

# BAB 6

## Penggunaan EMT untuk Geometry

Sabilla Hanifah Nur Jihada

November 2024

### 1 Visualisasi dan Perhitungan Geometri dengan EMT

Euler menyediakan beberapa fungsi untuk melakukan visualisasi dan perhitungan geometri, baik secara numerik maupun analitik (seperti biasanya tentunya, menggunakan Maxima). Fungsi-fungsi untuk visualisasi dan perhitungan geometri tersebut disimpan di dalam file program “geometry.e”, sehingga file tersebut harus dipanggil sebelum menggunakan fungsi-fungsi atau perintah-perintah untuk geometri.

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

### 2 Fungsi-fungsi Geometri

Fungsi-fungsi untuk Menggambar Objek Geometri:

```
defaultd:=textheight()*1.5: nilai asli untuk parameter d
setPlotRange(x1,x2,y1,y2): menentukan rentang x dan y pada bidang
koordinat
setPlotRange(r): pusat bidang koordinat (0,0) dan batas-batas sumbu-x dan
y adalah -r sd r
plotPoint (P, “P”): menggambar titik P dan diberi label “P”
plotSegment (A,B, “AB”, d): menggambar ruas garis AB, diberi label “AB”
sejauh d
plotLine (g, “g”, d): menggambar garis g diberi label “g” sejauh d
plotCircle (c, “c”, v,d): Menggambar lingkaran c dan diberi label “c”
plotLabel (label, P, V, d): menuliskan label pada posisi P
Fungsi-fungsi Geometri Analitik (numerik maupun simbolik):
turn(v, phi): memutar vektor v sejauh phi
turnLeft(v): memutar vektor v ke kiri
turnRight(v): memutar vektor v ke kanan
normalize(v): normal vektor v
```

`crossProduct(v, w)`: hasil kali silang vektor  $v$  dan  $w$ .  
`lineThrough(A, B)`: garis melalui  $A$  dan  $B$ , hasilnya  $[a,b,c]$  sdh.  
 $ax+by=c$ .  
`lineWithDirection(A,v)`: garis melalui  $A$  searah vektor  $v$   
`getLineDirection(g)`: vektor arah (gradien) garis  $g$   
`getNormal(g)`: vektor normal (tegak lurus) garis  $g$   
`getPointOnLine(g)`: titik pada garis  $g$   
`perpendicular(A, g)`: garis melalui  $A$  tegak lurus garis  $g$   
`parallel(A, g)`: garis melalui  $A$  sejajar garis  $g$   
`lineIntersection(g, h)`: titik potong garis  $g$  dan  $h$   
`projectToLine(A, g)`: proyeksi titik  $A$  pada garis  $g$   
`distance(A, B)`: jarak titik  $A$  dan  $B$   
`distanceSquared(A, B)`: kuadrat jarak  $A$  dan  $B$   
`quadrance(A, B)`: kuadrat jarak  $A$  dan  $B$   
`areaTriangle(A, B, C)`: luas segitiga  $ABC$   
`computeAngle(A, B, C)`: besar sudut  $\angle ABC$   
`angleBisector(A, B, C)`: garis bagi sudut  $\angle ABC$   
`circleWithCenter(A, r)`: lingkaran dengan pusat  $A$  dan jari-jari  $r$   
`getCircleCenter(c)`: pusat lingkaran  $c$   
`getCircleRadius(c)`: jari-jari lingkaran  $c$   
`circleThrough(A,B,C)`: lingkaran melalui  $A, B, C$   
`middlePerpendicular(A, B)`: titik tengah  $AB$   
`lineCircleIntersections(g, c)`: titik potong garis  $g$  dan lingkaran  $c$   
`circleCircleIntersections(c1, c2)`: titik potong lingkaran  $c1$  dan  $c2$   
`planeThrough(A, B, C)`: bidang melalui titik  $A, B, C$   
 Fungsi-fungsi Khusus Untuk Geometri Simbolik:  
`getLineEquation(g,x,y)`: persamaan garis  $g$  dinyatakan dalam  $x$  dan  $y$   
`getHesseForm(g,x,y,A)`: bentuk Hesse garis  $g$  dinyatakan dalam  $x$  dan  $y$  dengan titik  $A$  pada  
 sisi positif (kanan/atas) garis  
`quad(A,B)`: kuadrat jarak  $AB$   
`spread(a,b,c)`: Spread segitiga dengan panjang sisi-sisi  $a,b,c$ , yakni  $\sin(\alpha)^2$   
 dengan  
 $\alpha$  sudut yang menghadap sisi  $a$ .  
`crosslaw(a,b,c,sa)`: persamaan 3 quads dan 1 spread pada segitiga dengan  
 panjang sisi  $a, b, c$ .  
`triplespread(sa,sb,sc)`: persamaan 3 spread  $sa,sb,sc$  yang membentuk suatu  
 segitiga  
`doublespread(sa)`: Spread sudut rangkap Spread  $2*\phi$ , dengan  $sa=\sin(\phi)^2$   
 spread  $a$ .

### 3 Contoh 1: Luas, Lingkaran Luar, Lingkaran Dalam Segitiga

Untuk menggambar objek-objek geometri, langkah pertama adalah menentukan rentang sumbu-sumbu koordinat. Semua objek geometri akan digambar pada satu bidang koordinat, sampai didefinisikan bidang koordinat yang baru.

```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
```

Sekarang, tetapkan tiga titik dan plotkan.

```
>A=[1,0]; plotPoint(A,"A"); // definisi dan gambar tiga titik
```

```
>B=[0,1]; plotPoint(B,"B");
```

```
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");
```

Kemudian tiga segmen.

```
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
```

```
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
```

```
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
```

Fungsi geometri mencakup fungsi untuk membuat garis dan lingkaran. Format untuk garis adalah  $[a,b,c]$ , yang merepresentasikan garis dengan persamaan  $ax+by=c$ .

```
>lineThrough(B,C) // garis yang melalui B dan C
```

```
[-1, 2, 2]
```

Hitung garis tegak lurus yang melalui A pada BC.

```
>h=perpendicular(A,lineThrough(B,C)); // garis h tegak lurus BC melalui
```

A

Dan persimpangannya dengan BC.

```
>D=lineIntersection(h,lineThrough(B,C)); // D adalah titik potong h dan
```

BC

Rencanakan itu.

```
>plotPoint(D,value=1); // koordinat D ditampilkan
```

```
>aspect(1); plotSegment(A,D); // tampilkan semua gambar hasil plot...()
```

Hitung luas ABC:

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AD.BC.$$

```
>norm(A-D)*norm(B-C)/2 // AD=norm(A-D), BC=norm(B-C)
```

1.5

Bandingkan dengan rumus determinan.

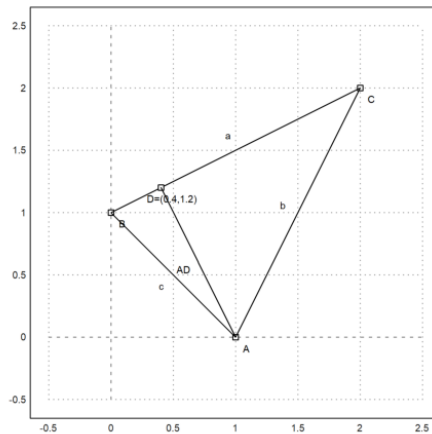
Atau kita bisa mencari luas segitiga tersebut dengan fungsi berikut :

```
>areaTriangle(A,B,C) // hitung luas segitiga langsung dengan fungsi
```

1.5

Cara lainnya yaitu dengan menggunakan determinan dari 3 titik yang sudah diketahui A(1,0), B(0,1), C(2,2), dengan rumus:

```
>distance(A,D)*distance(B,C)/2
```



Gambar 1: gambar 1

1.5

Sudut pada C.

```
>degprint(computeAngle(B,C,A))
```

36°52'11.63''

Sekarang, lingkarilah segitiga tersebut.

## 4 Menggambar Lingkaran Luar Segitiga

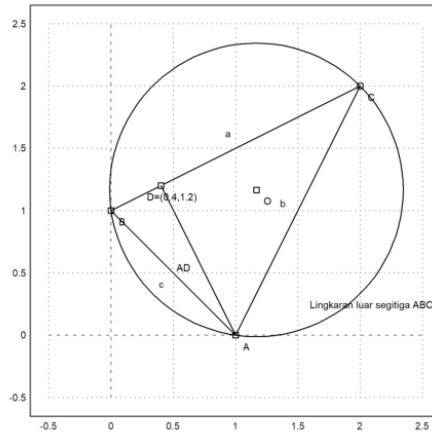
```
>c=circleThrough(A,B,C); // lingkaran luar segitiga ABC
>R=getCircleRadius(c); // jari2 lingkaran luar
>O=getCircleCenter(c); // titik pusat lingkaran c
>plotPoint(O,"O"); // gambar titik "O"
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC"):
Tampilkan koordinat titik pusat dan jari-jari lingkaran luar.
>O, R
```

```
[1.16667, 1.16667]
1.17851130198
```

## 5 Menggambar lingkaran dalam Segitiga

Sekarang akan digambar lingkaran dalam segitiga ABC. Titik pusat lingkaran dalam adalah titik potong garis-garis bagi sudut.

```
>l=angleBisector(A,C,B); // garis bagi <ACB
```



Gambar 2: gambar 3

```
>g=angleBisector(C,A,B); // garis bagi <CAB
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```

```
[0.86038, 0.86038]
```

Tambahkan semuanya ke plot.

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi
sudut
```

```
>plotPoint(P,"P"); // gambar titik potongnya
```

```
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam
```

```
0.509653732104
```

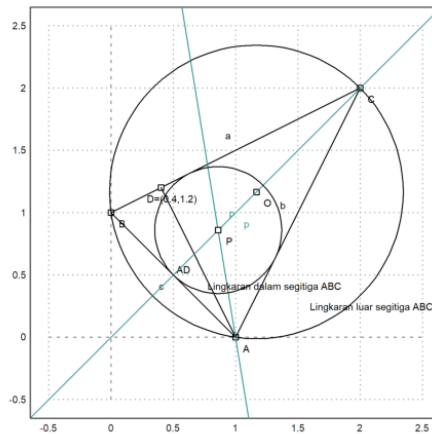
```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"); // gam-
bar lingkaran dalam
```

## 6 Latihan

1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.

```
>setPlotRange(-2.5,4.5,-2.5,4.5);
>A=[-2,1]; plotPoint(A,"A");
>B=[1,-2]; plotPoint(B,"B");
>C=[4,4]; plotPoint(C,"C");
```

2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut. Merupakan segitiga apakah itu?



Gambar 3: gambar 4

```
>plotSegment(A,B,"c")
>plotSegment(B,C,"a")
>plotSegment(A,C,"b")
>aspect(1):
```

3. Hitung luas segitiga tersebut.

```
>l=angleBisector(A,C,B);
>g=angleBisector(C,A,B);
>P=lineIntersection(l,g)
```

```
[0.581139, 0.581139]
```

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1);
>plotPoint(P,"P");
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B)))
```

```
1.52896119631
```

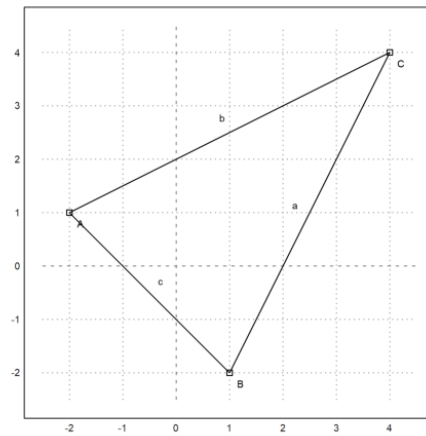
```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC");
```

Jadi, terbukti bahwa garis bagi sudut yang ketiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.

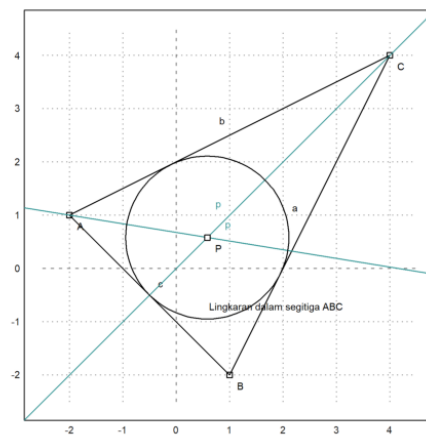
4. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.

```
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B)))
```

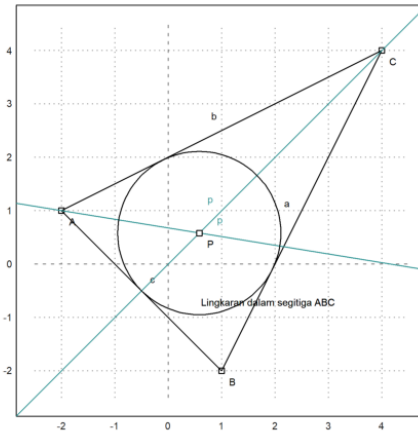
```
1.52896119631
```



Gambar 4: gambar 5



Gambar 5: gambar 6



Gambar 6: gambar 7

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),“Lingkaran dalam segitiga ABC”):
```

5. Gambar jari-jari lingkaran dalam.
6. Hitung luas lingkaran luar dan luas lingkaran dalam segitiga ABC. Adakah hubungan antara luas kedua lingkaran tersebut dengan luas segitiga ABC?

## 7 Contoh 2: Geometri Smbolik

Kita dapat menghitung geometri eksak dan simbolik menggunakan Maxima. File geometry.e menyediakan fungsi-fungsi yang sama (dan lebih banyak lagi) di Maxima. Namun, kita dapat menggunakan komputasi simbolik sekarang.

