Математика для Data Science. 1 часть. Математический анализ и линейная алгебра

Учебный центр при МГТУ им. Н.Э. Баумана

Специалист.ru

Математический анализ. Интегрирование

Тема занятия

Интегрирование функций

Цель занятия

Познакомиться с такими понятиями как неопределенный интеграл, определенный интеграл. Приложения определенного интеграла и приближенные методы его вычисления.

План занятия

- Неопределенный интеграл.
- Определенный интеграл.
- Приложения определенного интеграла и приближенные методы его вычисления
- Несобственные интегралы.
- Двойные интегралы.
- Приближенные методы интегрирования.

Понятие ингреграла

Пусть дана $f(x)$ — функция действительной переменной. ***Неопределённым интегралом*** функции $f(x)$, или её *первообразной*, называется такая функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$, то есть $F'(x) = f(x)$. Обозначается это так:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

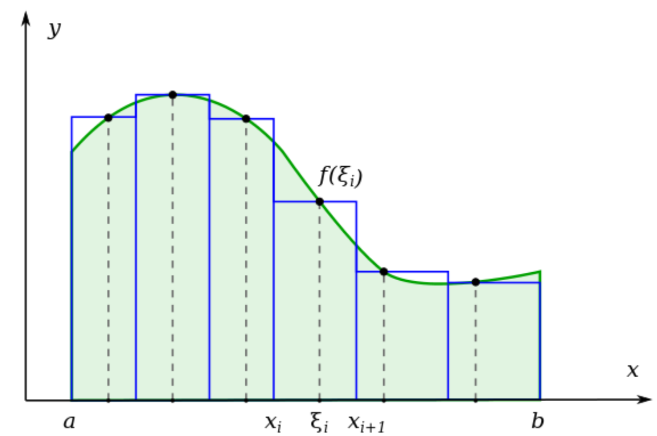
Понятие определённого интеграла возникает в связи с задачей о нахождении площади криволинейной трапеции, нахождении пути по известной скорости при неравномерном движении и т. п.

Производная может быть как конечной, так и бесконечной.

Понятие интеграла

Для вычисления площади этой фигуры естественно применить следующий приём. Разобьём отрезок $[a; b]$ на меньшие отрезки точками x_i, такими что $a = x_0 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$, а саму трапецию — на ряд узких полосок, лежащих над отрезками $[x_i; x_{i+1}]$. Возьмём в каждом отрезке по произвольной точке $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$. Ввиду того, что длина i-го отрезка $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ мала, будем считать значение функции $f(x)$ на нём примерно постоянным и равным $y_i = f(\xi_i)$. Площадь криволинейной трапеции будет приблизительно равна площади ступенчатой фигуры, изображённой на рисунке:

$$S \approx \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta x_i \qquad (*)$$



Понятие интеграла

Если же теперь увеличивать число точек разбиения, так, чтобы длины всех отрезков неограниченно убывали ($\max \Delta x_i \to 0$), площадь ступенчатой фигуры будет всё ближе к площади криволинейной трапеции.

Поэтому мы приходим к такому определению:

Если существует, независимо от выбора точек разбиения отрезка и точек ξ_i, предел суммы (*) при стремлении длин всех отрезков к нулю, то такой предел называется ***определённым интегралом*** (*в смысле Римана*) от функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx$$

Сама функция при этом называется *интегрируемой* (в смысле Римана) на отрезке $[a;b]$. Суммы вида (*) называются *интегральными суммами*.

Таблица интегралов

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1);$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

Свойства непределенного интеграла

$$\int F'(x)dx = \int dF(x) = F(x) + C, \text{ в частности, } \int dx = x + C;$$

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx \quad (0 \neq \lambda \in \mathbb{R}); \quad \int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

4

Примеры

$$\int (3-x^2)^3 dx = \int (27-27x^2+9x^4-x^6) dx = 27\int dx - 27\int x^2 dx + 9\int x^4 dx - \int x^6 dx =$$
$$= 27x - 9x^3 + 9\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + C.$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int \sqrt{x} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{1/2} dx + \int x^{-1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + 2x^{1/2} + C =$$
$$= \frac{2}{3} x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C.$$

Замена переменных(метод подстановки)

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок трех видов:

$x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — строго монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t. Формула замены переменной в этом случае:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi\prime(t)dt;$$

