Линейная алгебра

Математика – это наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира. **Математика** является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но и **элементом общей культуры**.

Алгебра – часть математики, изучающая системы объектов, в которых установлены алгебраические операции.

Алгебраическая операция – это отображение прямой степени множества A в множество A: $A^n \to A$.

Линейная алгебра – часть алгебры, изучающая векторные пространства, линейные отображения, линейные, билинейные и квадратичные функции на векторных пространствах.

1. Матрицы и определители

Матрица – прямоугольная таблица чисел, расположенных строками и столбцами. Числа, составляющие матрицу, называются ее **элементами**.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & \end{pmatrix}$$

- не является матрицей, поскольку не составляет прямоугольную таблицу чисел.

Матрица m × n

Матрица размера $m \times n$ содержит m строк и n столбцов.

a_{ij} – элемент матрицы, находящийся в строке с номером *i* и столбце с номером *j*.

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица $m \times n$

Матрица-строка и матрица-столбец

Матрица, состоящая из одной строки, называется **матрицей-строкой** или вектором. Матрица, состоящая из одного столбца, называется **матрицей-столбцом** (вектором).

$$A = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}) \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \ldots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$$

Матрица-строка **Матрица-столбец**

Квадратная матрица

Матрица называется **квадратной матрицей n-го порядка**, если число ее строк равно числу столбцов и равно n.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица 3-го порядка

Нулевая матрица

Матрица любого размера называется **нулевой** матрицей, если все ее элементы равны нулю.

$$0_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Нулевая матрица

Диагональная матрица

Если недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, матрица называется **диагональной**.

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица

Единичная матрица

Если у диагональной матрицы все диагональные элементы равны единице, то матрица называется **единичной** матрицей.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Единичная матрица

Равные матрицы

Равными называются матрицы одного размера, если они совпадают поэлементно.

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Равные матрицы

Умножение матрицы на число

Произведением матрицы А на число λ называется матрица B=λA, элементы которой получены умножением:

$$b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$5A = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 15 & 10 \end{pmatrix} \qquad 2B = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 4 \\ 4 & 2 & 6 \\ 8 & 2 & 14 \end{pmatrix}$$

Сложение матриц

Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m \times n$ называется матрица C = A + B, элементы которой получаются сложением:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Пример. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Вычитание матриц

Разность двух матриц A и B одинакового размера определяется через операции сложения и умножения на число:

$$A - B = A + (-1) \cdot B$$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 0+2 \\ -1-3 & 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Умножение матриц

Умножение матрицы А на матрицу В **возможно**, когда число столбцов первой равно числу строк второй (матрицы согласованы).

Произведением матриц А·В называется матрица С, для которой:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

Пример

Вычислить произведение матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 0\cdot 0 + 2\cdot 3 & 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot 4 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 2 + 1\cdot 0 + 0\cdot 3 & 3\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 3\cdot 1 + 1\cdot 4 + 0\cdot 1 \end{pmatrix}$$

Ответ.

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Свойства операций над матрицами

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$
4. $A (B + C) = AB + AC$
5. $(A + B) C = AC + BC$
6. $\lambda (AB) = (\lambda A) B = A (\lambda B)$
7. $A (BC) = (AB) C$

8. **$AB \neq BA$!**

Если $AB = BA$ матрицы A и B называются **перестановочными**.

Пример

Найдем AB и BA для матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = AB = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 1 & 17 \end{pmatrix}$$

$$D = BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 16 & 11 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Мало того, что AB ≠ BA, они даже имеют разный размер!

Транспонирование матрицы

Транспонирование матрицы означает переход от матрицы A к матрице A^T, в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Исходная матрица **Транспонированная матрица**

Определитель матрицы

Определителем квадратной матрицы является число, вычисляемое специальным образом и характеризующее матрицу. Обозначается **|A|** или **def A** или **Δ**.

Для матрицы **первого** порядка:

$$\Delta_1 = a_{11}$$

Для матрицы **второго** порядка:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Определитель матрицы

Для матрицы **третьего** порядка:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

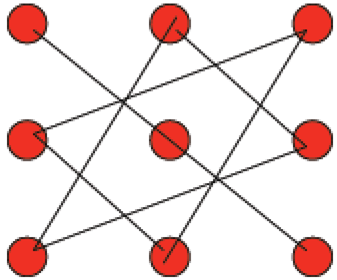
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{23}a_{33}$$

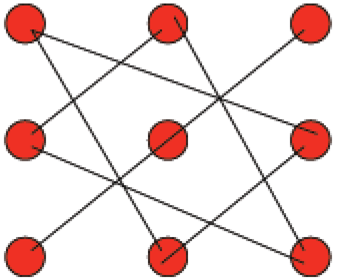
Определитель матрицы

Для матрицы **третьего** порядка:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$



Слагаемые +



Слагаемые –

Вычисление определителя

Для матрицы ***n*-го порядка**:

$$|A| = \sum_{J} (-1)^{r(J)} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$$

В этой формуле суммируются всевозможные наборы по *n* элементов, в которые из каждого столбца и каждой строки входит по одному элементу. Сумма берется по всем **перестановкам** *J* из *n* элементов. Их количество равно *n*!

