BAB 5
Penggunaan EMT untuk Kalkulus

Sabilla Hanifah Nur Jihada

November 2024

1 Kalkulus dengan EMT

Materi Kalkulus mencakup di antaranya:

1. Fungsi(fungsi aljabar, trigonometri, eksponensial, logaritma, komposisi fungsi)
2. Limit Fungsi
3. Turunan Fungsi
4. Integral Tak Tentu
5. Integral Tentu
6. Barisan dan Deret
7. Fungsi multivariabel

EMT (bersama Maxima) dapat digunakan untuk melakukan semua perhitungan di dalam kalkulus, baik secara numerik maupun analitik (eksak).

2 1. Fungsi

Fungsi adalah suatu relasi yang menghubungkan setiap anggota dari suatu himpunan (domain) dengan tepat satu anggota himpunan lain (kodomain). Secara sederhana, fungsi dapat dipandang sebagai mesin yang menerima input (nilai x) dan menghasilkan output (nilai y).

$$f : A \to B$$

Sifat-sifat Fungsi

1. Injektif (satu-satu)

Fungsi injektif adalah fungsi degan tiap elemen kondomain tidak memiliki lebih dari satu elemen domain. Fungsi injektif disebut juga dengan "fungsi satu-satu" karena tiap elemen kodomain hanya boleh berelasi satu kali.

2. Surjektif

Fungsi surjektif adalah fungsi dengan semua elemen kodomain berelasi dengan elemen domain. Fungsi surjektif juga disebut fungsi "on-to".

3. Bijektif

Fungsi bijektif adalah fungsi yang memenuhi sifat injektif dan surjektif. Fungsi bijektif juga disebut fungsi korespondensi satu-satu, karena elemen domain dan kodomain semuanya berelasi satu-satu.

3 Jenis Fungsi yang akan Dielajari

1. Fungsi Aljabar

Fungsi aljabar adalah jenis fungsi matematika yang dibentuk dengan menggunakan operasi-operasi aljabar seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, dan pangkat. Secara umum, fungsi aljabar merupakan fungsi yang dapat dinyatakan dengan ekspresi aljabar yang melibatkan variabel dan konstanta. Fungsi ini termasuk di dalam kategori fungsi elementer karena bisa dinyatakan dalam bentuk dasar.

2. Fungsi Trigonometri

Fungsi trigonometri adalah fungsi yang menghubungkan sudut suatu segitiga siku-siku dengan rasio panjang sisi-sisinya. Fungsi ini sangat penting dalam matematika, khususnya dalam geometri, analisis, dan aplikasi di bidang fisika, teknik, dan astronomi. Fungsi-fungsi trigonometri yang paling umum adalah sinus, kosinus, tangen, serta turunan dan kebalikannya seperti secan, kosekan, dan kotangen.

3. Fungsi Eksponensial

Fungsi eksponensial adalah fungsi matematika di mana variabel independen (biasanya dilambangkan dengan x) berada di eksponen. Bentuk umum fungsi eksponensial adalah:

$$f(x) = a^x$$

* a adalah bilangan positif (basis) dan tidak sama dengan 1

- x adalah variabel eksponen

Fungsi eksponensial yang paling umum adalah fungsi eksponensial alami dengan basis bilangan euler (e = 2.718). Fungsi ini sering digunakan dalam berbagai aplikasi ilmiah yang dinyatakan sebagai:

$$f(x) = e^x$$

4. Fungsi Logaritma

Fungsi logaritma adalah kebalikan atau invers dari fungsi eksponensial. Fungsi logaritma dinyatakan sebagai:

$$f(x) = \log a(x)$$

5. Komposisi Fungsi

Komposisi fungsi adalah operasi matematika di mana dua fungsi digabungkan sehingga output dari satu fungsi menjadi input dari fungsi yang lain.

Misal, diketahui f dan g dua fungsi sebarang maka fungsi komposisi f dan g ditulis

$$gof$$

didefinisikan sebagai:

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

sehingga fungsi f dikerjakan terlebih dahulu daripada g.

4 Mendefinisikan Fungsi

Terdapat beberapa cara mendefinisikan fungsi pada EMT, yakni:

- Menggunakan format nama_fungsi := rumus fungsi (fungsi numerik),
- Menggunakan format nama_fungsi &= rumus fungsi (fungsi simbolik,
- namun dapat dihitung secara numerik),
- Menggunakan format nama_fungsi &&= rumus fungsi(fungsi simbolik
- murni, tidak dapat dihitung langsung),
- Fungsi sebagai program EMT (Mendefinisikan fungsi yang lebih
- kompleks dengan beberapa langkah atau percabangan)

Setiap format harus diawali dengan perintah function (bukan sebagai ekspresi).

Berikut adalah adalah beberapa contoh cara mendefinisikan fungsi:

$$f(x) = 2x^2 + e^{\sin(x)}.$$

>function f(x) := 2*xˆ2+exp(sin(x)) // fungsi numerik

fungsi ini mendefinisikan nilai dari f(x) dan untuk fungsi exp(cox(x)) merupakan dua fungsi dimana:

cos(x) digunakan untuk menghitung nilai cos di sudut x dan exp() digunakan untuk mendefinisikan fungsi eksponensial (e pangkat)

>f(0), f(1), f(pi)

```
1
4.31977682472
20.7392088022
```

>f(a) // tidak dapat dihitung nilainya karena bukan fungsi numerik

```
288.584748804
```

$$f(x) = 3x^3 + e^{\cos(x)}.$$

>function f(x) := 3*xˆ3+exp(cos(x))

>f(1)

```
4.71652569955
```

>f(2)

```
24.6595834124
```

>f(-2:2)

```
[-23.3404,  -1.28347,  2.71828,  4.71653,  24.6596]
```

>f(-2)-f(2)

```
-48
```

>plot2d("f(x)",-2,2):

plot2d : fungsi ini digunakan untuk printah membuat plot dua dimensi

"f(x)" : memanggil fungsi f(x)

-2,2 : grafik akan ditampilkan pada sb x dari rentang -2 sampai 2

Berikutnya kita definisikan fungsi:

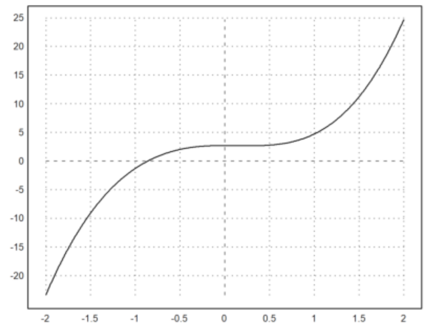
$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x}}{x + 1}$$

>function g(x) := sqrt(xˆ2-3*x)/(x+1)

>g(5)

```
0.527046276695
```

>g(20)



Gambar 1: gambar 9

images/Aplikom#Statistika_Sabilla Hanifah Nur Jihada_23030630012-011.png

Gambar 2: gambar 11

```
0.878051853076
```

>g(21)

```
0.883737367965
```

>g(20:25)

```
[0.878052,  0.883737,  0.888915,  0.89365,  0.897998,  0.902003]
```

Silakan Anda plot grafik fungsi di atas!
>aspect(1.5); plot2d("g(x)",20,25):
>f(g(5)) // komposisi fungsi

```
2.81254111152
```

f(g(5)) adalah notasi yang menunjukkan komposisi fungsi.

Ini berarti kita akan melakukan dua langkah perhitungan:

Hitung g(5): Pertama, kita mencari nilai dari fungsi g ketika x = 5.

Hasilnya akan kita sebut sebagai a.

Hitung f(a): Selanjutnya, kita masukkan nilai a yang kita dapatkan dari langkah 1 ke dalam fungsi f.

Hasil akhir dari perhitungan ini adalah nilai dari f(g(5)).

>g(f(5))

```
0.993366510057
```

>function h(x) := f(g(x)) // definisi komposisi fungsi

>h(5) // sama dengan f(g(5))

```
2.81254111152
```

Silakan Anda plot kurva fungsi komposisi fungsi f dan g:

$$h(x) = f(g(x))$$

dan

$$u(x) = g(f(x))$$

bersama-sama kurva fungsi f dan g dalam satu bidang koordinat.

>f(0:10) // nilai-nilai f(0), f(1), f(2), . . . , f(10)

```
[2.71828, 4.71653, 24.6596, 81.3716, 192.52, 376.328, 650.612,
1031.13, 1536.86, 2187.4, 3000.43]
```

>fmap(0:10) // sama dengan f(0:10), berlaku untuk semua fungsi

```
[2.71828, 4.71653, 24.6596, 81.3716, 192.52, 376.328, 650.612,
1031.13, 1536.86, 2187.4, 3000.43]
```

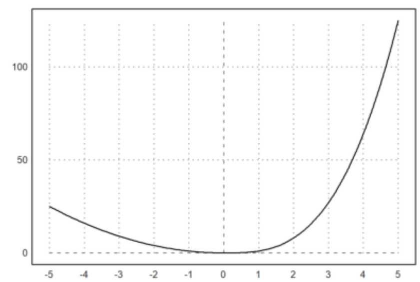
>gmap(20:25)

Misalkan kita akan mendefinisikan fungsi

$$f(x) = \{ x^3 x > 0 x^2 x \leq 0.$$

Fungsi tersebut tidak dapat didefinisikan sebagai fungsi numerik secara "inline" menggunakan format :=, melainkan didefinisikan sebagai program. Perhatikan, kata "map" digunakan agar fungsi dapat menerima vektor sebagai input, dan hasilnya berupa vektor. Jika tanpa kata "map" fungsinya hanya dapat menerima input satu nilai.

>function map f(x)



Gambar 3: gambar 15

```
  if x>0 then return x^3
  else return x^2
  endif;
endfunction
```

>f(4)

```
64
```

>f(-2)

```
4
```

>f(-5:5)

```
[25,  16,  9,  4,  1,  0,  1,  8,  27,  64,  125]
```

>aspect(1.5); plot2d("f(x)",-5,5):

$$f(x) = 2e^x$$

>function f(x) &= 2*E^x; // fungsi simbolik
>$f(a) // nilai fungsi secara simbolik

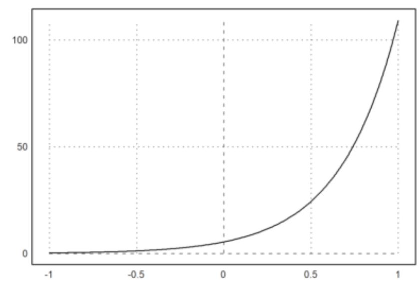
$$2\,e^a$$

>function a:=12
>f(a)

```
325509.582838
```

>f(E) // nilai fungsi berupa bilangan desimal

```
30.308524483
```



Gambar 4: gambar 19

$$g(x) = 3x + 1$$

>function g(x) &= 3*x+1

```
3 x + 1
```

>g(50)

```
151
```

>function h(x) &= f(g(x)) // komposisi fungsi

```
   3 x + 1
2 E
```

>plot2d("h(x)",-1,1):

5 Contoh Fungsi Aljabar

1.Diberikan fungsi:

$$f(x) = 6x^3 + 12\sqrt{x}$$

Tentukan nilai f(1) dan f(4) kemudian cari nilai f(4)-2f(1)

Gambarkan juga grafiknya di f(1:4)!

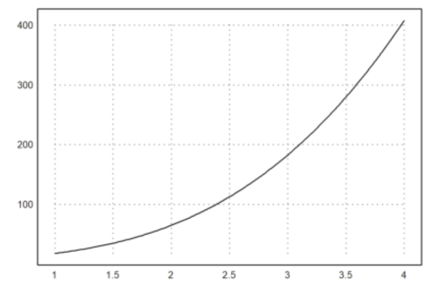
>function f(x) := 6*x^3+12*sqrt(x)

>f(1)

```
18
```

>f(4)

```
408
```



Gambar 5: gambar 21

>f(4)-2*f(1)

```
372
```

>aspect(1.5); plot2d("f",1,4):

2. Diberikan fungsi:

$$k(x, y) = 12x^3 + 4y^2 - 3x + 2$$

Tentukan nilai k(1,1)+k(2,3)!

>function k(x,y):= 12*x^{3+4*y}2-3*x+2

>k(1,1)

```
15
```

>k(2,3)

```
128
```

>k(1,1)+k(2,3)

```
143
```

3. Diketahui suatu fungsi f(x,y,z) diddefinisikan sebagai betrikut

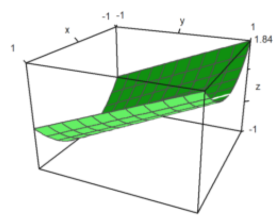
$$f(x, y, z) = (3x - 1) + \sqrt{x^3 - y^2 - z + 6}$$

Tentukan nilai f(3,4,5)!

>function f(x,y,z):= (3*x-1)+ sqrt(x^{3-y}2-z+6)

>f(3,4,5)

```
11.4641016151
```



Gambar 6: gambar 26

6 Contoh Fungsi Trigonometri

1. Suatu fungsi trigonometri didefinisikan sebagai:

$$f(x) = \frac{tan(x)}{2x + 3x^2}$$

Tentukan nilai dari f(6)-f(7)!

>function f(x):= tan(x)/2*x+3*xˆ2

>f(6)-f(7)

```
-42.9230865137
```

2. Diberikan fungsi:

$$f(x, y) = \frac{x^2 + sin(y)}{xy}$$

Tentukan nilai f(4)!

>function f(x,y) := xˆ2+sin(x)/x*y

>f(4,2)

```
15.6215987523
```

>plot3d("f",-4,4):

3. Diberikan suatu fungsi

$$f(x, y, z) = \frac{sin(x)}{cos(z) + sin(x)} + tan(y)$$

tentukan nilai f(x,y,z) bila x=1, y=2, dan z=-3!

>function f(x,y,z)&= sin(x)/(sin(x)+cos(z))+tan(y)

```
     sin(x)
--------------- + tan(y)
cos(z) + sin(x)
```

>f(1,2,-3)

```
-7.85069041214
```

7 Contoh Fungsi Eksponensial

1. Diberikan sebuah fungsi f(x) sebagai berikut:

$$f(x) = 3^x$$

Tentukan nilai f(x+1)-f(x)!
>function f(x)&= 3ˆx;
>$f(x+1)

$$3^{x+1}$$

>$f(x)

$$3^x$$

>$f(x+1)-f(x)

$$2\,3^x$$

2. Fungsi f(m) didefinisikan sebagai:

$$f(m) = 27 + 8^m$$

Tentukan nilai dari f(3), 2f(5), dan f(3)/2f(5)
>function f(m)&=27+8ˆm;
>$f(3)

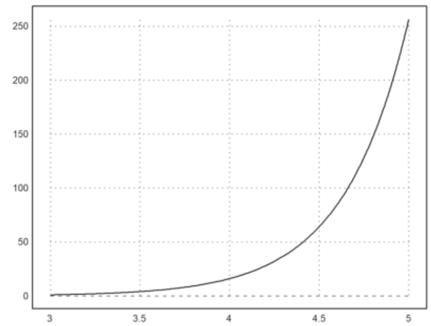
$$539$$

>$2*f(5)

$$65590$$

>$f(3)/(2*f(5))

$$\frac{77}{9370}$$



Gambar 7: gambar 37

3. Diketahui nilai y dari fungsi di bawah ini adalah 1

$$f(x) = 2^{4x-12y}$$

Tentukan nilai f(3), f(8), dan buat grafiknya di f(3:5)!

>function f(x):=2^(4*x-12*y)
>function y:=1
>f(8)

```
1048576
```

>f(3)

```
1
```

>f(3:5)

```
[1,  16,  256]
```

>aspect(1.3); plot2d("f",3,5):

8 Contoh Fungsi Logaritma

1. Diberikan fungsi di bawah ini:

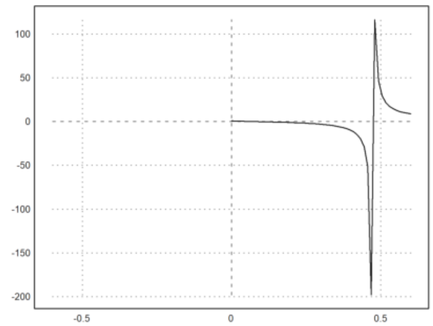
$$f(x) = e^2 \cdot \left(\frac{1}{3 + 4\log(x)} + \frac{1}{7} \right)$$

Tentukan nilai f(0.6)!

