

Математическое моделирование

Лабораторная работа № 2

Бахи Сиди Али

2026-02-26

Вводная часть

Теория: постановка и вывод модели

Эксперимент: численное моделирование

Параметрический анализ

Итоги

1. Вводная часть

Показать, как строится математическая модель, позволяющая выбрать оптимальную стратегию поиска и преследования.

Сюжет: в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. На короткий промежуток времени видимость улучшается, и лодка фиксируется на расстоянии k км от катера. Далее лодка снова скрывается и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Скорость катера равна n скоростям лодки. Требуется найти траекторию катера, обеспечивающую перехват.

1. Выполнить вывод дифференциальных уравнений при условии, что скорость катера больше скорости лодки в n раз.

1. Выполнить вывод дифференциальных уравнений при условии, что скорость катера больше скорости лодки в n раз.
2. Построить траектории катера и лодки для двух вариантов начальных условий.

1. Выполнить вывод дифференциальных уравнений при условии, что скорость катера больше скорости лодки в n раз.
2. Построить траектории катера и лодки для двух вариантов начальных условий.
3. По графикам определить момент перехвата (точку пересечения траекторий).

2. Теория: постановка и вывод модели

Положим $t_0 = 0$ — момент обнаружения лодки.

Начальные положения:

- лодка: $X_0 = 0$,

Переходим к полярным координатам (r, θ) :

Положим $t_0 = 0$ — момент обнаружения лодки.

Начальные положения:

- лодка: $X_0 = 0$,
- катер: на расстоянии k от лодки (относительно полюса).

Переходим к полярным координатам (r, θ) :

Положим $t_0 = 0$ — момент обнаружения лодки.

Начальные положения:

- лодка: $X_0 = 0$,
- катер: на расстоянии k от лодки (относительно полюса).

Переходим к полярным координатам (r, θ) :

- полюс — точка обнаружения лодки,

Положим $t_0 = 0$ — момент обнаружения лодки.

Начальные положения:

- лодка: $X_0 = 0$,
- катер: на расстоянии k от лодки (относительно полюса).

Переходим к полярным координатам (r, θ) :

- полюс — точка обнаружения лодки,
- ось r направлена через начальное положение катера.

Ищем расстояние x , при котором катер и лодка оказываются на одинаковом расстоянии от полюса.

За одно и то же время t :

- лодка проходит x ,

Из равенства времен получаются два режима начальных условий:

Ищем расстояние x , при котором катер и лодка оказываются на одинаковом расстоянии от полюса.

За одно и то же время t :

- лодка проходит x ,
- катер проходит $x + k$ или $x - k$ (в зависимости от начальной конфигурации).

Из равенства времен получаются два режима начальных условий:

Ищем расстояние x , при котором катер и лодка оказываются на одинаковом расстоянии от полюса.

За одно и то же время t :

- лодка проходит x ,
- катер проходит $x + k$ или $x - k$ (в зависимости от начальной конфигурации).

Из равенства времен получаются два режима начальных условий:

- case = plus:

$$x_1 = \frac{k}{n+1}, \quad \theta_0 = 0$$

Ищем расстояние x , при котором катер и лодка оказываются на одинаковом расстоянии от полюса.

За одно и то же время t :

- лодка проходит x ,
- катер проходит $x + k$ или $x - k$ (в зависимости от начальной конфигурации).

Из равенства времен получаются два режима начальных условий:

- case = plus:

$$x_1 = \frac{k}{n+1}, \quad \theta_0 = 0$$

- case = minus:

$$x_2 = \frac{k}{n-1}, \quad \theta_0 = -\pi$$

Скорость катера равна nv , где v — скорость лодки.

Разложение скорости катера:

- радиальная компонента: $v_r = \frac{dr}{dt}$,

Требование «не отставать по радиусу»:

$$\frac{dr}{dt} = v.$$

Из соотношения модулей:

$$(nv)^2 = v_r^2 + v_t^2 \Rightarrow v_t = v\sqrt{n^2 - 1}.$$

Следовательно:

$$r \frac{d\theta}{dt} = v\sqrt{n^2 - 1}.$$

Разложение скорости и система ОДУ

Скорость катера равна nv , где v — скорость лодки.

Разложение скорости катера:

- радиальная компонента: $v_r = \frac{dr}{dt}$,
- тангенциальная компонента: $v_t = r \frac{d\theta}{dt}$.