### 8 1. Menentukan persamaan garis melalui dua titik

```
>A &= [1,0]; B &= [0,1]; C &= [2,2]; // menentukan tiga titik A, B, C
```

Fungsi untuk garis dan lingkaran bekerja seperti fungsi Euler, tetapi menyediakan komputasi simbolis.

```
>c &= lineThrough(B,C) // c=BC
```

```
[- 1, 2, 2]
```

Kita bisa mendapatkan persamaan untuk sebuah garis dengan mudah.



## 9 Mencari persamaan garis menggunakan metode simbolik

>\$getLineEquation(c,x,y), \$solve(%,y) | expand // persamaan garis c

$$\left[ y = \frac{x}{2} + 1 \right]$$

>\$getLineEquation(lineThrough([x1,y1],[x2,y2]),x,y), \$solve(%,y) // persamaan garis melalui(x1, y1) dan (x2, y2)

$$\left[ y = \frac{-(x_1 - x) y_2 - (x - x_2) y_1}{x_2 - x_1} \right]$$

>\$getLineEquation(lineThrough(A,[x1,y1]),x,y) // persamaan garis melalui A dan (x1, y1)

$$(x_1 - 1) y - x y_1 = -y_1$$

Selanjutka, kita mencari garis yang tegak lurus dengan BC. dan melalui titik A  
>h &= perpendicular(A,lineThrough(B,C)) // h melalui A tegak lurus BC

$$[2, 1, 2]$$

## 10 2. Mencari Titik Potong Garis h dengan Garis BC

>Q &= lineIntersection(c,h) // Q titik potong garis c=BC dan h

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ - & - \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Mencari proyeksi dari titik A ke titik D

>\$projectToLine(A,lineThrough(B,C)) // proyeksi A pada BC

$$\left[ \frac{2}{5}, \frac{6}{5} \right]$$

## 3. Mencari Panjang Garis AQ

>\$distance(A,Q) // jarak AQ

$$\frac{3}{\sqrt{5}}$$

## 4. Menggunakan Titik Pusat dan Jari-Jari

Mencari dengan menggunakan geometri simbolik

```
>cc &= circleThrough(A,B,C); $cc // (titik pusat dan jari-jari) lingkaran
melalui A, B, C
```

$$\left[ \frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \frac{5}{3\sqrt{2}} \right]$$

```
>r&=getCircleRadius(cc); $r , $float(r) // tampilkan nilai jari-jari
```

1.178511301977579

## 11 5. Mencari Nilai Sudut dari ACB

```
>$computeAngle(A,C,B) // nilai <ACB
```

$$\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$$

```
## 6. Mencari Persaman garis bagi dan titik potong sudut ACB
```

```
>$solve(getLineEquation(angleBisector(A,C,B),x,y),y)[1] // persamaan garis
bagi <ACB
```

$$y = x$$

Mencari titik potong 2 garis bagi tersebut

```
>P &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A)); $P //
titik potong 2 garis bagi sudut
```

$$\left[ \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}+2}{6}, \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}+2}{6} \right]$$

```
>P() // hasilnya sama dengan perhitungan sebelumnya
```

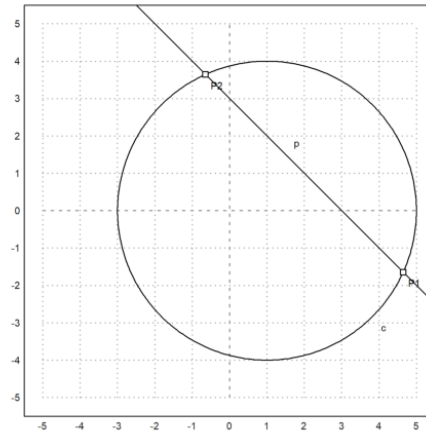
```
[0.86038, 0.86038]
```

## 12 Perpotongan Garis dan Lingkaran

Tentu saja, kita juga bisa memotong garis dengan lingkaran, dan lingkaran dengan lingkaran.

```
>A &:= [1,0]; c=circleWithCenter(A,4);
>B &:= [1,2]; C &:= [2,1]; l=lineThrough(B,C);
>setPlotRange(5); plotCircle(c); plotLine(l);
```

Perpotongan garis dengan lingkaran menghasilkan dua titik dan jumlah titik perpotongan.



Gambar 7: gambar 21

### 13 Mencari titik koordinat P! dan P2 dala (x,y)

```
>{P1,P2,f}=lineCircleIntersections(l,c);
>P1, P2, f
```

```
[4.64575, -1.64575]
[-0.645751, 3.64575]
2
```

```
>plotPoint(P1); plotPoint(P2):
```

Begitu pula pada Maxima.

```
>c &= circleWithCenter(A,4) // lingkaran dengan pusat A jari-jari 4
```

```
[1, 0, 4]
```

```
>l &= lineThrough(B,C) // garis l melalui B dan C
```

```
[1, 1, 3]
```

```
>$lineCircleIntersections(l,c) | radcan, // titik potong lingkaran c dan garis
```

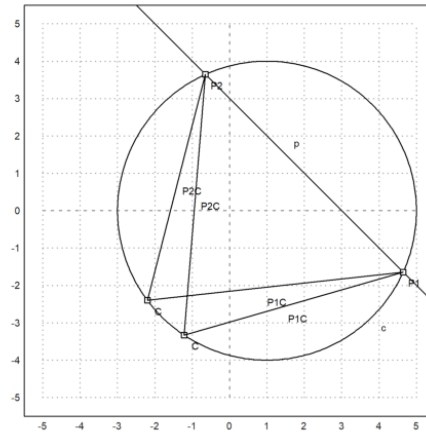
1

$$\left[ \left[ \sqrt{7} + 2, 1 - \sqrt{7} \right], \left[ 2 - \sqrt{7}, \sqrt{7} + 1 \right] \right]$$

Akan ditunjukkan bahwa sudut-sudut yang menghadap busur yang sama adalah sama besar.

```
>C=A+normalize([-2,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

69°17'42.68''



Gambar 8: gambar 23

```
>C=A+normalize([-4,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

69°17'42.68''

```
>insimg;
```

## 14 Garis Sumbu

Berikut adalah langkah-langkah menggambar garis sumbu ruas garis AB:

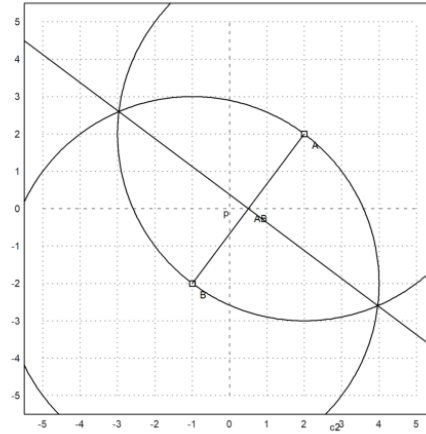
1. Gambar lingkaran dengan pusat A melalui B.
2. Gambar lingkaran dengan pusat B melalui A.
3. Tarik garis melalui kedua titik potong kedua lingkaran tersebut. Garis ini merupakan garis sumbu (melalui titik tengah dan tegak lurus) AB.

- Medefinisikan titik A dan titik B

```
>A=[2,2]; B=[-1,-2];
```

- Membuat lingkarn c1 dan c2

```
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B));
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);
```



Gambar 9: gambar 24

## 15 Mencari titik potong antara dua lingkaran

```
>l=lineThrough(P1,P2);
>setPlotRange(5); plotCircle(c1); plotCircle(c2);
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l);
```

## 16

Selanjutnya, kami melakukan hal yang sama di Maxima dengan koordinat umum.

```
>A &= [a1,a2]; B &= [b1,b2];
>c1 &= circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2 &= circleWithCenter(B,distance(A,B));
>P &= circleCircleIntersections(c1,c2); P1 &= P[1]; P2 &= P[2];
```

Persamaan untuk persimpangan cukup rumit. Tetapi kita dapat menyederhanakannya, jika kita menyelesaikan untuk y.

```
>g &= getLineEquation(lineThrough(P1,P2),x,y);
>$solve(g,y)
```

$$\left[ y = \frac{-(2b_1 - 2a_1)x + b_2^2 + b_1^2 - a_2^2 - a_1^2}{2b_2 - 2a_2} \right]$$

Ini memang sama dengan tegak lurus tengah, yang dihitung dengan cara yang sama sekali berbeda.

```
>$solve(getLineEquation(middlePerpendicular(A,B),x,y),y)
```

$$\left[ y = \frac{-(2b_1 - 2a_1)x + b_2^2 + b_1^2 - a_2^2 - a_1^2}{2b_2 - 2a_2} \right]$$

Selanjutnya, kita juga menentukan persamaan garis yang melalui titik A dan B

```
>h &=getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y);
>$solve(h,y)
```

$$\left[ y = \frac{(b_2 - a_2) x - a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 - a_1} \right]$$

Perhatikan hasil kali gradien garis g dan h adalah:

$$\frac{-(b_1 - a_1)}{(b_2 - a_2)} \times \frac{(b_2 - a_2)}{(b_1 - a_1)} = -1.$$

Artinya kedua garis tegak lurus.

## 17 Contoh 3: Rumus Heron

Rumus Heron menyatakan bahwa luas segitiga dengan panjang sisi-sisi a, b dan c adalah:

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{dengan } s = (a+b+c)/2,$$

atau bisa ditulis dalam bentuk lain:

$$L = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$

Untuk membuktikan hal ini kita misalkan C(0,0), B(a,0) dan A(x,y), b=AC, c=AB. Luas segitiga ABC adalah

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \times y.$$

Nilai y didapat dengan menyelesaikan sistem persamaan:

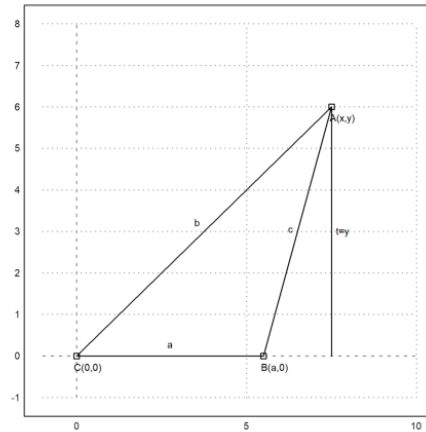
$$x^2 + y^2 = b^2, \quad (x-a)^2 + y^2 = c^2.$$

```
>setPlotRange(-1,10,-1,8); plotPoint([0,0], "C(0,0)"); plotPoint([5.5,0], "B(a,0)");
```

```
...
```

```
> plotPoint([7.5,6], "A(x,y)");
> plotSegment([0,0],[5.5,0], "a",25); plotSegment([5.5,0],[7.5,6], "c",15); ...
> plotSegment([0,0],[7.5,6], "b",25);
> plotSegment([7.5,6],[7.5,0], "t=y",25):
> &assume(a>0); sol &= solve([x^2+y^2=b^2,(x-a)^2+y^2=c^2],[x,y])
```

$$[[x = \frac{-c^2 + b^2 + a^2}{2a}, y = \frac{2a}{4} \sqrt{\frac{2a^2 - c^2 + b^2}{4a^2 - c^2 + b^2}}]]$$



Gambar 10: gambar 33

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\sqrt{-c^2 + 2bc + 2ac - b^2 + 2ab - a^2}}{2a}, \\
 & [x = \frac{-c^2 + b^2 + a^2}{2a}, y = \\
 & \frac{\sqrt{-c^4 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - b^4 + 2a^2b^2 - a^4}}{2a}]
 \end{aligned}$$

Ekstrak larutan y.

>ysol &= y with sol[2][2]; \$'y=sqrt(factor(ysol^2))

$$y = \frac{\sqrt{(-c+b+a)(c-b+a)(c+b-a)(c+b+a)}}{2a}$$

Kami mendapatkan rumus Heron.

>function H(a,b,c) &= sqrt(factor((ysol\*a/2)^2)); \$'H(a,b,c)=H(a,b,c)

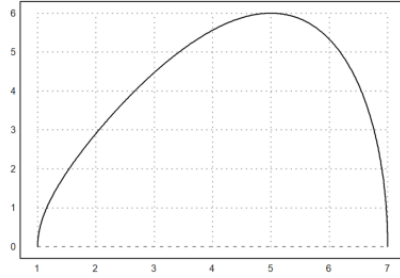
$$H(a,b,c) = \frac{\sqrt{(-c+b+a)(c-b+a)(c+b-a)(c+b+a)}}{4}$$

>\$'Luas=H(2,5,6) // luas segitiga dengan panjang sisi-sisi 2, 5, 6

$$Luas = \frac{3\sqrt{39}}{4}$$

Tentu saja, setiap segitiga persegi panjang adalah kasus yang terkenal.

>H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5



Gambar 11: gambar 37

6

Dan juga jelas, bahwa ini adalah segitiga dengan luas maksimal dan kedua sisi 3 dan 4.

>aspect (1.5); plot2d(&H(3,4,x),1,7): // Kurva luas segitiga sengan panjang sisi 3, 4, x (1<= x <=7)

Kasus umum juga bisa digunakan.

>\$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c)

$$\left[ c = -\sqrt{b^2 + a^2}, c = \sqrt{b^2 + a^2}, c = 0 \right]$$

Sekarang mari kita cari himpunan semua titik di mana b+c=d untuk suatu konstanta d. Sudah diketahui bahwa ini adalah sebuah elips.

>s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); \$s1

$$\left[ x = \frac{(d-c)^2 - c^2 + a^2}{2a}, y = \frac{\sqrt{-(d-c)^4 + 2c^2(d-c)^2 + 2a^2(d-c)^2 - c^4 + 2a^2c^2 - a^4}}{2a} \right]$$

Dan buatlah fungsi-fungsi dari hal ini.