>function f(x):= E^2*(1/(3+4*log(x))+1/7)
>f(0.6)

```
8.77908249441
```

>plot2d("f",-0.6,0.6):



Gambar 8: gambar 39

9 Contoh Komposisi Fungsi

1. Untuk fungsi:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$g(x) = 3x + 5$$

cari nilai

$$fog(-2), gof(0)$$

>function f(x) := xˆ2-3*x+2; $f(x)
>function g(x) := 3*x+5; $g(x)
>f(g(-2)), g(f(0))

```
6
11
```

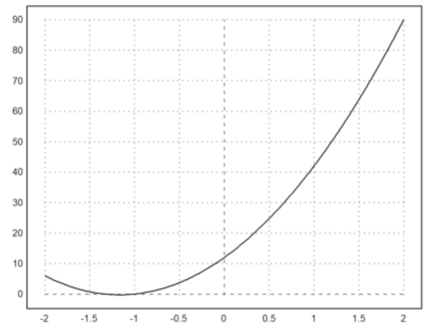
>plot2d("(3*x+5)ˆ2-3*(3*x+5)+2",-2,2):

10 Latihan

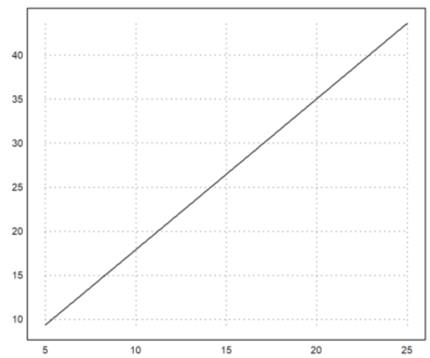
1. Diberikan fungsi:

$$b(x) = \frac{12x^3}{7x^2 - 3x}$$

Cari nilai b(1), b(1:4), dan buatkan grafiknya!
>function b(x):= (12*x$^{3)/(7*x}$2-3*x)
>b(1)



Gambar 9: gambar 43



Gambar 10: gambar 45

```
3
```

>b(1:4)

```
[3,  4.36364,  6,  7.68]
```

>aspect(1.2); plot2d("b",5,25):

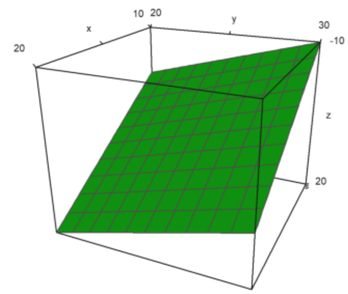
2. Diketahui suatu fungsi f(x) sebagai berikut:

$$f(x,y) = \frac{3(x-1)(y-2)}{2} + \frac{(y-2)(x-3)}{2} - 2(x-1)(y-3)$$

Tentukan nilai dari f(20,10) dan buat grafiknya di f(20,10:30,20)!

>function f(x,y) &= 3*(x-1)*(y-2)/2+(y-2)*(x-3)/2-2*(x-1)*(y-3)

```
3 (x - 1) (y - 2)    (x - 3) (y - 2)
----------------- + --------------- - 2 (x - 1) (y - 3)
        2                  2
```



Gambar 11: gambar 47

>f(20,10)

```
30
```

>plot3d("f(x,y)",20,10,30,20):

3. Sketsakan grafik fungsi dibawah ini pada[-pi,2pi]

$$y(t) = sin(5t)$$

>function y(t)&= sin(5*t)

```
sin(5 t)
```

>y(-pi:pi)

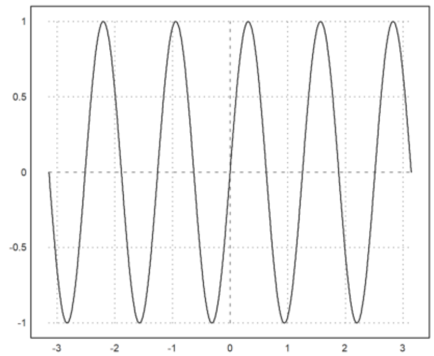
```
[0,  0.958924,  0.544021,  -0.650288,  -0.912945,  0.132352,  0.988032]
```

>plot2d("y",-pi,pi):

4. Diketahui suatu fungsi f(x):

$$f(x) = 3^x$$

Tentukan nilai f(abc) jika nilai a=1, b=2, dan c=5!
>function f(x):=3ˆx
>function a:=1
>function b:=6
>function c:=5
>f(a*b*c)



Gambar 12: gambar 49

```
2.05891132095e+14
```

5. Untuk fungsi:

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 20$$

$$g(x) = 3x - 5$$

cari nilai

$$fog(5), gof(8)$$

>function g(x) := 3*x-5
>function f(x) := 2*x^2-3*x+20
>f(g(5))

```
190
```

>g(f(8))

```
367
```

11 2. Limit

12 Definisi limit

Pada dasarnya, limit digunakan untuk menyatakan sesuatu yang nilainya mendekati nilai tertentu. Limit dapat diartikan sebagai menuju suatu batas, sesuatu yang dekat namun tidak dapat dicapai. Mengapa nilainya hanya mendekati? Karena suatu fungsi biasanya tidak terdefinisi pada titik-titik tertentu. Walaupun suatu fungsi seringkali tidak terdefinisi untuk titik tertentu, namun masih dapat dicari tahu berapa nilai yang didekati oleh fungsi tersebut apabila titik tertentu semakin didekati yaitu dengan limit.

Bentuk umum dari limit sendiri dinotasikan dengan:

$$\lim_{x\to c} F\left(x\right) = L$$

Notasi tersebut menyatakan bahwa f(x) untuk niai x mendekati c sama dengan L. F(x) disini dapat berupa bermacam-macam jenis fungsi. Dan L dapat berupa konstanta, ataupun "und" (tak terdefinisi), "ind" (tak tentu namun terbatas), "infinity" (kompleks tak hingga). Begitupun dengan batas c, dapat berupa sebarang nilai atau pada tak hingga (-inf, minf, dan inf).

Sebuah fungsi dapat dikatakan memiliki limit apabila limit kanan dan limit kiri nya memiliki nilai yang sama. Dimana, limit dari fungsi tersebut adalah nilai dari limit kanan dan limit kiri fungsi yang bernilai sama tadi.

13 Sifat-sifat Limit

Jika f(x) dan g(x) adalah fungsi yang memiliki limit di c, n merupakan bilangan bulat positif, dan k adalah konstanta.

1.

$$\lim_{x\to c} k = k$$

>$showev('limit(5,x,2))

$$5 = 5$$

$$\lim_{x\to 2} 5 = 5$$

2.

maxima: 'limit(x,x,c)=c

$$\lim_{x\to c} x = c$$

>$showev('limit(x,x,3))

$$\lim_{x\to 3} x = 3$$

3.

maxima: 'limit(kf(x),x,c)= k*maxima: 'limit(f(x),x,c)

$$\lim_{x\to c} kf\left(x\right) = k\left(\lim_{x\to c} f\left(x\right)\right)$$

>$showev('limit(4*xˆ2,x,1))

$$4\,\left(\lim_{x\to 1} x^2\right) = 4$$

4.
maxima: 'limit([g(x)+f(x)],x,c)= maxima: 'limit(g(x),x,c) + maxima: 'limit(f(x),x,c)

$$\lim_{x\to c}\left[g\left(x\right)+f\left(x\right)\right] = \lim_{x\to c} g\left(x\right) + \lim_{x\to c} f\left(x\right)$$

>$showev('limit(xˆ3+2*x,x,1))

$$\lim_{x\to 1} x^3 + 2\,x = 3$$

5.
maxima: 'limit([g(x)-f(x)],x,c)= maxima: 'limit(g(x),x,c) - maxima: 'limit(f(x),x,c)

$$\lim_{x\to c}\left[g\left(x\right)-f\left(x\right)\right] = \lim_{x\to c} g\left(x\right) - \lim_{x\to c} f\left(x\right)$$

>$showev('limit(xˆ2-4*x,x,5))

$$\lim_{x\to 5} x^2 - 4\,x = 5$$

6.
maxima: 'limit([g(x)*f(x)],x,c)= maxima: 'limit(g(x),x,c) * maxima: 'limit(f(x),x,c)

$$\lim_{x\to c}\left[f\left(x\right)\,g\left(x\right)\right] = \left(\lim_{x\to c} f\left(x\right)\right)\,\left(\lim_{x\to c} g\left(x\right)\right)$$

>$showev('limit((x-1)*(x+4),x,3))

$$\lim_{x\to 3}\left(x-1\right)\,\left(x+4\right) = 14$$

7.
maxima: 'limit(g(x)/f(x),x,c)= maxima: 'limit(g(x),x,c) / maxima: 'limit(f(x),x,c)

$$\lim_{x\to c}\frac{g\left(x\right)}{f\left(x\right)} = \frac{\lim_{x\to c} g\left(x\right)}{\lim_{x\to c} f\left(x\right)}$$

>$showev('limit((x+5)/(x+1),x,0))

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+5}{x+1} = 5$$

8.
maxima: 'limit(f(x)$^{\text{n,x,c)=maxima:'limit(f(x),x,c)}}$n

$$\lim_{x\to c} f^{n}\left(x\right) = \left(\lim_{x\to c} f\left(x\right)\right)^{n}$$

>$showev('limit((x+3)^2,x,1))

$$\lim_{x\to 1}\left(x+3\right)^2=16$$

9.

$$\lim_{x\to c}f\left(x\right)^{\frac{1}{n}}=\left(\lim_{x\to c}f\left(x\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$

>$showev('limit((x$^{2+3*x+1)}$(1/2),x,2))

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2+3\,x+1}=\sqrt{11}$$

Limit pada EMT

Pada EMT cara mendefinisikan limit yaitu dengan format :

$showev('limit(f(x),x,c))

Format tersebut akan menampilkan limit yang dimaksud dan hasilnya. Jika kita ingin menampilkan hasilnya saja dari sebuah limit tanpa menampilkan limitnya, kita bisa menggunakan format :

$limit(f(x),x,c)

Sedangkan, untuk limit kanan dan limit kiri seperti pada definisi dapat ditampilkan di EMT dengan cara menambah opsi "plus" atau "minus" :

$showev('limit(f(x),x,c, plus)) atau 'limit(f(x),x,c, minus)

>$showev('limit(x^2+3*x+4,x,2))

$$\lim_{x\to 2}x^2+3\,x+4=14$$

>$limit(x^2+3*x+4,x,2)

$$14$$

Menghitung dan Visualisasi Limit

Perhitungan limit pada EMT dapat dilakukan dengan menggunakan fungsi Maxima, yakni "limit". Fungsi "limit" dapat digunakan untuk menghitung limit fungsi dalam bentuk ekspresi maupun fungsi yang sudah didefinisikan sebelumnya. Nilai limit dapat dihitung pada sebarang nilai atau pada tak hingga (-inf, minf, dan inf). Limit kiri dan limit kanan juga dapat dihitung, dengan cara memberi opsi "plus" atau "minus". Hasil limit dapat berupa nilai, "und" (tak definisi), "ind" (tak tentu namun terbatas), "infinity" (kompleks tak hingga).

Limit dapat divisualisasikan menggunakan plot 2 dimensi. Pada EMT sendiri, format yang bisa digunakan untuk memvisualisasikan limit adalah :

plot2d("f(x)",-c,c):

Dengan f(x) adalah fungsi pada limit yang dicari, dan c berupa bilangan real menyesuaikan batas dari limit itu sendiri.

14 Limit Aljabar

1. Tunjukkan bahwa limit kiri dan kanan dari fungsi berikut bernilai sama. Berapakah nilai limitnya?

$$\lim_{x \to 0} x^2 + x - 1$$

>$showev('limit(x^2+x-1,x,0,minus))

$$\lim_{x \uparrow 0} x^2 + x - 1 = -1$$

>$showev('limit(x^2+x-1,x,0,plus))

$$\lim_{x \downarrow 0} x^2 + x - 1 = -1$$

Dapat terlihat bahwa nilai limit kiri = nilai limit kanan. Maka fungsi tersebut memiliki nilai limit, yaitu :

>$showev('limit(x^2+x-1,x,0))

$$\lim_{x \to 0} x^2 + x - 1 = -1$$

2. Tunjukkan bahwa limit kiri dan kanan dari fungsi berikut bernilai sama. Berapakah nilai limitnya?

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{x^2 + x - 1}$$

>$showev('limit(sqrt(x^2+x-1),x,3,minus))

$$\lim_{x \uparrow 3} \sqrt{x^2 + x - 1} = \sqrt{11}$$

>$showev('limit(sqrt(x^2+x-1),x,3,plus))

$$\lim_{x \downarrow 3} \sqrt{x^2 + x - 1} = \sqrt{11}$$

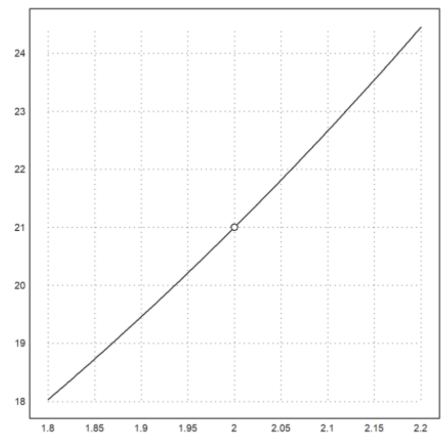
Dapat terlihat bahwa nilai limit kiri = nilai limit kanan. Maka fungsi tersebut memiliki nilai limit, yaitu :

>$showev('limit(sqrt(x^2+x-1),x,3))

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{x^2 + x - 1} = \sqrt{11}$$

3. Tunjukkan bahwa limit kiri dan kanan dari fungsi berikut bernilai sama. Berapakah nilai limitnya?

$$\lim_{x \to -3} \frac{|x + 3|}{x + 3}$$



Gambar 13: gambar 89

>$showev('limit(abs(x+3)/(x+3),x,-3,minus))

$$\lim_{x\uparrow -3} \frac{|x+3|}{x+3} = -1$$

>$showev('limit(abs(x+3)/(x+3),x,-3,plus))

$$\lim_{x\downarrow -3} \frac{|x+3|}{x+3} = 1$$

Karena nilai limit kiri tidak sama dengan nilai limit kanan. Maka fungsi diatas tidak memiliki limit di x=-3

>$showev('limit(abs(x+3)/(x+3),x,-3))

$$\lim_{x\to -3} \frac{|x+3|}{x+3} = und$$

>$limit(xˆ3+4*x+5,x,2)

$$21$$

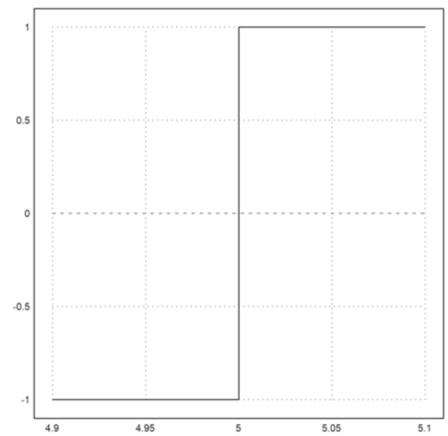
>plot2d("xˆ3+4*x+5",1.8,2.2); plot2d(2,21,>points,style="ow",>add):

Jadi berdasarkan grafik, nilai limit tersebut adalah 21.

