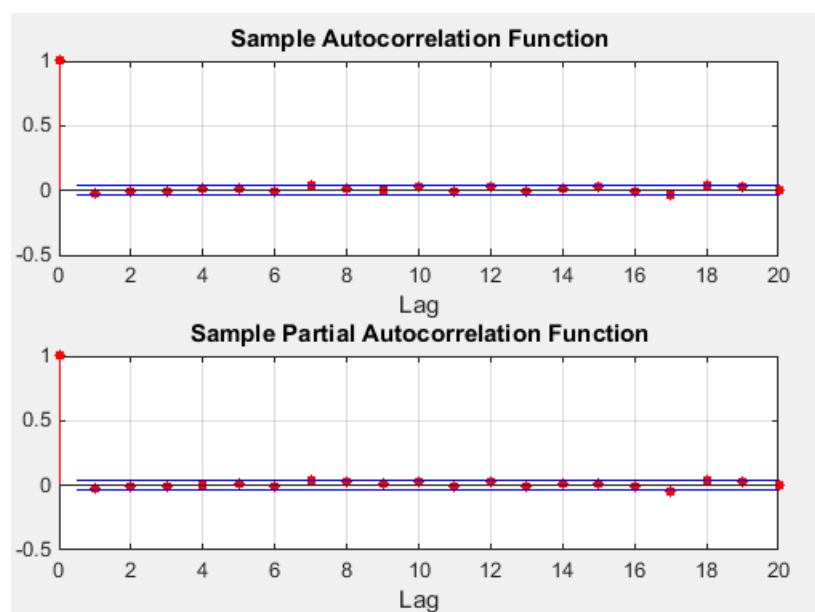


FIGURE 3.52 – Corrélogramme de la série résiduelle

la Figure (3.53) présente la série réelle, résiduelle et ajustée ainsi que la volatilité calculée à partir le modèle estimé.

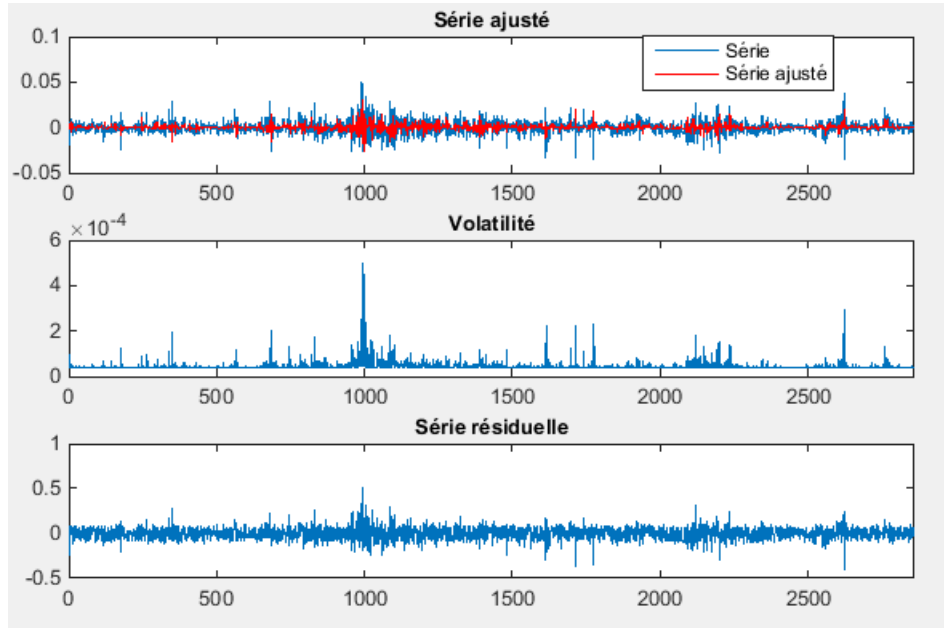


FIGURE 3.53 – Série résiduelle, ajustée, réelle et la volatilité

Nous remarquons que le modèle MAR ajusté capture l'hétéroscédasticité conditionnelle.