Число *r (J)* есть число **инверсий** (беспорядков) в перестановке *J*. Инверсия – такая пара чисел, в которой большее предшествует меньшему.

Минор

Минором M_{ij} элемента определителя a_{ij} называется определитель, полученный вычеркиванием строки и столбца, в которых находится рассматриваемый элемент.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Минор M_{21}
для элемента
a_{21}

Алгебраическое дополнение

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется его минор M_{ij} со знаком:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Примеры.

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{3+1} = M_{31}$$

Теорема Лапласа

Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

Эта запись называется **разложением определителя** по элементам *i*-строки.

Пример

Найти определитель разложением по строке.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение.

$$|A| = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(3 \cdot 1 - 2 \cdot 1) + (-1)(0 \cdot 1 - 5 \cdot 1) + 0 = 2 + 5 = 7$$

Свойства определителей

Свойство 1. Если какая-либо строка определителя состоит из нулей, определитель равен нулю.

Свойство 2. Если все элементы какой-либо строки умножить на число, то определитель тоже умножится на это число.

Свойство 3. При транспонировании матрицы, ее определитель не изменяется.

Свойство 4. При перестановке двух строк матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.

Свойство 5. Если матрица содержит две одинаковые строки, ее определитель равен нулю.

Свойство 6. Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки прибавить элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

Пример

Вычислить определитель методом приведения к треугольному виду:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

Решение.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 12/5 & 4 \\ 0 & 7/5 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 7$$

Сложим 1-й и 2-й столбцы, затем 2-й и 3-й, умноженный на 3/5, получаем треугольную матрицу. Перемножаем диагональ.

Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется **обратной** по отношению к квадратной матрице A, если при умножении этой матрицы на А как справа, так и слева получится единичная матрица:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

Теорема. Обратная матрица существует, тогда и только тогда, когда исходная матрица имеет определитель, не равный нулю.

В этом случае говорят, что матрица **невырожденная**.

Пример

Вычислим обратную матрицу для матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение.

1. Вычисляем определитель.

$$|A| = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) + (-1) \cdot 2 \cdot (3 \cdot 2 - 1 \cdot 0) + 0 = 3 - 12 = -9$$

Матрица невырожденная.

Решение

2. Находим алгебраические дополнения к каждому элементу матрицы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 \qquad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

3. Составим матрицу:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Заполняем обратную матрицу

4. Транспонируем, разделим на |A|, получим обратную для A:

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}^T}{|A|} = \begin{pmatrix} \frac{3}{-9} & \frac{-4}{-9} & \frac{2}{-9} \\ \frac{-6}{-9} & \frac{2}{-9} & \frac{-1}{-9} \\ \frac{3}{-9} & \frac{-1}{-9} & \frac{-4}{-9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

Миноры k-го порядка

Внутри любой матрицы A размера m x n вычеркиванием некоторых строк и столбцов можно получить квадратные **подматрицы k-го порядка**, где k – не больше меньшего из чисел m и n. Определители таких подматриц называются **минорами k-го порядка** матрицы A.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & \cancel{1} & 1 \\ 0 & \cancel{3} & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Матрица 2 x 3

Минор 2-го порядка

Ранг матрицы

Рангом матрицы A (matrix rank) называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы. Обозначается r(A).

Свойства ранга матрицы:

1. Не превосходит меньшего из размеров матрицы.
2. Равен нулю тогда и только тогда, когда матрица нулевая.
3. Для квадратной матрицы n x n ранг r(A)=n тогда и только тогда, когда матрица A невырожденная.

Элементарные преобразования

1. Отбрасывание нулевой строки (столбца)
2. Умножение всех элементов строки (столбца) на число, не равное нулю.
3. Изменение порядка строк (столбцов).
4. Прибавление к каждому элементу строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на некоторое число.
5. Транспонирование матрицы.

Теорема. Ранг матрицы при элементарных преобразованиях не изменяется.

Ступенчатая матрица

Матрица А называется **ступенчатой**, если она имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix} \qquad a_{ii} \neq 0$$

Ранг ступенчатой матрицы равен *r*, так как имеется минор *r*-го порядка не равный нулю.

Алгоритм вычисления ранга матрицы

Ранг матрицы вычисляется путем приведения ее к ступенчатому виду.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4-4 & -1-10 & 5-12 \\ 2-2 & -6-5 & -1-6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & -11 & -7 \\ 0 & -11 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & -11 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & -11 & -7 \end{pmatrix}$$

Ранг равен 2

Линейная комбинация строк матрицы

Обозначим строки матрицы a_1 , a_2, a_3, …, a_m. Две строки называются равными, если они совпадают поэлементно. Можно рассмотреть операции умножения строки на число и сложения строк, которые проводятся поэлементно.