$t = \psi(x)$, где t —новая переменная. Формула замены переменной при такой подстановке:

$$\int f(\psi(x))\psi\prime(x)dx = \int f(\psi(x))d\psi(x) = \int f(t)dt.$$

$\varphi(t) = \psi(x)$, где t —новая переменная. Формула замены переменной при такой подстановке:

$$\int f(\varphi(t))\varphi\prime(t)dt = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(\psi(x))d\psi(x) = \int f(\psi(x))\psi\prime(x)dx.$$

Пример

Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

Сделаем подстановку $t = \sqrt{e^x+1}$, откуда $e^x + 1 = t^2$. Дифференцируя обе части последнего равенства, получим

$$e^x dx = 2tdt \Rightarrow dx = \frac{2tdt}{t^2-1}.$$

Таким образом(с учетом результата примера 2.2.6),

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = \ln\frac{|t-1|}{|t+1|} + C = \ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} + C.$$

Интегрирование по частям

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

где $u = u(x), v = v(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции переменной x.

При этом за u берется та функция, которая при дифференцировании упрощается, а за dv — та часть подинтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.

Так, например, для интегралов вида

$$\int P(x)e^{ax}dx, \int P(x)\sin axdx, \int P(x)\cos axdx,$$

где $P(x)$ — многочлен, за u принимается $P(x)$, а за dv — соответственно, выражения $e^{ax}dx, \sin ax\ dx, \cos ax\ dx$; для интегралов вида

$$\int P(x)\ln xdx, \int P(x)\arcsin xdx, \int P(x)\arccos xdx$$

за u принимаются, соответственно, функции $\ln x, \arcsin x, \arccos x$, а за dv — выражение $P(x)dx$.

Пример

Найти интеграл $\int \ln x dx$.

Положим $u = \ln x, dv = dx$; тогда

$$v = x, du = \frac{dx}{x}.$$

Использую формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

Пример

Найти интеграл $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx.$

Полагая $u = x, \quad dv = \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$, имеем

$$v = \int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2(1+x^2)}, \quad du = dx.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

Определенный интеграл. Численные методы

Равномерная сетка переменной x

Пусть задана функция $f(x)$, ***определенным интегралом*** функции $f(x)$ от a до b называется конечное число, равное пределу $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{\infty} f(x_i) \cdot \Delta x_i$, где x_i, x_{i-1} – значения переменной x, лежащие в интервале $[a, b]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Это число обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Определенный интеграл. Численные методы.

Определенному интегралу можно дать простую геометрическую интерпретацию - он равен площади криволинейной трапеции, ограниченной слева, справа вертикальными прямыми $x=a$, $x=b$, снизу - прямой $y=0$, а сверху – кривой $y=f(x)$ (**рис. 1**). В соответствии с этой интерпретацией иногда говорят, что определенный интеграл равен «площади под графиком функции» или площади криволинейной трапеции.