>function fx(a,c,d) &= rhs(s1[1]); \$fx(a,c,d), function fy(a,c,d) &= rhs(s1[2]); \$fy(a,c,d)

$$\frac{\sqrt{-(d-c)^4 + 2c^2(d-c)^2 + 2a^2(d-c)^2 - c^4 + 2a^2c^2 - a^4}}{2a}$$

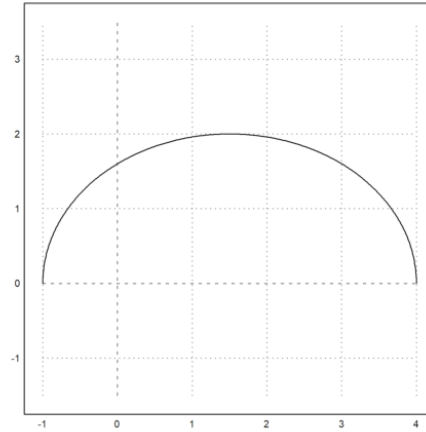
Sekarang, kita bisa menggambar setnya. Sisi b bervariasi dari 1 hingga 4. Sudah diketahui bahwa kita mendapatkan sebuah elips.

>aspect(1); plot2d(&fx(3,x,5),&fy(3,x,5),xmin=1,xmax=4,square=1):

Kita dapat memeriksa persamaan umum untuk elips ini, yaitu

$$\frac{(x - x_m)^2}{u^2} + \frac{(y - y_m)^2}{v^2} = 1$$





Gambar 12: gambar 42

,di mana  $(x_m, y_m)$  adalah pusat, dan  $u$  serta  $v$  adalah setengah sumbu.

`>$ratsimp((fx(a,c,d)-a/2)^2/u^2+fy(a,c,d)^2/v^2 with [u=d/2,v=sqrt(d^2-a^2)/2])`

$$\frac{(4fy^2(a,c,d) + 4fx^2(a,c,d) - 4afx(a,c,d) + a^2)d^2 - 4a^2fx^2(a,c,d) + 4a^3fx(a,c,d) - a^4}{d^4 - a^2d^2}$$

Kita melihat bahwa tinggi dan luas segitiga adalah maksimal untuk  $x=0$ . Dengan demikian, luas segitiga dengan  $a+b+c=d$  adalah maksimal, jika segitiga tersebut sama sisi. Kita ingin membuktikannya secara analitis.

`>eqns &= [diff(H(a,b,d-(a+b)))^2,a)=0,diff(H(a,b,d-(a+b)))^2,b)=0]; $eqns`

$$\left[ 2H(a,b,d-b-a) \left( \frac{d}{da} H(a,b,d-b-a) \right) = 0, 2H(a,b,d-b-a) \left( \frac{d}{db} H(a,b,d-b-a) \right) = 0 \right]$$

Kita mendapatkan beberapa minima, yang termasuk dalam segitiga dengan satu sisi 0, dan solusi  $a = b = c = d / 3$ .

`>$solve(eqns,[a,b])`

□

Ada juga metode Lagrange, yang memaksimalkan  $H(a,b,c)^2$  sehubungan dengan  $a+b+c=d$ .

`>&solve([diff(H(a,b,c)^2,a)=la,diff(H(a,b,c)^2,b)=la, ...`

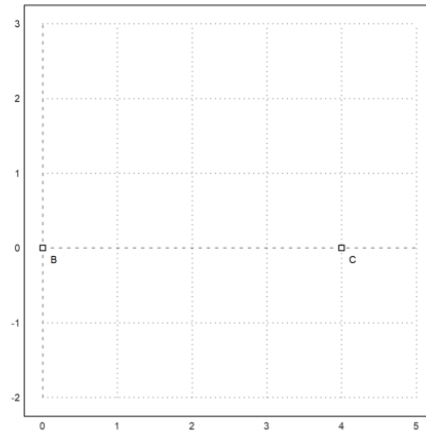
`> diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d],[a,b,c,la])`

□

Kita bisa membuat plot situasi

Pertama-tama, tetapkan titik-titik di Maxima.

`>A &= at([x,y],sol[2]);$A`



Gambar 13: gambar 49

Maxima said:

```
at: improper argument: sol[2]
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

Error in:

```
A &:= at([x,y],sol[2]);$A ...
      ^
```

```
>B &= [0,0]; $B, C &= [a,0]; $C
```

```
[a, 0]
```

Kemudian, tetapkan kisaran plot, dan plot titik-titiknya.

```
>setPlotRange(0,5,-2,3); ...
```

```
> a=4; b=3; c=2; ...
```

```
> plotPoint(mxmeval("B"),"B"); plotPoint(mxmeval("C"),"C"); ...
```

```
> plotPoint(mxmeval("A"),"A");
```

Plot the segments.

```
>plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); ...
```

```
> plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("C")); ...
```

```
> plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("A"));
```

Hitung garis tegak lurus tengah dalam Maxima.

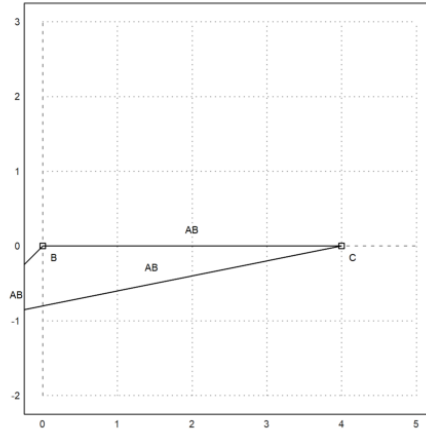
```
>h &= middlePerpendicular(A,B); g &= middlePerpendicular(B,C);
```

Dan bagian tengah lingkaran.

```
>U &= lineIntersection(h,g);
```

Kita mendapatkan rumus untuk jari-jari lingkaran.

```
>&assume(a>0,b>0,c>0); $distance(U,B) | radcan
```



Gambar 14: gambar 50

$$\frac{\sqrt{a^2 + 2a + 2}}{\sqrt{2}}$$

Mari kita tambahkan ini ke dalam plot.

```
>plotPoint(U()); ...
> plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmeval("distance(U,C)"))):
    Dengan menggunakan geometri, kami memperoleh rumus sederhana
```

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = 2r$$

untuk radius. Kita bisa mengecek, apakah hal ini benar-benar terjadi pada Maxima. Maxima akan memperhitungkannya hanya jika kita mengkuadratkannya.

```
>$c^2/sin(computeAngle(A,B,C))2 | factor
```

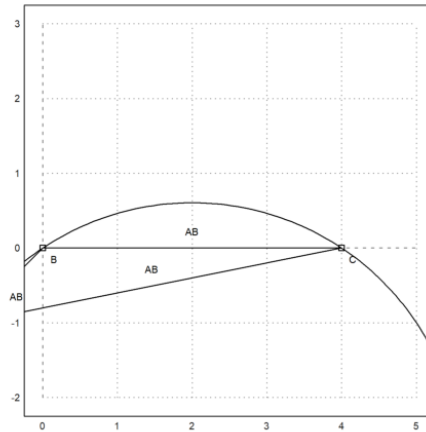
$$2c^2$$

# Contoh 4: Garis Euler dan Parabola

Garis Euler adalah garis yang ditentukan dari segitiga apa pun yang tidak sama sisi. Garis ini merupakan garis tengah segitiga, dan melewati beberapa titik penting yang ditentukan dari segitiga, termasuk ortosentrum, circumcenter, centroid, titik Exeter, dan pusat lingkaran sembilan titik segitiga.

Sebagai demonstrasi, kami menghitung dan memplot garis Euler dalam sebuah segitiga.

Pertama, kita tentukan sudut-sudut segitiga di Euler. Kami menggunakan definisi, yang terlihat dalam ekspresi simbolis.



Gambar 15: gambar 52

```
>A::[-1,-1]; B::[2,0]; C::[1,2];
```

Untuk memplot objek geometris, kita menyiapkan area plot, dan menambahkan titik-titik ke dalamnya. Semua plot objek geometris ditambahkan ke plot saat ini.

```
>setPlotRange(3); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
```

Kita juga bisa menambahkan sisi-sisi segitiga.

```
>plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,A,"");
```

Berikut ini adalah luas area segitiga, dengan menggunakan rumus penentu. Tentu saja, kita harus mengambil nilai absolut dari hasil ini.

```
>$areaTriangle(A,B,C)
```

$$-\frac{7}{2}$$

Kita dapat menghitung koefisien dari sisi c.

```
>c &= lineThrough(A,B)
```

$$[-1, 3, -2]$$

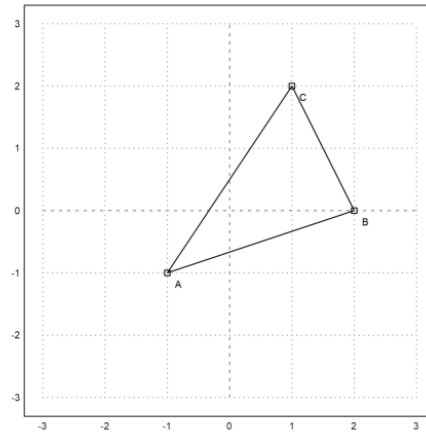
Dan juga mendapatkan formula untuk baris ini.

```
>$getLineEquation(c,x,y)
```

$$3y - x = -2$$

Untuk bentuk Hesse, kita perlu menentukan sebuah titik, sehingga titik tersebut berada di sisi positif dari bentuk Hesse. Memasukkan titik tersebut akan menghasilkan jarak positif ke garis.

```
>$getHesseForm(c,x,y,C), $at(%, [x=C[1],y=C[2]])
```



Gambar 16: gambar 55

$$\frac{7}{\sqrt{10}}$$

Sekarang kita menghitung keliling ABC.

```
>LL &= circleThrough(A,B,C); $getCircleEquation(LL,x,y)
```

$$\left(y - \frac{5}{14}\right)^2 + \left(x - \frac{3}{14}\right)^2 = \frac{325}{98}$$

```
>O &= getCircleCenter(LL); $O
```

$$\left[\frac{3}{14}, \frac{5}{14}\right]$$

Plot lingkaran dan pusatnya. Cu dan U adalah simbol. Kami mengevaluasi ekspresi ini untuk Euler.

```
>plotCircle(LL()); plotPoint(O(), "O");
```

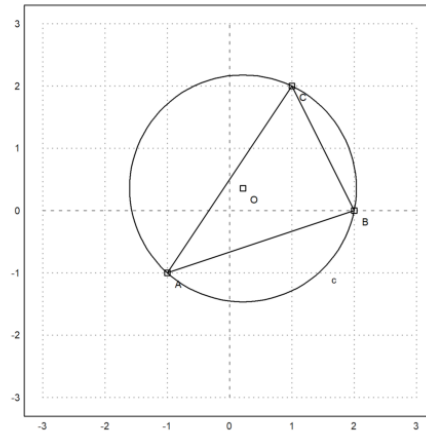
Kita dapat menghitung perpotongan ketinggian di ABC (pusat ortosentrum) secara numerik dengan perintah berikut ini.

```
>H &= lineIntersection(perpendicular(A,lineThrough(C,B)),...
> perpendicular(B,lineThrough(A,C))); $H
```

$$\left[\frac{11}{7}, \frac{2}{7}\right]$$

Sekarang kita dapat menghitung garis Euler dari segitiga tersebut.

```
>el &= lineThrough(H,O); $getLineEquation(el,x,y)
```



Gambar 17: gambar 62

$$-\frac{19y}{14} - \frac{x}{14} = -\frac{1}{2}$$

Tambahkan ke plot kami.

```
>plotPoint(H(), "H"); plotLine(el(), "Garis Euler");
```

Pusat gravitasi harus berada pada garis ini.

```
>M &= (A+B+C)/3; $getLineEquation(el,x,y) with
```

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

```
>plotPoint(M(), "M"); // titik berat
```

Teori mengatakan bahwa  $MH = 2 \cdot MO$ . Kita perlu menyederhanakan dengan radcan untuk mencapai hal ini.

```
>$distance(M,H)/distance(M,O)|radcan
```

$$2$$

Fungsi-fungsi ini juga mencakup fungsi untuk sudut.

```
>$computeAngle(A,C,B), degprint(%())
```

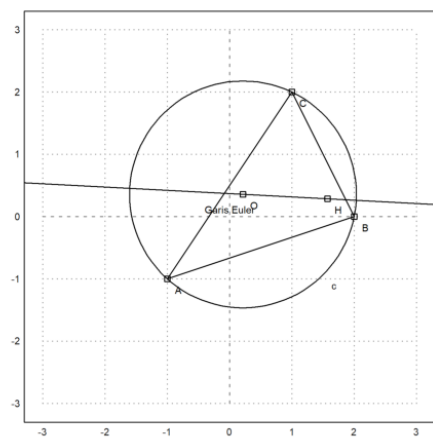
$$\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{13}}\right)$$

$$60^{\circ}15'18.43''$$

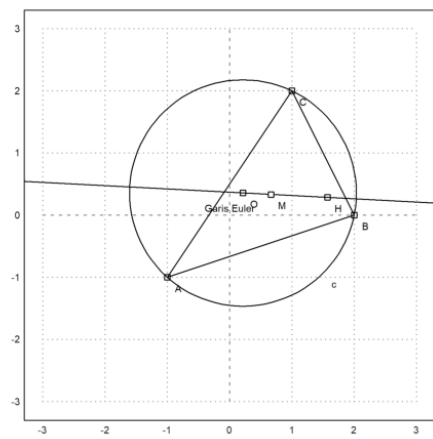
Persamaan untuk bagian tengah lingkaran tidak terlalu bagus.