5. Berapakah nilai limit dari fungsi berikut? Tunjukkan dengan menggunakan grafik!

maxima: 'limit((abs(x-5))/(x-5),x,5)

$$\lim_{x\to 5} \frac{|x-5|}{x-5}$$



Gambar 14: gambar 91

>plot2d("abs(x-5)/(x-5)",4.9,5.1):

Karena nilai limit kiri tidak sama dengan limit kanan. maka nili limit fungsi tersebut tidak ada.

6. Berapakah nilai limit dari fungsi berikut?

$$\lim_{x\rightarrow\infty }{{x^5-3\,x^3+x^2-9}\over{4\,x^5-7\,x^4+2\,x-1}}$$

>$showev('limit((x^{5-3*x}3+x$^{2-9)/(4*x}$5-7*xˆ4+2*x-1),x,inf))

$$\lim_{x\rightarrow\infty }{{x^5-3\,x^3+x^2-9}\over{4\,x^5-7\,x^4+2\,x-1}}={{1}\over{4}}$$

7. Tunjukkan nilai limit fungsi berikut dengan grafik!

maxima: 'limit(sqrt(xˆ2+x)-x,x,inf)

$$\lim_{x\rightarrow\infty }{\sqrt{x^2+x}-x}$$

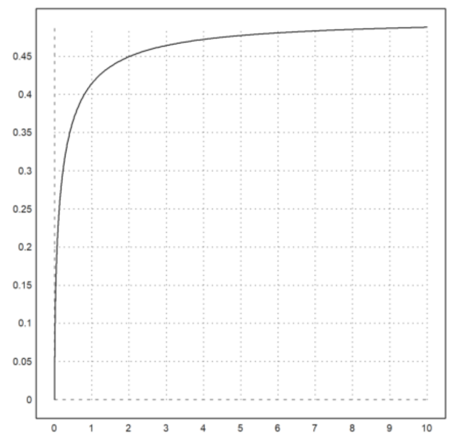
>plot2d("sqrt(xˆ2+x)-x",0,10):

Dengan menggunakan grafik diperlihatkan bahwa nilai limit mendekati 0.5. Mari kita buktikan di baris perintah

>$showev('limit(sqrt(xˆ2+x)-x,x,inf))

$$\lim_{x\rightarrow\infty }{\sqrt{x^2+x}-x}={{1}\over{2}}$$

Limit Trigonometri



Gambar 15: gambar 95

1. Tunjukkan bahwa limit kiri dan kanan dari fungsi berikut bernilai sama. Berapakah nilai limitnya?

$$\lim_{x\to 0} \cos x \, \sin x$$

>$showev('limit(cos(x)*sin(x),x,0,minus))

$$\lim_{x\uparrow 0} \cos x \, \sin x = 0$$

>$showev('limit(cos(x)*sin(x),x,0,plus))

$$\lim_{x\downarrow 0} \cos x \, \sin x = 0$$

Dapat terlihat bahwa nilai limit kiri = nilai limit kanan. Maka fungsi tersebut memiliki nilai limit, yaitu :

>$showev('limit(cos(x)*sin(x),x,0))

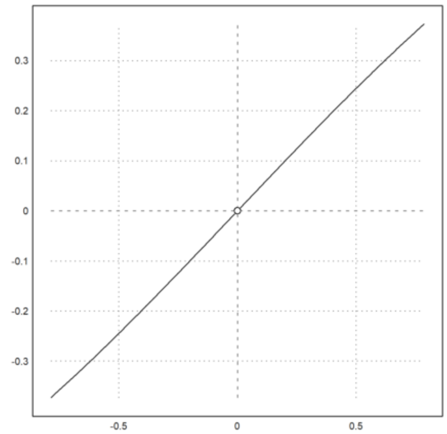
$$\lim_{x\to 0} \cos x \, \sin x = 0$$

2. Berapakah nilai limit dari fungsi berikut? Tunjukkan dengan menggunakan grafik

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$$

>plot2d("(1-cos(x))/x",-pi/4,pi/4); plot2d(0,0,>points,style="ow",>add):

3. Tunjukkan bahwa limit kiri dan kanan dari fungsi berikut bernilai sama. Berapakah nilai limitnya?



Gambar 16: gambar 102

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{1 - \cos x}$$

>$showev('limit(3*sin(x)^2/(1-cos(x)),x,0,minus))

$$3 \left(\lim_{x \uparrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \right) = 6$$

>$showev('limit(3*sin(x)^2/(1-cos(x)),x,0,plus))

$$3 \left(\lim_{x \downarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \right) = 6$$

Dapat terlihat bahwa nilai limit kiri = nilai limit kanan. Maka fungsi tersebut memiliki nilai limit, yaitu

>$showev('limit(3*sin(x)^2/(1-cos(x)),x,0))

$$3 \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \right) = 6$$

4. Berapakah nilai limit dari fungsi berikut? Tunjukkan dengan menggunakan grafik!

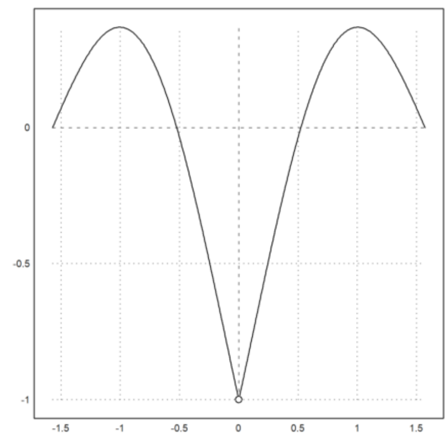
$$\lim_{x \to 0} |\sin(2\,x)| - \cos x$$

>$limit(abs(sin(2*x))-cos(x),x,0)

$$-1$$

>plot2d("abs(sin(2x))-cos(x)",-pi/2,pi/2); plot2d(0,-1,>points,style="ow",>add):

Jadi berdasarkan grafik, nilai limit tersebut adalah -1.



Gambar 17: gambar 109

5. Berapakah nilai limit dari fungsi berikut? Tunjukkan dengan menggunakan grafik!

maxima: 'limit(2*sin(x)*cos(x)-tan(x),x,pi/3)

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} 2\, \cos x\, \sin x - \tan x$$

>$limit(2*cos(x)*sin(x)-tan(x),x,pi/3)

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

>plot2d("2*cos(x)*sin(x)-tan(x)",0,pi/2.9); plot2d(pi/3,-(3)^(1/2)/2,>points,style="ow",>add):
Jadi berdasarkan grafik, nilai limit tersebut adalah -0.866.

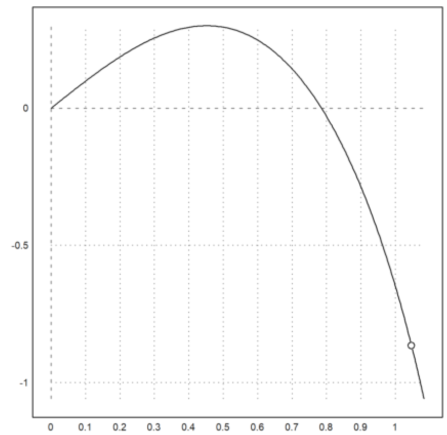
6. Berapakah nilai limit dari fungsi berikut? Tunjukkan dengan menggunakan grafik!

$$2 \left(\lim_{x \to 0} \sec x\right)$$

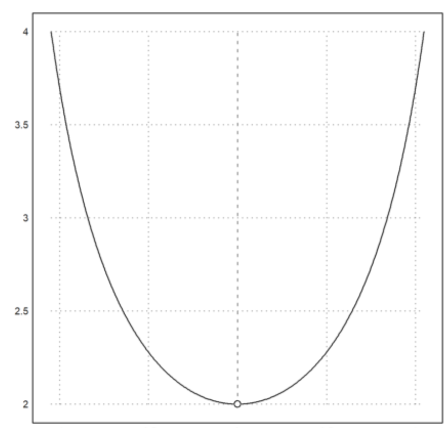
>$limit(2*sec(x),x,0)

$$2$$

>plot2d("2*sec(x)",-pi/3,pi/3); plot2d(0,2,>points,style="ow",>add):
Jadi berdasarkan grafik, nilai limit tersebut adalah 2.



Gambar 18: gambar 112



Gambar 19: gambar 115

15 Latihan

1. Tunjukkan bahwa limit kiri dan kanan dari fungsi berikut bernilai sama!

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\,\left|x^3+5\,x+8\right|}{\cos x}$$

>$limit(abs(x^3+5*x+8)/cos(x)*(x-3),x,3)

$$0$$

2. Tunjukkan nilai limit fungsi berikut dengan menggunakan grafik!

$$\lim_{x\to 0.8}\frac{\left(x^2+6\,x+1\right)\,\sin\left(3\,x\right)}{\cos x}$$

>$limit((x^2+6*x+1)*sin(3*x)/cos(x),x,0.8)

$$6.243635699770241$$

3. Tentukan nilai limit dari fungsi berikut
   maxima: 'limit((x^2-x-6)/(4-sqrt(5*x+1)),x,3)

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{4-\sqrt{5\,x+1}}$$

>$limit((x^2-x-6)/(4-sqrt(5*x+1)),x,3)

$$-8$$

4. Apakah benar nilai dari limit berikut?
   maxima: 'limit(4*x/sin(9*x),x,0)=9/4

$$4\,\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\left(9\,x\right)}\right)=\frac{9}{4}$$

>$limit(4*x/sin(9*x),x,0)

$$\frac{4}{9}$$

5. Berapa nilai limit berikut?
   maxima: 'limit(sqrt(3*x-5)-sqrt(x-1),x,inf)

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{3\,x-5}-\sqrt{x-1}$$

>$limit(sqrt(3*x-5)-sqrt(x-1),x,inf)

$$\infty$$

3. Turunan Fungsi
Turunan adalah pengukuran terhadap bagaimana fungsi berubah seiring
perubahan nilai yang dimasukkan, atau secara umum turunan menunjukkan bagaimana suatu besaran berubah akibat perubahan besaran lainnya. Proses dalam menemukan turunan disebut diferensiasi.

Definisi turunan:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Berikut adalah contoh-contoh menentukan turunan fungsi dengan beberapa cara.

16 Turunan fungsi Aljabar

Mencari turunan dari

$$f(x) = x^n$$

>$showev('limit(((x+h)^n-x^n)/h,h,0)) // turunan x^n

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n\,x^{n-1}$$

Bukti:

$$(x+h)^n = n0x^{n-0}h^0 + n1x^{n-1}h^1 + n2x^{n-2}h^2 + ... + nnx^{n-n}h^n$$

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + n2x^{n-2}h^2 + ... + h^n$$

$$(x+h)^n - x^n = nx^{n-1}h + n2x^{n-2}h^2 + ... + h^n$$

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + n2x^{n-2}h + ... + h^{n-1}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$$

Mencari turunan dari

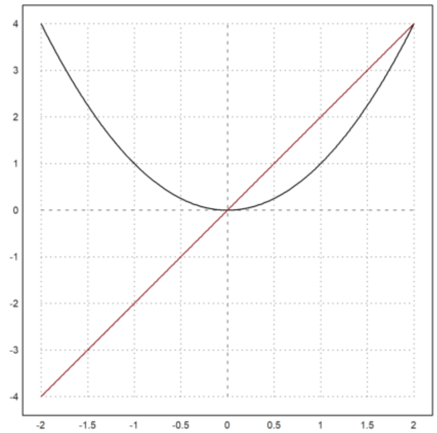
$$f(x) = x^2$$

>$showev('limit(((x+h)^2-x^2)/h,h,0)) // turunan x^2

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2\,x$$

>p &= expand((x+h)^2-x^2)|simplify; $p //pembilang dijabarkan dan disederhanakan

$$2\,h\,x + h^2$$



Gambar 20: gambar 139

>q &=ratsimp(p/h); $q // ekspresi yang akan dihitung limitnya disederhanaka

$$2\,x+h$$

>$limit(q,h,0) // nilai limit sebagai turunan

$$2\,x$$

>plot2d([“xˆ2”, “2x”], color=[black,red]):
Mencari turunan dari

$$f(x)=f(x)^x$$

>$showev(’limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=f(x)ˆx

$$\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\left(\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}}\right)\left(x+h\right)-\left(\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}}\right)\left(x\right)}{h}}=\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\left(\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}}\right)\left(x+h\right)-\left(\lim_{h\rightarrow 0}\right.}{h}}$$

Di sini Maxima bermasalah terkait limit:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{x+h}-x^x}{h}.$$

Dalam hal ini diperlukan asumsi nilai x.
>&assume(x>0); $showev(’limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=f(x)ˆx

$$\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\left(\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}}\right)\left(x+h\right)-\left(\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}}\right)\left(x\right)}{h}}=\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\left(\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}}\right)\left(x+h\right)-\left(\lim_{h\rightarrow 0}\right.}{h}}$$

>&forget(x>0) // jangan lupa, lupakan asumsi untuk kembali ke semula

[x > 0]

>&forget(x<0)

[x < 0]

>&facts()

[]

Selain dengan showev('limit…) kita juga dapat mencari turunan dengan menyederhanakan pembilang seperti di awal

>p &= expand(f(x+h)-f(x))|simplify; $p

$$f\left(x+h\right)-f\left(x\right)$$

>q &=ratsimp(p/h); $q

$$\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}$$

>$limit(q,h,0)

$$\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}}$$

Mencari turunan dari

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

>$showev('limit((1/(x+h)-1/x)/h,h,0)) // turunan 1/x

$$\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}}=-\frac{1}{x^2}$$

>plot2d("-x^(-2)", color=red):

17 Turunan fungsi trigonometri

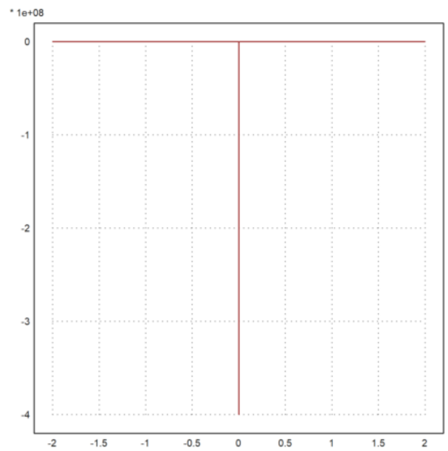
Mencari turunan dari

>$showev('limit((sin(x+h)-sin(x))/h,h,0)) // turunan sin(x)

$$\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\sin\left(x+h\right)-\sin x}{h}}=\cos x$$

Bukti:

$$sin(x+h)=sin(x)cos(h)+cos(x)sin(h)$$



Gambar 21: gambar 149

$$sin(x+h) - sin(x) = sin(x)cos(h) + cos(x)sin(h) - sin(x)$$
$$sin(x+h) - sin(x) = cos(x)sin(h) - sin(x) + sin(x)cos(h)$$
$$sin(x+h) - sin(x) = cos(x)sin(h) - sin(x)(1 - cos(h))$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{sin(x+h) - sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{cos(x)sin(h)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{sin(x)(1 - cos(h)}{h}$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{sin(x+h) - sin(x)}{h} = cos(x) \lim_{h\to 0} \frac{sin(h)}{h} - sin(x) \lim_{h\to 0} \frac{(1 - cos(h)}{h}$$
$$= cos(x) \times 1 - sin(x) \times 0 = cos(x)$$

>p &= expand((sin(x+h)-sin(x)))|simplify; $p

$$\sin(x+h) - \sin x$$

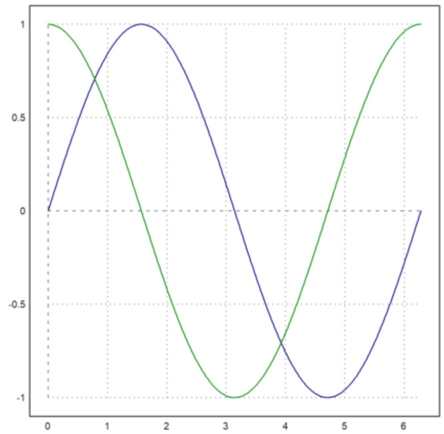
>q &=ratsimp(p/h); $q

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

>$limit(q,h,0) // nilai limit sebagai turunan

$$\cos x$$

>plot2d([“sin(x)”, “cos(x)”],0, 2*pi, color=[blue,green]):
Mencari turunan dari
latex: tan(x)
>$showev('limit((tan(x+h)-tan(x))/h,h,0)) // turunan tan(x)