Hypothèse nulle de (H_0)	Résultat	Décision
La stationnarité	$z=0.1711$	On accepte H_0
Nullité de la moyenne	$ M_t = 0.0368 < 1.96$	on accepte H_0
Non corrélation	$Q - stat = 223.6148 < \chi^2(190) = 233.9943$	on accepte H_0

L'analyse des fonctions d'autocorrélations simple et partielle montrent qu'il n'existe pas une corrélation entre les résidus. D'autre part, d'après le tableau ci-dessus, nous concluons que les résidus du modèle forment bien un bruit blanc. Par conséquent, on peut valider le modèle $MAR(3; 1, 1, 1)$ pour représenter la série $DLJPY_t$. Le modèle obtenu s'écrit comme suit

$$F(DLJPY_t | \Omega_{t-1}) = 0.2917\Phi\left(\frac{e_{t,1}}{0.0053}\right) + 0.2376\Phi\left(\frac{e_{t,2}}{0.0097}\right) + 0.4707\Phi\left(\frac{e_{t,3}}{0.003}\right)$$

où

$$\begin{cases} e_{t,1} = DLJPY_t + 0.5537 DLJPY_{t-1} \\ e_{t,2} = DLJPY_t - 0.0018 - 0.5734 DLJPY_{t-1} \\ e_{t,3} = DLJPY_t + 4.3295 \times 10^{-4} - 0.0872 DLJPY_{t-1} \end{cases}$$

La Figure (3.54) montre qu'il existe une corrélation entre les carrés des résidus. Ainsi, nous proposons de modéliser la série $DLJPY_t$ par la classe de modèle $MAR - ARCH$.

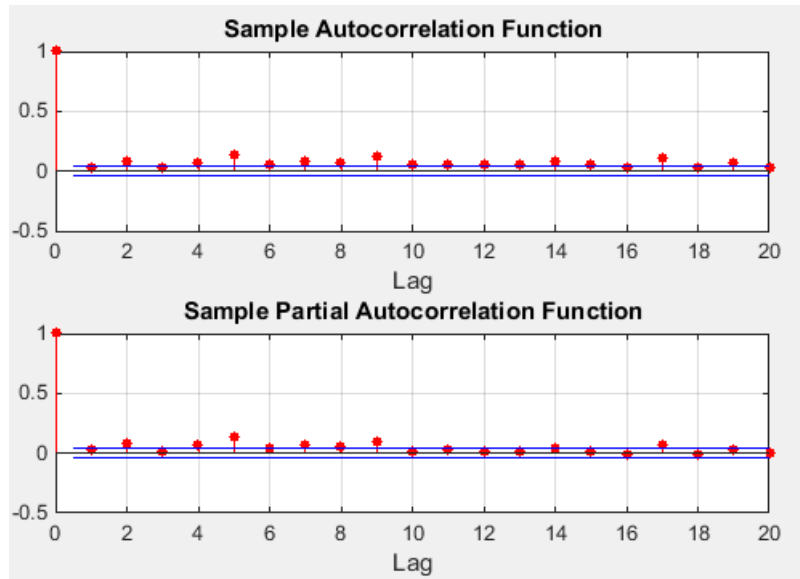


FIGURE 3.54 – Corrélogramme des résidus au carré

Parmi les modèles $MAR-ARCH$ proposés, nous avons trouvé que le meilleur modèle, selon le critère BIC^* , est le modèle $MAR-ARCH(2; 1, 1; 1, 1)$, avec un BIC^* égale à (38.7992)

Pour valider le modèle obtenu, nous avons effectué des tests sur les paramètres et sur la série des résidus standardisés où nous avons constaté, à partir du corrélogramme des résidus (Figure 3.55), qu'il n'existe pas une corrélation entre les résidus.