Требование «не отставать по радиусу»:

$$\frac{dr}{dt} = v.$$

Из соотношения модулей:

$$(nv)^2 = v_r^2 + v_t^2 \Rightarrow v_t = v\sqrt{n^2 - 1}.$$

Следовательно:

$$r \frac{d\theta}{dt} = v\sqrt{n^2 - 1}.$$

Исключая параметр t , получаем:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Качественный вывод: траектория катера в полярных координатах — расходящаяся спираль экспоненциального типа.

3. Эксперимент: численное моделирование

Дано:

- расстояние обнаружения: $k = 20$ км,

Требуется:

Дано:

- расстояние обнаружения: $k = 20$ км,
- отношение скоростей: $n = 5$.

Требуется:

Дано:

- расстояние обнаружения: $k = 20$ км,
- отношение скоростей: $n = 5$.

Требуется:

- построить траектории катера и лодки,

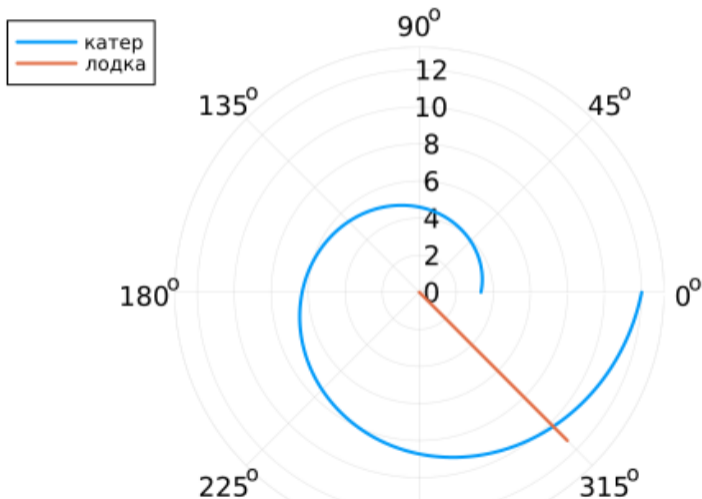
Дано:

- расстояние обнаружения: $k = 20$ км,
- отношение скоростей: $n = 5$.

Требуется:

- построить траектории катера и лодки,
- по пересечению кривых определить точку перехвата.

Базовый эксперимент (case=plus)



Наблюдения:

- траектория катера — спираль, удаляющаяся от полюса;

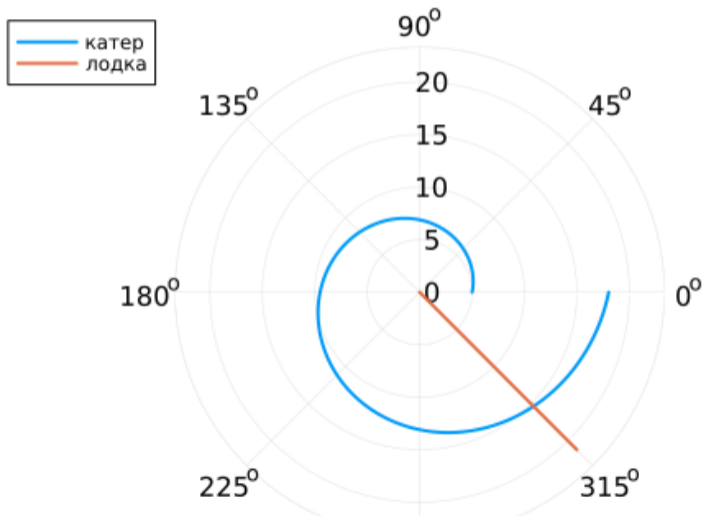
Наблюдения:

- траектория катера — спираль, удаляющаяся от полюса;
- радиус r возрастает при росте угла θ ;

Наблюдения:

- траектория катера — спираль, удаляющаяся от полюса;
- радиус r возрастает при росте угла θ ;
- траектория лодки в полярных координатах выглядит как луч (прямолинейное движение в декартовых координатах).