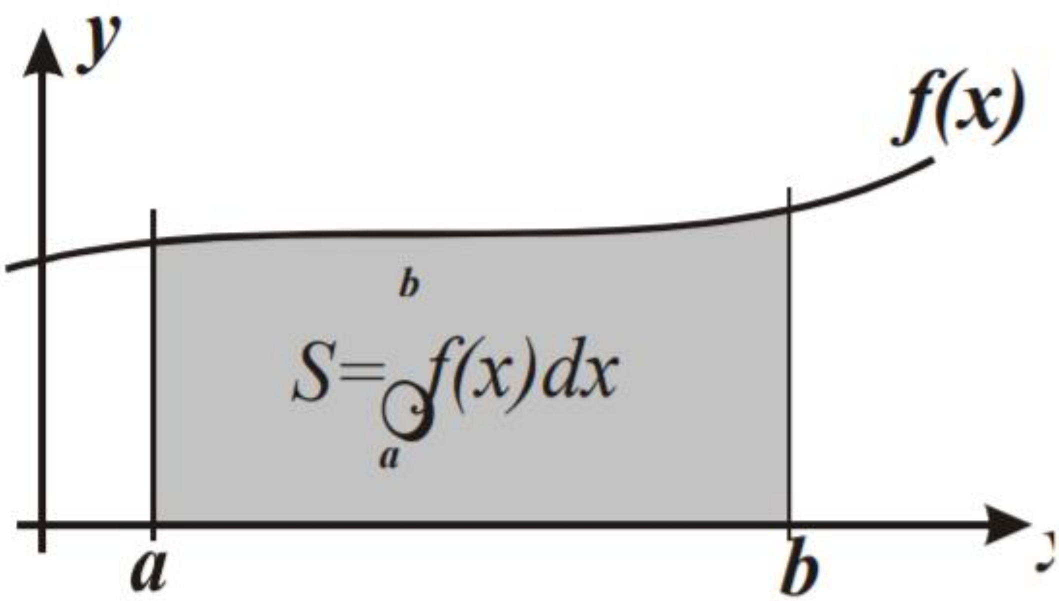


Рис. 1. Геометрическая интерпретация

Эта геометрическая интерпретация лежит в основе численных методов вычисления определенных интегралов. Из них, наиболее распространенными на практике являются метод прямоугольников, метод трапеций и метод парабол, так же называемый методом Симпсона.

Метод прямоугольников

Заменим фигуру «под графиком функции» на множество *прямоугольников*, как показано на рис. 3.

Площадь $S_{пр}$ построенной таким образом фигуры равна сумме площадей прямоугольников, имеющих высоту f_i и основание h и определяется формулой

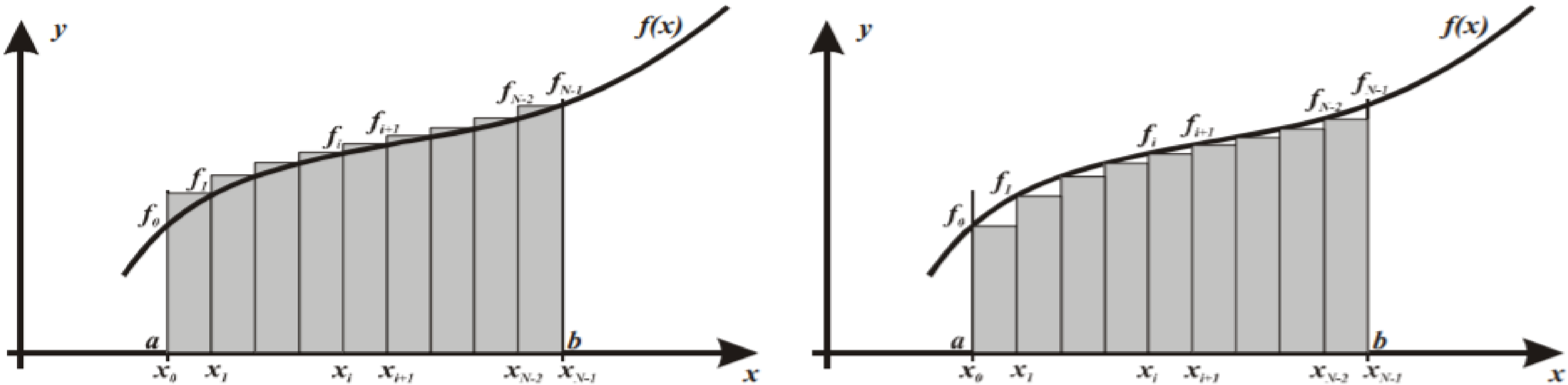


Рис. 3. Метод прямоугольников.

$$S_{пр2} = h\sum_{i=1}^{N-1} f_i \;. \qquad (2б)$$

либо

$$S_{пр1} = h\sum_{i=0}^{N-2} f_i \;, \qquad (2а)$$

Метод прямоугольников

Вычислить интеграл $\int\limits_{1.0}^{2.6} f(x)dx$, *используя квадратурные формулы:*

а) центральных прямоугольников с шагом $h = 0.4$;

$$f(x) = e^{-\frac{0.1}{x}}$$

<u>Формула центральных (средних) прямоугольников:</u>

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i - \frac{h}{2}\right)$$

$$h = \frac{b-a}{2}$$

Разобьем отрезок [1.0; 2.6] на отрезки длины $h = 0.4$ точками $x_0 = 1.0; x_1 = 1.0 + 0.4 = 1.4; x_2 = 1.4 + 0.4 = 1.8; x_3 = 1.8 + 0.4 = 2.2; x_4 = 2.2 + 0.4 = 2.6.$

