Математика для Data Science. 1 часть. Математический анализ и линейная алгебра

1. Математический анализ. Теория множеств.

Тема занятия

Основные понятия математического анализа. Предмет.

Основы теории множеств.

Цель занятия

Познакомиться с предметом математического анализа и изучить основы теории множеств.

План занятия

- Основные понятия математического анализа. Предмет.
- Основы теория множеств

Литература

- Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х. Математический анализ в 2 ч.
- Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу
- Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т.
- Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа (в двух томах)
- Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу
- Кудрявцев Л.Д. Сборник задач по математическому анализу

Основные понятия математического анализа. Предмет

Под термином «математический анализ» подразумевается прежде всего дифференциальное и интегральное исчисление, созданное Ньютоном и Лейбницем в XVII в.

Составные части математического анализа разрослись, что стали отдельными математическими дисциплинами: теория функции комплексного переменного, теория вероятностей, дифференциальные уравнения, математическая статистика, уравнения математической физики и т.д.

В широком смысле математический анализ включает в себя все эти области.

Теория множеств

- **Множество** – совокупность объектов любой природы.

«Под многообразием или множеством я понимаю вообще всякое многое, т.е. всякую совокупность определённых элементов, которая может быть связана в одно целое с помощью некоторого закона».

Георг Кантор

$a \in M$ - элемент a принадлежит множеству M

$a \notin M$ - элемент a не принадлежит множеству M

Способы задания множеств

1) указанием признаков (характеристических свойств), присущих всем элементам множества и только им

$M = \{x \mid P(x)\}$ **где $P(x)$ – свойство**

$$A = \{x \mid x \in R,\ x^2 - 4 = 0\}$$

2) перечислением всех элементов множества (если это возможно)

$$M = \{a; b; \ldots\}$$

$$A = \{-2;\ 2\}$$

Пустое множество $\varnothing$ $B = \{x \mid x \in R,\ x^2 + 1 = 0\}$

Способы задания множеств

N – множество натуральных чисел

R – множество действительных чисел

$$A = \{x \mid x \in R, 0 \le x \le 4\}$$

$$C = \{x \mid x \in N, 0 \le x \le 4\} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$$

Операции над множествами

Два множества А и В называются **равными**, если каждый элемент множества А является элементом множества В и, наоборот, каждый элемент множества В является элементом множества А.

А = В множество А равно множеству В.

Свойства отношения равенства множеств:

1. $A = A$ *рефлексивность*
2. $(A = B) \Rightarrow (B = A)$ *симметричность*
3. $((A = B)\text{ и }(B = C)) \Rightarrow (A = C)$ *транзитивность*

Операции над множествами

Множество А называется **подмножеством** множества В, если каждый элемент множества А является элементом множества В. Отношение включения $\subseteq$

$$A \neq B \wedge A \subseteq B \Rightarrow A \subset B$$

$\subset$ отношение строгого включения

Объединением двух множеств А и В называется множество С, состоящее из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств.

$$C = A \bigcup B$$

$$C = A \bigcup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B) \vee ((x \in A) \wedge (x \in B))\}$$

Операции над множествами

Пересечением двух множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов, которые принадлежат обоим множествам одновременно.

$C = A \bigcap B$ $\qquad$ $C = A \bigcap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$

Разностью двух множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов множества A, не принадлежащих множеству B.

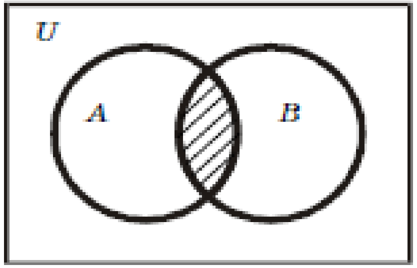
$C = A \setminus B$ $\qquad$ $C = A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$

Пример: $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$ $\qquad$ $B = \{3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$