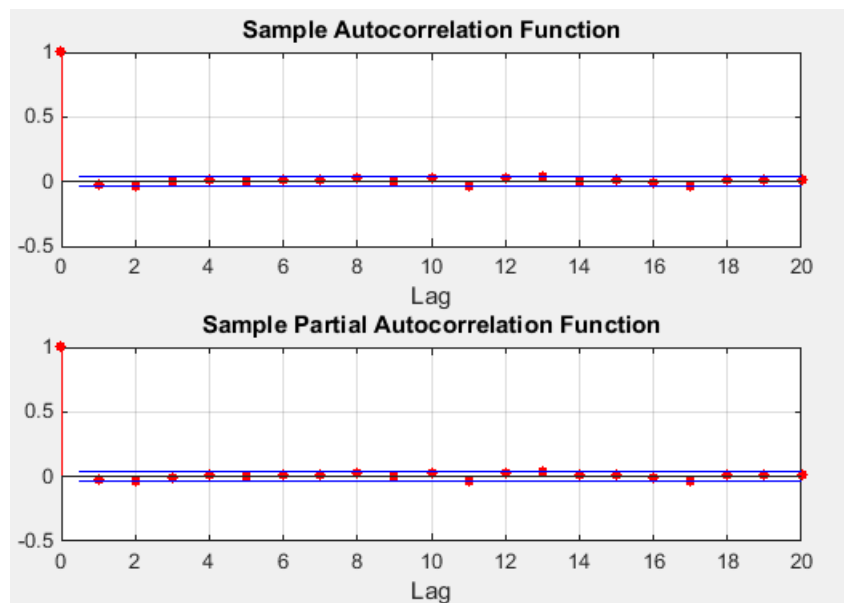


FIGURE 3.55 – Corrélogramme de la série résiduelle

Hypothèse nulle de (H_0)	Résultat	Décision
Nullité de la moyenne	$ M_t = -0.4321 < 1.96$	on accepte H_0
Non corrélation	$Q - stat = 229.0881 < \chi^2(194) = 233.9943$	on accepte H_0

L'analyse des fonctions d'autocorrélation simple et partielle montrent qu'il n'existe pas une corrélation entre les résidus. D'autre part, d'après le tableau ci-dessus, nous concluons que les résidus du modèle forment bien un bruit blanc. Par conséquent, on peut valider le modèle $MAR - ARCH(2; 1, 1; 1, 1)$ pour représenter la série $DLJPY_t$. Le modèle obtenu s'écrit comme suit

$$F(DLJPY_t | \Omega_{t-1}) = 0.9298 \Phi\left(\frac{e_{t,1}}{\sqrt{h_{t,1}}}\right) + 0.0702 \Phi\left(\frac{e_{t,2}}{\sqrt{h_{t,2}}}\right)$$

où

$$\begin{cases} e_{t,1} = DLJPY_t - 0.0689 DLJPY_{t-1} & \text{et } h_{t,1} = 1.8249 \times 10^{-5} + 0.3027 e_{t-1,1}^2 \\ e_{t,2} = DLJPY_t & \text{et } h_{t,2} = 1.6575 \times 10^{-4} + 0.5699 e_{t-1,2}^2 \end{cases}$$

De la Figure (3.56), nous remarquons l'existence des pics à l'intérieur de l'intervalle de confiance, donc il n'y a pas de corrélation entre les résidus au carré.

Les représentations graphiques de la série $DLJPY_t$, la série ajustée par le modèle estimé ainsi que la volatilité calculée à partir du modèle $MAR - ARCH(2; 1, 1; 1, 1)$ sont respectivement données par la Figure(3.57).