Метод прямоугольников

Для каждого отрезка найдем середину (середина i - ого отрезка - точка $\left(x_i - \frac{h}{2}\right)$) и значение функции в середине отрезка:

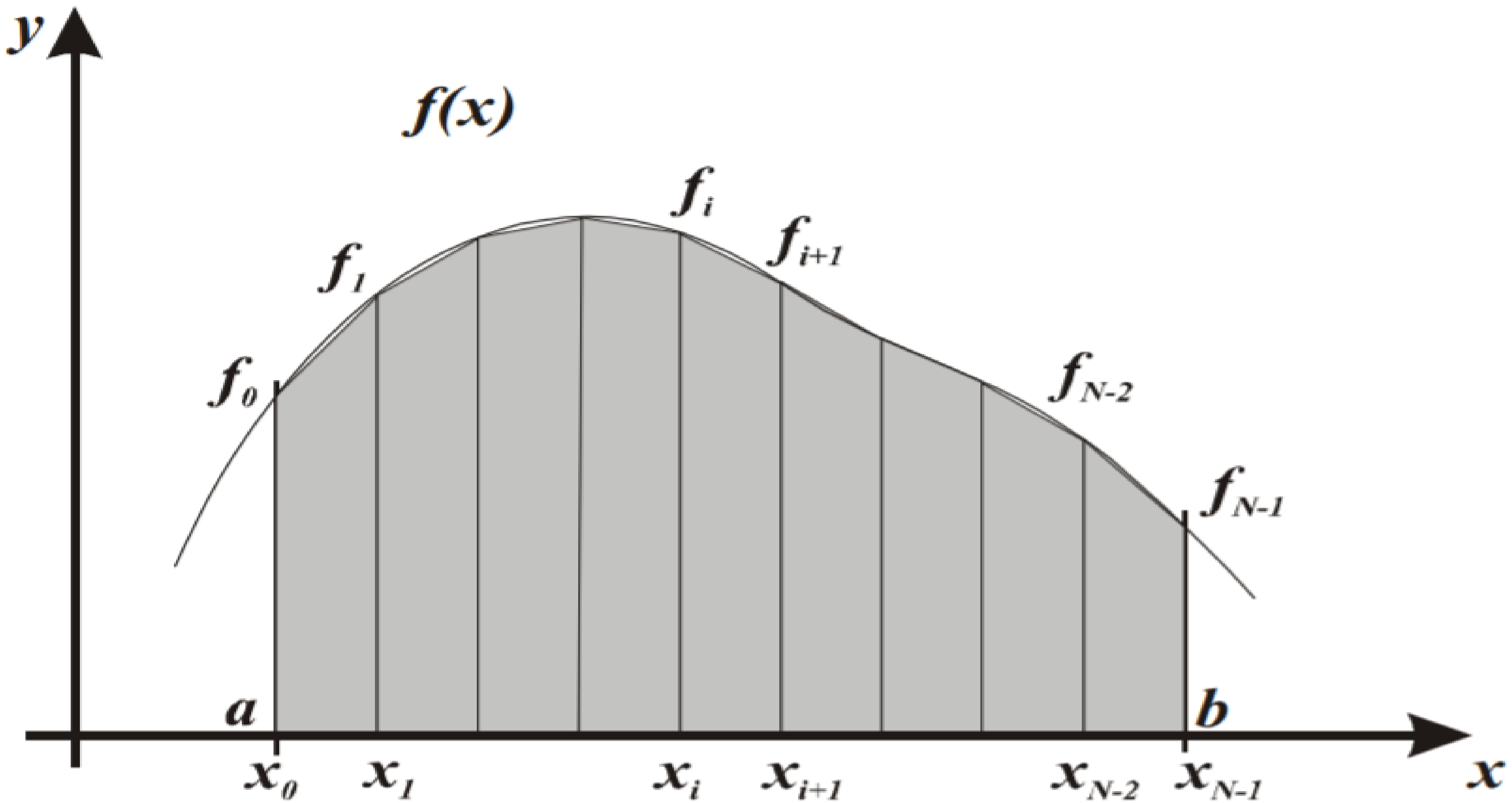
i	x_i	$x_i - \dfrac{h}{2}$	$f\left(x_i - \dfrac{h}{2}\right)$
0	1		
1	1,4	1,2	0,920044
2	1,8	1,6	0,939413
3	2,2	2	0,951229
4	2,6	2,4	0,959189
		Сумма	3,769876

$$I_{\text{пр}} = 0.4 \cdot 3.769876 = 1.507951$$

Метод трапеций

Заменим фигуру «под графиком функции» на множество *трапеций*, как показано на рис. 4. Площадь S_{mp} построенной таким образом фигуры равна сумме площадей трапеций, имеющих длину оснований f_i и f_{i+1} и высоту h.