```
>Q &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A))|radcan;
```

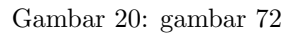
```
$Q
```



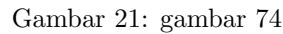
Gambar 18: gambar 65



Gambar 19: gambar 67







```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)2-distance([x,y],C)2,y)
```

Solusi pertama adalah

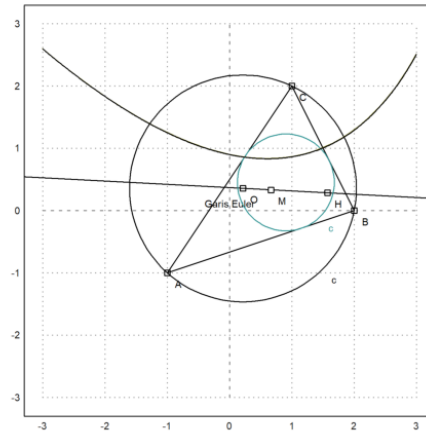
```
>plot2d(&rhs(akar[1]),add=1):
```

$$g(x) = -3x - \sqrt{70}\sqrt{9-2x} + 26$$

```
>dTC <- distance(T,C); $fullratsimp(dTC), $float(%) // jarak T ke C
```

$${}_{AB}^>U \text{ \&= } \text{projectToLine}(T, \text{lineThrough}(A, B)); \$U \text{ // proyeksi } T \text{ pada garis}$$

25



Gambar 22: gambar 76

```
>dU2AB &= distance(T,U); $fullratsimp(dU2AB), $float(%) // jarak T ke AB
```

2.135605779339061

Ternyata jarak T ke C sama dengan jarak T ke AB. Coba Anda pilih titik T yang lain dan ulangi perhitungan-perhitungan di atas untuk menunjukkan bahwa hasilnya juga sama.

Contoh 5: Trigonometri Rasional

Ini terinspirasi dari ceramah N.J. Wildberger. Dalam bukunya “Proporsi Ilahi”, Wildberger mengusulkan untuk mengganti gagasan klasik tentang jarak dan sudut dengan kuadransi dan penyebaran. Dengan menggunakan ini, memang memungkinkan untuk menghindari fungsi trigonometri dalam banyak contoh, dan tetap “rasional”.

Berikut ini, saya akan memperkenalkan konsep-konsep tersebut, dan memecahkan beberapa masalah. Saya menggunakan komputasi simbolik Maxima di sini, yang menyembunyikan keuntungan utama dari trigonometri rasional yaitu komputasi dapat dilakukan dengan kertas dan pensil saja. Anda dipersilakan untuk memeriksa hasilnya tanpa komputer.

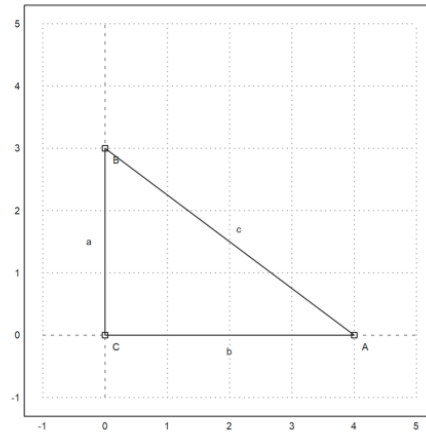
Intinya adalah bahwa komputasi rasional simbolik sering kali memberikan hasil yang sederhana. Sebaliknya, trigonometri klasik menghasilkan hasil trigonometri yang rumit, yang dievaluasi dengan pendekatan numerik saja.

```
>load geometry;
```

Untuk pengenalan pertama, kami menggunakan segitiga persegi panjang dengan proporsi Mesir yang terkenal, 3, 4 dan 5. Perintah berikut ini adalah perintah Euler untuk memplot geometri bidang yang terdapat pada file Euler “geometry.e”.

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
```

```
> setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
```



Gambar 23: gambar 83

```
> plotPoint(A, "A"); plotPoint(B, "B"); plotPoint(C, "C"); ...
> plotSegment(B,A, "c"); plotSegment(A,C, "b"); plotSegment(C,B, "a"); ...
> insimg(30);
```

Tentu saja,

$$\sin(w_a) = \frac{a}{c},$$

di mana  $w_a$  adalah sudut di A. Cara yang umum untuk menghitung sudut ini adalah dengan mengambil kebalikan dari fungsi sinus. Hasilnya adalah sudut yang tidak dapat dicerna, yang hanya dapat dicetak kira-kira.

```
> wa := arcsin(3/5); degprint(wa)
```

36°52'11.63''

Trigonometri rasional mencoba menghindari hal ini. Gagasan pertama trigonometri rasional adalah kuadrat, yang menggantikan jarak. Sebenarnya, ini hanyalah jarak yang dikuadratkan. Berikut ini,  $a$ ,  $b$ , dan  $c$  menunjukkan kuadrannya sisi-sisinya. Teorema Pythagoras menjadi  $a + b = c$ .

```
> a &= 3^2; b &= 4^2; c &= 5^2; &a+b=c
```

$$25 = 25$$

Gagasan kedua dari trigonometri rasional adalah penyebaran. Penyebaran mengukur bukaan di antara garis-garis. Ini adalah 0, jika garis-garisnya sejajar, dan 1, jika garis-garisnya persegi panjang.

Ini adalah kuadrat dari sinus sudut antara dua garis. Penyebaran garis AB dan AC pada gambar di atas didefinisikan sebagai

$$s_a = \sin(\alpha)^2 = \frac{a}{c},$$

di mana  $a$  dan  $c$  adalah kuadran dari segitiga persegi panjang dengan satu sudut di  $A$ .

```
>sa &= a/c; $sa
```

$$\frac{9}{25}$$

Tentu saja, hal ini lebih mudah dihitung daripada sudut. Tetapi Anda kehilangan sifat bahwa sudut dapat ditambahkan dengan mudah.

Tentu saja, kita bisa mengonversi nilai perkiraan kita untuk sudut  $w$  ke sprad, dan mencetaknya sebagai pecahan.

```
>fracprint(sin(wa)^2)
```

9/25

Hukum kosinus trigonometri klasik diterjemahkan ke dalam “hukum silang” berikut ini.

$$(c + b - a)^2 = 4bc(1 - s_a)$$

Di sini,  $a$ ,  $b$ , dan  $c$  adalah kuadran dari sisi-sisi sebuah segitiga, dan  $s_a$  adalah penyebaran pada sudut  $A$ . Sisi  $a$ , seperti biasa, berseberangan dengan sudut  $A$ .

Hukum-hukum ini diimplementasikan pada berkas geometri.e yang kita muat ke dalam Euler.

```
>$crosslaw(aa,bb,cc,saa)
```

$$(cc + bb - aa)^2 = 4bbcc(1 - saa)$$

Dalam kasus kami, kami mendapatkan

```
>$crosslaw(a,b,c,sa)
```

$$1024 = 1024$$

Mari kita gunakan crosslaw ini untuk mencari sebaran di  $A$ . Untuk melakukannya, kita buat crosslaw untuk kuadran  $a$ ,  $b$ , dan  $c$ , dan selesaikan untuk sebaran  $sa$  yang tidak diketahui.

Anda bisa melakukan ini dengan tangan dengan mudah, tapi saya menggunakan Maxima. Tentu saja, kita mendapatkan hasil yang sudah kita dapatkan.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%x)
```

$$\left[ x = \frac{9}{25} \right]$$

Kita sudah mengetahui hal ini. Definisi penyebaran adalah kasus khusus dari crosslaw.

Kita juga dapat menyelesaikannya untuk  $a$ ,  $b$ ,  $c$  secara umum. Hasilnya adalah sebuah rumus yang menghitung penyebaran sudut sebuah segitiga dengan kuadran ketiga sisinya.

```
>$solve(crosslaw(aa,bb,cc,x),x)
```

$$\left[ x = \frac{-cc^2 - (-2bb - 2aa)cc - bb^2 + 2aa bb - aa^2}{4bbcc} \right]$$

Kita bisa membuat fungsi dari hasilnya. Fungsi seperti itu sudah didefinisikan dalam file geometry.e dari Euler.

```
>$spread(a,b,c)
```

$$\frac{9}{25}$$

Sebagai contoh, kita dapat menggunakannya untuk menghitung sudut segitiga dengan sisi-sisi

$$a, \quad a, \quad \frac{4a}{7}$$

Hasilnya adalah rasional, yang tidak mudah didapat jika kita menggunakan trigonometri klasik.

```
>$spread(a,a,4*a/7)
```

$$\frac{6}{7}$$

Ini adalah sudut dalam derajat.

```
>degprint(arcsin(sqrt(6/7)))
```

```
67°47'32.44''
```

## 19 Contoh Lain

Sekarang, mari kita coba contoh yang lebih maju.

Kita tentukan tiga sudut segitiga sebagai berikut.

```
>A&:=[1,2]; B&:=[4,3]; C&:=[0,4]; ...
```

```
> setPlotRange(-1,5,1,7); ...
```

```
> plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
```

```
> plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
```

```
> insing;
```

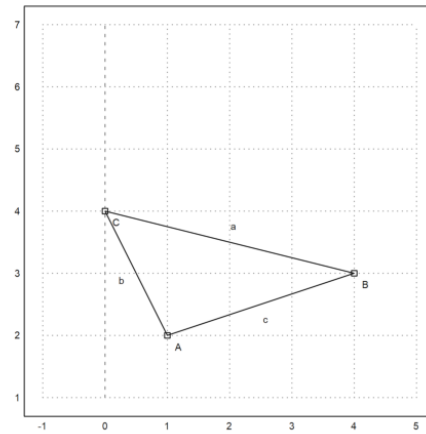
Dengan menggunakan Pythagoras, mudah untuk menghitung jarak antara dua titik. Pertama-tama saya menggunakan fungsi jarak dari file Euler untuk geometri. Jarak fungsi menggunakan geometri klasik.

```
>$distance(A,B)
```

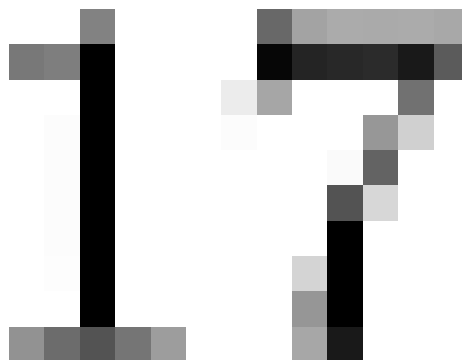
$$\sqrt{10}$$

Euler juga mengandung fungsi untuk kuadransi antara dua titik.

Pada contoh berikut, karena c+b bukan a, maka segitiga tersebut tidak berbentuk persegi panjang.



Gambar 24: gambar 96



Gambar 25: gambar 100

```
>c &= quad(A,B); $c, b &= quad(A,C); $b, a &= quad(B,C); $a,
```

17

Pertama, mari kita menghitung sudut tradisional. Fungsi computeAngle menggunakan metode yang biasa berdasarkan hasil kali titik dari dua vektor. Hasilnya adalah beberapa perkiraan titik mengambang.

$$A = \langle 1, 2 \rangle \quad B = \langle 4, 3 \rangle, \quad C = \langle 0, 4 \rangle$$

$$\mathbf{a} = C - B = \langle -4, 1 \rangle, \quad \mathbf{c} = A - B = \langle -3, -1 \rangle, \quad \beta = \angle ABC$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{c}| \cos \beta$$

$$\cos \angle ABC = \cos \beta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{c}|} = \frac{12 - 1}{\sqrt{17} \sqrt{10}} = \frac{11}{\sqrt{17} \sqrt{10}}$$

```
>wb &= computeAngle(A,B,C); $wb, $(wb/pi*180)()
```

$$\arccos \left( \frac{11}{\sqrt{10} \sqrt{17}} \right)$$

32.4711922908

Dengan menggunakan pensil dan kertas, kita bisa melakukan hal yang sama dengan hukum silang. Kita masukkan kuadran a, b, dan c ke dalam hukum silang dan selesaikan untuk x.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%x), /(b+c-a)^=4b.c(1-x)
```

$$\left[ x = \frac{49}{50} \right]$$

Itulah yang dilakukan oleh fungsi spread yang didefinisikan dalam “geometry.e”.

```
>sb &= spread(b,a,c); $sb
```

$$\frac{49}{170}$$

Maxima mendapatkan hasil yang sama dengan menggunakan trigonometri biasa, jika kita memaksakannya. Ia menyelesaikan suku  $\sin(\arccos(\dots))$  menjadi hasil pecahan. Sebagian besar siswa tidak dapat melakukan ini.

```
>$sin(computeAngle(A,B,C))^2
```

$$\frac{49}{170}$$

Setelah kita memiliki penyebaran di B, kita dapat menghitung tinggi ha di sisi a. Ingatlah bahwa

$$s_b = \frac{h_a}{c}$$

31

menurut definisi.

```
>ha &= c*sb; $ha
```

$$\frac{49}{17}$$

Gambar berikut ini telah dibuat dengan program geometri C.a.R., yang dapat menggambar kuadran dan sebaran.

```
image: (20) Rational_Geometry_CaR.png
```

Menurut definisi, panjang ha adalah akar kuadrat dari kuadrannya.

```
>$sqrt(ha)
```

$$\frac{7}{\sqrt{17}}$$

Sekarang kita bisa menghitung luas segitiga. Jangan lupa, bahwa kita berurusan dengan kuadran!

```
>$sqrt(ha)*sqrt(a)/2
```

$$\frac{7}{2}$$

Rumus penentu yang biasa menghasilkan hasil yang sama.

```
>$areaTriangle(B,A,C)
```

$$\frac{7}{2}$$

## Rumus Heron

Sekarang, mari kita selesaikan masalah ini secara umum!

```
>&remvalue(a,b,c,sb,ha);
```

Pertama-tama kita menghitung luas di B untuk segitiga dengan sisi a, b, dan c. Kemudian kita menghitung luas kuadrat (“quadrea”?), memfaktorkannya dengan Maxima, dan kita mendapatkan rumus Heron yang terkenal.