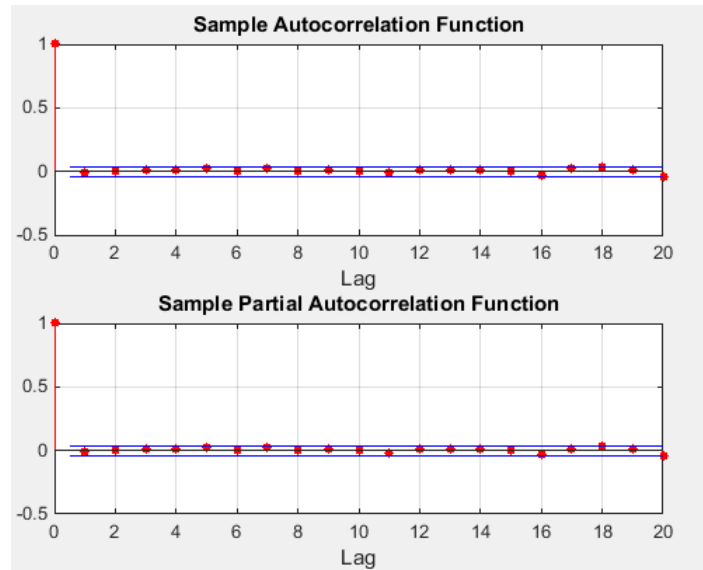


FIGURE 3.56 – Corrélogramme des résidus au carré

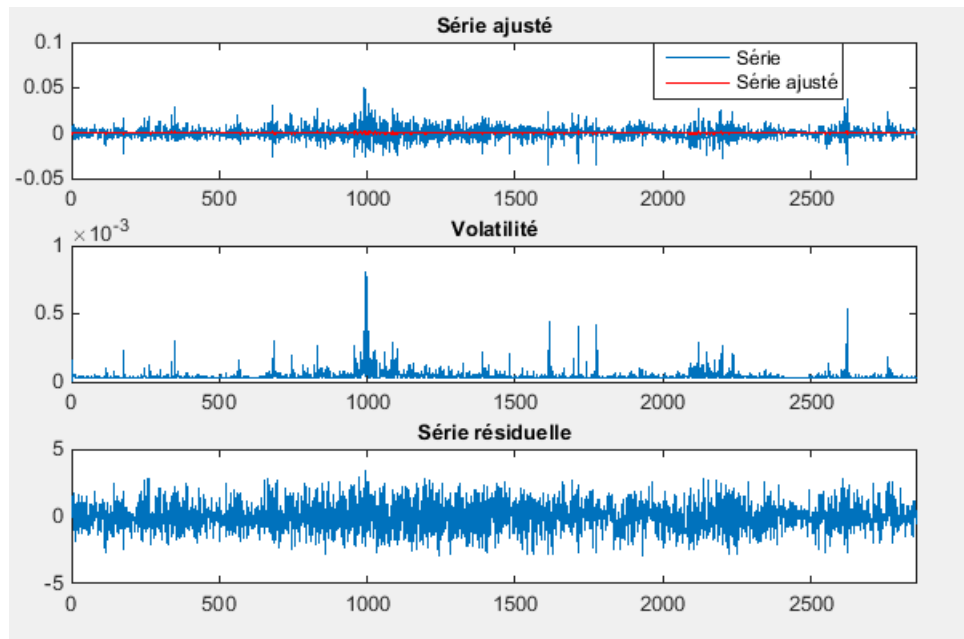


FIGURE 3.57 – Série résiduelle, ajustée, réelle et la volatilité

CONCLUSION GÉNÉRALE

Le taux de change est un élément clé dans les échanges internationaux et les relations économiques entre les pays. Dans un monde de plus en plus instable, le taux de change des monnaies connaît une perturbation. De ce fait, il est donc plus important que jamais de décrypter les statistiques afin de prendre les bonnes décisions qui permettent de faire sortir le dinar de cette situation. Dans le but de limiter les risques de changes, le Crédit Populaire d'Algérie nous a proposé d'étudier et d'analyser la volatilité stochastique du taux de change du dinar algérien (DZD) face aux : Dollar américain(USD), la Monnaie Européenne (EUR), la Livre Sterling (GBP), le Yen Japonais (JPY). Le domaine de la statistique nous offre un ensemble d'outils qui nous facilitent cette tâche. Ainsi, dans cette étude, nous avons fait recours à l'analyse des séries chronologiques. Nous avons essayé de modéliser les séries de données mises à notre disposition par le Crédit Populaire Algérien et qui sont un historique allant de janvier 2005 à décembre 2015. Nous avons procédé selon la méthodologie de Box et Jenkins. Il se trouve que la modélisation linéaire est insuffisante pour expliquer la dynamique de nos séries. Cette situation se présente généralement avec les séries financières. C'est pourquoi, nous nous sommes tournés vers les modèles non linéaires pour pouvoir prendre en considération les caractéristiques de la séries et qui n'ont pas été capturés par les modèles linéaires. En effet, nous avons présenté les modèles MAR et $MAR - ARCH$ et de leur structure probabiliste.