Заметим, что площадь каждой трапеции есть среднее арифметическое площадей прямоугольников с высотами f_i и f_{i+1}, использованных при построении формул (2а) и (2б). Таким образом, искомая площадь фигуры равна



Метод трапеций

$$S_{mp} = \frac{1}{2}\left(h\sum_{i=0}^{N-2} f_i + h\sum_{i=1}^{N-1} f_i\right) = \frac{h}{2}(f_0 + f_{N-1}) + h\sum_{i=1}^{N-2} f_i$$

Метод трапеций

Вычислить интеграл $\int_{1.0}^{2.6} f(x)dx$, *используя квадратурные формулы:*

б) трапеций с шагами $h = 0.4$ *и* $h = 0.2$

Формула трапеций.

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

Проведем вычисления для шага $h_1 = 0.4$

i	x_i	$f(x_i)$	
0	1	0,904837	
1	1,4		0,931063
2	1,8		0,945959
3	2,2		0,955563
4	2,6	0,962269	
	Сумма	1,867106	2,832585

$$I_{\text{тр.}}^{0.4} = 0.4\left(\frac{1.867106}{2} + 2.832585\right) = 1.506455$$

Метод Симпсона

Этот метод основан на замене фигуры «под графиком функции» множеством *криволинейных трапеций* (рис. 4). Верхние стороны трапеций представляют собой части парабол, пересекающих график подынтегральной функции в точках x_i. Другими словами, метод основан на использовании интерполяции параболами таблично заданной функции $f(x)$ и вычислении интегралов от интерполирующих функций (парабол). Для нахождения формулы площади параболической трапеции удобно сместить ось Y декартовой системы