Gambar 22: gambar 161

$$\lim_{h\to 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Bukti:

$$tan(x+h) = \frac{tan(x) + tan(h)}{1 - tan(x)tan(h)}$$

$$tan(x+h) - tan(x) = \frac{tan(x) + tan(h) - tan(x) + tan^2(x)tan(h)}{1 - tan(x)tan(h)}$$

$$\frac{tan(x+h) - tan(x)}{h} = \frac{\frac{tan(x)+tan(h)-tan(x)+tan^2(x)tan(h)}{1-tan(x)tan(h)}}{h}$$

$$= \frac{tan(h) + tan^2(x)tan(h)}{h(1 - tan(x)tan(h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{tan(h) + tan^2(x)tan(h)}{h(1 - tan(x)tan(h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1 + tan^2(x)}{1 - tan(x)tan(h)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{tan(h)}{h}$$

$$= \frac{1 + tan^2(x)}{1 - tan(x)tan(0)} \cdot 1$$

$$= 1 + tan^2(x)$$

$$1 + tan^2(x) = 1 + \frac{sin^2(x)}{cos^2(x)}$$

$$= \frac{cos^2(x) + sin^2(x)}{cos^2(x)}$$

$$= \frac{1}{cos^2(x)}$$

>p &= expand((tan(x+h)-tan(x)))|simplify; $p

$$\tan \left(x+h\right)-\tan x$$

>q &=ratsimp(p/h); $q

$$\frac{\tan \left(x+h\right)-\tan x}{h}$$

>$limit(q,h,0) // nilai limit sebagai turunan

$$\frac{1}{\cos^2 x}$$

Mencari turunan dari

$$arcsin(x)$$

>$showev('limit((asin(x+h)-asin(x))/h,h,0)) // turunan arcsin(x)

$$\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\arcsin \left(x+h\right)-\arcsin x}{h}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{arcsin(x+h) - arcsin(x)}{h}$$

Misalkan arcsin(x+h)=A dan arcsin(x)=B
Sehingga sin A= x+h dan sin B=x
Kurangkan persamaan kedua dengan persamaan pertama

$$sin(A) - sin(B) = (x+h) - x$$

$$sin(A) - sin(B) = h$$

karena

$$h \to 0, sin(A) - sin(B) \to 0$$

maka

$$sin(A) \to sin(B), A \to B, A - B \to 0$$

sehingga f'(x) menjadi

$$f'(x) = \lim_{A-B \to 0} \frac{A-B}{sinA - sinB}$$

Identitas trigonometri

$$sin(A) - sin(B) = 2sin[\frac{A-B}{2}]cos[\frac{A+B}{2}]$$

$$f'(x) = \lim_{A-B \to 0} \frac{A-B}{2sin[\frac{A-B}{2}]cos[\frac{A+B}{2}]}$$

$$f'(x) = \lim_{A-B \to 0} \frac{\frac{2(A-B)}{2}}{2sin[\frac{A-B}{2}]cos[\frac{A+B}{2}]}$$

ingat bahwa

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{sin(x)} = 1$$

$$f'(x) = \lim_{A-B \to 0} \frac{\frac{(A-B)}{2}}{sin[\frac{A-B}{2}]} \cdot \frac{2}{2cos[\frac{A+B}{2}]}$$

$$f'(x) = 1 \cdot \frac{2}{2cos[\frac{B+B}{2}]}$$

$$f'(x) = \frac{1}{cos(B)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(cos^2(B)}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(1 - sin^2(B)}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2}}$$

>p &= expand((asin(x+h)-asin(x)))|simplify; $p //pembilang dijabarkan dan disederhanakan

$$\arcsin{(x+h)} - \arcsin{x}$$

>q &=ratsimp(p/h); $q // ekspresi yang akan dihitung limitnya disederhanakan

$$\frac{\arcsin{(x+h)} - \arcsin{x}}{h}$$

>$limit(q,h,0) // nilai limit sebagai turunan

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

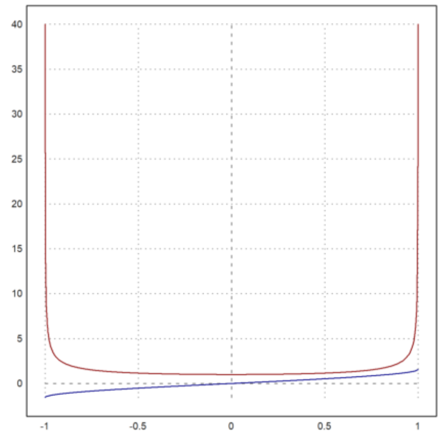
>plot2d(["asin(x)","1/(sqrt(1-xˆ2))"],-1,1,color=[blue,red]):

Mencari turunan dari

$$x^2 + 10$$

di titik x=5

>function f(x) &= xˆ2+10 // definisikan f(x)=xˆ2+10



Gambar 23: gambar 197

```
 2
x  + 10
```

>function df(x) &= showev('diff(f(x),x)); $df(x)

$$\frac{d}{d\,x}\,\left(x^2+10\right)=2\,x$$

>$% with x=5

$$\%at\left(\frac{d}{d\,x}\,\left(x^2+10\right),x=5\right)=10$$

>diff(f,5), diffc(f,5)

```
9.99999999997
10
```

diff: Diferensiasi numerik yang pada dasarnya kurang akurat untuk fungsi umum.

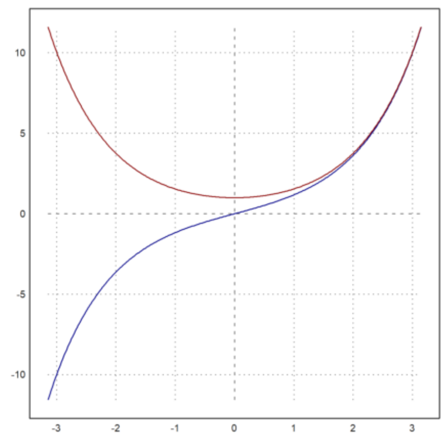
diffc: Menghitung turunan pertama untuk fungsi analitik nyata dengan menggunakan bagian imajiner dari f(x+ih)/h. Cara ini memungkinkan untuk mengevaluasi f dengan lebih akurat.

Mencari turunan dari

>function f(x) &= sinh(x) // definisikan f(x)=sinh(x)

```
sinh(x)
```

>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)



Gambar 24: gambar 203

$$\frac{e^{-x}\,\left(e^{2\,x}+1\right)}{2}$$

Hasilnya adalah cosh(x), karena

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x).$$

>plot2d([“f(x)”,“df(x)”],-pi,pi,color=[blue,red]):
>$showev('diff(f(x),x))

$$\frac{d}{d\,x}\,\sinh x=\cosh x$$

>$% with x=3

$$\%at\left(\frac{d}{d\,x}\,\sinh x , x=3\right)=\cosh 3$$

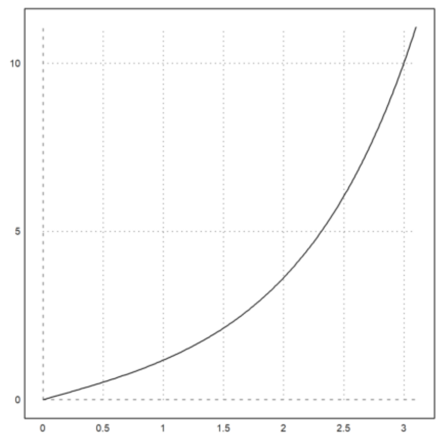
>$float(%)

$$\%at\left(\frac{d^{1.0}}{d\,x^{1.0}}\,\sinh x , x=3.0\right)=10.06766199577777$$

>plot2d(f,0,3.1):
Mencari turunan dari

$$f(x) = sin(3x^5 + 7)^2$$

>function f(x) &= sin(3*x$^{5+7)}$2



Gambar 25: gambar 207

```
     2    5
sin (3 x  + 7)
```

>$showev('diff(f(x),x))

$$\frac{d}{d\,x}\,\sin^2\left(3\,x^5+7\right)=30\,x^4\,\cos\left(3\,x^5+7\right)\,\sin\left(3\,x^5+7\right)$$

>$% with x = 2

$$\%at\left(\frac{d}{d\,x}\,\sin^2\left(3\,x^5+7\right), x=2\right)=480\,\cos 103\,\sin 103$$

>$float(%)

$$\%at\left(\frac{d^{1.0}}{d\,x^{1.0}}\,\sin^2\left(3.0\,x^5+7.0\right), x=2.0\right)=-233.9140567500984$$

>diff(f,2), diffc(f,2)

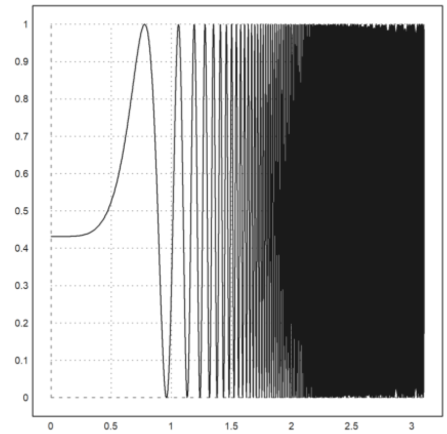
```
-233.913935807
-233.91405675
```

diff: Diferensiasi numerik yang pada dasarnya kurang akurat untuk fungsi umum.

diffc: Menghitung turunan pertama untuk fungsi analitik nyata dengan menggunakan bagian imajiner dari f(x+ih)/h. Cara ini memungkinkan untuk mengevaluasi f dengan lebih akurat.

>plot2d(f,0,3.1) :

Mencari turunan dari



Gambar 26: gambar 212

$$a(x) = 5cos(2x) - 2xsin(2x)$$

>function a(x) &=5*cos(2*x)-2*x*sin(2*x) // mendifinisikan fungsi a

```
5 cos(2 x) - 2 x sin(2 x)
```

>function da(x) &=diff(a(x),x); $da(x) // da(x) = a'(x)

$$-12 \sin(2\,x) - 4\,x\,\cos(2\,x)$$

>$'a(1)=a(1), $float(a(1)), $'a(2)=a(2), $float(a(2)) // nilai a(1) dan a(2)

$$-0.2410081230863468$$

>xp=solve("da(x)",1,2,0) // solusi a'(x)=0 pada interval [1, 2]

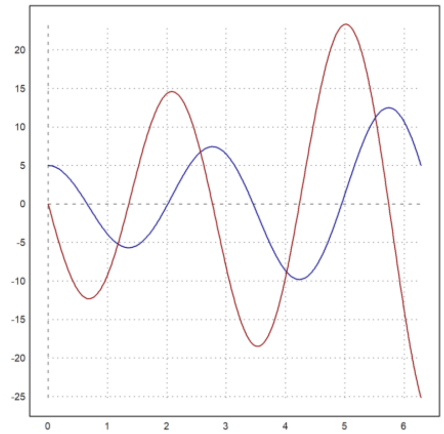
```
1.35822987384
```

>da(xp), a(xp) // cek bahwa a'(xp)=0 dan nilai ekstrim di titik tersebut

```
0
-5.67530133759
```

>plot2d(["a(x)","da(x)"],0,2*pi,color=[blue,red]): //grafik fungsi dan turunannya

Pada titik puncak grafik a(x), nilai turunan a'(x) akan selalu sama dengan nol. Ini karena gradien garis singgung pada titik puncak adalah nol.



Gambar 27: gambar 217

18 Turunan fungsi logaritma

Mencari turunan dari

$$f(x) = log(x)$$

>$showev('limit((log(x+h)- log(x))/h,h,0)) // turunan log(x)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{x}$$

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{log(x+h) - logx}{h}$$

ingat bahwa

$$log(a) - log(b) = log(\frac{a}{b})$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{log(\frac{x+h}{x})}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{log(1 + \frac{h}{x})}{h}$$

misalkan h/x = n sehingga h=nx

$$f'(x) = \lim_{n\to 0} \frac{log(1+n)}{nx}$$

$$f'(x) = \lim_{n\to 0} \frac{1}{nx} \cdot log(1+n)$$

ingat bahwa

$$alogb = logb^a$$

$$f'(x) = \lim_{n\to 0} \frac{1}{x} \cdot log(1+n)^{\frac{1}{n}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} log \lim_{n\to 0} (1+n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to 0} (1+n)^{\frac{1}{n}} = e$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} loge$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

>$showev('limit((log((x+h)/(x)))/h,h,0))//definisi logaritma

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \frac{1}{x}$$

>$showev('limit(((h/x))/h,h,0))//menggunakan identitas logaritma, sisanya adalah hasil turunan

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

Turunan fungsi eksponensial
Mencari turunan dari

$$f(x) = e^x$$

>$showev('limit((E$^{(x+h)-E}$x)/h,h,0)) // turunan f(x)=eˆx

```
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Maxima is asking
Acceptable answers are: yes, y, Y, no, n, N, unknown, uk
Is x an integer?

Use assume!
Error in:
$showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x ...
                                    ^
```

Maxima bermasalah dengan limit:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h}.$$

Oleh karena itu diperlukan trik khusus agar hasilnya benar.
>$showev('factor(E^(x+h)-E^x))

$$\mathit{factor}\left(e^{x+h}-e^x\right)=\left(e^h-1\right)\,e^x$$

>$showev('limit(factor((E^(x+h)-E^x)/h),h,0)) // turunan f(x)=e^x

$$\left(\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h}\right)\,e^x=e^x$$

>$showev('limit((E^h-1)/h,h,0))

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h}=1$$

Sifat- sifat Turunan

1. Jika f(x)=k dengan k suatu konstanta maka untuk sebarang x, f'x = 0

   Bukti:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

2. Jika f(x)=x, maka f'(x)=1
   Bukti:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

3. Jika k suatu konstanta dan f suatu fungsi yang terdiferensialkan, maka (kf)'(x)= kf'(x)
   Bukti:
   Andaikan F(x) = kf(x), maka

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{kf(x+h)-kf(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}k\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=k\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=kf'(x)$$

4. Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensial, maka (f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)
   Bukti:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) + g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} [\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

5. Andaikan f dan g adalah fungsi yang dapat didiferensialkan,
   maka (fg)‘(x)=f’(x)g(x)+ f(x)g’(x)
   Bukti:
   Andaikan F(x)=f(x)g(x)

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} [f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x) + g(x)f(x+h) - f(x)}{h}]$$

$$= \lim_{h \to 0} f(x+h) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

6. Andaikan f dan g adalah fungsi yang dapat didiferensialkan
   dengan g(x)tidak sama dengan 0, maka:

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Bukti:
Andaikan F(x)=f(x)/g(x)

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} \frac{1}{g(x)g(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} [\frac{g(x)f(x+h) - g(x)f(x) + g(x)f(x) - f(x)g(x+h)}{h} \frac{1}{g(x)g(x+h)}]$$

$$= \lim_{h\to 0}[g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}]\frac{1}{g(x)g(x+h)}$$
$$= [g(x)f'(x) - f(x)g'(x)]\frac{1}{g(x)g(x)}$$
$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Aplikasi turunan

1. Persamaan gerak suatu partikel dinyatakan dengan rumus

$$s = f(t) = (3t+1)^{\frac{1}{2}}$$

(s dalam meter dan t dalam detik).
Kecepatan partikel tersebut pada saat t=8 adalah ... m/detik.
Penyelesaian:
>function f(t) &= (3*t+1)^(1/2); $f(t)

$$\sqrt{3\,t+1}$$

>function df(t) &= diff(f(t),t); $df(t)

$$\frac{3}{2\,\sqrt{3\,t+1}}$$

>$df(8); fraction %

$$\frac{3}{10}$$

Jadi, kecepatan partikel tersebut pada saat t=8 adalah 0,3 m/detik

2. Sebuah pabrik baju memerlukan x meter kain untuk diproduksi yang dinyatakan dengan fungsi:

$$P(x) = \frac{1}{3}x^2 - 12x + 150$$

(dalam juta rupiah).
Berapa biaya produksi minimum yang dikeluarkan oleh pabrik baju tersebut?
Penyelesaian:
>function P(x) &= (1/3)*x^2-12*x+150; $P(x)

$$\frac{x^2}{3} - 12\,x + 150$$

>function dP(x) &= diff(P(x),x); $dP(x)

$$\frac{2x}{3} - 12$$

P(x) akan bernilai minimum jika P'(x)=0, maka:
>$dP(x)=0

$$\frac{2x}{3} - 12 = 0$$

>$&solve(dP(x),x)

$$[x = 18]$$

>P(18)

```
42
```

Jadi, biaya produksi minimum yang dikeluarkan oleh pabrik tersebut adalah 42 juta rupiah.