Afin de choisir la mielleur approche adoptée pour le problème posé, nous nous sommes bassée sur les critères suivants :la qualité d'ajustement, la variance conditionnelle et la distribution prédictive obtenue par chaque classe à savoir MAR et $MAR - ARCH$, où les deux méthodes ont été appliquées sur les rendements logarithmiques $DLUS_t$, $DLEU_t$, $DLGBP_t$ et $DLJPY_t$.

En observant les Figures(3.58), (3.59), (3.60) et (3.61), nous constatons que le modèle MAR représente mieux les séries $DLUS_t$, $DLGBP_t$ et $DLJPY_t$ que le modèle $MAR - ARCH$. Par contre, pour la série $DLEU_t$ la représentation $MAR - ARCH$ est le mieux adaptée.

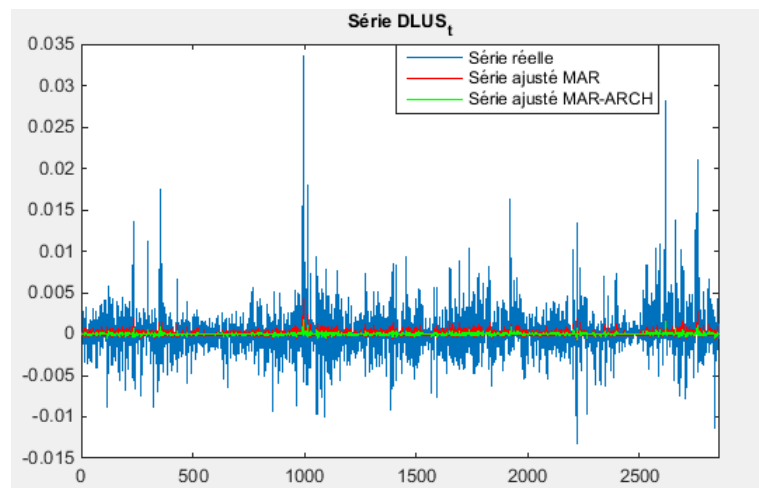


FIGURE 3.58 – Présentation de la série réelle et ajustée

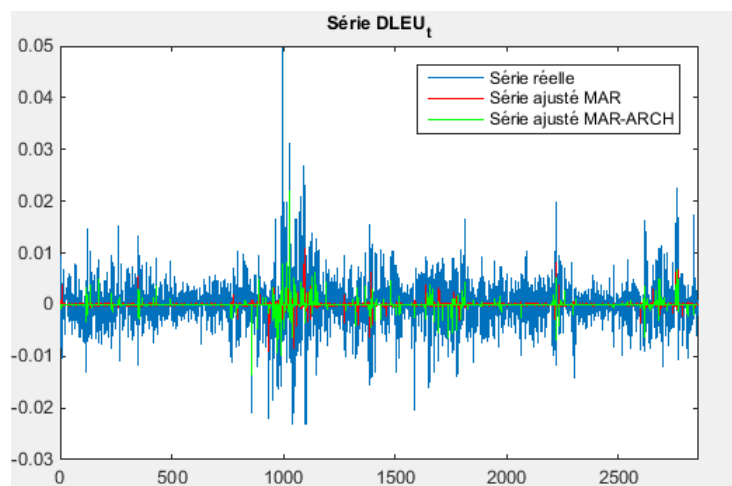