Строка называется **линейной комбинацией** других строк, если она равна сумме произведений этих строк на произвольные числа:

$$a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_s a_s$$

Линейная зависимость строк матрицы

Строки матрицы a_1 , a_2, a_3, …, a_m называются **линейно зависимыми**, если существуют такие числа λ_1 , λ_2, λ_3, …, λ_m, не равные нулю одновременно, что линейная комбинация строк равна нулевой строке:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m = 0$$

Линейная зависимость строк означает, что хотя бы одна строка матрицы является линейной комбинацией остальных. Если равенство выполняется только при нулевых коэффициентах, строки являются **линейно независимыми**.

Теорема о ранге матрицы

Теорема. Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк или столбцов, через которые линейно выражаются все остальные ее строки (столбцы).

2. Системы линейных уравнений

Система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Решением системы линейных уравнений называется такая совокупность n чисел, при подстановке которых каждое уравнение системы превращается в верное равенство.

Виды систем уравнений

Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет решений.

Система уравнений называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения.

Две системы называются **равносильными**, или **эквивалентными**, если они имеют одно и то же множество решений.

Запись системы в матричной форме

Систему линейных уравнений можно записать в матричной форме:

$$AX = B$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Матрица коэффициентов **Столбец переменных** **Столбец свободных членов**

Метод обратной матрицы

Пусть число уравнений равно числу неизвестных $m = n$. Для системы

$$AX = B$$

ее решение находится методом **обратной матрицы**:

$$X = A^{-1}B$$

Необходимой условие – матрица должна быть невырожденная, то есть ее определитель не равен нулю:

$$|A| \neq 0$$

Пример

Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Решение. Находим обратную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение

Теперь находим решение:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ.

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Метод Крамера

Пусть Δ – определитель матрицы системы А, а Δ_j – определитель матрицы, получаемой из матрицы А заменой j–го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$$

Формулы Крамера

Пример

Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

Решение

А теперь вычислим еще три определителя:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 10 \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 5$$

Свободный столбец вместо первого столбца

Свободный столбец вместо второго столбца

Свободный столбец вместо третьего столбца

По формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{5} = 4 \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2 \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1$$

Метод Гаусса

Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных, заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последних, находятся все переменные.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a_{22}^{*}x_2 + \ldots + a_{2r}^{*}x_r + \ldots + a_{2n}^{*}x_n = b_2^{*} \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{rr}^{*}x_r + \ldots + a_{rn}^{*}x_n = b_r^{*} \end{cases}$$

Расширенная матрица системы

Преобразования Гаусса удобно проводить с матрицей коэффициентов, в которую дополнительно включен столбец свободных членов:

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Пример

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

Решение

Преобразовываем к диагональному виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 5/3 & 5/3 \end{array}\right)$$

Теперь находим корни:

$$x_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad 3x_2 - 1 = 5 \quad \Rightarrow \quad x_1 - 2 + 1 = 3$$

