12. *Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung.*

Von Mitio NAGUMO.

(Eingegangen am 7. October, 1926.

Es sei eine Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y) \tag{1}$$

gegeben. Wir setzen voraus, *dass im Bereiche* $|x-x_0|\leqq l$, $|y-y_0|\leqq k$, *der kurz mit* B *bezeichnet wird, die Funktion* $f(x, y)$ *stetig ist und es eine hinreichend kleine positive Zahl* ε *gibt, für welche stets im* B *die Ungleichung*

$$\frac{x-x_0}{y_2-y_1}\{f(x,\ y_2)-f(x,\ y_1)\}<1 \tag{2}$$

gilt, wenn $0<|x-x_0|\leqq\varepsilon$, $y_1\neq y_2$, $|y_i-y_0|\leqq M\varepsilon$, $(i=1, 2)$ *sind, worin* M *das Maximum von* $|f(x, y)|$ *im* B *bezeichnet.*

Dann beweisen wir, *dass daraus die Eindeutigkeit der Lösung von* (1) *mit den Anfangswerten* $x=x_0$, $y=y_0$ *mindestens fürs Intervall* $|x-x_0|\leqq\varepsilon$ *erfolgt.*

Wir führen den Beweis nur wenn $x-x_0\geqq 0$, weil für den anderen Fall der Beweis ganz ähnlich durchführbar ist.

Angenommen, in der Tat, es gäbe zwei verschiedene Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ durch $(x=x_0,\ y=y_0)$ für $|x-x_0|\leqq\varepsilon$, dann gibt es mindestens einen Wert $x=x_1$, $(x_0<x_1\leqq x_0+\varepsilon)$, so dass $y_1(x_1)\neq y_2(x_1)$. Wir können annehmen $y_2(x_1)>y_1(x_1)$. Für $x_0\leqq x\leqq x_0+\varepsilon$ besteht auch $|y_i-y_0|\leqq M\varepsilon$, $(i=1, 2)$. Aus (2) erhält man

$$f(x_1,\ y_2)-f(x_1,\ y_1)<\frac{y_2(x_1)-y_1(x_1)}{x_1-x_0},$$

und nach (1)

$$\left(\frac{dy_2}{dx}-\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=x_1}<\frac{y_2(x_1)-y_1(x_1)}{x_1-x_0}. \tag{2'}$$

Wir setzen $\quad F(x)=y_2(x)-y_1(x)$

und $\quad \xi(x)=\dfrac{y_2(x_1)-y_1(x_1)}{x_1-x_0}(x-x_0).$

Für diese Funktionen gelten die folgenden Beziehungen:

$$F(x_0)=0,$$
$$F'(x)=\frac{dy_2}{dx}-\frac{dy_1}{dx}=f(x,\ y_2)-f(x,\ y_1),$$
$$F'(x_0)=0,$$
$$\xi(x_0)=0,$$
$$\xi'(x)=\frac{y_2(x_1)-y_1(x_1)}{x_1-x_0}>0$$
$$F(x_1)=\xi(x_1).$$

Dann folgt aus $\xi'(x_0)>F'(x_0)$ für einen in hinreichender Nähe von x_0 liegenden Wert

$$x=x',\quad x_0<x'<x_1,$$
$$\xi(x')>F(x'),$$

d. h.,

$$\xi(x')-F(x')>0. \tag{3}$$

Aber (2') zeigt uns $\xi'(x_1)>F'(x_1)$, und da $\xi(x_1)=F(x_1)$ ist, gibt es einen in hinreichender Nähe von x_1 liegenden Wert $x=x''$, $x'<x''<x_1$, für den die Ungleichung

$$\xi(x'')-F(x'')<0 \tag{4}$$

gilt.

Weil $F(x)$ und $\xi(x)$ stetig sind, muss es, wie man aus (3) und (4) ersieht, mindestens einen Wert von x zwischen x' und x'' geben, so dass

$$F(x)=\xi(x)$$

ist. Sei $\bar{x}$ der grösste solcher Werte, so muss $F(\bar{x})=\xi(\bar{x})$ und

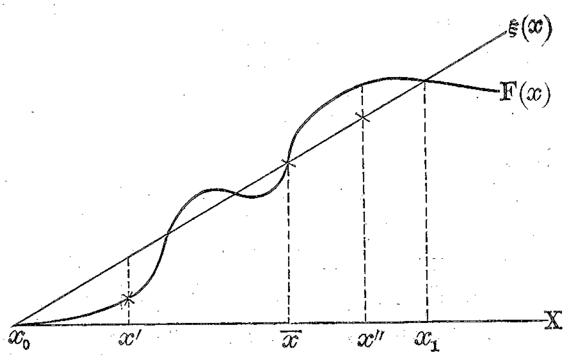

Fig. 1

$$F'(\bar{x})\geqq\xi'(\bar{x}). \tag{5}$$

Aber

$$\xi'(\bar{x})=\frac{y_2(x_1)-y_1(x_1)}{x_1-x_0}=\frac{y_2(x_1)-y_1(x_1)}{x_1-x_0}\ \frac{\bar{x}-x_0}{\bar{x}-x_0}=\frac{\xi(\bar{x})}{\bar{x}-x_0}=\frac{F(\bar{x})}{\bar{x}-x_0}$$
$$=\frac{y_2(\bar{x}_1)-y_1(\bar{x})}{\bar{x}-x_0}$$