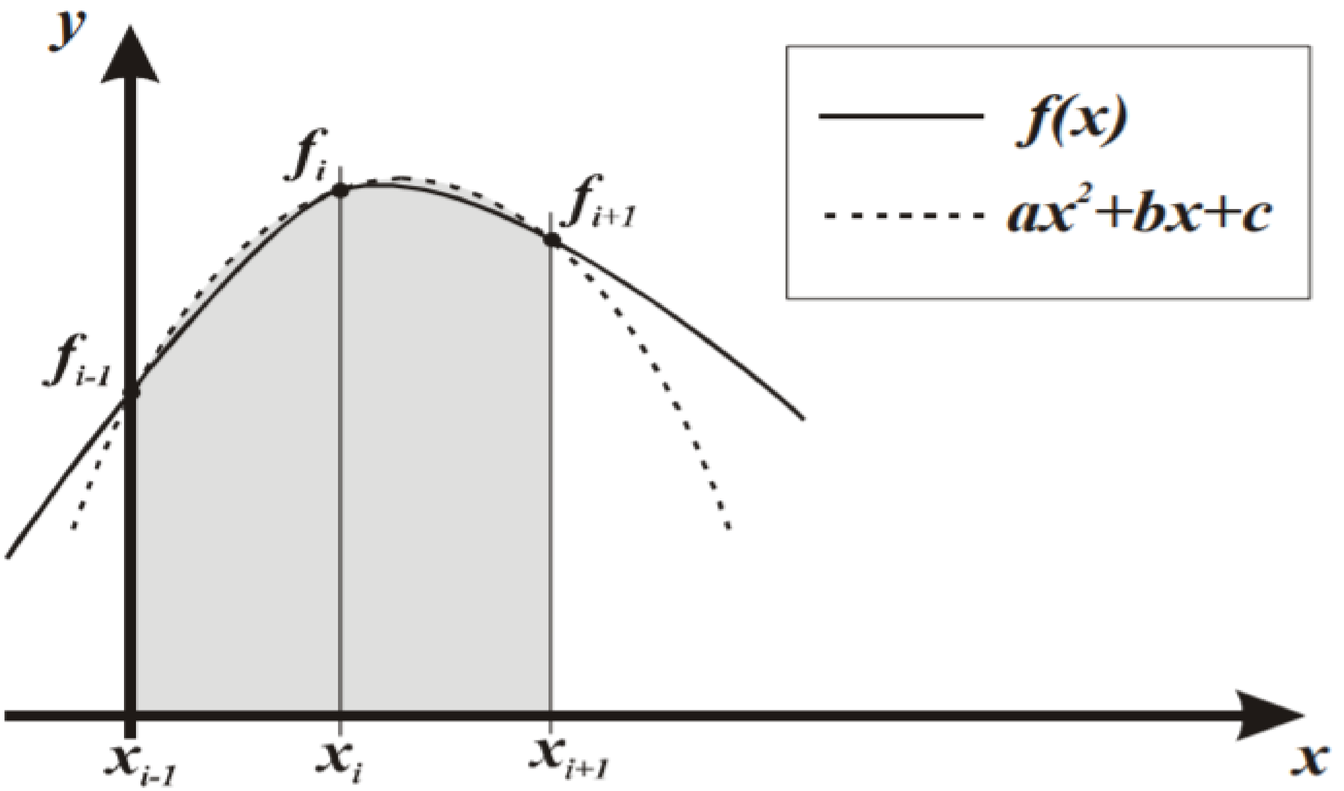


Рис. 4. Метод Симпсона. Замена «фигуры под графиком» на параболические трапеции.

Метод Симпсона

координат так, чтобы она проходила через узел сетки переменной x.
Очевидно, что площадь трапеции (выделенной цветом фигуры) при этом не изменится и будет определяться выражением

$$s = \int_0^{2h} (ax^2 + bx + c)dx = \frac{8a}{3}h^3 + 2bh^2 + 2ch \qquad (4)$$

коэффициенты a, b и c находятся из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} c &= f_{i-1} \\ ah^2 + bh + c &= f_i \\ 4ah^2 + 2bh + c &= f_{i+1} \end{aligned}\right\}, \qquad (5)$$

которая является условием равенства высот параболы в точках $\boldsymbol{x_{i-1}=0}$, $\boldsymbol{x_i=h}$ и $\boldsymbol{x_{i+1}=2h}$ соответствующим значениям функции $\boldsymbol{f_{i-1}}$, $\boldsymbol{f_i}$, $\boldsymbol{f_{i+1}}$. Решение этой системы:

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}, \qquad b = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3f_{i-1} - 4f_i + f_{i+1}}{h}, \quad c = f_{i-1}. \qquad (6)$$

С учетом этого, выражение для площади параболической трапеции принимает вид

$$s = \frac{h}{3}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}) \qquad (7)$$

Для численного интегрирования функции по методу Симпсона необходимо найти сумму площадей трапеций (7).

Метод Симпсона

$$S_S = \frac{h}{3}\left(\underbrace{f_0 + 4f_1 + f_2} + \underbrace{f_2 + 4f_3 + f_4} + \ldots + \underbrace{f_{N-5} + 4f_{N-4} + f_{N-3}} + \underbrace{f_{N-3} + 4f_{N-2} + f_{N-1}}\right) =$$

$$= \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \ldots + 2f_{N-5} + 4f_{N-4} + 2f_{N-3} + 4f_{N-2} + f_{N-1}\right).$$

Объединяя повторяющиеся слагаемые, получаем

$$S_S = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4\sum_{k=0}^{\frac{N-3}{2}} f_{2k+1} + 2\sum_{k=1}^{\frac{N-3}{2}} f_{2k} + f_{N-1}\right) \qquad (8)$$

Эта формула называется формулой парабол или формулой Симпсона.

Метод Симпсона

Вычислить интеграл $\int_{1.0}^{2.6} f(x)dx$, *используя квадратурные формулы:*

в) Симпсона с шагом $h = 0.4$

Если интервал интегрирования разбит на $2N$ равных частей,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6N}(f_0 + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{2N-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2N-2}) + f_{2N})$$

i	x_i	$f(x_i)$		
0	1	0,904837		
1	1,4		0,931063	
2	1,8			0,945959
3	2,2		0,955563	
4	2,6	0,962269		
	Сумма	1,867106	1,886626	0,945959

$$I_C = \frac{2.6-1}{6\cdot 2}(1.867106 + 4\cdot 1.886626 + 2\cdot 0.945959) = 1.507404$$

Несобственные интегралы

Определенный интеграл $\int_a f(x)\,dx$ называется *несобственным интегралом*, если выполняется, по крайней мере, одно из следующих условий:

- Предел a или b (или оба предела) являются бесконечными;
- Функция $f(x)$ имеет одну или несколько точек разрыва внутри интервала $[a, b]$.