3. Sebuah peluru ditembakkan ke atas. Jika tinggi h meter setelah t detik dirumuskan dengan

$$h(t) = 120t - 5t^2$$

maka berapa tinggi maksimum yang dicapai peluru tersebut?
Penyelesaian:
Diketahui:

$$h(t) = 120t - 5t^2$$

Turunan pertama fungsi h adalah
>function h(t) &= 120*t-5*t^2; $h(t)

$$120\,t - 5\,t^2$$

>function dh(t) &= diff(h(t),t); $dh(t)

$$120 - 10\,t$$

Ketinggian maksimum yang dapat dicapai peluru saat t=12, yaitu
>$h(12)

$$720$$

Soal-soal Latihan

1. Cari f'(4) dari fungsi

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x}$$

>function f(x) &= (2*x -1)/(x^2-x); $f(x)

$$\frac{2\,x-1}{x^2-x}$$

>function df(x) &= diff(f(x), x); $df(x)

$$\frac{2}{x^2-x}-\frac{\left(2\,x-1\right)^2}{\left(x^2-x\right)^2}$$

>$df(4)

2. Cari turunan dari

$$g(x) = x^2.sin(x)$$

>function g(x) &= x^2*sin(x)

```
 2
x  sin(x)
```

>function dg(x) &= diff (g(x), x)

```
                 2
2 x sin(x) + x  cos(x)
```

3. Cari turunan dari

$$(4x-7)^2(2x+3)$$

>function f(x) &= (4*x-7)^2*(2*x+3); $f(x)

$$\left(2\,x+3\right)\,\left(4\,x-7\right)^2$$

>function df(x) &= diff(f(x), x); $df(x)

$$2\,\left(4\,x-7\right)^2+8\,\left(2\,x+3\right)\,\left(4\,x-7\right)$$

>F &= expand(df(x))|simplify; $F

$$96\,x^2-128\,x-70$$

4. Temukan turunan dari

$$f(x) = ln(x^3 + 3x - 4)$$

>function f(x) &= ln(x^3+3*x-4); $f(x)

$$\log\left(x^3 + 3\,x - 4\right)$$

>$showev('diff(f(x),x))

$$\frac{d}{d\,x}\,\log\left(x^3 + 3\,x - 4\right) = \frac{3\,x^2 + 3}{x^3 + 3\,x - 4}$$

5. Tentukan turunan dari

$$f(x) = cos(5x) + sin(2x)$$

>function f(x) &= cos(5*x)+sin(2*x); $f(x)

$$\cos\left(5\,x\right) + \sin\left(2\,x\right)$$

>$showev('diff(f(x),x))

$$\frac{d}{d\,x}\,\left(\cos\left(5\,x\right) + \sin\left(2\,x\right)\right) = 2\,\cos\left(2\,x\right) - 5\,\sin\left(5\,x\right)$$

6. Sebuah kembang api diluncurkan ke udara. Ketinggian kembang api h=(t) (dalam meter) pada t sekon dimodelkan dengan

$$f(t) = 16t^2 + 200t + 4$$

Tentukan kecepatan luncur kembang api saat t= 3 sekon.
Penyelesaian:
>function f(t) &= 16*t^2+200*t+4; $f(t)

$$16\,t^2 + 200\,t + 4$$

>function df(t) &= diff(f(t),t); $df(t)

$$32\,t + 200$$

>$df(3); fraction %

$$296$$

jadi, kecepatan kembang api saat t=3 adalah 296 m/s

19 4. Integral Tak Tentu

EMT dapat digunakan untuk menghitung integral, baik integral tak tentu maupun integral tentu.

Pada notebook ini akan ditunjukkan perhitungan integral tentu dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus:

Fungsi untuk menentukan integral adalah integrate. Fungsi ini dapat digunakan untuk menentukan, baik integral tentu maupun tak tentu (jika fungsinya memiliki antiderivatif).

20 CAKUPAN PEMBAHASAN

Definisi

Cara menulis integral pada EMT

Sifat-sifat

Rumus

Kurva

21 DEFINISI

Integral Tak Tentu adalah bentuk integral yang variabel integrasinya tidak memiliki batas sehingga integrasi dari sebuah fungsi akan menghasilkan banyak kemungkinan dan hanya dinyatakan sebagai penyelesaian umum. Istilah tak tentu berarti bentuk fungsi F(x) memuat konstanta real sebarang.

Misalkan diketahui suatu fungsi F(x) yang merupakan fungsi umum yang memiliki sifat F'(x)=f(x), maka integral tak tentu merupakan himpunan anti turunan F(x) dari f(x) pada interval negatif tak hingga sampai positif tak hingga yang dinotasikan :

$$F(x) = \int f(x)dx + c$$

MENULIS INTEGRAL PADA LATEX

Untuk menulis dengan Latex menggunakan fungsi $\int$

$$f(x) = \int x^3 dx$$

$$\int 15x^7 dx$$

$$\int x^4 dx$$

$$\int 7x^3 dx$$

$$\int 5xdx$$

SIFAT INTEGRAL TAK TENTU

1. Sifat Pangkat

   Jika n adalah sembarang bilangan rasional kecuali -1, maka integral tak tentu dari xˆn ditulis :

$$\int x^n dx + c = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Contoh:

$$\int x^2 dx + c = \frac{x^{2+1}}{2+1} + c = \frac{x^3}{3} + c$$

2. Penjumlahan dan Pengurangan

$$\int [g(x) + f(x)]dx = \int g(x)dx + \int f(x)dx$$

$$\int [x^2 + 4x]dx = \int x^2 dx + \int 4xdx$$

$$\int [g(x) - f(x)]dx = \int g(x)dx - \int f(x)dx$$

$$\int [x^7 - 3x]dx = \int x^7 dx - \int 3xdx$$

3. Perkalian

Bayangkan f(x) dan g(x) adalah dua fungsi yang bisa kita hitung integral tak tentu (artinya kita mencari antiturunannya), dan anggap k adalah suatu angka tetap (konstanta). Maka aturannya berlaku:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

$$\int 4x^2 dx = 4 \int x^2 dx$$

RUMUS INTEGRAL TAK TENTU

Integral tak tentu berarti nilai atau batasannya belum pasti, sehingga ada nilai konstanta(c) di dalamnya. Jadi rumus dasar integral tak tentu adalah :

>$showev('integrate(xˆn,x)+c)

```
Answering "Is n equal to -1?" with "no"
```

$$\int x^n \, dx + c = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

>$showev('integrate(xˆ-1,x)+c)

$$\int \frac{1}{x} \, dx + c = \log x + c$$

Integral dari fungsi

$$f(x) = x^{-1}$$

menghasilkan fungsi ln karena berasal dari teorema kalkulus

22 KURVA FUNGSI INTEGRAL/ANTITURUNAN

Kurva fungsi antiturunan adalah kurva yang menggambarkan hubungan antara suatu fungsi dan antiturunannya. Antiturunan, juga dikenal sebagai integral.

Jangan lupa untuk menuliskan terhadap variabel apa suatu fungsi tersebut diintegralkan

1. kurva antiturunan dari fungsi aljabar

$$f(x) = 4x^3 dx$$

>$showev('integrate(4*xˆ3,x)+c)

$$4 \int x^3 \, dx + c = x^4 + c$$

>plot2d([“4*x$^{3”,”}$x4”,“x$^{4+1”,”}$x4+2”,“xˆ4+3”]):

2. kurva antiderivatif fungsi trigonometri dengan

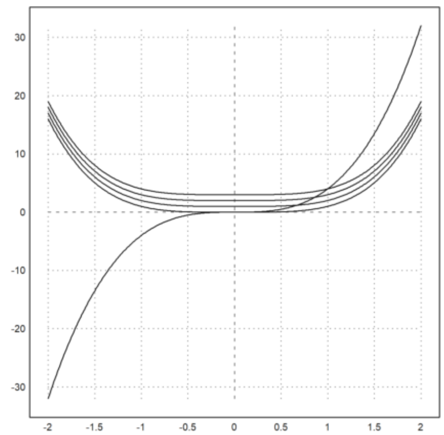
$$f(x) = cos(x)$$

>$showev('integrate(cos(x),x)+c)

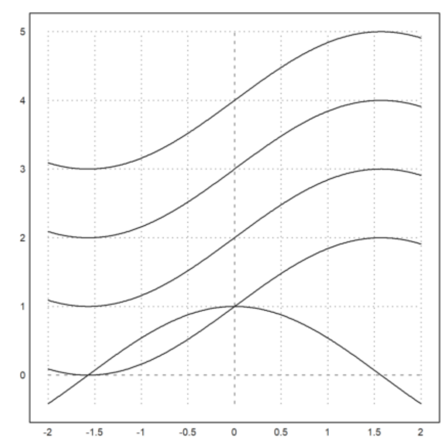
$$\int \cos x \, dx + c = \sin x + c$$

>plot2d([“cos(x)”,“sin(x)+1”,“sin(x)+2”,“sin(x)+3”,“sin(x)+4”]):

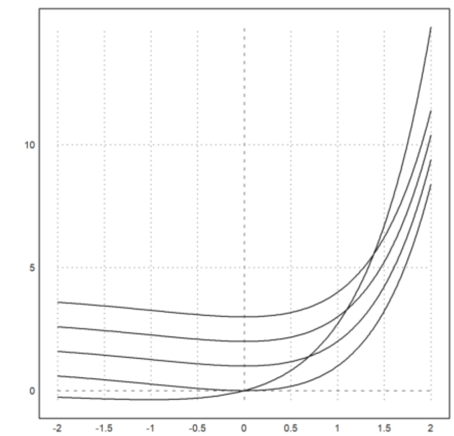
3. kurva antiderivatif dari fungsi eksponensial dengan



Gambar 28: gambar 312



Gambar 29: gambar 315



Gambar 30: gambar 318

$$f(x) = xe^x$$

>$showev('integrate(x*Eˆx,x)+c)

$$\int x\,e^x\,dx + c = (x-1)\,e^x + c$$

>plot2d([“x*E$^{\text{x”,”(x-1)E}}$x+1”,“(x-1)E$^{\text{x+2”,”(x-1)E}}$x+3”,“(x-1)Eˆx+4”]):

4. kurva antiderivatif dari fungsi logaritma dengan

$$f(x) = log(4x)$$

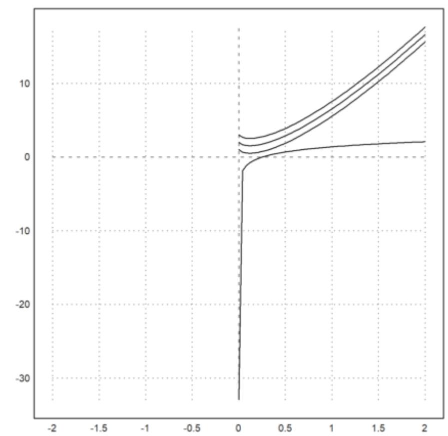
>$showev('integrate(log(4*x),x)+c)

$$\int \log\left(4\,x\right)\,dx + c = \frac{4\,x\,\log\left(4\,x\right) - 4\,x}{4} + c$$

>plot2d([“log(4*x)”,“(4*x)log(4*x)-4*x/4 +1”,“(4*x)log(4*x)-4*x/4 +2”,“(4*x)log(4*x)-4*x/4 +3”]):

23 LATIHAN SOAL

1. Tuliskan integral tak tentu dari fungsi aljabar berikut serta buatlah grafiknya :



Gambar 31: gambar 321

$$f(x) = x^5$$

> $showev('integrate(xˆ5,x)+c)

$$\int x^5 \, dx + c = \frac{x^6}{6} + c$$

>plot2d([“x$^{5”,”x}$6/6”,“x$^{6/6+1”,”x}$6/6+2”,“xˆ6/6+3”]):

2. tentukan integral tak tentu dari fungsi aljabar berikut :

$$f(x) = 9x^2$$

>$showev('integrate(9*xˆ2,x)+c)

$$9 \int x^2 \, dx + c = 3\,x^3 + c$$

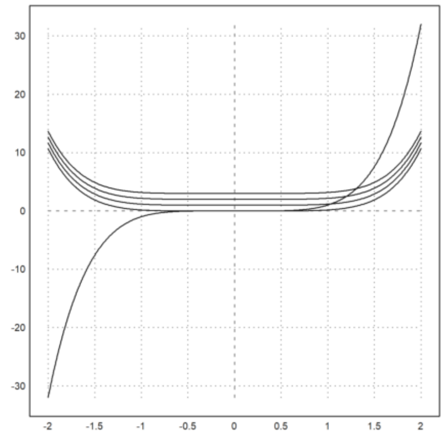
3. tentukan integral tak tentu dari fungsi trigonometri berikut :

$$f(x) = 2sinx$$

>$showev('integrate(2*sin(x),x)+c)

$$2 \int \sin x \, dx + c = c - 2\, \cos x$$

4. tentukan integral tak tentu dari fungsi trigonometri berikut :



Gambar 32: gambar 324

$$f(x) = sinx - cosx$$

>$showev('integrate(sin(x)-cos(x),x)+c)

$$\int \sin x - \cos x \, dx + c = -\sin x - \cos x + c$$

5. Tentukan integral tak tentu dari fungsi eksponensial berikut :

$$f(x) = xe^x$$

>$showev('integrate(x*E^x,x)+c)

$$\int x\, e^x \, dx + c = (x-1)\, e^x + c$$

6. Tentukan integral tak tentu dari fungsi

$$\int \frac{\sin(x)}{x} \, dx$$

>$showev('integrate(sin(x)/x, x)+c)

$$\int \frac{\sin x}{x} \, dx + c = c - \frac{i\, gamma\_\_incomplete\,(0, i\, x) - i\, gamma\_\_incomplete\,(0, -i\, x)}{2}$$

Jawaban dari integral tersebut melibatkan fungsi gamma tidak lengkap (incomplete gamma function) dengan bilangan kompleks. Hasil ini muncul karena fungsi dari

$$\frac{sin(x)}{x}$$

tidak memiliki antiturunan dalam bentuk fungsi elementer, sehingga pada software Euler Mat Toolbox mengembalikan solusi dalam bentuk fungsi khusus yang lebih umum, seperti fungsi gamma tidak lengkap dalam kasus ini.

24 5. Integral Tentu

25 Pengertian Integral Tentu

Kata “tentu” di sini bermakna sudah pasti atau sudah ditentukan. Oleh karena itu, Integral tentu adalah integral yang sudah ditentukan batasan nilai awal dan akhirnya. Batas dari integral tentu adalah a sampai b atau batas atas sampai batas bawah.