$$x_2 = 2 \qquad\qquad x_1 = 4$$

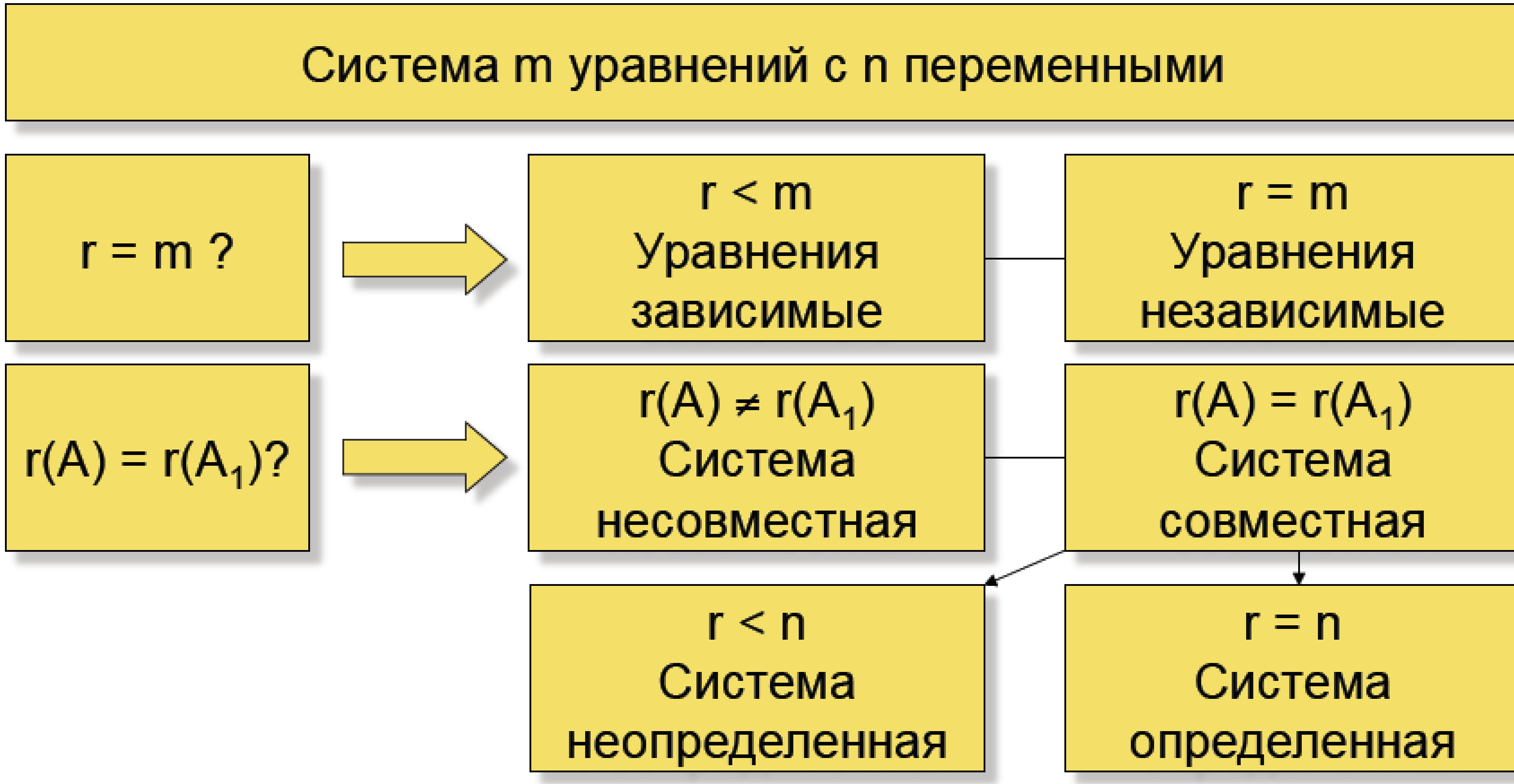
Теоремы

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы.

Теорема. Если ранг матрицы совместной системы равен числу переменных, то система имеет единственное решение.

Теорема. Если ранг матрицы совместной системы меньше числа переменных, то система неопределенная и имеет бесконечное множество решений.

Исследование системы



Система линейных однородных уравнений

Система m линейных уравнений с n переменными называется **системой линейных однородных уравнений**, если все их свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Эта система всегда **совместна**, так как всегда имеет, по крайней мере, нулевое решение.

Решение системы

Система линейных однородных уравнений имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы коэффициентов при переменных меньше числа переменных:

$$r(A) < n$$

Свойства решений:

1. Если e =(x_1, x_2, …, x_n) решение, то λe тоже решение.

2. Если e_1 и e_2 решения, то любая их линейная комбинация тоже решение: $c_1e_1 + c_2e_2$

Фундаментальная система решений

Система линейно независимых решений $e_1, e_2, \ldots, e_k$ называется **фундаментальной**, если каждое решение системы является линейной комбинацией решений $e_1, e_2, \ldots, e_k$.

Теорема. Если ранг *r* матрицы коэффициентов при переменных системы линейных однородных уравнений меньше числа переменных *n*, то всякая фундаментальная система решений этой системы состоит из $n - r$ решений.

Общее решение

Общее решение системы линейных однородных уравнений:

$$c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ke_k$$

где $e_1, e_2, \ldots, e_k$ – любая фундаментальная система решений,

$c_1, c_2, \ldots, c_k$ – произвольные числа,

$k = n - r$

Общее решение системы m линейных уравнений с n переменными равно сумме общего решения соответствующей ей системы однородных линейных уравнений и произвольного частного решения этой системы.

3. Векторные пространства

Скалярными величинами или **скалярами** (scalar quantity, scalar) называются величины, которые полностью определяются заданием их числовых значений.

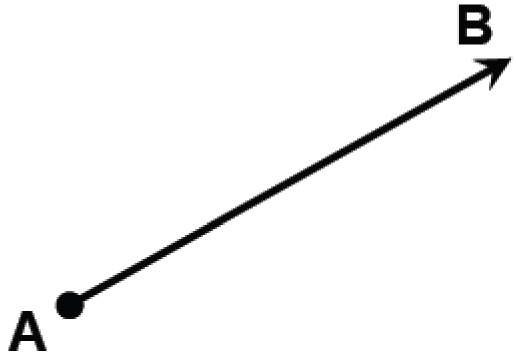
Объем, длина, площадь, температура.

Векторными величинами (vector quantity) называются величины, для определения которых кроме числового значения необходимо знать еще их направление.

