МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

Лабораторная работа №1

Имитационное моделирование робототехнических систем

Выполнил:

Студент группы R4134c

Воронин В.С.

Преподаватель:

Борисов И. И.

Санкт-Петербург, 2025

1. Оглавление

2. Цель работы

- Решите аналитически ОДУ в виде:

$$a \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x = d$$

- Выберите коэффициенты для вашего ОДУ $a = 4.03, b = -9.43, c = -8.37, d = 1.52$
  и решите его с помощью трёх методов интегрирования:

  явный метод Эйлера;

  неявный метод Эйлера;

  метод Рунге–Кутты.

- Сравните результаты, полученные с помощью этих методов, с аналитическим решением. Проведите анализ и сформулируйте выводы.

3. Ход выполнения

3.1 Аналитическое решение

Дано дифференциальное уравнение второго порядка

$$4.03 \cdot \ddot{x} - 9.43 \cdot \dot{x} - 8.37 \cdot x = 1.52$$

1. **Характеристическое уравнение**

Для решения сначала найдем общее решение однородного уравнения:

$$4.03r^2 - 9.43r - 8.37 = 0$$

2. **Находим дискриминант**

$$D = b^2 - 4ac = 224.2453$$

3. **Корни характеристического уравнения**

$$r_{1,2} = \frac{9.43 \pm \sqrt{224.2453}}{2 \cdot 4.03}$$

$$r_1 = \frac{9.43 + \sqrt{224.2453}}{2 \cdot 4.03} = 3.03$$

$$r_2 = \frac{9.43 - \sqrt{224.2453}}{2 \cdot 4.03} = -0.69$$

4. **Общее решение однородного уравнения**

$$x_h(t) = C_1 e^{3.03t} + C_2 e^{-0.69t}$$

5. **Частное решение неоднородного уравнения**

Для правой части (постоянная) частное решение ищем в виде: $x_p = A$

Подставляем в исходное уравнение: $4.03 \cdot 0 - 9.43 \cdot 0 - 8.37 \cdot A = 1.52$

$$A = -\frac{1.52}{8.37} = -0.1816$$

6. **Общее решение**

$$x_h(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$$x_h(t) = C_1 e^{3.03t} + C_2 e^{-0.69t} - 0.1816$$

, где C_1 и C_2 — произвольные константы, которые определяются из начальных условий.

3.2 Составление трех интеграторов

Приведем код для всех интеграторов:

- Явный метод Эйлера:

```
def forward_euler(fun, y0, Tf, h, *args):
    """
    Метод явного Эйлера
    """
    t = np.arange(0, Tf + h, h)
    y_hist = np.zeros((len(y0), len(t)))
    y_hist[:, 0] = y0

    for k in range(len(t) - 1):
        y_hist[:, k + 1] = y_hist[:, k] + h * fun(y_hist[:, k], *args)

    return y_hist, t
```

Рисунок 1 Код для явного метода Эйлера

- Неявный метод Эйлера:

```
def backward_euler(fun, y0, Tf, h, tol=1e-8, max_iter=100, *args):
    """
    Метод неявного Эйлера
    """
    t = np.arange(0, Tf + h, h)
    y_hist = np.zeros((len(y0), len(t)))
    y_hist[:, 0] = y0

    for k in range(len(t) - 1):
        y_next = y_hist[:, k].copy()

        for _ in range(max_iter):
            # Формируем систему уравнений
            F = y_next - h * fun(y_next, *args) - y_hist[:, k]
            # Матрица Якоби
            J = np.array([[1, -h],
                          [-h*args[2]/args[0], 1 + h*args[1]/args[0]]])
            delta = solve(J, -F)
            y_next += delta

            if np.linalg.norm(delta) < tol:
                break

        y_hist[:, k + 1] = y_next

    return y_hist, t
```

Рисунок 2 Код для неявного метода Эйлера

- Метод Рунге-Кутты 4-го порядка:

```
def runge_kutta4(fun, y0, Tf, h, *args):
    """
    Метод Рунге-Кутты 4-го порядка
    """
    t = np.arange(0, Tf + h, h)
    y_hist = np.zeros((len(y0), len(t)))
    y_hist[:, 0] = y0

    for k in range(len(t) - 1):
        k1 = fun(y_hist[:, k], *args)
        k2 = fun(y_hist[:, k] + 0.5 * h * k1, *args)
        k3 = fun(y_hist[:, k] + 0.5 * h * k2, *args)
        k4 = fun(y_hist[:, k] + h * k3, *args)

        y_hist[:, k + 1] = y_hist[:, k] + (h / 6.0) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)

    return y_hist, t
```