26 Rumus Integral Tentu

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a), \quad dengan F'(x) = f(x).$$

Contoh:
carilah

$$\int_0^\pi sin(x)\ dx$$

>$showev('integrate(sin(x),x,a,b))

$$\int_a^b \sin x\ dx = \cos a - \cos b$$

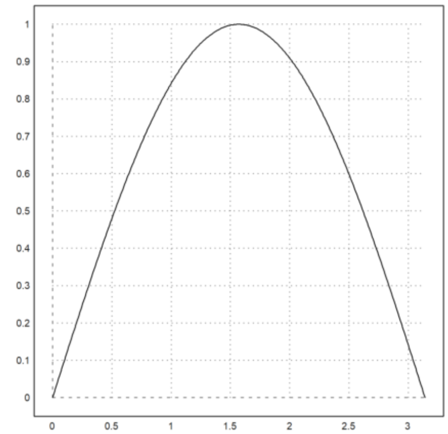
>$showev('integrate(sin(x),x,0,pi))

$$\int_0^\pi \sin x\ dx = 2$$

>plot2d(“sin(x)”,0,pi):
Carilah

$$\int_0^2 x^2\sqrt{2x+1}dx$$

>$showev('integrate(xˆ2*sqrt(2*x+1),x))



Gambar 33: gambar 340

$$\int x^2\,\sqrt{2\,x+1}\,dx=\frac{(2\,x+1)^{\frac{7}{2}}}{28}-\frac{(2\,x+1)^{\frac{5}{2}}}{10}+\frac{(2\,x+1)^{\frac{3}{2}}}{12}$$

>$showev('integrate(xˆ2*sqrt(2*x+1),x,0,2))

$$\int_{0}^{2}x^2\,\sqrt{2\,x+1}\,dx=\frac{2\,5^{\frac{5}{2}}}{21}-\frac{2}{105}$$

>$ratsimp(%)

$$\int_{0}^{2}x^2\,\sqrt{2\,x+1}\,dx=\frac{2\,5^{\frac{7}{2}}-2}{105}$$

>$showev('integrate((sin(sqrt(x)+a)*E$^{\text{sqrt(x))/sqrt(x),x,0,pi}}$2))

$$\int_{0}^{\pi^2}\frac{\sin\left(\sqrt{x}+a\right)\,e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\left(-e^{\pi}-1\right)\,\sin a+\left(e^{\pi}+1\right)\,\cos a$$

>$factor(%)

$$\int_{0}^{\pi^2}\frac{\sin\left(\sqrt{x}+a\right)\,e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\left(-e^{\pi}-1\right)\,\left(\sin a-\cos a\right)$$

>function map f(x) &= E$^{\text{(-x}}$2)

```
         2
      - x
     E
```

images/Aplikom#Kalkulus_Sabilla Hanifah Nur Jihada_23030630012-350.png

Gambar 34: gambar 350

>$showev('integrate(f(x),x))

$$\int e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\left(x\right)}{2}$$

Fungsi f tidak memiliki antiturunan, integralnya masih memuat integral lain.

$$erf(x)=\int \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\,dx.$$

Kita tidak dapat menggunakan teorema Dasar kalkulus untuk menghitung integral tentu fungsi tersebut jika semua batasnya berhingga. Dalam hal ini dapat digunakan metode numerik (rumus kuadratur).

Misalkan kita akan menghitung:

$$\int_0^{\pi} e^{-x^2}\,dx$$

>x=0:0.1:pi-0.1; plot2d(x,f(x+0.1),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):

Integral tentu

$$\int_0^{\pi} e^{-x^2}\,dx$$

dapat dihampiri dengan jumlah luas persegi-persegi panjang di bawah kurva y=f(x) tersebut. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

>t &= makelist(a,a,0,pi-0.1,0.1);

mendefinisikan t sebagai list untuk menyimpan nilai-nilai x

>fx &= makelist(f(t[i]+0.1),i,1,length(t));

simpan nilai-nilai f(x) dan jangan menggunakan x sebagai list

images/Aplikom#Kalkulus_Sabilla Hanifah Nur Jihada_23030630012-353.png

Gambar 35: gambar 353

Hasilnya adalah:

$$\int_{0}^{\pi}e^{-x^2}\,dx=0.1950839272901491$$

Jumlah tersebut diperoleh dari hasil kali lebar sub-subinterval (=0.1) dan jumlah nilai-nilai f(x) untuk x = 0.1, 0.2, 0.3, . . . , 3.2.

>0.1*sum(f(x+0.1))

```
0.836219610253
```

Untuk mendapatkan nilai integral tentu yang mendekati nilai sebenarnya, lebar sub-intervalnya dapat diperkecil lagi, sehingga daerah di bawah kurva tertutup semuanya, misalnya dapat digunakan lebar subinterval 0.001.

>x=0:0.001:pi-0.1; plot2d(x,f(x+0.1),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):

Berikut adalah contoh lain fungsi yang tidak memiliki antiderivatif, sehingga integral tentunya hanya dapat dihitung dengan metode numerik.

>function f(x) &= xˆx

```
 x
x
```

>$showev('integrate(f(x),x,0,1))

$$\int_{0}^{1}x^{x}\,dx=\int_{0}^{1}x^{x}\,dx$$

>x=0:0.1:1-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):

Karena maxima gagal menghitung integral tentu tersebut secara langsung menggunakan perintah integrate. Untuk mendapat hasil atau pendekatan nilai integral tentu tersebut kita lakukan seperti contoh sebelumnya.

images/Aplikom#Kalkulus_Sabilla Hanifah Nur Jihada_23030630012-355.png

Gambar 36: gambar 355

>t &= makelist(a,a,0,1-0.01,0.01);
>fx &= makelist(f(t[i]+0.01),i,1,length(t));

$$\int_0^1 x^x \, dx = 0.7834935879025506$$

>function f(x) &= sin(3*x$^{5+7)}$2; $f(x)

$$\sin^2\left(3\,x^5+7\right)$$

>integrate(f,0,1)

```
0.542581176074
```

27 Sifat - Sifat Integral Tentu

1. Linearitas

sifat 1: Jika c adalah konstanta, maka:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

Sifat 2: Jika f(x) dan g(x) adalah dua fungsi yang terintegralkan pada interval [a, b], maka:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

2. Interval
   Sifat 3: Jika a < c < b, maka:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

3. Fungsi Genap dan Ganjil
   Fungsi Genap: Jika f(x) adalah fungsi genap (yaitu, f(-x) = f(x)), maka:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

   Fungsi Ganjil: Jika f(x) adalah fungsi ganjil (yaitu, f(-x) = -f(x)), maka:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

4. Batas Integral Bertukar

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Aplikasi Integral Tentu

28 Aplikasi Integral Tentu pada Panjang Kurva

Sebuah jalan tol memiliki bentuk lengkungan yang dapat dimodelkan dengan persamaan y = xˆ2 dari titik x = 0 hingga x = 2 (dalam kilometer). Berapakah panjang jalan tol tersebut

Penyelesaian:

$$s = \int_0^2 \sqrt{1+(2x)^2} dxolmemilikibentuklengkunganyangdapatdimodelkandenganpersamaany = x^2 darititikx$$

Penyelesaian:

$$s = \int_0^2 \sqrt{1+(2x)^2} dx$$

>$showev('integrate(sqrt(1 + (2*x)ˆ2),x,0,2))

$$\int_0^2 \sqrt{4\,x^2+1}\;dx = \frac{\operatorname{asinh} 4 + 4\,\sqrt{17}}{4}$$

>$float(%)

$$\int_{0.0}^{2.0} \sqrt{4.0\,x^2+1.0}\;dx = 4.646783762432936$$

images/Aplikom#Kalkulus_Sabilla Hanifah Nur Jihada_23030630012-370.png

Gambar 37: gambar 370

Hitunglah panjang kurva berikut ini dan luas daerah di dalam kurva tersebut.

$$\gamma(t) = (r(t)\cos(t), r(t)\sin(t))$$

dengan

$$r(t) = 1 + \sin(3t)2, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

>t=linspace(0,2pi,1000); r=1+sin(3*t)/2; x=r*cos(t); y=r*sin(t); . . .
> plot2d(x,y,>filled,fillcolor=red,style="/",r=1.5):
>function r(t) &= 1+sin(3*t)/2; $'r(t)

$r\,([0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.1, 0.11, 0.12, 0.13, 0.14, 0.15, 0.16, 0.17, 0.18, 0.19, 0.2, 0.21,$

>function fx(t) &= r(t)*cos(t); $'fx(t)=fx(t)

$fx\,([0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.1, 0.11, 0.12, 0.13, 0.14, 0.15, 0.16, 0.17, 0.18, 0.19, 0.2, 0.21$

>function fy(t) &= r(t)*sin(t); $'fy(t)=fy(t)

$fy\,([0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.1, 0.11, 0.12, 0.13, 0.14, 0.15, 0.16, 0.17, 0.18, 0.19, 0.2, 0.21$

>function ds(t) &= trigreduce(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)$^{2+\mathrm{diff(fy(t),t)}}$2))); $'ds(t)=ds(t)

$$ds\,(t) = \sqrt{\left(\frac{d}{d\,t}\,fy\,(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,t}\,fx\,(t)\right)^2}$$

>$integrate(ds(x),x,0,2*pi) //panjang (keliling) kurva

$$\int_{0}^{2\,\pi}\sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,fy\left(x\right)\right)^2+\left(\frac{d}{d\,x}\,fx\left(x\right)\right)^2}\,dx$$

Spiral Logaritmik

>a=0.1; plot2d("exp(a*x)*cos(x)","exp(a*x)*sin(x)",r=2,xmin=0,xmax=2*pi)

>&kill(a) // hapus expresi a

```
done
```

>function fx(t) &= exp(a*t)*cos(t); $'fx(t)=fx(t)

$$fx\left(t\right)=e^{a\,t}\,\cos t$$

>function fy(t) &= exp(a*t)*sin(t); $'fy(t)=fy(t)

$$fy\left(t\right)=e^{a\,t}\,\sin t$$

>function df(t) &= trigreduce(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)$^{2+\text{diff(fy(t),t)}}$2))); $'df(t)=df(t)

$$df\left(t\right)=\sqrt{a^2+1}\,e^{a\,t}$$

>S &=integrate(df(t),t,0,2*%pi); $S // panjang kurva (spiral)

$$\sqrt{a^2+1}\,\left(\frac{e^{2\,\pi\,a}}{a}-\frac{1}{a}\right)$$

>S(a=0.1) // Panjang kurva untuk a=0.1

```
8.78817491636
```

Soal:

Tunjukkan bahwa keliling lingkaran dengan jari-jari r adalah K=2.pi.r.

Penyelesaian:

Lingkaran dalam Koordinat Kartesius: Kita dapat merepresentasikan suatu lingkaran dengan pusat di titik asal (0,0) dan jari-jari r dengan persamaan parametrik berikut:

$$x(t) = r\cos(t)$$

$$y(t) = r\sin(t)$$

di mana t adalah parameter yang bervariasi dari 0 hingga 2p.

Panjang Kurva Parametrik: Panjang kurva parametrik (x(t), y(t)) dari t=a hingga t=b dapat dihitung dengan integral:

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

1. Mencari Turunan

$$x(t) = r\cos(t)$$

>&showev('diff(r*cos(t),t))

```
d
-- (r cos(t)) = - r sin(t)
dt
```

>&showev('diff(r*sin(t),t))

```
d
-- (r sin(t)) = r cos(t)
dt
```

2. Substitusi ke Rumus Panjang Kurva:

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin(t))^2 + (r\cos(t))^2 dt}$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\sin^2(t) + \cos^2(t))dt}$$

Karena

$$sin^2(t) + cos^2(t) = 1,$$

maka:

$$s = \int_0^{2\pi} rdt$$

3. Integral

$$s = r\int_0^{2\pi} dt = r[t]_0^{2\pi} = r(2p - 0) = 2\pi r$$

Berikut adalah contoh menghitung panjang parabola.

>plot2d("xˆ2",xmin=-1,xmax=1):

>$showev('integrate(sqrt(1+diff($x^{2,x)}$2),x,-1,1))

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{4\,x^2 + 1}\,dx = \frac{\operatorname{asinh} 2 + 2\sqrt{5}}{2}$$

>$float(%)

$$\int_{-1.0}^{1.0} \sqrt{4.0\,x^2 + 1.0}\,dx = 2.957885715089195$$

>x=-1:0.2:1; y=xˆ2; plot2d(x,y); ...
> plot2d(x,y,points=1,style="o#",add=1):

Panjang tersebut dapat dihampiri dengan menggunakan jumlah panjang ruas-ruas garis yang menghubungkan titik-titik pada parabola tersebut.

>i=1:cols(x)-1; sum(sqrt((x[i+1]-x[i])$^{2+(y[i+1]-y[i])}$2))

```
2.95191957027
```

Hasilnya mendekati panjang yang dihitung secara eksak. Untuk mendapatkan hampiran yang cukup akurat, jarak antar titik dapat diperkecil, misalnya 0.1, 0.05, 0.01, dan seterusnya. Cobalah Anda ulangi perhitungannya dengan nilai-nilai tersebut.

images/Aplikom#Kalkulus_Sabilla Hanifah Nur Jihada_23030630012-389.png

Gambar 38: gambar 389

images/Aplikom#Kalkulus_Sabilla Hanifah Nur Jihada_23030630012-392.png

Gambar 39: gambar 392

images/Aplikom#Kalkulus_Sabilla Hanifah Nur Jihada_23030630012-395.png

Gambar 40: gambar 395

29 Koordinat Kartesius

Berikut diberikan contoh perhitungan panjang kurva menggunakan koordinat Kartesius. Kita akan hitung panjang kurva dengan persamaan implisit:

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

>z &= x^{3+y}3-3*x*y; $z

$$y^3 - 3\,x\,y + x^3$$

>plot2d(z,r=2,level=0,n=100):

Kita tertarik pada kurva di kuadran pertama.

>plot2d(z,a=0,b=2,c=0,d=2,level=[-10;0],n=100,contourwidth=3,style="/"):

Kita selesaikan persamaannya untuk x.

>$z with y=l*x, sol &= solve(%,x); $sol

$$\left[x = \frac{3\,l}{l^3 + 1}, x = 0\right]$$

Kita gunakan solusi tersebut untuk mendefinisikan fungsi dengan Maxima.

>function f(l) &= rhs(sol[1]); $'f(l)=f(l)

$$f\left(l\right) = \frac{3\,l}{l^3 + 1}$$

Fungsi tersebut juga dapat digunaka untuk menggambar kurvanya. Ingat, bahwa fungsi tersebut adalah nilai x dan nilai y=l*x, yakni x=f(l) dan y=l*f(l).

>plot2d(&f(x),&x*f(x),xmin=-0.5,xmax=2,a=0,b=2,c=0,d=2,r=1.5):

Elemen panjang kurva adalah:

images/Aplikom#Kalkulus_Sabilla Hanifah Nur Jihada_23030630012-396.png

Gambar 41: gambar 396

Gambar 42: images/Aplikom#Kalkulus_Sabilla%20Hanifah%20Nur%20Jihada_23030630012-400.png

$$ds = \sqrt{f'(l)^2 + (l f'(l) + f(l))^2}.$$

>function ds(l) &= ratsimp(sqrt(diff(f(l),l)$^{2+\text{diff(l*f(l),l)}}$2)); $'ds(l)=ds(l)

$$ds\left(l\right) = \frac{\sqrt{9\,l^8+36\,l^6-36\,l^5-36\,l^3+36\,l^2+9}}{\sqrt{l^{12}+4\,l^9+6\,l^6+4\,l^3+1}}$$

>$integrate(ds(l),l,0,1)

$$\int_{0}^{1}{\frac{\sqrt{9\,l^8+36\,l^6-36\,l^5-36\,l^3+36\,l^2+9}}{\sqrt{l^{12}+4\,l^9+6\,l^6+4\,l^3+1}}\;dl}$$

Integral tersebut tidak dapat dihitung secara eksak menggunakan Maxima. Kita hitung integral etrsebut secara numerik dengan Euler. Karena kurva simetris, kita hitung untuk nilai variabel integrasi dari 0 sampai 1, kemudian hasilnya dikalikan 2.