Memang, hal ini sulit dilakukan dengan pensil dan kertas.

```
>$spread(b^2,c^2,a^2), $factor(%*c^2*a^2/4)
```

$$\frac{(-c + b + a) (c - b + a) (c + b - a) (c + b + a)}{16}$$

## 20 Aturan Triple Spread

Kerugian dari spread adalah bahwa mereka tidak lagi hanya menambahkan seperti sudut.

Namun, tiga spread dari sebuah segitiga memenuhi aturan “triple spread” berikut ini.

```
>&remvalue(sa,sb,sc); $triplespread(sa,sb,sc)
```

$$(sc + sb + sa)^2 = 2 (sc^2 + sb^2 + sa^2) + 4 sa sb sc$$



Aturan ini berlaku untuk tiga sudut yang berjumlah  $180^\circ$ .

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

Karena spread dari

$$\alpha, \pi - \alpha$$

sama, aturan triple spread juga benar, jika

$$\alpha + \beta = \gamma$$

Karena penyebaran sudut negatif adalah sama, aturan penyebaran tiga kali lipat juga berlaku, jika

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

Contohnya, kita bisa menghitung penyebaran sudut  $60^\circ$ . Ini adalah  $3/4$ . Namun, persamaan ini memiliki solusi kedua, di mana semua penyebarannya adalah 0.

```
>$solve(triplespread(x,x,x),x)
```

$$\left[ x = \frac{3}{4}, x = 0 \right]$$

Penyebaran  $90^\circ$  jelas adalah 1. Jika dua sudut ditambahkan ke  $90^\circ$ , penyebarannya menyelesaikan persamaan penyebaran tiga dengan a,b,1. Dengan perhitungan berikut, kita mendapatkan  $a + b = 1$ .

```
>$triplespread(x,y,1), $solve(%,x)
```

$$[x = 1 - y]$$

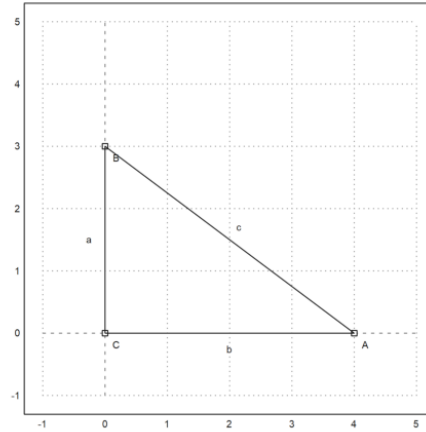
Karena penyebaran  $180^\circ$ -t sama dengan penyebaran t, rumus penyebaran tiga kali lipat juga berlaku, jika satu sudut adalah jumlah atau selisih dari dua sudut lainnya.

Jadi kita dapat menemukan penyebaran sudut dua kali lipat. Perhatikan bahwa ada dua solusi lagi. Kita jadikan ini sebuah fungsi.

```
>$solve(triplespread(a,a,x), function doublespread(a) &= factor(rhs(%[1]))
```

$$[x = 4a - 4a^2, x = 0]$$

- 4 (a - 1) a



Gambar 26: gambar 126

$$\frac{-\sqrt{b} \sqrt{b+a} + b + a}{2b + 2a}$$

Gambar 27: gambar 129

## 21 Pemisah Sudut

Ini adalah situasi yang sudah kita ketahui.

```
> C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
> setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
> plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
> plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
> insimg;
```

Mari kita hitung panjang garis bagi sudut di A. Tetapi kita ingin menyelesaikannya untuk a, b, c secara umum.

```
> &remvalue(a,b,c);
```

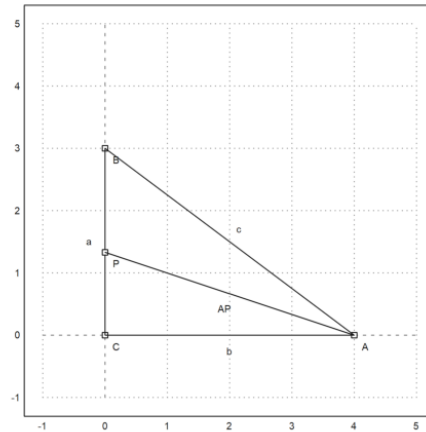
Jadi, pertama-tama kita menghitung penyebaran sudut yang dibelah dua di A, menggunakan rumus penyebaran tiga.

Masalah dengan rumus ini muncul lagi. Rumus ini memiliki dua solusi. Kita harus memilih yang benar. Solusi lainnya mengacu pada sudut terbagi dua 180°-wa.

```
> $triplespread(x,x,a/(a+b)), $solve(%x), sa2 &= rhs(%[1]); $sa2
```

$$\frac{-\sqrt{b} \sqrt{b+a} + b + a}{2b + 2a}$$

Mari kita periksa persegi panjang Mesir.



Gambar 28: gambar 131

>\$sa2 with [a=3<sup>2</sup>,b=4<sup>2</sup>]

$$\frac{1}{10}$$

Kita bisa mencetak sudut dalam Euler, setelah mentransfer penyebaran ke radian.

>wa2 := arcsin(sqrt(1/10)); degprint(wa2)

18°26'5.82''

Titik P adalah perpotongan garis bagi sudut dengan sumbu y.

>P := [0,tan(wa2)\*4]

[0, 1.33333]

>plotPoint(P,"P"); plotSegment(A,P):

Mari kita periksa sudut-sudutnya dalam contoh spesifik kita.

>computeAngle(C,A,P), computeAngle(P,A,B)

0.321750554397

0.321750554397

Sekarang kita hitung panjang garis bagi AP.

Kita menggunakan teorema sinus dalam segitiga APC. Teorema ini menyatakan bahwa

$$\frac{BC}{\sin(w_a)} = \frac{AC}{\sin(w_b)} = \frac{AB}{\sin(w_c)}$$

memegang dalam segitiga apa pun. Kuadratkan, ini diterjemahkan ke dalam apa yang disebut “hukum penyebaran”

$$\frac{a}{s_a} = \frac{b}{s_b} = \frac{c}{s_b}$$

di mana a, b, c menunjukkan qudrah. Karena spread CPA adalah 1-sa2, kita mendapatkan bisa/1=b/(1-sa2) dan bisa menghitung bisa (kuadran dari pembagian sudut).

```
>&factor(ratsimp(b/(1-sa2))); bisa &= %; $bisa
```

$$\frac{2b(b+a)}{\sqrt{b}\sqrt{b+a}+b+a}$$

Mari kita periksa rumus ini untuk nilai-nilai Mesir kita.

```
>sqrt(mxmeval("at(bisa,[a=3^2,b=4^2])"), distance(A,P)
```

4.21637021356

4.21637021356

Kita juga dapat menghitung P menggunakan rumus penyebaran.

```
>py&=factor(ratsimp(sa2*bisa)); $py
```

$$-\frac{b\left(\sqrt{b}\sqrt{b+a}-b-a\right)}{\sqrt{b}\sqrt{b+a}+b+a}$$

Nilainya sama dengan yang kita dapatkan dengan rumus trigonometri.

```
>sqrt(mxmeval("at(py,[a=3^2,b=4^2])"))
```

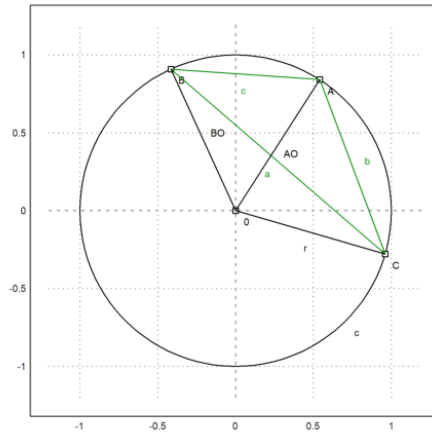
1.33333333333

## 22 Sudut Akor

Lihatlah situasi berikut ini.

```
>setPlotRange(1.2); ...
> color(1); plotCircle(circleWithCenter([0,0],1)); ...
> A:=[cos(1),sin(1)]; B:=[cos(2),sin(2)]; C:=[cos(6),sin(6)]; ...
> plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
> color(3); plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a");
...
> color(1); O:=[0,0]; plotPoint(O,"O"); ...
> plotSegment(A,O); plotSegment(B,O); plotSegment(C,O,"r"); ...
> insing;
```

Kita dapat menggunakan Maxima untuk menyelesaikan rumus penyebaran tiga kali lipat untuk sudut-sudut di pusat O untuk r. Dengan demikian kita mendapatkan rumus untuk jari-jari kuadrat dari pericircle dalam hal kuadran sisi-sisinya.



Gambar 29: gambar 136

Kali ini, Maxima menghasilkan beberapa angka nol yang rumit, yang kita abaikan.

```
>&remvalue(a,b,c,r); // hapus nilai-nilai sebelumnya untuk perhitungan
baru
>rabc &= rhs(solve(triplespread(spread(b,r,r),spread(a,r,r),spread(c,r,r)),r)[4]);
$rabc
```

$$-\frac{a b c}{c^2 - 2 b c + a (-2 c - 2 b) + b^2 + a^2}$$

Kita dapat menjadikannya sebuah fungsi Euler.

```
>function periradius(a,b,c) &= rabc;
Mari kita periksa hasilnya untuk poin A, B, C.
>a:=quadrance(B,C); b:=quadrance(A,C); c:=quadrance(A,B);
Radiusnya memang 1.
>periradius(a,b,c)
```

1

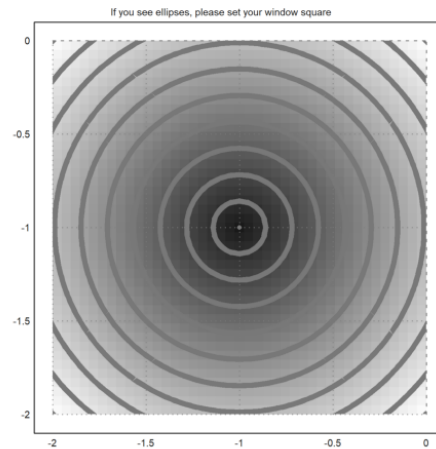
Faktanya adalah, bahwa penyebaran CBA hanya bergantung pada b dan c. Ini adalah teorema sudut akor.

```
>$spread(b,a,c)*rabc | ratsimp
```

$$\frac{b}{4}$$

Pada kenyataannya, penyebarannya adalah  $b/(4r)$ , dan kita melihat bahwa sudut chord b adalah setengah dari sudut tengah.

```
>$doublespread(b/(4*r))-spread(b,r,r) | ratsimp
```



Gambar 30: gambar 140

0

# Contoh 6: Jarak Minimal pada Bidang

## 23 Keterangan awal

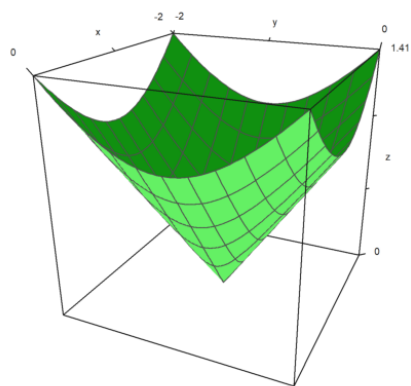
Fungsi yang, pada sebuah titik  $M$  pada bidang, memberikan jarak  $AM$  antara titik tetap  $A$  dan  $M$ , memiliki garis-garis tingkat yang cukup sederhana: lingkaran yang berpusat di  $A$ .

```
>&remvalue();
>A=[-1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-A[1])^2+(y-A[2])^2)
>fcontour("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0,hue=1, ...
> title="If you see ellipses, please set your window square"):
dan grafiknya juga cukup sederhana: bagian atas kerucut:
>plot3d("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0):
Tentu saja nilai minimum 0 dicapai di  $A$ .
```

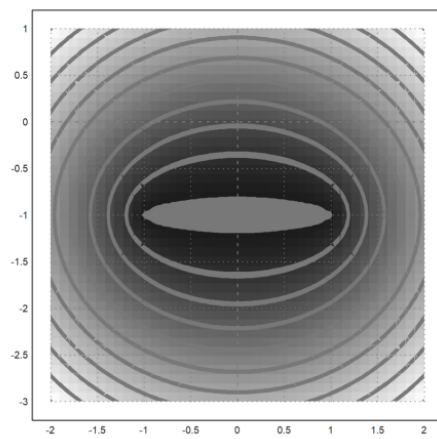
## 24 Dua titik

Sekarang kita lihat fungsi  $MA+MB$  di mana  $A$  dan  $B$  adalah dua titik (tetap). Ini adalah “fakta yang terkenal” bahwa kurva tingkat adalah elips, titik fokusnya adalah  $A$  dan  $B$ ; kecuali  $AB$  minimum yang konstan pada segmen  $[AB]$ :

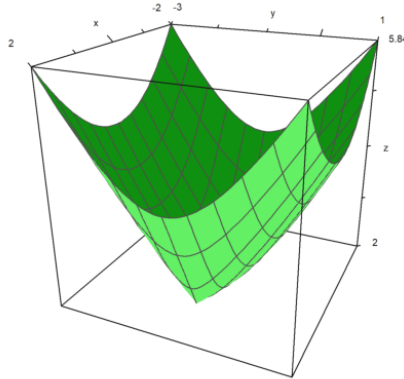
```
>B=[1,-1];
>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-B[1])^2+(y-B[2])^2)
```