Бесконечные пределы интегрирования

Пусть $f(x)$ является непрерывной функцией в интервале $[a, \infty)$. Несобственный интеграл определяется через предел следующим образом:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^n f(x)\,dx.$$

Несобственные интегралы

Рассмотрим также случай, когда функция $f(x)$ непрерывна в интервале $(-\infty, b]$. В этом случае несобственный интеграл определяется как

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{n\to-\infty} \int\limits_{n}^{b} f(x)\,dx.$$

Если указанные выше пределы существуют и конечны, то говорят что несобственные интегралы *сходятся*. В противном случае интегралы *расходятся*.

Пусть $f(x)$ является непрерывной функцией на множестве действительных чисел. Тогда справедливо соотношение

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Несобственные интегралы

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ является непрерывными функциями в интервале $[a, \infty)$. Предположим, что $0 \le g(x) \le f(x)$ для всех x в интервале $[a, \infty)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Если $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится, то $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ также сходится;
2. Если $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ расходится, то $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ также расходится;
3. Если $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ сходится, то $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ также сходится. В этом случае говорят, что интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ является *абсолютно сходящимся*.

Несобственные интегралы. Пример

Определить, при каких значениях k интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^k} \ \ (k > 0, k \neq 1)$ сходится.

Решение.
Используя определение несобственного интеграла, можно записать

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^k} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_1^{n} \frac{dx}{x^k} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_1^{n} x^{-k} dx = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x^{-k+1}}{-k+1} \right)\Bigg|_1^n = \frac{1}{1-k} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(x^{-k+1}\right)\Big|_1^n$$

$$= \frac{1}{1-k} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(n^{-k+1} - 1^{-k+1}\right) = \frac{1}{k-1} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 - n^{1-k}\right).$$

Из этого выражения видно, что существует 2 случая:

- Если $0 < k < 1$, то $n^{1-k} \to \infty$ при $n \to \infty$ и интеграл расходится;
- Если $k > 1$, то $n^{1-k} = \frac{1}{n^{k-1}} \to 0$ при $n \to \infty$ и интеграл сходится.

Несобственные интегралы. Пример

Вычислить интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+16}$.

Решение.

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+16} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^n \frac{dx}{x^2+16} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^n \frac{dx}{x^2+4^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\arctan\frac{x}{4}\right)\Bigg|_0^n$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(\arctan\frac{n}{4} - \arctan\frac{0}{4}\right) = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(\arctan\frac{n}{4} - 0\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

Следовательно, данный интеграл сходится.

Двойные интегралы

Пусть область интегрирования R представляет собой прямоугольник $[a,b]\times[c,d]$. Тогда двойной интеграл в такой области выражается через повторный интеграл в следующем виде:

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right)dy.$$

В данном случае область интегрирования R относится одновременно к типу I и II, так что у нас есть возможность выбирать, по какой переменной (x или y) начинать интегрировать функцию $f(x,y)$. Обычно удобнее начинать с более простого интеграла.

В частном случае, когда подынтегральная функция $f(x,y)$ "расщепляется" на произведение $g(x)\,h(y)$, двойной интеграл равен произведению двух определенных интегралов:

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_R g(x)\,h(y)\,dxdy = \left(\int\limits_a^b g(x)\,dx\right)\left(\int\limits_c^d h(y)\,dy\right).$$

Двойные интегралы. Пример

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_R xydxdy$ в области $R = \{(x,y) \mid 2 \le x \le 5, 0 \le y \le 1\}$.

Решение.

Как видно, подынтегральная функция $f(x,y)$ представляет собой произведение $g(x)\,h(y)$. Следовательно, интеграл равен

$$\iint\limits_R xydxdy = \int\limits_2^4 xdx \cdot \int\limits_0^1 ydy = \left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_2^4 \cdot \left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = (8-2)\left(\frac{1}{2} - 0\right) = 3.$$

Двойные интегралы. Пример

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_R xy^2dxdy$, заданный в области $R=\{(x,y)\,|\,1\le x\le 5, 0\le y\le 2\}$.