FIGURE 3.59 – Présentation de la série réelle et ajustée

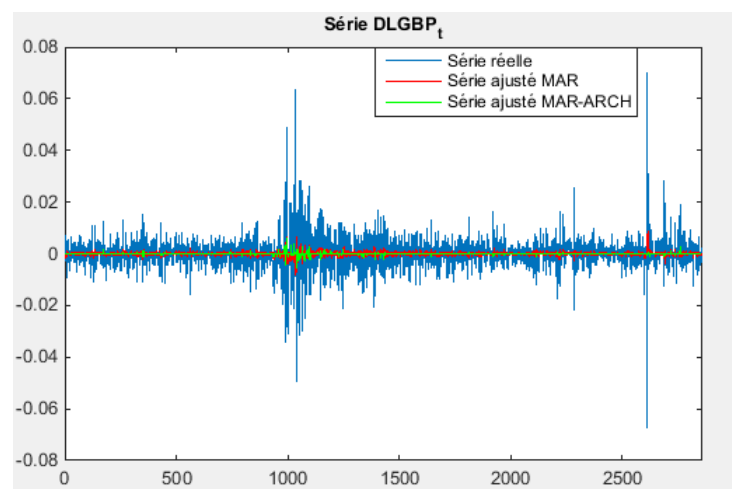


FIGURE 3.60 – Présentation de la série réelle et ajustée

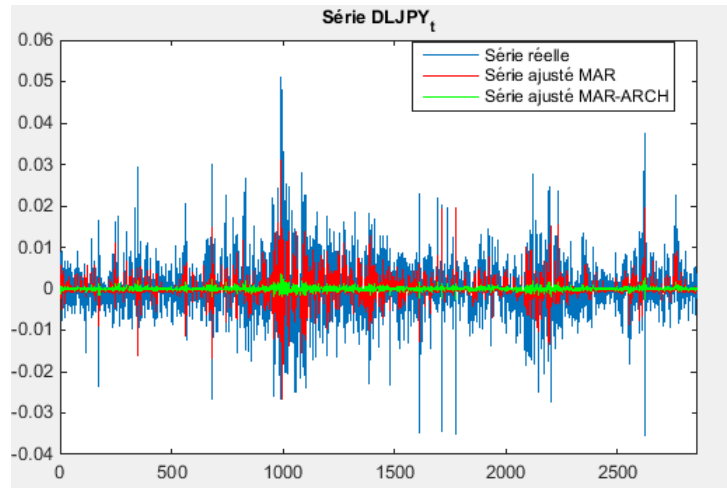


FIGURE 3.61 – Présentation de la série réelle et ajustée

En outre, nous constatons à partir les Figures(3.62), (3.63), (3.64) et (3.65) des variances conditionnelles que les deux modèles MAR et $MAR - ARCH$ ont des volatilités conditionnelles similaires,

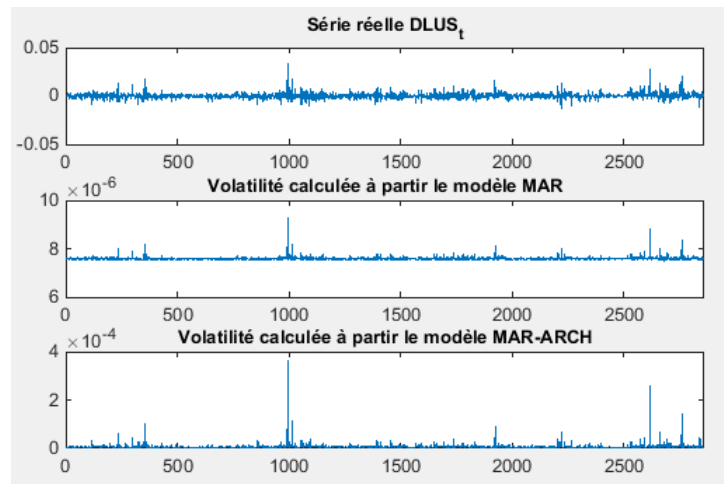


FIGURE 3.62 – Présentation de la série réelle et la volatilité calculée à partir du modèle MAR et MAR-ARCH

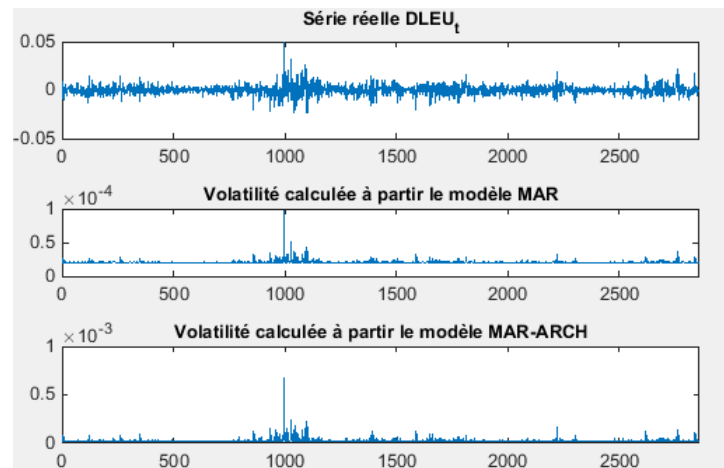


FIGURE 3.63 – Présentation de la série réelle et la volatilité calculée à partir du modèle MAR et MAR-ARCH