Gambar 31: gambar 141



Gambar 32: gambar 142



Gambar 33: gambar 143

```
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
Grafiknya lebih menarik:
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
Pembatasan pada garis (AB) lebih terkenal:
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```

## 25 Tiga titik

Sekarang, hal-hal menjadi tidak terlalu sederhana: Hal ini sedikit kurang dikenal bahwa  $MA+MB+MC$  mencapai minimum pada satu titik bidang, tetapi untuk menentukannya kurang sederhana:

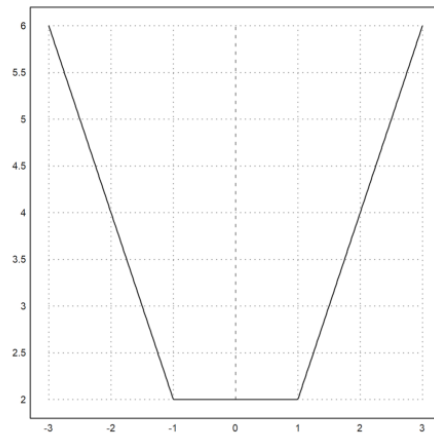
- 1) Jika salah satu sudut segitiga ABC lebih dari  $120^\circ$  (katakanlah di A), maka minimum dicapai pada titik ini (katakanlah AB+AC).

Contoh:

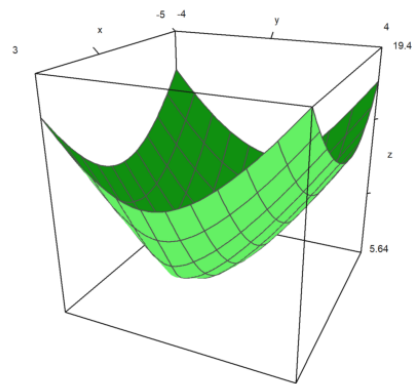
```
>C=[-4,1];
>function d3(x,y):=d2(x,y)+sqrt((x-C[1])^2+(y-C[2])^2)
>plot3d("d3",xmin=-5,xmax=3,ymin=-4,ymax=4);
>insimg;
>fcontour("d3",xmin=-4,xmax=1,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The minimum is on A");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

- 2) Tetapi jika semua sudut segitiga ABC kurang dari  $120^\circ$ , minimumnya adalah pada titik F di bagian dalam segitiga, yang merupakan satu-satunya

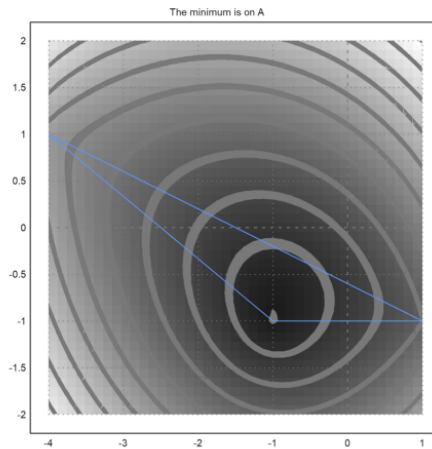




Gambar 34: gambar 144



Gambar 35: gambar 145



Gambar 36: gambar 146

titik yang melihat sisi-sisi ABC dengan sudut yang sama (masing-masing  $120^\circ$ ):

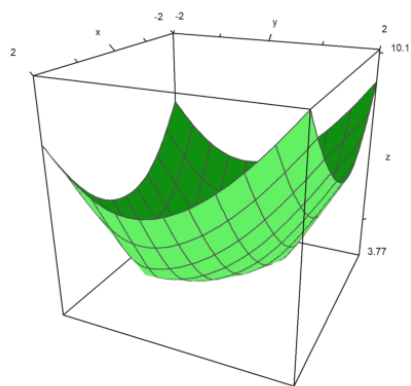
```
>C=[-0.5,1];
>plot3d("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2):
>fcontour("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The Fer-
mat point");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

Merupakan kegiatan yang menarik untuk merealisasikan gambar di atas dengan perangkat lunak geometri; sebagai contoh, saya tahu sebuah perangkat lunak yang ditulis dalam bahasa Java yang memiliki instruksi "garis kontur"...

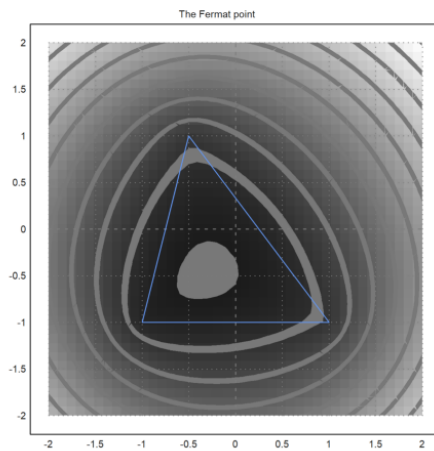
Semua hal di atas telah ditemukan oleh seorang hakim Perancis bernama Pierre de Fermat; dia menulis surat kepada para ahli lain seperti pendeta Marin Mersenne dan Blaise Pascal yang bekerja di bagian pajak penghasilan. Jadi titik unik F sedemikian rupa sehingga  $FA+FB+FC$  minimal, disebut titik Fermat dari segitiga. Namun tampaknya beberapa tahun sebelumnya, Torricelli dari Italia telah menemukan titik ini sebelum Fermat menemukannya! Tradisi yang berlaku adalah mencatat titik F ini...

## 26 Empat titik

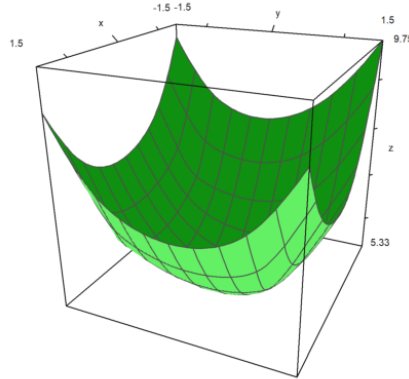
Langkah selanjutnya adalah menambahkan titik ke-4 D dan mencoba meminimalkan  $MA+MB+MC+MD$ ; misalkan Anda adalah operator TV kabel dan ingin menemukan di bidang mana Anda harus meletakkan antena Anda sehingga Anda dapat memberi makan empat desa dan menggunakan panjang kabel sesedikit mungkin!



Gambar 37: gambar 147



Gambar 38: gambar 148



Gambar 39: gambar 149

```
>D=[1,1];
>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-D[1])^2+(y-D[2])^2)
>plot3d("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5):
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],points=1,add=1,color=12);
>insimg;
Masih ada nilai minimum dan tidak ada simpul A, B, C atau D yang tercapai:
>function f(x):=d4(x[1],x[2])
>neldermin("f",[0.2,0.2])
```

[0.142858, 0.142857]

Tampaknya dalam kasus ini, koordinat titik optimal adalah rasional atau mendekati rasional...

Karena ABCD adalah sebuah bujur sangkar, kita berharap bahwa titik optimalnya adalah pusat dari ABCD:

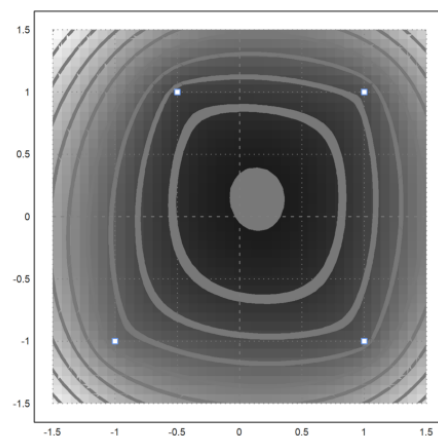
```
>C=[-1,1];
>plot3d("d4",xmin=-1,xmax=1,ymin=-1,ymax=1):
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12,points=1);
>insimg;
```

Contoh 7: Bola Dandelin dengan Povray

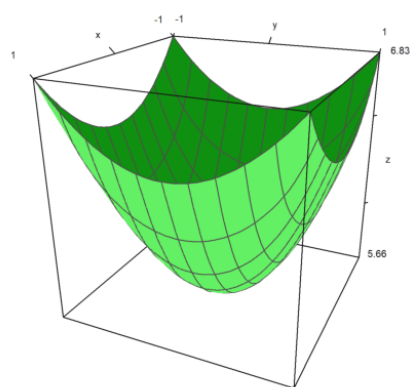
Anda dapat menjalankan demonstrasi ini, jika Anda telah menginstal Povray, dan pengine.exe pada jalur program.

Pertama, kita menghitung jari-jari bola.

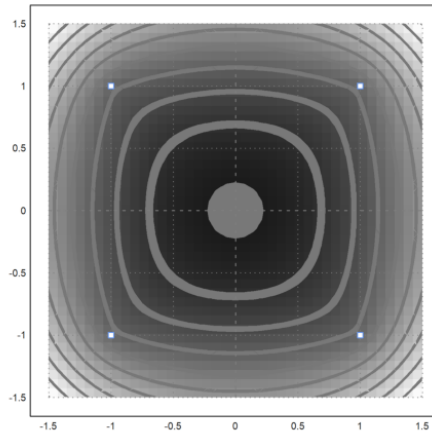
Jika Anda melihat gambar di bawah ini, Anda dapat melihat bahwa kita membutuhkan dua lingkaran yang menyentuh dua garis yang membentuk kerucut, dan satu garis yang membentuk bidang yang memotong kerucut.



Gambar 40: gambar 150



Gambar 41: gambar 151



Gambar 42: gambar 152

Kita menggunakan file geometri.e dari Euler untuk hal ini.

```
>load geometry;
```

Pertama, dua garis yang membentuk kerucut.

```
>g1 &= lineThrough([0,0],[1,a])
```

[- a, 1, 0]

```
>g2 &= lineThrough([0,0],[-1,a])
```

[- a, - 1, 0]

Kemudianm baris ketiga.

```
>g &= lineThrough([-1,0],[1,1])
```

[- 1, 2, 1]

Kami merencanakan semuanya sejauh ini.

```
>setPlotRange(-1,1,0,2);
```

```
>color(black); plotLine(g()," ")
```

```
>a:=2; color(blue); plotLine(g1()," "), plotLine(g2())," "):
```

Sekarang, kita ambil titik umum pada sumbu y.

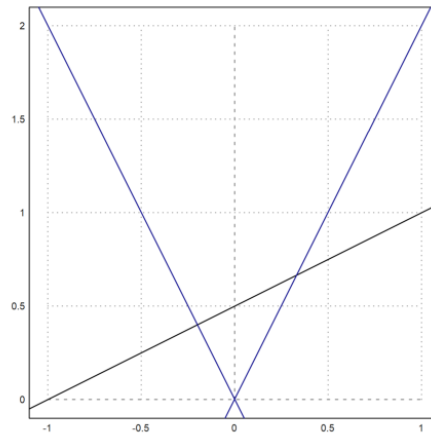
```
>P &= [0,u]
```

[0, u]

Hitung jarak ke g1.

```
>d1 &= distance(P,projectToLine(P,g1)); $d1
```

$$\sqrt{\left(\frac{a^2 u}{a^2 + 1} - u\right)^2 + \frac{a^2 u^2}{(a^2 + 1)^2}}$$



Gambar 43: gambar 153

Compute the distance to g.

```
>d &= distance(P,projectToLine(P,g)); $d
```

$$\sqrt{\left(\frac{u+2}{5}-u\right)^2+\frac{(2u-1)^2}{25}}$$

Dan temukan pusat kedua lingkaran, yang jaraknya sama.

```
>sol &= solve(d1^2=d2,u); $sol
```

$$\left[u=\frac{-\sqrt{5}\sqrt{a^2+1}+2a^2+2}{4a^2-1},u=\frac{\sqrt{5}\sqrt{a^2+1}+2a^2+2}{4a^2-1}\right]$$

Ada dua solusi.

Kami mengevaluasi solusi simbolis, dan menemukan kedua pusat, dan kedua jarak.

```
>u := sol()
```

```
[0.333333, 1]
```

```
>dd := d()
```

```
[0.149071, 0.447214]
```

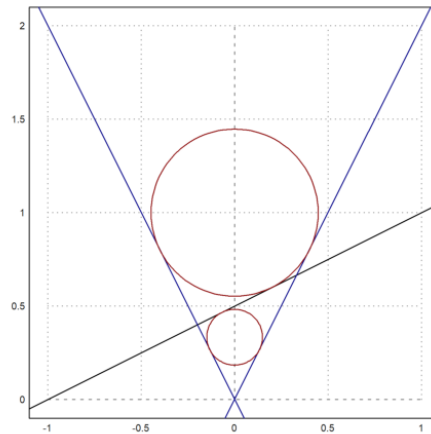
Plot lingkaran ke dalam gambar.

```
>color(red);
```

```
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]),“ “);
```

```
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[2]],dd[2]),“ “);
```

```
>insimg;
```



Gambar 44: gambar 157

## 27 Plot dengan Povray

Selanjutnya kita plot semuanya dengan Povray. Perhatikan bahwa Anda mengubah perintah apa pun dalam urutan perintah Povray berikut ini, dan jalankan kembali semua perintah dengan Shift-Return.

Pertama kita memuat fungsi povray.

```
>load povray;
```

```
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

Kami menyiapkan pemandangan dengan tepat.

```
>povstart(zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```

Selanjutnya kita menulis dua bola ke file Povray.

```
>writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
```

```
>writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
```

Dan kerucutnya, transparan.