Смещение физического объекта, скорость ветра, сила.

Вектор

Вектором называется направленный отрезок, имеющий определенную длину. Одна из ограничивающих точек является **началом**, другая **концом** вектора. **Длина** вектора называется **модулем** и равна длине отрезка, изображающего вектор.



Обозначения.

Вектор:

$\overrightarrow{AB}$ $\quad$ $\vec{a}$

Длина вектора:

$|\overrightarrow{AB}|$ $\quad$ $|\vec{a}|$

Единичный и нулевой векторы

Вектор называется **нулевым**, если его начало и конец совпадают. Нулевой вектор не имеет направления и имеет длину, равную нулю.

$$|\vec{0}| = 0$$

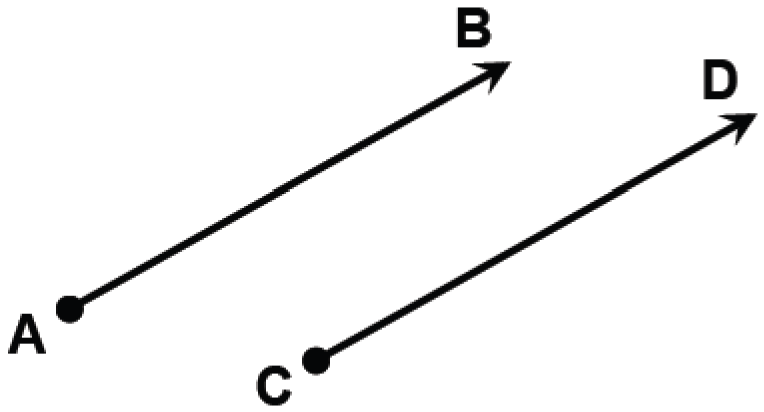
Вектор, длина которого равна единице, называют **единичным**.

$$|\vec{a}| = 1$$

Коллинеарные и равные векторы

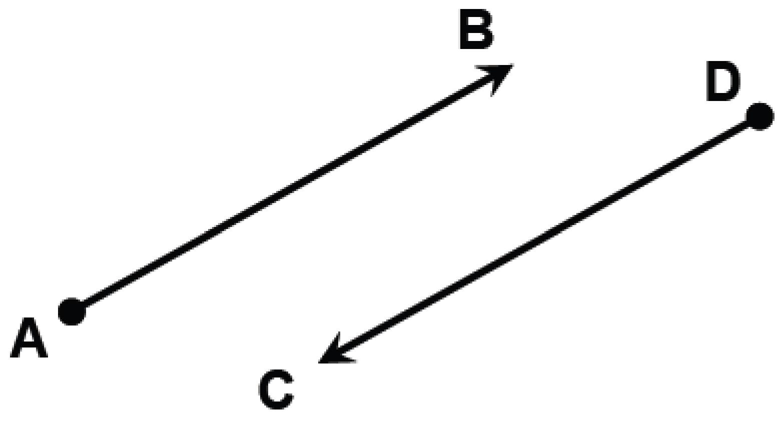
Векторы называются **коллинеарными**, если они расположены на параллельных прямых или на одной прямой. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Два вектора называются **равными**, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление.



Противоположные векторы

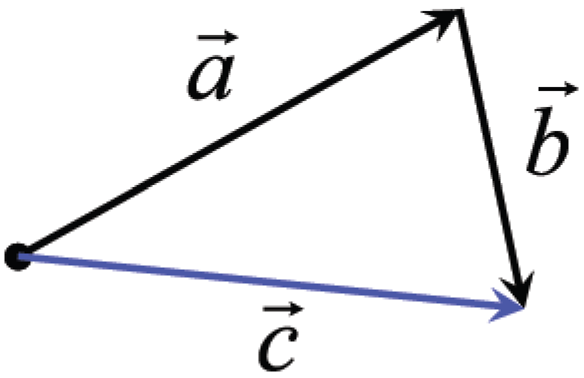
Два коллинеарных вектора (отличные от нулевых векторов), имеющие равную длину, но противоположно направленные, называются **противоположными**.



Сумма векторов

Суммой двух векторов называется вектор, начало которого совпадает с началом первого, а конец с концом второго при условии, что векторы отложены один за другим (правило треугольника).

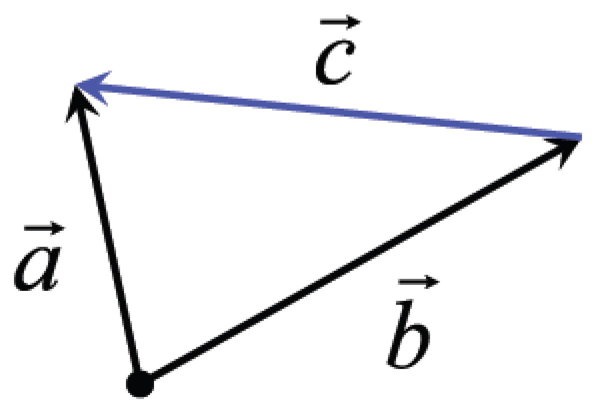
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$



Разность векторов

Разностью двух векторов называется третий вектор, сумма которого с вычитаемым дает первый вектор.