Базовый эксперимент (case=minus)



Отличия от режима case=plus:

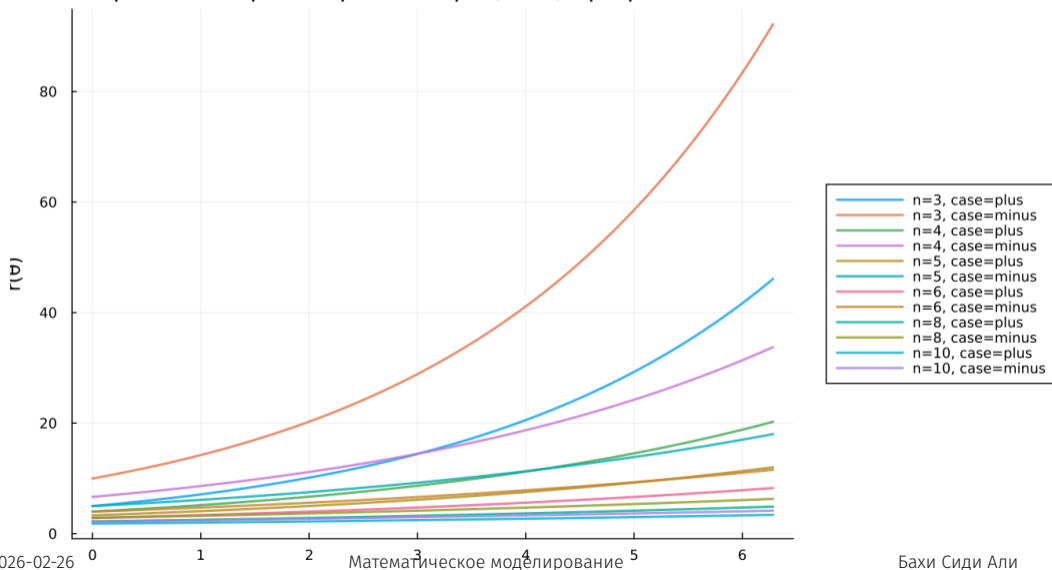
- стартовый радиус больше, траектория «сдвинута» наружу;

Отличия от режима case=plus:

- стартовый радиус больше, траектория «сдвинута» наружу;
- форма спирали сохраняется, меняется только масштаб из-за начальных условий.

4. Параметрический анализ

Сканирование: траектории катера (ODE) при разных n и case



Из уравнения

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

следует, что коэффициент роста по углу равен $1/\sqrt{n^2 - 1}$, поэтому:

- при малых n спираль расходится быстрее;

Из уравнения

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

следует, что коэффициент роста по углу равен $1/\sqrt{n^2 - 1}$, поэтому:

- при малых n спираль расходится быстрее;
- при больших n рост радиуса замедляется;

Из уравнения

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

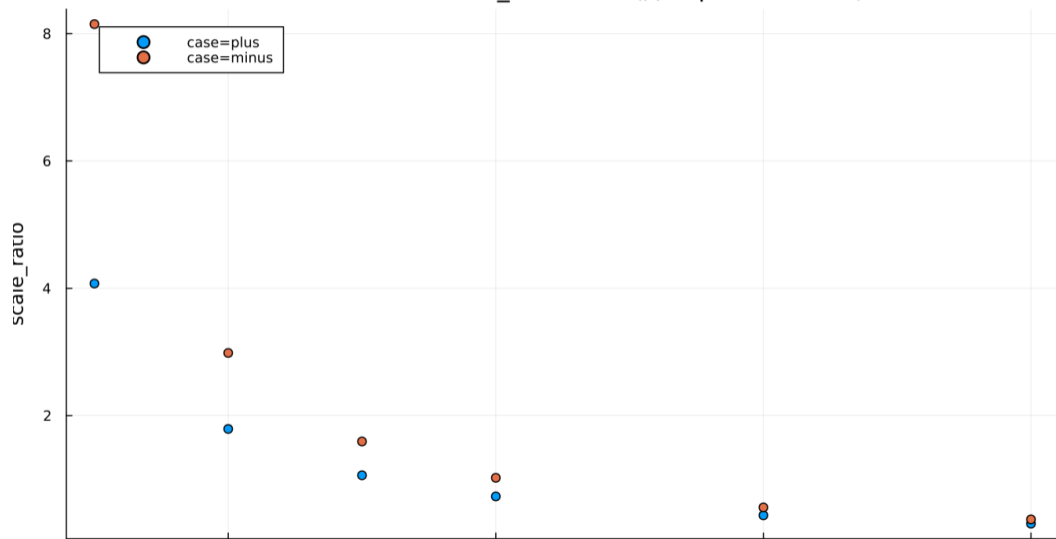
следует, что коэффициент роста по углу равен $1/\sqrt{n^2 - 1}$, поэтому:

- при малых n спираль расходится быстрее;
- при больших n рост радиуса замедляется;
- траектории выглядят более «пологими».