Решение.
Поскольку функция $f(x,y)$ представляет собой произведение $g(x)\,h(y)$, интеграл равен

$$\iint\limits_R xy^2dxdy=\int\limits_1^5 xdx\cdot\int\limits_0^2 y^2dy=\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^5\cdot\left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^2=\left(\frac{25}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{8}{3}-0\right)=64.$$

Вычислить интеграл $\iint\limits_R \frac{dxdy}{(x+y)^2}$, заданный в области $R=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2, 1\le y\le 2\}$.

Решение.
Выражая двойной интеграл через повторный (в котором внутренний интеграл зависит от x), получаем

$$\iint\limits_R\frac{dxdy}{(x+y)^2}=\int\limits_1^2\int\limits_0^2\frac{dxdy}{(x+y)^2}=\int\limits_1^2\left[\int\limits_0^2\frac{dx}{(x+y)^2}\right]dy=\int\limits_1^2\left[\left(-\frac{1}{x+y}\right)\Big|_{x=0}^2\right]dy$$

$$=\int\limits_1^2\left[-\frac{1}{y+2}+\frac{1}{y}\right]dy=[\ln y-\ln(y+2)]|_1^2=\left(\ln\frac{y}{y+2}\right)\Big|_1^2=\ln\frac{2}{4}-\ln\frac{1}{3}=\ln\frac{3}{2}.$$

Геометрическое приложение двойных интегралов

Площадь плоской фигуры

Если $f(x,y) = 1$ в интеграле $\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy$, то двойной интеграл равен площади области интегрирования R.

Площадь области типа I (элементарной относительно оси Oy) (рисунок 1) выражается через повторный интеграл в виде

$$A = \int\limits_a^b \int\limits_{g(x)}^{h(x)} dydx.$$

Аналогично, площадь области типа II (элементарной относительно оси Ox) (рисунок 2) описывается формулой

$$A = \int\limits_c^d \int\limits_{p(y)}^{q(y)} dxdy.$$

Геометрическое приложение двойных интегралов

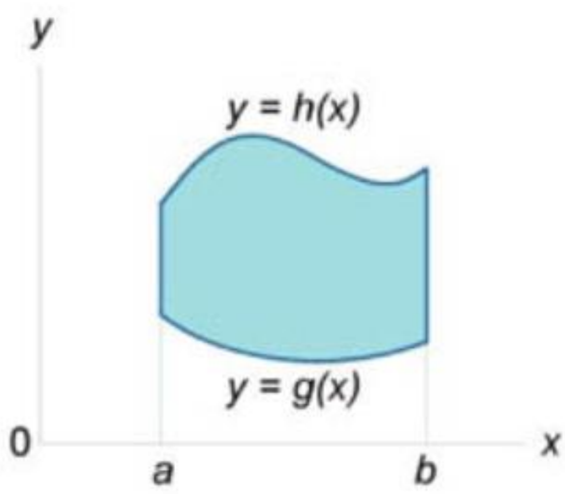


Рис.1

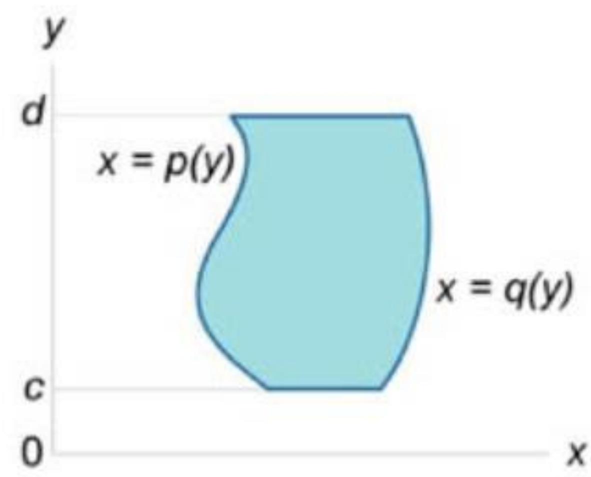


Рис.2

Вопросы?

Выбирайте Центр «Специалист» – крупнейший учебный центр России!

info@specialist.ru

+7 (495) 232-32-16

Учебный центр при МГТУ им. Н.Э. Баумана
Специалист.ru