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$$



Произведение вектора на число

Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}$$

коллинеарный исходному вектору, имеющий длину:

$$|\lambda|\cdot|\vec{a}|$$

имеющий то же направление, что и исходный, если $\lambda > 0$, и противоположное направление, если $\lambda < 0$.

Линейная зависимость векторов

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются **линейно зависимыми**, если существуют числа λ_1, λ_2,…, λ_n, не все равные нулю, для которых выполняется равенство:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n = 0$$

Векторы называются **линейно независимыми**, если это равенство возможно только при

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

Линейная комбинация векторов

Вектор $\vec{a}_m$ называется **линейной комбинацией векторов**

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{m-1}$$

если найдутся такие действительные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$, что его можно представить в виде суммы:

$$\vec{a}_m = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_{m-1} \vec{a}_{m-1}$$

Линейная зависимость векторов

Если несколько векторов линейно зависимы, то хотя бы один из них можно представить в виде линейной комбинации остальных.

Если один из векторов можно представить в виде линейной комбинации остальных векторов, то все эти векторы линейно зависимы.

Любые три вектора на плоскости линейно зависимы.

Любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы.

Базис на плоскости

Базисом на плоскости называются два любые линейно независимые вектора.

Поскольку любые три вектора на плоскости линейно зависимы, то третий вектор может быть выражен через векторы базиса:

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$$

Числа x_1, x_2 называют координатами вектора в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$

Вектор записывают также в виде: $\vec{a} = (x_1, x_2)$

Базис в пространстве

Базисом в пространстве называют три любые линейно независимые вектора.

Любой вектор может быть выражен через векторы базиса:

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

Вектор записывают также в виде:

$$\vec{a} = (x_1, x_2, x_3)$$

Единственность разложения вектора

Теорема. Разложение вектора по базису единственно.

Доказательство. Предположим существует два разложения:

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$
$$\vec{a} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$$

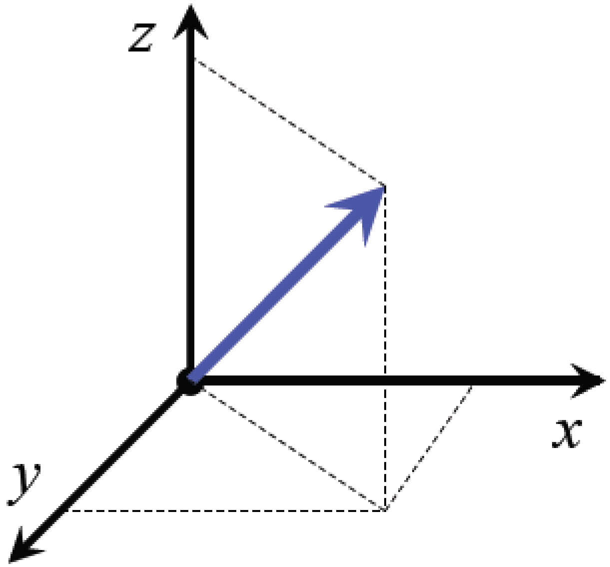
Вычитаем одно из другого:

$$0 = (x_1 - y_1)\vec{e}_1 + (x_2 - y_2)\vec{e}_2 + (x_3 - y_3)\vec{e}_3$$

Поскольку это базис, все коэффициенты равны нулю.

Декартова система координат

Три взаимно перпендикулярные оси в пространстве с общим началом О и одинаковой масштабной единицей образуют прямоугольную **декартову систему координат** в пространстве.



Каждый вектор единственным образом может быть разложен по декартову прямоугольному базису:

$$\vec{a} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

Скалярное произведение

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$$

Если векторы имеют координаты:

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$$
$$\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

то скалярное произведение вычисляется по формуле:

$$\vec{a}\,\vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Свойства скалярного произведения

1. Коммутативность $\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$

2. Скалярный квадрат $\vec{a}^{\,2} = \vec{a}\,\vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2$

3. Ассоциативность $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\,\vec{c}+\vec{b}\,\vec{c}$

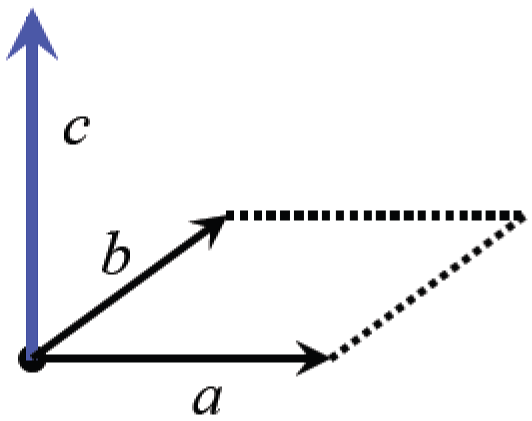
4. Ассоциативность относительно числового множителя

$$\left(\lambda\,\vec{a}\right)\vec{b} = \lambda\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)$$