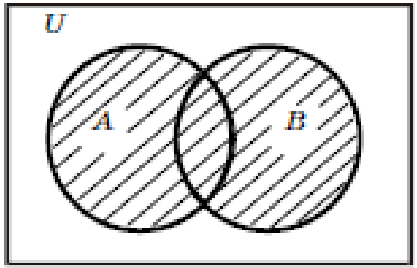
$A \bigcup B = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$

$A \bigcap B = \{3;\ 4;\ 5\}$ $\qquad$ $A \setminus B = \{1;\ 2\}$

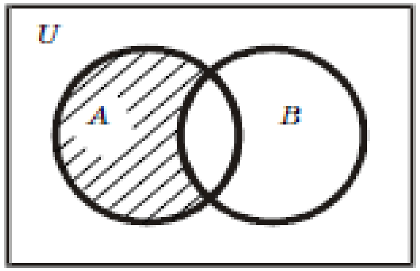
Диаграммы Эйлера-Венна



$A \bigcap B$



$A \bigcup B$

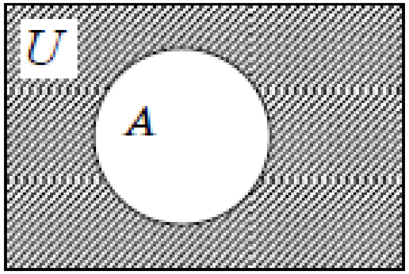


$A \setminus B$

U - Универсальное множество

$\overline{A}$ Дополнение множества А до универсального множества

$$\overline{A} = U \setminus A = \{x \mid x \notin A\}$$



$\overline{A}$

Свойства операций над множествами

1. $A \bigcup B = B \bigcup A$

2. $A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$

3. $A \bigcap B = B \bigcap A$

4. $A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C$

5. $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$
   $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$

6. $A \bigcup A = A$
   $A \bigcap A = A$

7. $A \bigcap \varnothing = \varnothing$
   $A \bigcup \varnothing = A$

8. $A \bigcup U = U$
   $A \bigcap U = A$

9. $A \bigcap \overline{A} = \varnothing$
   $A \bigcup \overline{A} = U$
   $\overline{\overline{A}} = A$

10. $\overline{\varnothing} = U$
    $\overline{U} = \varnothing$

Числовые множества

Множества натуральных чисел N

N = {1, 2, 3, …}

Множество N упорядочено, т.е.

$$\forall a, b \in N \Rightarrow (a > b) \vee (a = b) \vee (a < b)$$

Множество целых чисел Z $N \subset Z$

Z = {0, +-1, +-2, +-3, ….}

Множество рациональных чисел Q

$$Q = \left\{ q \mid q = \frac{p}{n}, p \in Z, n \in N \right\}$$

Множество действительных чисел R

Подмножества числовой прямой

$R = (-\infty; +\infty)$

название	обозначение	изображение
отрезок	$[a; b] = \{x \mid x \in R, a \le x \le b\}$	
интервал	$(a; b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$	
полуинтервалы	$[a; b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \le x < b\}$ $(a; b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \le b\}$	 

$[a; +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \ge a\}$

$(a; +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > a\}$

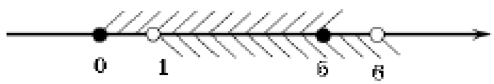
$(-\infty; b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \le b\}$

$(-\infty; b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < b\}$

Пример

Найти объединение и пересечение множеств

$A = [0; 5]$ $\qquad$ $B = (1; 6)$



$$A \bigcap B = (1; 5]$$

$$A \bigcup B = [0; 6)$$

Мощность множества

Множества A и B называются **эквивалентными**, если между ними существует взаимно однозначное соответствие, т.е.

$$\forall a \in A \mapsto b \in B \qquad A \sim B$$
$$\forall b \in B \mapsto a \in A$$

M конечное множество

$$\forall M \quad \exists n \in N: \quad M \sim \{1, 2, \ldots, n\}$$

n – мощность множества M

Вопросы?