Рисунок 3 Код для метода Рунге-Кутты 4-го порядка

3.3 Сравнение результатов симуляций

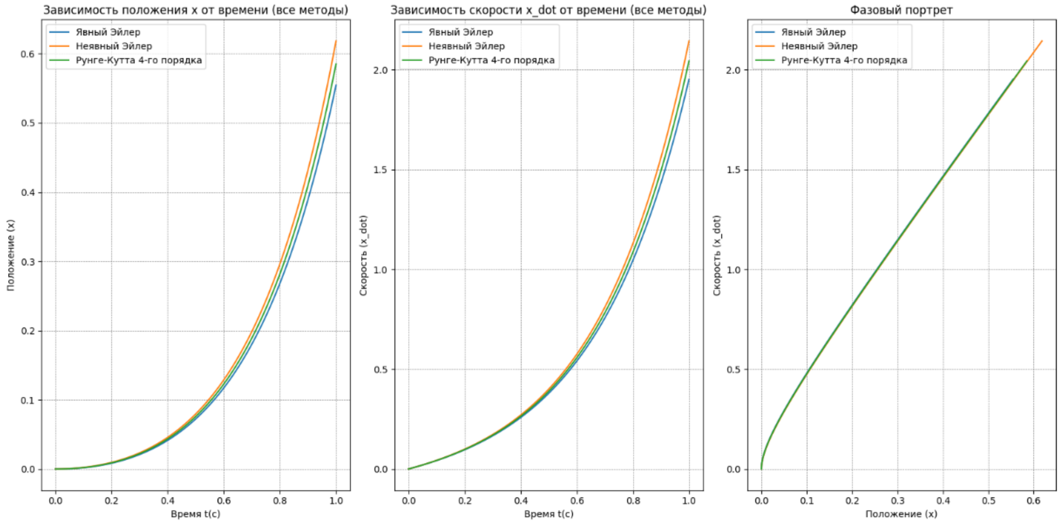

Рисунок 4 Результаты симуляции при h=0.01

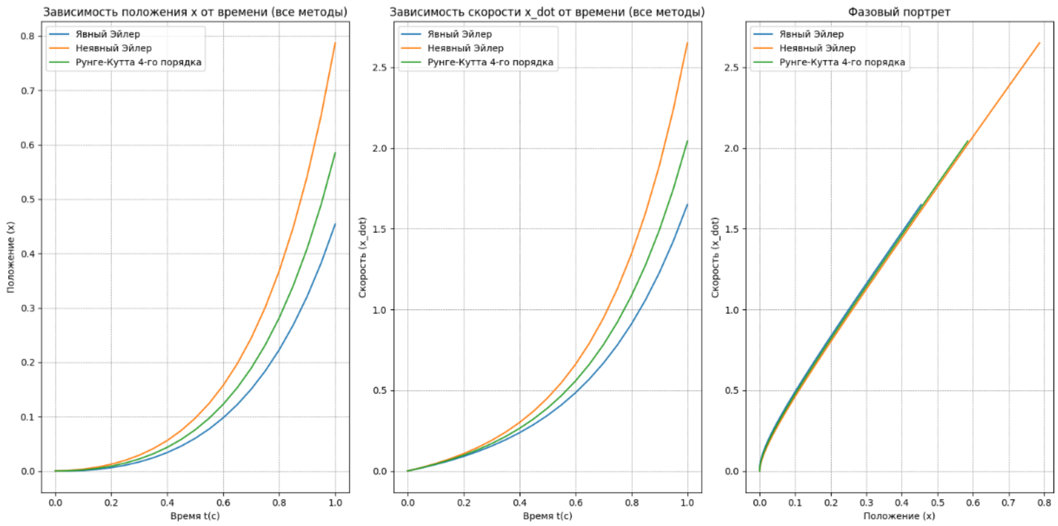

Рисунок 5 Результаты симуляции при h=0.05

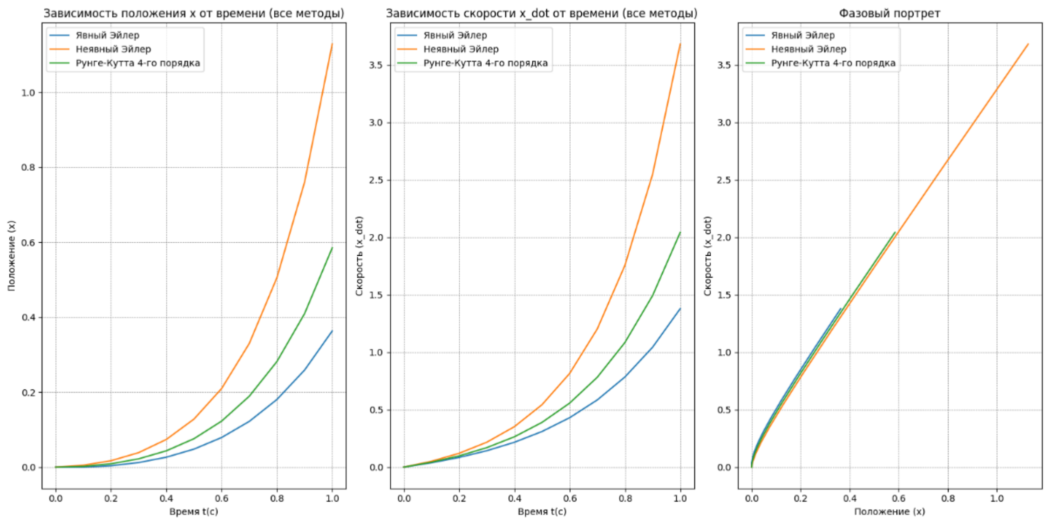

Рисунок 6 Результаты симуляции при h=0.1

4. Вывод

- При аналитическом решении дифференциального уравнения второго порядка мы получили следующие корни характеристического уравнения: $r_1 = 3.03$ и $r_2 = -0.69$. Исходя из полученных корней можно сказать, что система неустойчива из-за $r_1 > 0$, а траектория будет расходиться при $t \to \infty$
- Явный метод Эйлер быстро расходится. Неявный метод Эйлер сохраняет устойчивость, но ошибки могут быть заметны на длинных интервалах. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка даёт наиболее точное приближение.
- Уменьшение шага интегрирования улучшает точность всех методов.
- Порядок метода напрямую влияет на точность: чем выше порядок, тем быстрее сходимость.
- При сравнении аналитического решения с полученным графиками симуляции можно сказать, что выводы полученные из анализа корней характеристического уравнения совпадают с результатами симуляций с определенной точностью в зависимости от выбранного метода.