Векторное произведение

Векторным произведением двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{c}$, модуль которого равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, приведенных к общему началу, и который перпендикулярен перемножаемым векторам и направлен так, чтобы поворот от $\boldsymbol{a}$ к $\boldsymbol{b}$ проходил по часовой стрелке, если смотреть из конца вектора $\boldsymbol{c}$.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$



Свойства векторного произведения

1. Не коммутативно $\quad \vec{a}\times\vec{b} = -\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$

2. Векторный квадрат $\quad \vec{a}\times\vec{a} = 0$

3. Ассоциативность $\quad \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

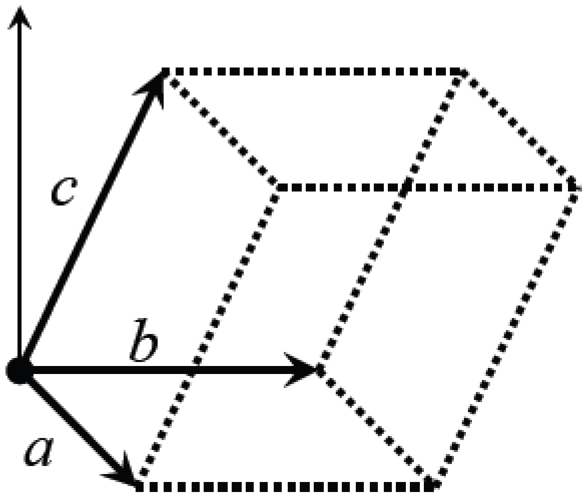
4. Ассоциативность относительно числового множителя

$$\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b} = \vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right) = \lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$$

Смешанное произведение трех векторов

Смешанное произведение трех векторов, или векторно-скалярное, есть результат двух операций над тремя векторами:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\vec{c}$$



Смешанное произведение равно по модулю объему параллелепипеда, построенного на векторах ***a*, *b*, *c*** как на ребрах. Знак зависит от ориентации векторов: положителен, если они расположены так же, как оси координат Ox, Oy, Oz.

n-мерный вектор

n-мерным вектором называется упорядоченная совокупность n действительных чисел, записываемых в виде:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

1. Равенство векторов. Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие компоненты.

2. Сумма векторов. Суммой двух векторов одинаковой размерности называется вектор $z = x + y$, компоненты которого равны сумме соответствующих компонент слагаемых векторов.

3. Умножение вектора на число. Произведением вектора на действительное число называется вектор, компоненты которого равны произведению числа на соответствующие компоненты вектора.

Свойства n-мерных векторов

1. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$
2. $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$
3. $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$
4. $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$
5. $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$
6. Существует нулевой вектор $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0)$, такой, что $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}$
7. Существует противоположный вектор $-\boldsymbol{x}$, такой, что $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$
8. $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ для любого вектора $\boldsymbol{x}$

Векторное пространство

Множество векторов с действительными компонентами, в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющее выше приведенным свойствам (аксиомам), называется **векторным пространством**.

Размерность пространства – это максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов.

Совокупность n линейно независимых векторов n-мерного пространства называется **базисом**.

Скалярное произведение

Скалярным произведением двух векторов

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad \text{и} \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

называется число

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,.$$

Свойства скалярного произведения:

1. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

2. $(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z})$.

3. $(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ - для любого действительного α.

4. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$, если $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$; $\quad (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, если $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Евклидово пространство

Линейное (векторное) пространство, в котором задано скалярное произведение векторов, удовлетворяющее четырем выше указанным свойствам (аксиомам), называется **евклидовым пространством**.

Длиной (нормой) вектора $\mathbf{x}$ в евклидовом пространстве называется корень квадратный из $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$: $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$.

Свойства длины вектора:

1. $|\mathbf{x}| = 0$ только при $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

2. $|\alpha\mathbf{x}| = |\alpha|\ |\mathbf{x}|$, где α – действительное число.

3. $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq |\mathbf{x}|\ |\mathbf{y}|$ – неравенство Коши-Буняковского.

4. $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ - неравенство треугольника.

Ортогональные векторы

Два вектора **x** и **y** называются **ортогональными**, если их скалярное произведение равно нулю, т. е. если $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ n-мерного евклидова пространства образуют **ортонормированный базис**, если эти векторы попарно ортогональны и норма каждого из них равна единице: $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$ при $j \neq i$; $|\mathbf{e}_i| = 1$ при $i = 1,2,\ldots,n$.