>2*integrate("ds(x)",0,1)

```
4.91748872168
```

>2*romberg(&ds(x),0,1)// perintah Euler lain untuk menghitung nilai hampiran integral

```
4.91748872168
```

images/Aplikom#Kalkulus_Sabilla Hanifah Nur Jihada_23030630012-404.png

Gambar 43: gambar 404

Perhitungan di datas dapat dilakukan untuk sebarang fungsi x dan y dengan mendefinisikan fungsi EMT, misalnya kita beri nama panjangkurva. Fungsi ini selalu memanggil Maxima untuk menurunkan fungsi yang diberikan.

>function panjangkurva(fx,fy,a,b) ...

```
$ds=mxm("sqrt(diff(@fx,x)^2+diff(@fy,x)^2)");
return romberg(ds,a,b);
$endfunction
```

>panjangkurva("x","x^2",-1,1)

```
2.95788571509
```

Bandingkan dengan nilai eksak di atas.

>2*panjangkurva(mxm("f(x)"),mxm("x*f(x)"),0,1)

```
4.91748872168
```

Kita hitung panjang spiral Archimides berikut ini dengan fungsi tersebut.

>plot2d("x*cos(x)","x*sin(x)",xmin=0,xmax=2*pi,square=1):

>panjangkurva("x*cos(x)","x*sin(x)",0,2*pi)

```
21.2562941482
```

Berikut kita definisikan fungsi yang sama namun dengan Maxima, untuk perhitungan eksak.

>&kill(ds,x,fx,fy)

```
done
```

images/Aplikom#Kalkulus_Sabilla Hanifah Nur Jihada_23030630012-408.png

Gambar 44: gambar 408

>function ds(fx,fy) &&= sqrt(diff(fx,x)$^{2+\mathrm{diff(fy,x)}}$2)

```
                    2                2
        sqrt(diff (fy, x) + diff (fx, x))
```

>sol &= ds(x*cos(x),x*sin(x)); $sol

$$\sqrt{\left(\cos x-x\,\sin x\right)^2+\left(\sin x+x\,\cos x\right)^2}$$

>$sol | trigreduce | expand, $integrate(%,x,0,2*pi), %()

$$\frac{\mathrm{asinh}\;\left(2\,\pi\right)+2\,\pi\,\sqrt{4\,\pi^2+1}}{2}$$

```
21.2562941482
```

Hasilnya sama dengan perhitungan menggunakan fungsi EMT.
Berikut adalah contoh lain penggunaan fungsi Maxima tersebut.
>plot2d("3*x$^{2\text{-}1","3*x}$3-1",xmin=-1/sqrt(3),xmax=1/sqrt(3),square=1):
>sol &= radcan(ds(3*x$^{2\text{-}1,3*x}$3-1)); $sol

$$3\,x\,\sqrt{9\,x^2+4}$$

>$showev('integrate(sol,x,0,1/sqrt(3))), $2*float(%) // panjang kurva di atas

$$6.0\,\int_{0.0}^{0.5773502691896258}{x\,\sqrt{9.0\,x^2+4.0}\;dx}=2.337835372767141$$

30 Sikloid

Berikut kita akan menghitung panjang kurva lintasan (sikloid) suatu titik pada lingkaran yang berputar ke kanan pada permukaan datar. Misalkan jari-jari lingkaran tersebut adalah r. Posisi titik pusat lingkaran pada saat t adalah:

$$(rt, r).$$

Misalkan posisi titik pada lingkaran tersebut mula-mula (0,0) dan posisinya pada saat t adalah:

$$(r(t - \sin(t)), r(1 - \cos(t))).$$

Berikut kita plot lintasan tersebut dan beberapa posisi lingkaran ketika t=0, t=pi/2, t=r*pi.

>function x &= r*(t-sin(t))

```
r (t - sin(t))
```

>function y &= r*(1-cos(t))

```
r (1 - cos(t))
```

Berikut kita gambar sikloid untuk r=1.

>ex &= x-sin(x); ey &= 1-cos(x); aspect(1);

>plot2d(ex,ey,xmin=0,xmax=4pi,square=1); ...
> plot2d("2+cos(x)","1+sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue); ...
> plot2d([2,ex(2)],[1,ey(2)],color=red,>add); ...
> plot2d(ex(2),ey(2),>points,>add,color=red); ...
> plot2d("2pi+cos(x)","1+sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue); ...
> plot2d([2pi,ex(2pi)],[1,ey(2pi)],color=red,>add); ...
> plot2d(ex(2pi),ey(2pi),>points,>add,color=red):

>ds &= radcan(sqrt(diff(ex,x)$^{2+\text{diff(ey,x)}}$2)); $ds=trigsimp(ds)

$$\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\cos x + 1} = \sqrt{2 - 2\cos x}$$

>ds &= trigsimp(ds); $ds

$$\sqrt{2 - 2\cos x}$$

>$showev('integrate(ds,x,0,2*pi))

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos x}\, dx = 8$$

>integrate(mxm("ds"),0,2*pi) // hitung secara numerik

```
8
```

images/Aplikom#Kalkulus_Sabilla Hanifah Nur Jihada_23030630012-414.png

Gambar 45: gambar 414

images/Aplikom#Kalkulus_Sabilla Hanifah Nur Jihada_23030630012-419.png

Gambar 46: gambar 419

Perhatikan, seperti terlihat pada gambar, panjang sikloid lebih besar daripada keliling lingkarannya, yakni:

$$2\pi.$$

Kurvatur (Kelengkungan) Kurva
Aslinya, kelengkungan kurva diferensiabel (yakni, kurva mulus yang tidak lancip) di titik P didefinisikan melalui lingkaran oskulasi (yaitu, lingkaran yang melalui titik P dan terbaik memperkirakan, paling banyak menyinggung kurva di sekitar P). Pusat dan radius kelengkungan kurva di P adalah pusat dan radius lingkaran oskulasi. Kelengkungan adalah kebalikan dari radius kelengkungan:

$$\kappa = \frac{1}{R}$$

dengan R adalah radius kelengkungan. (Setiap lingkaran memiliki kelengkungan ini pada setiap titiknya, dapat diartikan, setiap lingkaran berputar 2pi sejauh 2piR.)

Definisi ini sulit dimanipulasi dan dinyatakan ke dalam rumus untuk kurva umum. Oleh karena itu digunakan definisi lain yang ekivalen.

6. Barisan dan Deret

Barisan adalah susunan bilangan yang memiliki pola atau karakteristik tertentu, sedangkan deret adalah hasil penjumlahan dari anggota-anggota dalam barian tertentu.

Barisan dapat didefinisikan dengan beberapa cara di dalam EMT, di antaranya:

- menggunakan titik dua ":", sama seperti saat mendefinisikan vektor dengan elemen-elemen beraturan
- menggunakan perintah "sequence" dan rumus barisan (suku ke -n);
- menggunakan perintah "iterate" atau "niterate";
- menggunakan fungsi Maxima "create_list" atau "makelist" untuk menghasilkan barisan simbolik;
- menggunakan fungsi biasa yang inputnya vektor atau barisan;
- menggunakan fungsi rekursif.

EMT menyediakan beberapa perintah (fungsi) terkait barisan, yakni:

- sum: menghitung jumlah semua elemen suatu barisan
- cumsum: jumlah kumulatif suatu barisan
- differences: selisih antar elemen-elemen berturutan

EMT juga dapat digunakan untuk menghitung jumlah deret berhingga maupun deret tak hingga, dengan menggunakan perintah (fungsi) "sum". Perhitungan dapat dilakukan secara numerik maupun simbolik dan eksak.

Contoh perhitungan barisan dan deret menggunakan EMT.

31 Menggunakan titik dua

>1:15

```
[1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10,  11,  12,  13,  14,  15]
```

>1:3:30

```
[1,  4,  7,  10,  13,  16,  19,  22,  25,  28]
```

>sum(1:3:30)

```
145
```

>cumsum(1:3:30)

```
[1,  5,  12,  22,  35,  51,  70,  92,  117,  145]
```

32 Menggunakan perintah "sequence" dan rumus barisan (suku ke -n)

Untuk barisan yang lebih kompleks dapat digunakan fungsi "sequence()". Fungsi ini menghitung nilai-nilai x[n] dari semua nilai sebelumnya, x[1],...,x[n-1] yang diketahui.

Berikut adalah contoh barisan Fibonacci.

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1$$

>sequence("x[n-1]+x[n-2]",[1,1],15) //suku ke satu :1, suku ke dua :1

```
[1,  1,  2,  3,  5,  8,  13,  21,  34,  55,  89,  144,  233,  377,  610]
```

>plot2d(sequence("x[n-1]+x[n-2]",[1,1],15)):
>sequence("x[n-1]+x[n-2]",[1,1],15)ˆ(1/(1:15))

```
[1,  1,  1.25992,  1.31607,  1.37973,  1.41421,  1.44256,  1.46311,
1.47967,  1.49292,  1.50389,  1.51309,  1.52091,  1.52765,  1.53352]
```

>plot2d(sequence("x[n-1]+x[n-2]",[1,1],15)ˆ(1/(1:15))):

33 Menggunakan perintah "iterate" atau "niterate"

Dalam ilmu matematika, iterasi dapat diartikan sebagai proses atau metode yang digunakan secara berulang-ulang (pengulangan) dalam menyelesaikan permasalahan matematik.

EMT menyediakan fungsi iterate("g(x)", x0, n) untuk melakukan iterasi

images/Aplikom#Kalkulus_Sabilla Hanifah Nur Jihada_23030630012-422.png

Gambar 47: gambar 422

images/Aplikom#Kalkulus_Sabilla Hanifah Nur Jihada_23030630012-423.png

Gambar 48: gambar 423

$$x_{k+1} = g(x_k),\ x_0 = x_0, k = 1, 2, 3, ..., n.$$

Berikut contoh penggunaan iterasi

Menunjukkan pertumbuhan dari nilai awal 1000 dengan laju pertambahan 5%, selama 10 periode.

>q=1.05; iterate("x*q",1000,n=10)'

```
   1000
   1050
 1102.5
1157.63
1215.51
1276.28
 1340.1
 1407.1
1477.46
1551.33
1628.89
```

34 Spiral Theodorus

konstruksi segitiga siku-siku yang berkesinambungan menjadi spiral atau dalam kata lain sebuah spiral yang dibangun dari segitiga siku-siku yang berurutan. Setiap segitiga siku-siku yang baru dibuat dengan menghubungkan sisi miring segitiga sebelumnya dengan sisi alas yang panjangnya 1 satuan.

Spiral Theodorus (spiral segitiga siku-siku) dapat digambar secara rekursif. Rumus rekursifnya adalah:

$$x_n = \left(1 + \frac{i}{\sqrt{n-1}}\right) x_{n-1}, \quad x_1 = 1,$$

yang menghasilkan barisan bilangan kompleks.

>function g(n) := 1+I/sqrt(n)

Rekursinya dapat dijalankan sebanyak 17 untuk menghasilkan barisan 17 bilangan kompleks, kemudian digambar bilangan-bilangan kompleksnya.

>x=sequence("g(n-1)*x[n-1]",1,17); plot2d(x,r=3.5);. . .
> textbox(latex("Spiral\ Theodorus"),0.4):

Selanjutnya dihubungan titik 0 dengan titik-titik kompleks tersebut menggunakan loop.

>for i=1:cols(x); plot2d([0,x[i]],>add); end:

>function gstep (v) . . .

```
w=[-v[2];v[1]];
return v+w/norm(w);
endfunction
```

>x=iterate("gstep",[1;0],16); plot2d(x[1],x[2],r=3.5,>points):

images/Aplikom#Kalkulus_Sabilla Hanifah Nur Jihada_23030630012-426.png

Gambar 49: gambar 426

images/Aplikom#Kalkulus_Sabilla Hanifah Nur Jihada_23030630012-427.png

Gambar 50: gambar 427

$$\sqrt{x} + y^2 + 2xz$$

Gambar 51: gambar 448

35 Limit Barisan

Limit barisan melambangkan nilai mutlak untuk bilangan riil dan nilai modulus untuk bilangan kompleks.

Definisi formal:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k \in N : (\forall n \in N, n \geq k|x_n - L| < \varepsilon)$$

Dapat dinotasikan sebagai

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L$$

Contoh:

1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

>$showev('limit(1/n,n,inf))

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 5}$$

>$showev('limit((2*n$^{2-1)/(n}$2+5),n,inf))

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\,n^2 - 1}{n^2 + 5} = 2$$

Kekonvergenan

Iterasi sampai konvergen merupakan proses yang terus berulang sampai mendapat nilai yang stabil atau tidak berubah secara signifikan. Tetapi, apabila iterasinya tidak konvergen setelah ditunggu lama, Kita dapat menghentikannya dengan menekan tombol [ESC].

>iterate("cos(x)",1) // iterasi x(n+1)=cos(x(n)), dengan x(0)=1.

```
0.739085133216
```

Iterasi tersebut konvergen ke penyelesaian persamaan

$$x = \cos(x).$$

Iterasi ini juga dapat dilakukan pada interval, hasilnya adalah barisan interval yang memuat akar tersebut.

>hasil := iterate("cos(x)",$_{1,2}$) //iterasi x(n+1)=cos(x(n)), dengan interval awal (1, 2)

```
~0.739085133211,0.7390851332133~
```

Jika interval hasil tersebut sedikit diperlebar, akan terlihat bahwa interval tersebut memuat akar persamaan x=cos(x).

>h=expand(hasil,100), cos(h) << h

```
~0.73908513309,0.73908513333~
1
```

Iterasi juga dapat digunakan pada fungsi yang didefinisikan.

Variable Iterasi not found!

>function f(x) := (x+2/x)/2

Iterasi x(n+1)=f(x(n)) akan konvergen ke akar kuadrat 2.

>iterate("f",2), sqrt(2)

```
1.41421356237
1.41421356237
```

36 Deret Taylor

Deret Taylor suatu fungsi f yang diferensiabel sampai tak hingga di sekitar x=a adalah:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k f^{(k)}(a)}{k!}.$$

Diberikan contoh fungsi exponensial yang didekati dengan Deret Taylor

>$'e^x =taylor(exp(x),x,0,10)

$$e^x = \frac{x^{10}}{3628800} + \frac{x^9}{362880} + \frac{x^8}{40320} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

Menghitung exp(x) untuk x=4 yang di potong pada k=10

>x := 4; k := 10; hasil := round(exp(x),k)

```
54.5981500331
```

Bukti :

$$e^x = \frac{(x)^{10}}{(3628800)} + \frac{(x)^9}{(362880)} + \frac{(x)^8}{(40320)} + \frac{(x)^7}{(5040)} + \frac{(x)^6}{(720)} + \frac{(x)^5}{(120)} + \frac{(x)^4}{(24)} + \frac{(x)^3}{(6)} + \frac{(x)^2}{(2)} + x + 1$$

untuk x=4

$$e^4 = \frac{(4)^{10}}{(3628800)} + \frac{(4)^9}{(362880)} + \frac{(4)^8}{(40320)} + \frac{(4)^7}{(5040)} + \frac{(4)^6}{(720)} + \frac{(4)^5}{(120)} + \frac{(4)^4}{(24)} + \frac{(4)^3}{(6)} + \frac{(4)^2}{(2)} + 4 + 1$$

$$e^4 = \frac{(4)^{10}}{(3628800)} + \frac{(4)^9}{(362880)} + \frac{(4)^8}{(40320)} + \frac{(4)^7}{(5040)} + \frac{(4)^6}{(720)} + \frac{(4)^5}{(120)} + \frac{(4)^4}{(24)} + \frac{(4)^3}{(6)} + \frac{(4)^2}{(2)} + 5$$

$$e^4 = 54,4431$$

Soal Latihan

1.Tentukan barisan bilangan dengan a=5, beda tiap sukunya 3, dan rentang sampai 25 !