und

$$F'(\bar{x})=f(\bar{x},\ y_2(\bar{x}))-f(\bar{x},\ y_1(\bar{x})).$$

Dann kommt aus (5)

$$f(\bar{x}, y_2(\bar{x})) - f(\bar{x}, y_1(\bar{x})) \geqq \frac{y_2(\bar{x}) - y_1(\bar{x})}{\bar{x} - x_0} \quad (>0),$$

d. h.
$$\left(\frac{\bar{x} - x_0}{y_2 - y_1}\right)_{x=\bar{x}} \{f(\bar{x}, y_2) - f(\bar{x}, y_1)\}_{x=\bar{x}} \geqq 1,$$

heraus, was aber im Widerspruch steht mit (2). W. z. b. w.

Bemerkungen.

1) Die Formel (2) enthält die Lipschitzsche Bedingung als einen speziellen Fall, weil der absolute Betrag von

$$\frac{x - x_0}{y_2 - y_1} \{f(x, y_2) - f(x, y_1)\}$$

mit $|x - x_0|$ beliebig klein wird.

2) Da $f(x, y)$ im B stetig ist, gibt es für irgend eine kleine positive Zahl η eine positive Zahl ε, so dass

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \eta$$

gilt im Bereiche

$$|x - x_0| \leqq \varepsilon, \quad |y - y_0| \leqq M\varepsilon.$$

Dann für jede Lösung von (1) durch den Punkt (x_0, y_0)

$$y = y_0 + \{f(x_0, y_0) + \delta\}(x - x_0)$$

im $|x - x_0| \leqq \varepsilon$, wo $|\delta| < \eta$ ist. So können wir anstatt (2) für $|x - x_0| \leqq \varepsilon$ und $|\delta_i| < \eta$, $(i = 1, 2)$ stets setzen

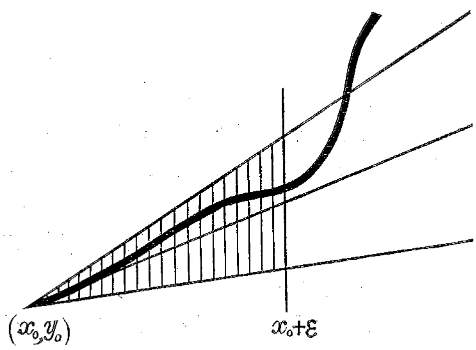

Fig. 2

$$\frac{f\{x, y_0 + (f(x_0, y_0) + \delta_2)(x - x_0)\} - f\{x, y_0 + (f(x_0, y_0) + \delta_1)(x - x_0)\}}{\delta_2 - \delta_1} < 1.$$

3) Ist eine Lösung von (1), $\bar{y}(x)$, durch $(x = x_0,\ y = y_0)$ vorhanden, so können wir für y_1 in (2) die Lösung $\bar{y}(x)$ einsetzen.

Beispiele.

I. $$\frac{dy}{dx} = \frac{mx^3y}{x^4 + y^2} \quad (m \text{ konst.}).$$

Es gilt $$\left|\frac{mx^3y}{x^4 + y^2}\right| \leqq \left|\frac{mx}{2}\right| \quad \text{wegen} \quad |2x^2y| \leqq x^4 + y^2.$$

So ist $\frac{dy}{dx}$ stetig in jedem Punkte (x, y), und genügt der Lipschitzschen Bedingung überall ausser einer kleinen Umgebung von $x = 0$, $y = 0$. In der Tat:

$$|f(x, y_2)-f(x, y_1)| = \left|\frac{mx^3}{(x^4+y_2^2)(x^4+y_1^2)}(x^4(y_2-y_1)+y_1y_2(y_1-y_2))\right|.$$

Gesetzt $y_1=0$, erhält man

$$|f(x, y_2)-f(x, y_1)| = \left|\frac{mx^3}{x^4+y_2^2}\right| \cdot \left|y_2-y_1\right|,$$

wo $\left|\frac{mx^3}{x^4+y_2^2}\right|$ in je kleiner Umgebung von $x=0$, $y=0$ beliebig gross werden kann.

Die linke Seite von (2) lautet für diesen Fall, wo $x_0=0$, $y_0=0$ sind:

$$\frac{x}{y_2-y_1}\left(\frac{mx^3y_2}{x^4+y_2^2}-\frac{mx^3y_1}{x^4+y_1^2}\right)=\frac{mx^4(x^4-y_1y_2)}{(x^4+y_2^2)(x^4+y_1^2)}.$$

Weil $|x^4(x^4-y_1y_2)| < (x^4+y_2^2)(x^4+y_1^2)$ ist sicherlich für $1 \geqq m \geqq -1$,

oder

$$\frac{mx^4(x^4-y_1y_2)}{(x^4+y_2^2)(x^4+y_1^2)}<1,$$

ist die Lösung durch $x=0$, $y=0$ eindeutig bestimmt.