Теорема: Во всяком n-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

4. Линейные операторы

Если задан закон (правило), по которому каждому вектору **x** пространства R^n ставится в соответствие единственный вектор **y** пространства R^m, то говорят, что задан **оператор** (**преобразование**, **отображение**) $\hat{A}(\mathbf{x})$, действующий из R^n в R^m: $\mathbf{y} = \hat{A}(\mathbf{x})$.

y – **образ** вектора **x**. **x** – **прообраз** вектора **y**.

Оператор $\hat{A}$ называется **линейным**, если для любых векторов **x** и **y** пространства R^n и любого числа λ выполняются соотношения:

1. $\hat{A}(\mathbf{x} + \boldsymbol{y}) = \hat{A}(\mathbf{x}) + \hat{A}(\mathbf{y})$.
2. $\hat{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\hat{A}(\mathbf{x})$

Действия над линейными операторами

Суммой двух линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называется оператор $\left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, определяемый равенством

$$\left(\hat{A}+\hat{B}\right)(\mathbf{x})=\hat{A}(\mathbf{x})+\hat{A}(\mathbf{x}).$$

Произведением линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называется оператор $\hat{A}\hat{B}$, определяемый равенством

$$(\hat{A}\hat{B})(\mathbf{x})=\hat{A}\left(\hat{B}(\mathbf{x})\right).$$

Произведением линейного оператора $\hat{A}$ на число λ называется оператор $\lambda\hat{A}$, определяемый равенством

$$(\lambda\hat{A})(\mathbf{x})=\lambda\left(\hat{A}(\mathbf{x})\right).$$

Тождественный оператор имеет вид: $\hat{E}(\mathbf{x})=\mathbf{x}$;

Нулевой оператор имеет вид: $\hat{0}(\mathbf{x})=\mathbf{0}$.

Матрица линейного оператора

Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ - базис в пространстве R^n, любой вектор в котором можно представить в виде:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Для любого линейного оператора $\hat{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ имеем

$$\mathbf{y} = x_1\hat{A}(\mathbf{e}_1) + x_2\hat{A}(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_n\hat{A}(\mathbf{e}_n),$$

где

$$\hat{A}(\mathbf{e}_i) = a_{1i}\mathbf{e}_1 + a_{2i}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{ni}\mathbf{e}_n, \qquad i = 1,2,\cdots,n.$$

С другой стороны,

$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n.$$

Связь между вектором $\mathbf{x}$ и его образом $\mathbf{y} = \hat{A}(\mathbf{x})$ можно выразить в матричной форме $\mathrm{Y} = \mathrm{AX}$.

Матрица линейного оператора

Теорема: Каждому линейному оператору $\hat{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ соответствует матрица A в данном базисе.

$$\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}; \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Справедливо и обратное.

Теорема: Всякой матрице порядка n соответствует линейный оператор n-мерного пространства.

Матрица A называется **матрицей оператора** $\hat{A}$ в данном базисе, а ранг этой матрицы – рангом оператора $\hat{A}$.

Собственные векторы линейного оператора

Вектор $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ называется **собственным вектором** линейного оператора $\hat{A}$, если найдется такое число λ, что

$$\hat{A}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}.$$

Число λ называется **собственным значением** линейного оператора $\hat{A}$, соответствующим вектору $\mathbf{x}$.

В матричной форме запись $\hat{A}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ имеет вид:

$$AX = \lambda X, \quad \text{или} \quad (A - \lambda E)X = \mathbf{0}.$$

Определитель $|A - \lambda E|$ является многочленом n-ой степени относительно λ. Этот многочлен называется **характеристическим многочленом**.

Диагональный вид матрицы линейного оператора

Теорема: Матрица A линейного оператора $\hat{A}$ в базисе, состоящем из его собственных векторов, является диагональной:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Справедливо и обратное.

Теорема: Если матрица A линейного оператора $\hat{A}$ в базисе является диагональной, то все векторы этого базиса являются собственными векторами оператора $\hat{A}$.

Диагональный вид матрицы линейного оператора

Теорема: Если линейный оператор имеет n попарно различных собственных значений, то отвечающие им собственные векторы линейно независимы, и матрица этого оператора в соответствующем базисе имеет диагональный вид.

Пример. Найти собственные значения и собственные векторы известной матрицы первого порядка.

Решение. При $n = 1$ имеем всего лишь один корень характеристического уравнения $|a_{11} - \lambda| = 0$. Этот корень $\lambda_1 = a_{11}$. Ему отвечающий нормированный собственный вектор $x_1 = 1$.

Диагонализация матрицы второго порядка

Пример. Найти собственные значения известной матрицы второго порядка.

Решение. При $n = 2$ характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет два корня квадратного уравнения:

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0.$$

Представим их в виде:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2}$$

- два собственные значения известной матрицы второго порядка.