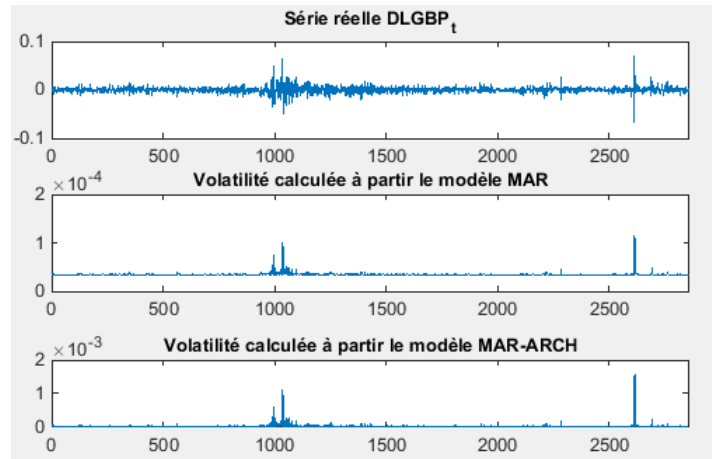


FIGURE 3.64 – Présentation de la série réelle et la volatilité calculée à partir du modèle MAR et MAR-ARCH

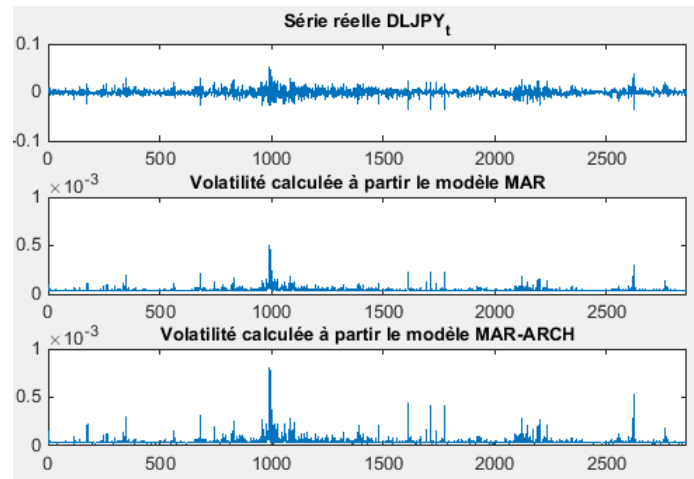


FIGURE 3.65 – Présentation de la série réelle et la volatilité calculée à partir du modèle MAR et MAR-ARCH

A partir des Figures 3.66 et 3.67, nous remarquons que la distribution prédictive pour l'horizon un calculées à partir le modèle $MAR - ARCH$ estimé a des queues plus épaisses que celle du modèle MAR ajusté.

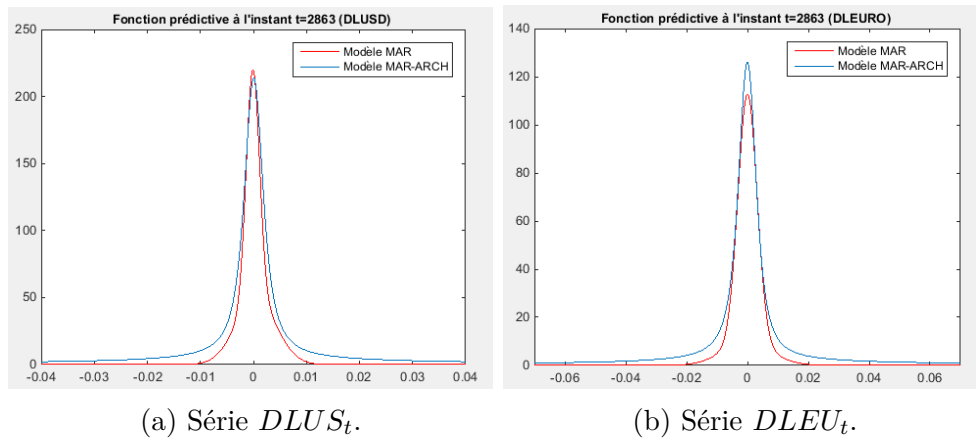


FIGURE 3.66 – Fonction prédictive pour l'horizon 1 à l'instant 2863.