```
>writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
```

Kami menghasilkan bidang yang terbatas pada kerucut.

```
>gp=g();
```

```
>pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
```

```
>vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
```

```
>writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
```

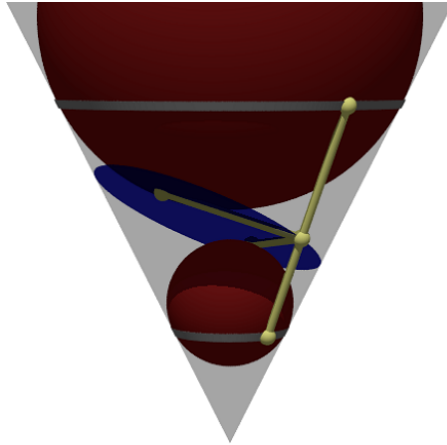
Sekarang kita menghasilkan dua titik pada lingkaran, di mana bola menyentuh kerucut.

```
>function turnz(v) := return
```

```
>P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
```

```
>writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
```





Gambar 45: gambar 158

```

>P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
>writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
Kemudian kami menghasilkan dua titik di mana bola menyentuh bidang. Ini
adalah fokus elips.
>P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
>writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
>P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
>writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
Selanjutnya kita menghitung perpotongan P1P2 dengan bidang.
>t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
>writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
Kami menghubungkan titik-titik dengan segmen garis.
>writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
Sekarang, kita menghasilkan pita abu-abu, di mana bola-bola menyentuh
kerucut.
>pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
>pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
>pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
Mulai program Povray.
>povend();
Untuk mendapatkan Anaglyph ini, kita perlu menempatkan semuanya ke
dalam fungsi scene. Fungsi ini akan digunakan dua kali nanti.
>function scene () ...

```

```

global a,u,dd,g,g1,defaultpointsize;
writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
gp=g();
pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
endfunction

```

Anda memerlukanacamata merah/sian untuk mengapresiasi efek berikut ini.

```
>povanaglyph("scene",zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```

Contoh 8: Geometri Bumi

Pada buku catatan ini, kita ingin melakukan beberapa komputasi bola. Fungsi-fungsi tersebut terdapat pada file "spherical.e" pada folder contoh. Kita perlu memuat file tersebut terlebih dahulu.

```
>load "spherical.e";
```

Untuk memasukkan posisi geografis, kami menggunakan vektor dengan dua koordinat dalam radian (utara dan timur, nilai negatif untuk selatan dan barat). Berikut ini adalah koordinat untuk Kampus FMIPA UNY.

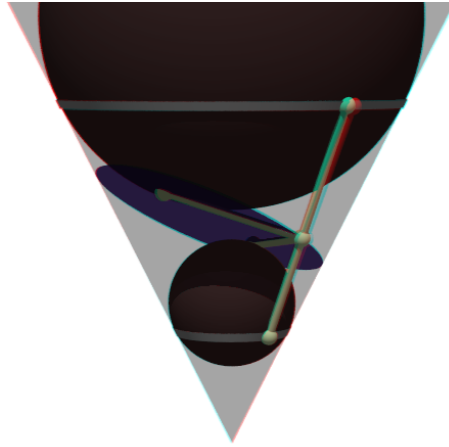
```
>FMIPA=[rad(-7,-46.467),rad(110,23.05)]
```

```
[-0.13569, 1.92657]
```

Anda dapat mencetak posisi ini dengan sposprint (cetak posisi bola).

```
>sposprint(FMIPA) // posisi garis lintang dan garis bujur FMIPA UNY
```

```
S 7°46.467' E 110°23.050'
```



Gambar 46: gambar 159

Mari kita tambahkan dua kota lagi, Solo dan Semarang.

```
>Solo=[rad(-7,-34.333),rad(110,49.683)]; Semarang=[rad(-6,-59.05),rad(110,24.533)];
>sposprint(Solo), sposprint(Semarang),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 6°59.050' E 110°24.533'
```

Pertama, kita menghitung vektor dari satu titik ke titik lainnya pada bola ideal. Vektor ini adalah [heading, jarak] dalam radian. Untuk menghitung jarak di bumi, kita kalikan dengan jari-jari bumi pada garis lintang  $7^\circ$ .

```
>br=svector(FMIPA,Solo); degprint(br[1], br[2]*rearth(7°)->km // perkiraan jarak FMIPA-Solo
```

```
65°20'26.60''
53.8945384608
```

Ini adalah perkiraan yang baik. Rutinitas berikut ini menggunakan perkiraan yang lebih baik lagi. Pada jarak yang begitu pendek, hasilnya hampir sama.

```
>esdist(FMIPA,Semarang)->" km" // perkiraan jarak FMIPA-Semarang
```

Commands must be separated by semicolon or comma!

Found: // perkiraan jarak FMIPA-Semarang (character 32)

You can disable this in the Options menu.

Error in:

```
esdist(FMIPA,Semarang)->" km" // perkiraan jarak FMIPA-Semarang ...
```

Ada fungsi untuk heading, dengan mempertimbangkan bentuk bumi yang elips. Sekali lagi, kami mencetak dengan cara yang canggih.

```
>sdegprint(esdir(FMIPA,Solo))
```

```
65.34°
```

Sudut segitiga melebihi 180° pada bola.

```
>asum=sangle(Solo,FMIPA,Semarang)+sangle(FMIPA,Solo,Semarang)+sangle(FMIPA,Semarang,Solo);
degprint(asum)
```

```
180°0'10.77''
```

Ini dapat digunakan untuk menghitung luas segitiga. Catatan: Untuk segitiga kecil, cara ini tidak akurat karena kesalahan pengurangan dalam asum-pi.

```
>(asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2" // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang
```

Commands must be separated by semicolon or comma!

Found: // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang (character 32)

You can disable this in the Options menu.

Error in:

```
(asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2" // perkiraan luas segitiga FM ...
^
```

Ada sebuah fungsi untuk hal ini, yang menggunakan garis lintang rata-rata segitiga untuk menghitung radius bumi, dan menangani kesalahan pembulatan untuk segitiga yang sangat kecil.

```
>esarea(Solo,FMIPA,Semarang)->" km^2", //perkiraan yang sama dengan
fungsi esarea()
```

```
2123.64310526 km^2
```

Kita juga dapat menambahkan vektor ke posisi. Sebuah vektor berisi arah dan jarak, keduanya dalam radian. Untuk mendapatkan sebuah vektor, kita menggunakan svector. Untuk menambahkan sebuah vektor ke sebuah posisi, kita menggunakan saddvector.

```
>v=svector(FMIPA,Solo); sposprint(saddvector(FMIPA,v)), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Fungsi-fungsi ini mengasumsikan bola yang ideal. Hal yang sama di bumi.

```
>sposprint(esadd(FMIPA,esdir(FMIPA,Solo),esdist(FMIPA,Solo))), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Mari kita beralih ke contoh yang lebih besar, Tugu Jogja dan Monas Jakarta (menggunakan Google Earth untuk mencari koordinatnya).

```
>Tugu=[-7.7833°,110.3661°]; Monas=[-6.175°,106.811944°];
>sposprint(Tugu), sposprint(Monas)
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Menurut Google Earth, jaraknya adalah 429,66 km. Kami mendapatkan perkiraan yang bagus.

```
>esdist(Tugu,Monas)->" km" // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta
```

Commands must be separated by semicolon or comma!

Found: // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta (character 32)

You can disable this in the Options menu.

Error in:

```
esdist(Tugu,Monas)->" km" // perkiraan jarak Tugu Jogja - Mona ...
      ^
```

Judulnya sama dengan yang dihitung di Google Earth.

```
>degprint(esdir(Tugu,Monas))
```

```
294°17'2.85''
```

Namun, kita tidak lagi mendapatkan posisi target yang tepat, jika kita menambahkan arah dan jarak ke posisi semula. Hal ini terjadi, karena kita tidak menghitung fungsi inversi secara tepat, tetapi mengambil perkiraan radius bumi di sepanjang jalur.

```
>sposprint(esadd(Tugu,esdir(Tugu,Monas),esdist(Tugu,Monas)))
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Namun demikian, kesalahannya tidak besar.

```
>sposprint(Monas),
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Tentu saja, kita tidak bisa berlayar dengan arah yang sama dari satu tujuan ke tujuan lainnya, jika kita ingin mengambil jalur terpendek. Bayangkan, Anda terbang ke arah NE mulai dari titik mana pun di bumi. Kemudian Anda akan berputar ke kutub utara. Lingkaran besar tidak mengikuti arah yang konstan!

Perhitungan berikut ini menunjukkan bahwa kita akan melenceng dari tujuan yang benar, jika kita menggunakan arah yang sama selama perjalanan.

```
>dist=esdist(Tugu,Monas); hd=esdir(Tugu,Monas);
```

Sekarang kita tambahkan 10 kali sepersepuluh dari jarak tersebut, dengan menggunakan arah ke Monas, kita sampai di Tugu.

```
>p=Tugu; loop 1 to 10; p=esadd(p,hd,dist/10); end;
```

Hasilnya jauh berbeda.

```
>sposprint(p), skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
S 6°11.250' E 106°48.372'  
1.529km
```

Sebagai contoh lain, mari kita ambil dua titik di bumi pada garis lintang yang sama.

```
>P1=[30°,10°]; P2=[30°,50°];
```

Jalur terpendek dari P1 ke P2 bukanlah lingkaran lintang 30°, tetapi jalur yang lebih pendek yang dimulai 10° lebih jauh ke utara di P1.

```
>sdegprint(esdir(P1,P2))
```

```
79.69°
```

Namun, jika kita mengikuti pembacaan kompas ini, kita akan berputar ke kutub utara! Jadi, kita harus menyesuaikan arah kita di sepanjang jalan. Untuk tujuan kasar, kita menyesuaikannya pada 1/10 dari jarak total.

```
>p=P1; dist=esdist(P1,P2); ...
```

```
> loop 1 to 10; dir=esdir(p,P2); sdegprint(dir), p=esadd(p,dir,dist/10); end;
```

```
79.69°
```

```
81.67°
```

```
83.71°
```

```
85.78°
```

```
87.89°
```

```
90.00°
```

```
92.12°
```

```
94.22°
```

```
96.29°
```

```
98.33°
```

Jaraknya tidak tepat, karena kita akan menambahkan sedikit kesalahan, jika kita mengikuti judul yang sama terlalu lama.

```
>skmprint(esdist(p,P2))
```

```
0.203km
```

Kami mendapatkan perkiraan yang baik, jika kami menyesuaikan arah setiap 1/100 dari total jarak dari Tugu ke Monas.

```
>p=Tugu; dist=esdist(Tugu,Monas); ...
```

```
> loop 1 to 100; p=esadd(p,esdir(p,Monas),dist/100); end;
```

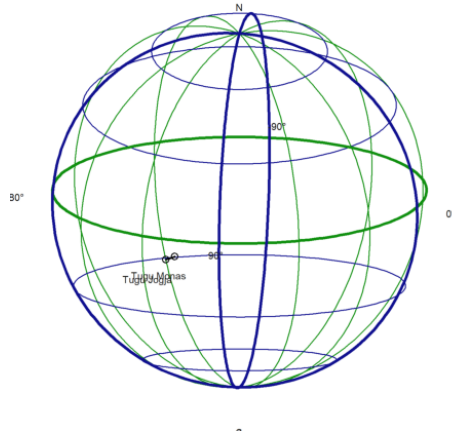
```
>skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
0.000km
```

Untuk keperluan navigasi, kita bisa mendapatkan urutan posisi GPS di sepanjang Bundaran HI menuju Monas dengan fungsi navigate.

```
>load spherical; v=navigate(Tugu,Monas,10); ...
```

```
> loop 1 to rows(v); sposprint(v[#]), end;
```



Gambar 47: gambar 160

```
S 7°46.998' E 110°21.966'
S 7°37.422' E 110°0.573'
S 7°27.829' E 109°39.196'
S 7°18.219' E 109°17.834'
S 7°8.592' E 108°56.488'
S 6°58.948' E 108°35.157'
S 6°49.289' E 108°13.841'
S 6°39.614' E 107°52.539'
S 6°29.924' E 107°31.251'
S 6°20.219' E 107°9.977'
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Kami menulis sebuah fungsi, yang memetakan bumi, dua posisi, dan posisi di antaranya.

```
>function testplot ...
```

```
useglobal;
plotearth;
plotpos(Tugu,"Tugu Jogja"); plotpos(Monas,"Tugu Monas");
plotposline(v);
endfunction
```

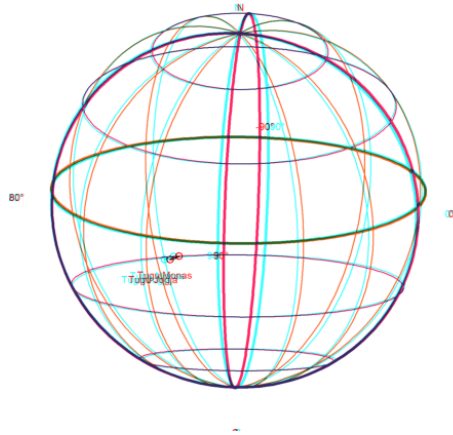
Sekarang rencanakan semuanya.

```
>plot3d("testplot",angle=25,height=6,>own,>user,zoom=4):
```

Atau, gunakan plot3d untuk mendapatkan tampilan anaglyph-nya. Ini terlihat sangat bagus dengan kacamata merah/cyan.

```
>plot3d("testplot",angle=25,height=6,distance=5,own=1,anaglyph=1,zoom=4):
```

Latihan



Gambar 48: gambar 161

1. Gambarkanlah segi-n beraturan jika diketahui titik pusat  $O$ ,  $n$ , dan jarak titik pusat ke titik-titik sudut segi-n tersebut (jari-jari lingkaran luar segi-n),  $r$ .