>(5:3:25)

```
[5,  8,  11,  14,  17,  20,  23]
```

2. Tentukan jumlah seluruh elemen dan jumlah kumulatif dari barisan bilangan no 1 !

>sum(5:3:25)

```
98
```

>cumsum(5:3:25)

```
[5,  13,  24,  38,  55,  75,  98]
```

3. Hitunglah limit barisan dari

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{4x+1}{x}}$$

>$showev('limit((5*x^2+1)/(x),x,inf))

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5\,x^2+1}{x} = \infty$$

4. Buatlah deret taylor log(x) di sekitar x=1 yang dipotong pada k=3

>$'log(x)=taylor(log(x),x,1,3)

$$\log x = x + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^2}{2} - 1$$

5. Buatlah barisan kompleks dengan X1=1 dan X2=2 sebanyak 10 suku

>sequence("x[n-1]+x[n-2]",[1,2],10) //suku ke satu :1, suku ke dua :1

```
[1,  2,  3,  5,  8,  13,  21,  34,  55,  89]
```

37 7. Fungsi Multivariabel

Fungsi multivariabel adalah sebuah konsep dalam matematika yang menggambarkan hubungan antara satu variabel output dengan dua atau lebih variabel input. Berbeda dengan fungsi satu variabel yang hanya melibatkan satu variabel bebas, fungsi multivariabel melibatkan beberapa variabel bebas yang secara bersama-sama menentukan nilai dari variabel terikat. Fungsi multivariabel biasanya digunakan untuk menggambarkan hubungan yang kompleks dalam bidang seperti fisika, ekonomi, teknik, dan berbagai ilmu lainnya.

Secara umum, jika f adalah sebuah fungsi multivariabel, maka bentuk umumnya dapat dinyatakan sebagai:

$$z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

dimana x1,x2,. . . ,xn adalah variabel bebas (input) menunjukkan jumlah variabel dan z adalah variable terikat (output).

contoh :

Luas Persegi Panjang: Luas persegi panjang (L) adalah fungsi dari panjang (p) dan lebar (l). Kita dapat menuliskannya sebagai L(p, l) = p * l. Di sini, L adalah variabel terikat, sedangkan p dan l adalah variabel bebas.

Diberikan fungsi:

$$x^2 + 2xy + y^2$$

>function f(x,y) &= xˆ2 + 2*x*y + yˆ2

```
 2             2
y  + 2 x y + x
```

diff(f,x): Bagian ini untuk menghitung turunan numerik.

f: Merupakan representasi dari fungsi yang ingin kita turunkan. Fungsi ini bisa berupa fungsi anonim, fungsi yang telah didefinisikan sebelumnya, atau bahkan persamaan matematika yang kompleks.

x: Menunjukkan variabel terhadap mana kita akan menurunan fungsi f. Artinya, kita akan mencari laju perubahan fungsi f terhadap perubahan nilai x.

&=: mendefinikan fungsi, seperti yang sudah dijelaskan kemarin

>fx &= diff(f(x,y),x)

```
2 y + 2 x
```

ini merupakan fungsi simbolik jadi harus didefinisikan dengan &=

>fy &= diff(f(x,y),y)

```
2 y + 2 x
```

>plot3d("f", -2,2, -2,2) :

menggunakan fungsi f yang telah didefinisikan di atas.

38 Turunan fungsi multivariabel

Diberikan fungsi:

$$\sqrt{x} + y^2 + 2xz$$

>function f(x,y,z)&= sqrt(x)+yˆ2+2*x*z

$$\frac{2\,\sin^2 x\,\sin z}{\left(\cos z+\sin x\right)^2}$$

Gambar 52: gambar 453

```
                  2
2 x z + y  + sqrt(x)
```

>fx &= diff(f(x,y,z),x)

```
             1
2 z + ---------
      2 sqrt(x)
```

>fy &= diff(f(x,y,z),y)

```
2 y
```

>fz &= diff(f(x,y,z),z)

```
2 x
```

1. Diberikan fungsi

$$x^3+4y^2-3x+2$$

>function g(x,y) &= x^{3+4*y}2-3*x+2

```
   2    3
4 y  + x  - 3 x + 2
```

menentukan dg/dx
>gx &= diff(g(x,y),x)

```
   2
3 x  - 3
```

menentukan dg/dy
>gy &= diff(g(x,y),y)

```
8 y
```

>grad &= [diff(g(x,y),x), diff(g(x,y),y)]

```
      2
[3 x  - 3, 8 y]
```

2. Contoh Trigonometri

Diberikan fungsi:

$$\frac{2sin(x)^2}{sin(x)+cos(x)}+tan(y)^3$$

>function f(x,y,z)&= 2*sin(x)$^{2/(\sin(x)+\cos(z))+\tan(y)}$3

```
         2
   2 sin (x)        3
--------------- + tan (y)
cos(z) + sin(x)
```

>$fx := diff(f(x,y,z),x)

$$\frac{4\cos x\sin x}{\cos z+\sin x}-\frac{2\cos x\sin^2 x}{(\cos z+\sin x)^2}$$

>$fy := diff(f(x,y,z),y)

$$3\sec^2 y\tan^2 y$$

>$fz := diff(f(x,y,z),z)

$$\frac{2\sin^2 x\sin z}{(\cos z+\sin x)^2}$$

Grafik

Grafik fungsi multivariabel adalah representasi visual dari fungsi yang memiliki dua atau lebih variabel input. Untuk fungsi dua variabel $f(x,y)$, grafiknya berupa permukaan dalam ruang tiga dimensi.

Bidang z = 2x + 3y

>plot3d("2*x + 3*y", -2,2, -2,2):

>title("Kontur z = 2x + 3y"):

Paraboloid

>plot3d("x^2 + y^2", -8,2, -8,2):

Hyperbolic Paraboloid

>plot3d("x^2 - y^2", -2,2, -2,2):

>plot3d("sin(x)*cos(y)", -pi,pi, -pi,pi):

>plot3d("sin(sqrt(x^2 + y^2))", -4*pi,4*pi, -4*pi,4*pi):

>plot3d("sin(x)*sin(y)", -pi,pi, -pi,pi):

>plot3d("exp(-x^{2-y}2)", -2,2, -2,2):

Distribusi normal bivariat

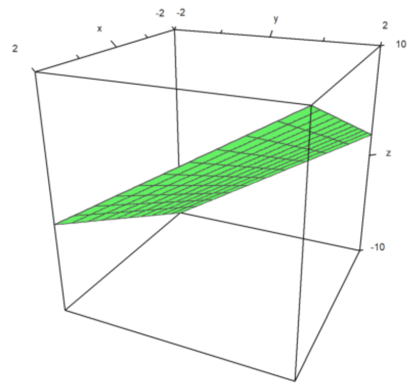
>plot3d("(1/(2*pi))*exp(-(x^{2+y}2)/2)", 1,3, 1,3)

>title("Distribusi Normal Bivariat"):

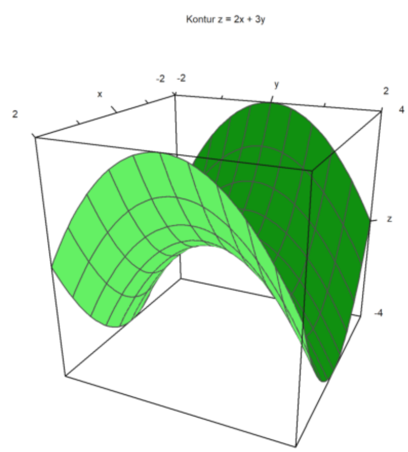
Potensial elektrostatik

>plot3d("1/sqrt(x^{2+y}2+1)", -1,3, -1,3)

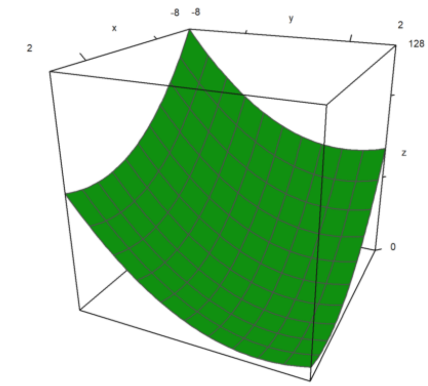
>title("Potensial Elektrostatik"):



Gambar 53: gambar 454



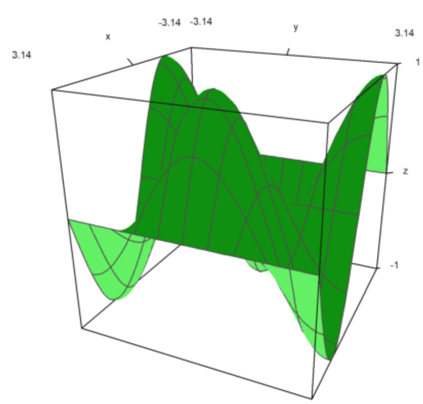
Gambar 54: gambar 455



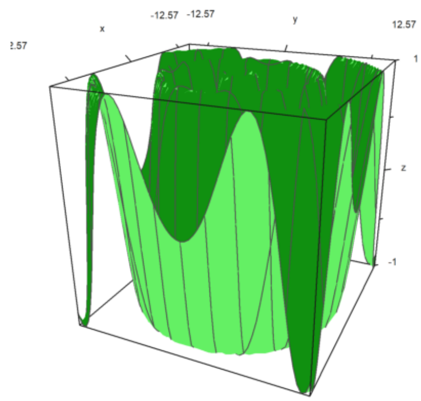
Gambar 55: gambar 456

$$-\frac{\int_{0}^{2} 3\,y-1\,dy}{3}=-\frac{4}{3}$$

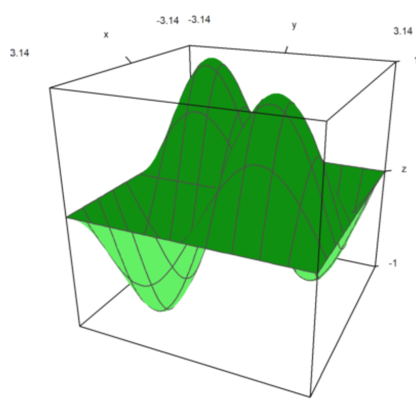
Gambar 56: gambar 457



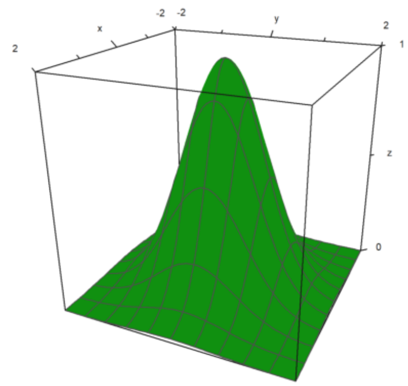
Gambar 57: gambar 458



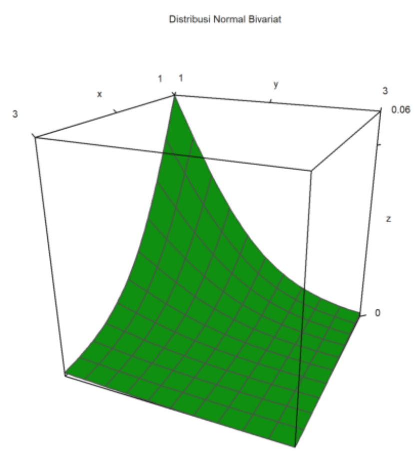
Gambar 58: gambar 459



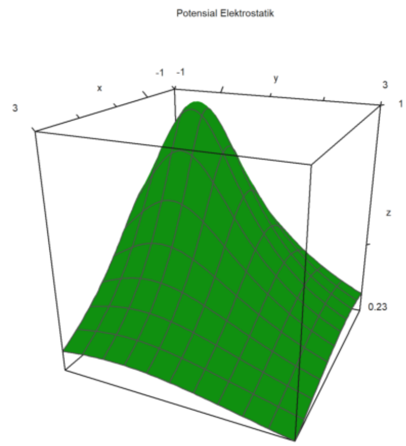
Gambar 59: gambar 460



Gambar 60: gambar 461



Gambar 61: gambar 462



Gambar 62: gambar 463

39 Turunan

Turunan fungsi multivariabel merupakan perluasan konsep turunan dari fungsi satu variabel ke fungsi dengan dua atau lebih variabel.

menghitung turunan parsial

>f &= xˆ4 + 6*x*y + yˆ3

```
 3            4
y  + 6 x y + x
```

>plot3d("xˆ4 + 6*x*y + yˆ3", -5.2, -5.2):

>f &= xˆ2 + yˆ2

```
 2    2
y  + x
```

>grad &= [diff(f,x), diff(f,y)]

```
[2 x, 2 y]
```

Turunan berarah dalam arah u=(1/v2, 1/v2)

>Dir &= grad[1]/sqrt(2) + grad[2]/sqrt(2)

```
sqrt(2) y + sqrt(2) x
```

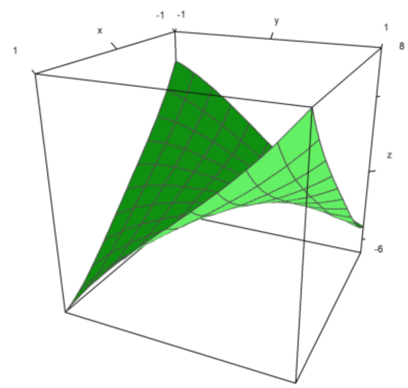
Menghitung turunan parsial kedua

>f &= xˆ7 + 3*x*y + yˆ4

```
 4            7
y  + 3 x y + x
```

>fxy &= diff(diff(f,x),y)

```
3
```



Gambar 63: gambar 464

40 Integral

Integral fungsi multivariabel adalah perluasan konsep integral dari fungsi satu variabel ke fungsi dengan dua atau lebih variabel.

Contoh sederhana integral lipat dua

>$showev ('integrate(integrate(xˆ2 + yˆ2, x, 0, 1), y, 0, 2))

$$\frac{\int_0^2 3\,y^2+1\,dy}{3}=\frac{10}{3}$$

Hasil dari integral ganda ini akan memberikan nilai total area di

bawah permukaan fungsi

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

di daerah persegi yang ditentukan.

>$showev('integrate(integrate(3*xˆ2*y - 2*x*yˆ2, x, 0, 1), y, 1, 2))

$$\int_1^2 y-y^2\,dy=-\frac{5}{6}$$

Contoh ini menunjukkan bagaimana integral ganda bekerja pada fungsi multivariabel.

1. Integral Ganda Fungsi Eksponensial

>$showev('integrate(integrate(exp(x) * exp(y), x, 0, 1), y, 0, 2))

$$\int_0^2 e^{y+1}-e^y\,dy=e^3-e^2-e+1$$

2. Integral Ganda Fungsi Trigonometri
   >$showev('integrate(integrate(sin(x) * cos(y), x, 0, pi), y, 0, pi/2))

$$2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}{\cos y\;dy}=2$$

3. Integral Ganda Fungsi Kuadrat
   >$showev('integrate(integrate(xˆ2 + yˆ2, x, 0, 2), y, 1, 3))

$$\frac{\int_{1}^{3}{6\,y^2+8\;dy}}{3}=\frac{68}{3}$$

4. Integral Ganda Fungsi Campuran
   >$showev('integrate(integrate(x * yˆ2 - 3*x*y, x, 0, 2), y, 1, 2))

$$\int_{1}^{2}{2\,y^2-6\,y\;dy}=-\frac{13}{3}$$

5. Integral Ganda Fungsi Logaritma
   >$showev('integrate(integrate(log(x+1) + log(y+1), x, 0, 1), y, 0, 2))

$$\int_{0}^{2}{\log \left(y+1\right)+2\,\log 2-1\;dy}=3\,\log 3+4\,\log 2-4$$

Aplikasi Fungsi Multivariabel

1. Misalkan medan listrik di suatu daerah diberikan oleh

$$E(x,y) = x^2 - y$$

Hitung fluks medan listrik melalui permukaan persegi panjang [0,1]×[0,2]!
>$showev('integrate(integrate(xˆ2 - y, x, 0, 1), y, 0, 2))

$$-\frac{\int_{0}^{2}{3\,y-1\;dy}}{3}=-\frac{4}{3}$$