Введём относительную метрику масштаба:

$$\text{scale_ratio} = \frac{r_{\text{final}}}{\max(r_{\text{boat}})}.$$

Зависимость scale_ratio от n (для разных case)



- при малых n `scale_ratio` $\gg 1$: траектория катера существенно «крупнее» траектории лодки;

Для режима `case=minus` значения обычно выше из-за большего начального радиуса.

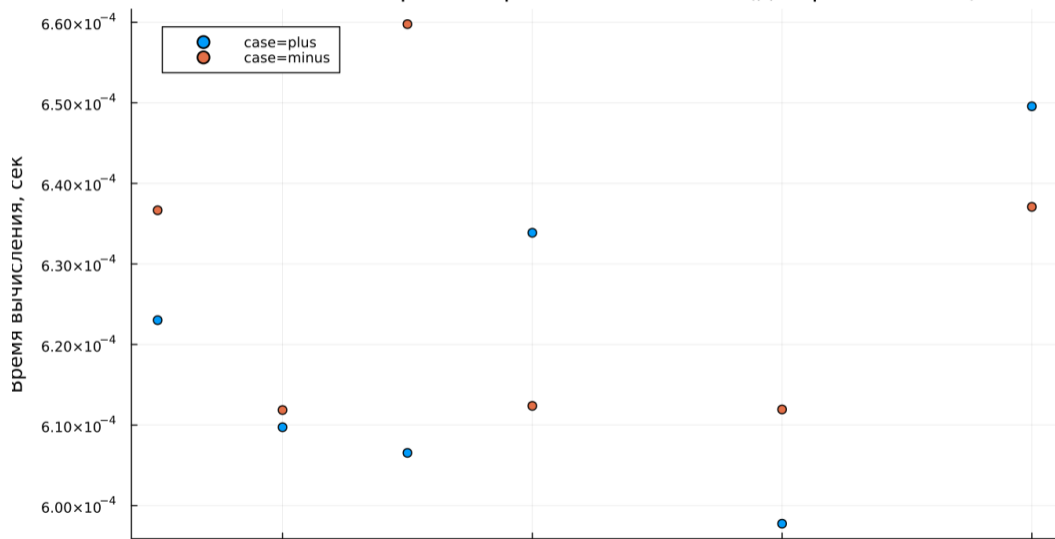
- при малых n `scale_ratio` $\gg 1$: траектория катера существенно «крупнее» траектории лодки;
- при росте n значение быстро уменьшается;

Для режима `case=minus` значения обычно выше из-за большего начального радиуса.

- при малых n `scale_ratio` $\gg 1$: траектория катера существенно «крупнее» траектории лодки;
- при росте n значение быстро уменьшается;
- при больших n масштабы сближаются.

Для режима `case=minus` значения обычно выше из-за большего начального радиуса.

Зависимость времени решения ODE от n (для разных case)



- время вычислений порядка $\sim 6 \times 10^{-4}$ сек;

- время вычислений порядка $\sim 6 \times 10^{-4}$ сек;
- явной зависимости от n не наблюдается;

- время вычислений порядка $\sim 6 \times 10^{-4}$ сек;
- явной зависимости от n не наблюдается;
- небольшие колебания связаны с адаптивным шагом интегрирования.

5. Итоги



1. Траектория катера в полярных координатах описывается расходящейся спиралью экспоненциального характера.

1. Траектория катера в полярных координатах описывается расходящейся спиралью экспоненциального характера.
2. Параметр n управляет скоростью роста радиуса: чем больше n , тем медленнее увеличивается r при изменении θ .

1. Траектория катера в полярных координатах описывается расходящейся спиралью экспоненциального характера.
2. Параметр n управляет скоростью роста радиуса: чем больше n , тем медленнее увеличивается r при изменении θ .
3. Режим начальных условий (case) определяет масштаб траектории, практически не влияя на её форму.

1. Траектория катера в полярных координатах описывается расходящейся спиралью экспоненциального характера.
2. Параметр n управляет скоростью роста радиуса: чем больше n , тем медленнее увеличивается r при изменении θ .
3. Режим начальных условий (case) определяет масштаб траектории, практически не влияя на её форму.
4. Численное моделирование устойчиво, а вычислительные затраты слабо зависят от n .