Petunjuk:

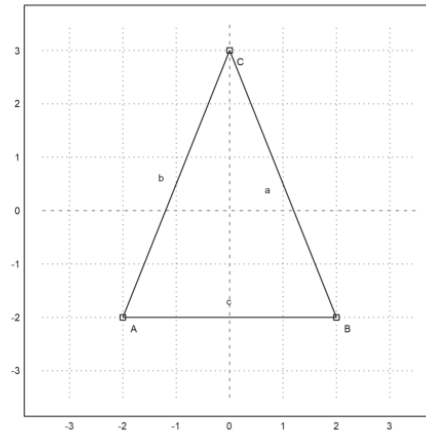
- Besar sudut pusat yang menghadap masing-masing sisi segi-n adalah
- $(360/n)$ .
- Titik-titik sudut segi-n merupakan perpotongan lingkaran luar segi-n
- dan garis-garis yang melalui pusat dan saling membentuk sudut sebesar
- kelipatan  $(360/n)$ .
- Untuk  $n$  ganjil, pilih salah satu titik sudut adalah di atas.
- Untuk  $n$  genap, pilih 2 titik di kanan dan kiri lurus dengan titik
- pusat.
- Anda dapat menggambar segi-3, 4, 5, 6, 7, dst beraturan.

>load geometry

Numerical and symbolic geometry.

```
>setPlotRange(-3.5,3.5,-3.5,3.5);
>A=[-2,-2]; plotPoint(A,"A");
>B=[2,-2]; plotPoint(B,"B");
>C=[0,3]; plotPoint(C,"C");
```





Gambar 49: gambar 162

```
>plotSegment(A,B,"c");
>plotSegment(B,C,"a");
>plotSegment(A,C,"b");
>aspect(1):
>c=circleThrough(A,B,C);
>R=getCircleRadius(c);
>O=getCircleCenter(c);
>plotPoint(O,"O");
>l=angleBisector(A,C,B);
>color(2); plotLine(l); color(1);
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC");
>
```

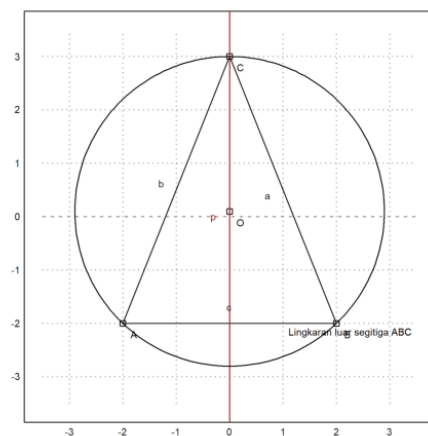
2. Gambarkanlah suatu parabola yang melalui 3 titik yang diketahui.

Petunjuk:

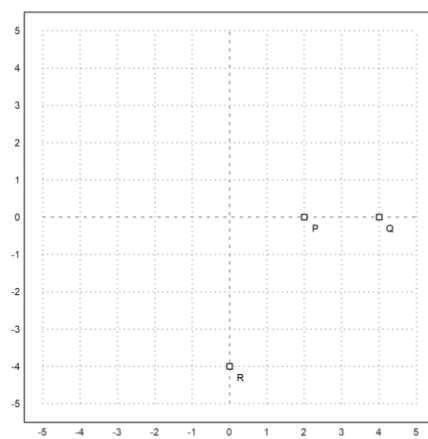
- Misalkan persamaan parabolanya  $y = ax^2 + bx + c$ .
- Substitusikan koordinat titik-titik yang diketahui ke persamaan tersebut.
- Selesaikan SPL yang terbentuk untuk mendapatkan nilai-nilai  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

```
>load geometry;
>setPlotRange(5); P=[2,0]; Q=[4,0]; R=[0,-4];
>plotPoint(P,"P"); plotPoint(Q,"Q"); plotPoint(R,"R");
>sol &= solve([a+b=-c,16*a+4*b=-c,c=-4],[a,b,c])
```

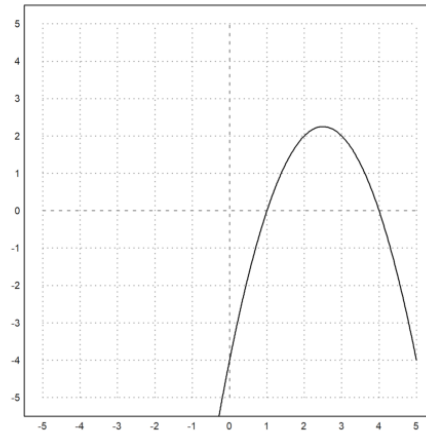
```
[[a = - 1, b = 5, c = - 4]]
```



Gambar 50: gambar 163



Gambar 51: gambar 164



Gambar 52: gambar 165

```
>function y&=-x^2+5*x-4
```

$$-x^2 + 5x - 4$$

```
>plot2d("-x^2+5*x-4",-5,5,-5,5):
```

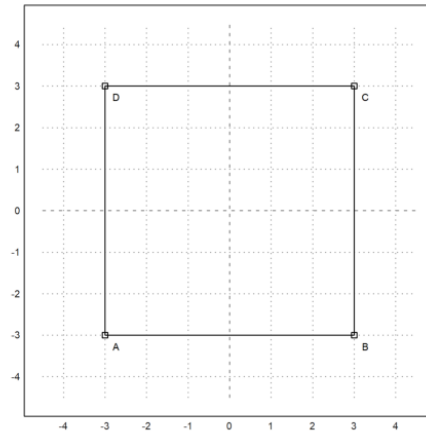
3. Gambarkanlah suatu segi-4 yang diketahui keempat titik sudutnya, misalnya A, B, C, D.

- Tentukan apakah segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung (sisinya-sisintya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yakni lingkaran dalam segi-4 tersebut).
- Suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila keempat garis bagi sudutnya bertemu di satu titik.
- Jika segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung, gambar lingkaran dalamnya.
- Tunjukkan bahwa syarat suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

```
>load geometry
```

Numerical and symbolic geometry.

```
>setPlotRange(-4.5,4.5,-4.5,4.5);
>A=[-3,-3]; plotPoint(A,"A");
>B=[3,-3]; plotPoint(B,"B");
>C=[3,3]; plotPoint(C,"C");
```



Gambar 53: gambar 166

```
>D=[-3,3]; plotPoint(D, "D");
>plotSegment(A,B, "");
>plotSegment(B,C, "");
>plotSegment(C,D, "");
>plotSegment(A,D, "");
>aspect(1):
>l=angleBisector(A,B,C);
>m=angleBisector(B,C,D);
>P=lineIntersection(l,m);
>color(5); plotLine(l); plotLine(m); color(1);
>plotPoint(P, "P");
```

Dari gambar diatas terlihat bahwa keempat garis bagi sudutnya bertemu di satu titik yaitu titik P.

```
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B)));
>plotCircle(circleWithCenter(P,r), "Lingkaran dalam segiempat ABCD");
```

Dari gambar diatas, terlihat bahwa sisi-sisinya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yaitu lingkaran dalam segiempat.

Akan ditunjukkan bahwa hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

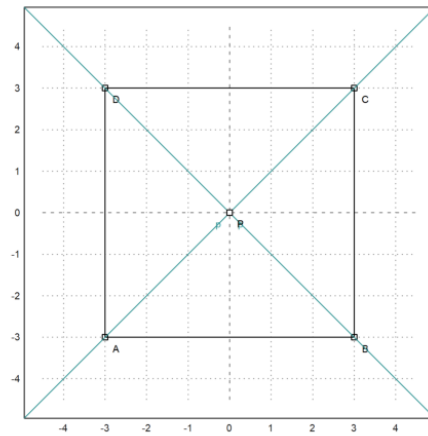
```
>AB=norm(A-B) //panjang sisi AB
```

6

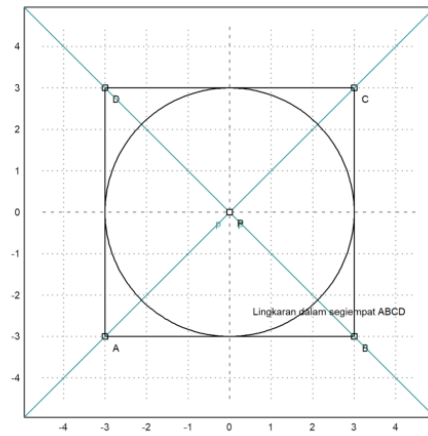
```
>CD=norm(C-D) //panjang sisi CD
```

6

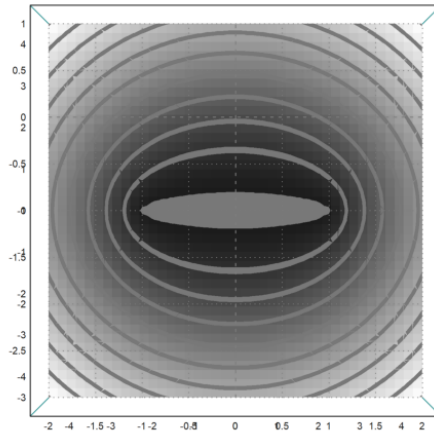
```
>AD=norm(A-D) //panjang sisi AD
```



Gambar 54: gambar 167



Gambar 55: gambar 168



Gambar 56: gambar 169

6

```
>BC=norm(B-C) //panjang sisi BC
```

6

```
>AB.CD
```

36

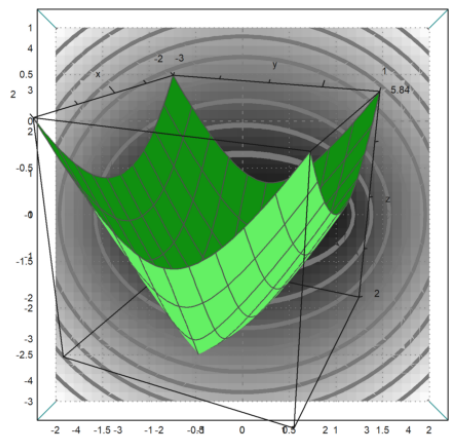
```
>AD.BC
```

36

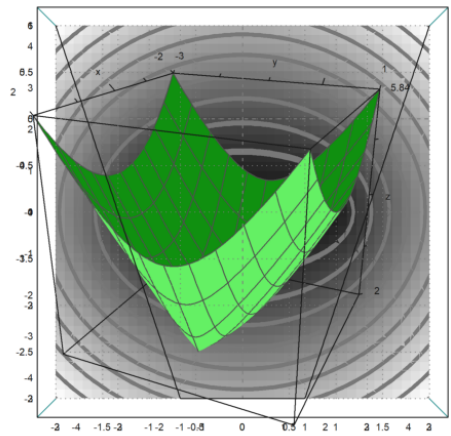
Terbukti bahwa hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama yaitu 36. Jadi dapat dipastikan bahwa segiempat tersebut merupakan segiempat garis singgung.

4. Gambarkanlah suatu ellips jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

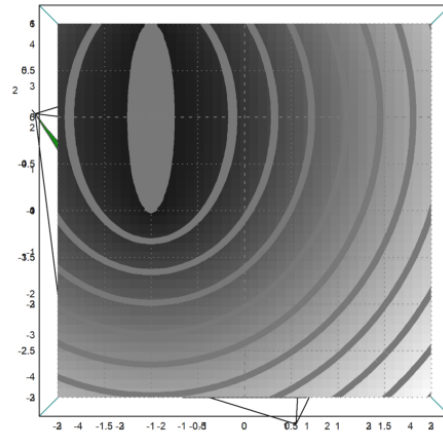
```
>P=[-1,-1]; Q=[1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)
>Q=[1,-1]; function d2(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)+sqrt((x-Q[1])^2+(y-Q[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
Grafik yang lebih menarik
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
Batasan ke garis PQ
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```



Gambar 57: gambar 170



Gambar 58: gambar 171

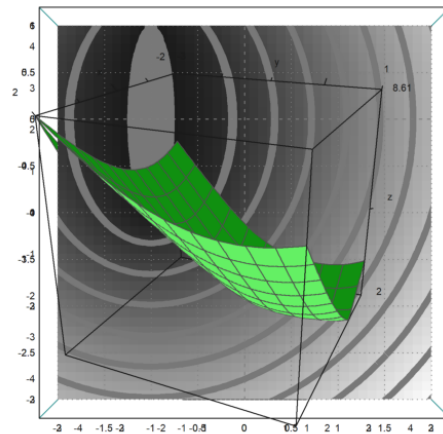


Gambar 59: gambar 172

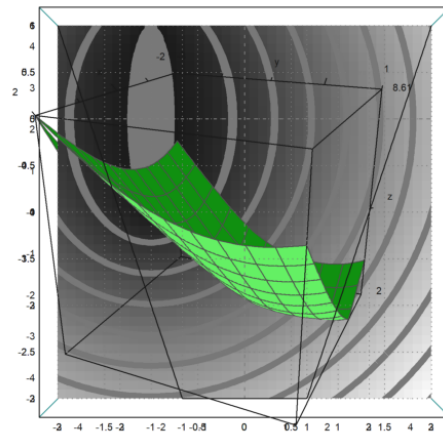
5. Gambarlah suatu hiperbola jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

```
>P=[-1,-1]; Q=[1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-p[1])^2+(y-p[2])^2)
>Q=[1,-1]; function d2(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)+sqrt((x+Q[1])^2+(y+Q[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```





Gambar 60: gambar 173



Gambar 61: gambar 174