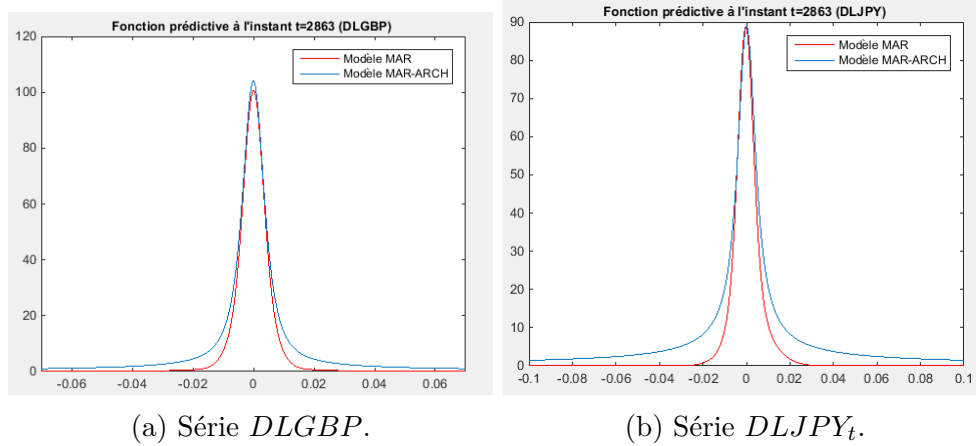


FIGURE 3.67 – Fonction prédictive pour l'horizon 1 à l'instant 2863.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A.AKNOUCHE, Recursive online EM estimation of mixture autoregressions, Faculty of Mathematics University of Science and Technology Houari Boumedienne.
- [2] G.N.BOCHNAKOV, (2009) Analytic expressions for predictive distributions mixture autoregressive models Statistics and Probability Letters 79,1704,1709
- [3] A.CHARPENTIER,cours de series temporelles theorie et applications, universite paris dauphine, universite paris dauphine.
- [4] C.BENACHOUR,S.YOUSRI,Analyse de la volatilité Stochastique du taux de change des principales Monnaies, U.S.T.H.B, 4/6/10.
- [5] C. HURLIN, Econométrie Appliquée Séries Temporelles, UFR Economie Appliquée. Cours de Tronc Commun.
- [6] C.S. WONG and W.K.LI, On a Mixture Autoregressive Model, Journal of the Royal Statistical Society :Series B (Statistical Methodology), 62.1,(2000), 95-115.
- [7] C.S. WONG and W.K. LI, On a Mixture Autoregressive Conditional Heteroscedastic Model, Journal of the American Statistical Association, 96. 455 (2001), 982-995.
- [8] F.MADI, L.TEFFAH, Prospection d'une nouvelle classe de Mélanges de Modèles Autorégressifs à erreurs ARCH, U.S.T.H.B, 4/2/2007.
- [9] T.BOUTCHACHA ,Séries Financières et Mélange de Modèles Autorégressifs,U. S. T. H. B.

Le taux de change est un élément clé dans les échanges internationaux et les relations économiques entre les pays. Dans un monde de plus en plus instable, le taux de change des monnaies connaît une forte perturbation. Ces dernières années, le dinar algérien a connu une dévaluation remarquable face aux autres monnaies.

Ce travail propose de modéliser le taux de change du dinar algérien à partir d'une série de données mise à notre disposition par le Crédit Populaire Algérien, afin de servir par la suite à prendre des décisions qui permettent de diminuer le risque de change. Le taux de change est vu comme une série chronologique.

Les différents modèles sont étudiés et présentés durant ce mémoire, à savoir MAR , $MAR - ARCH$, ...etc. Dans le but de trouver le modèle qui représente le mieux notre série sous étude.

Mots clés

Taux de change, série chronologique, risque de change, MAR et $MAR - ARCH$.