Wie man leicht sieht, ist $y=0$ eine Lösung durch $(x=0,\ y=0)$. So setzen wir $y_1=0$, und wir haben

$$\frac{mx^8}{(x^4+y_2^2)x^4}=\frac{mx^4}{x^4+y_2^2}<1,$$

wenn $m \leqq 1$ ist.

Für $m>1$ kann ich nichts sprechen. Aber für den Fall $m=4$, gibt es sicherlich unendlich viele Lösungen von (1) durch $(x=0,\ y-0)$, nämlich

$$y=\sqrt{c^2+x^4}-c, \quad y=0;$$

und

$$y=c-\sqrt{c^2+x^4}, \quad (c \geqq 0).$$

II. Lavrentieff hat eine Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y) \tag{6}$$

angestellt[1], wobei $f(x, y)$ im Bereiche $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, den wir kurz mit B bezeichnen, stetig ist, und deren Lösungen die im (B) überall dicht liegenden Verzweigungspunkte besitzen. Unter einem Verzweigungspunkte verstehen wir einen Punkt, durch welchen mindestens zwei verschiedene Lösungen von (6) gehen, die in je kleiner Umgebung des

(1) Math. Zeitschrift **23** (1925).

Punktes verschiedene Werte y haben für einen denselben Wert von x. Wir setzen auch, dass auf $y=0$, $0 \leqq x \leqq 1$ und $y=1$, $0 \leqq x \leqq 1$ die Funktion $f(x, y)$ verschwindet, und $|f(x, y)|$ im B das Maximum M hat.

Eine geringe Modifikation von Lavrentieffschem Beispiele liefert uns ein Beispiel der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \tag{7}$$

wobei $F(x, y)$ im Bereiche, $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, der mit B_0 bezeichnet wird, stetig ist, und Verzweigungspunkte der Lösungen überall dicht im B_0 liegen, während durch $(x=x_0,\ y=y_0)$ die einzige Lösung, $y=0$, läuft.

Teilen wir den Bereich B_0 in abzählbare Bänder durch die der x-Achse parallelen Strecken $0 \leqq x \leqq 1$, $y=\frac{1}{2^n}$, $(n=1, 2, 3, \ldots\ldots)$. Das Band,

$$0 \leqq x \leqq 1, \quad \frac{1}{2^{n-1}} \geqq y > \frac{1}{2^n}$$

bezeichnen wir mit B_n. Dann definieren wir eine Funktion $F(x, y)$ folgendermassen:

$$\text{im } B_n \qquad F(x, y) = \frac{f(x, 2^n y-1)}{2^n}.$$

Diese Formel ist nichts anderes als die Transformation durch welche die ganze Lösungskurvenschar von (6) in B_n zusammengedrängt wird. Auf $y=0$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ haben wir $F(x, y)=0$.

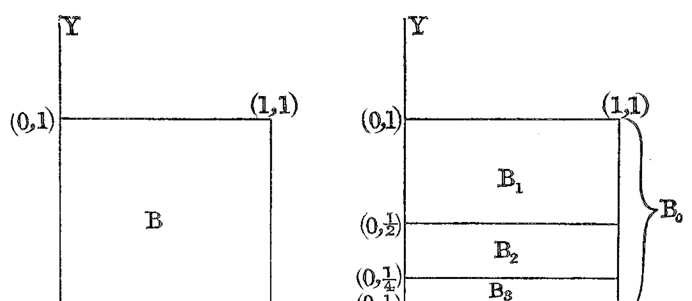

Fig. 3

In jedem B_n gilt $\qquad |F(x, y)| \leqq \frac{M}{2^n}$,

oder
$$|F(x, y)| \leqq My.$$

Also ist $F(x, y)$ im B_0 stetig.

Nun ist $y=0$ für $0 \leqq x \leqq 1$ sicherlich eine Lösung von (7) durch ($x=0$, $y=0$). Wir nehmen einen beliebigen Punkt $x=x_0$, $y=0$ auf dieser Lösung und benutzen die Formel (2), dann erhalten wir für diesen Punkt

$$\frac{x-x_0}{y_2}\{F(x, y_2)-F(x, 0)\}=\frac{(x-x_0)F(x, y_2)}{y_2}.$$

Weil
$$\left|\frac{(x-x_0)F(x, y_2)}{y_2}\right| \leqq \left|\frac{(x-x_0)My_2}{y_2}\right| = |x-x_0|\, M$$

ist, wird die Bedingung (2) befriedigt für einen genügend kleinen Wert von $|x-x_0|$. Da x_0 beliebig im $0 \leqq x_0 \leqq 1$ genommen werden kann, so muss $y=0$ die einzige Lösung von (7) durch ($x=0$, $y=0$) sein. Im B_0 liegen doch Verzweigungspunkte überall dicht. W. z. b. w.

Den 21. Juni, 1926.

Mathematisches Institut,
K. Universität zu Tôkyô.