Семинар 20 (14.02.2023)

Краткое содержание

Новая тема — квадратичные формы. Если на векторном пространстве V задана билинейная форма β, то функция $Q_\beta(x) = \beta(x,x)$ называется квадратичной формой, ассоциированной с билинейной формой β. Если $B = (b_{ij})$ — матрица билинейной формы β в каком-либо базисе $\mathbb{e} = (e_1, dots, e_n)$, то в координатах в этом же базисе получаем

$$Q_\beta(x) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (b_{ij} + b_{ji})x_i x_j. \tag{1}$$

Отображение $\beta \mapsto Q_\beta$ из множества билинейных форм на V в множество квадратичных форм на V является сюръективным, однако оно не инъективно: одно и то же значение суммы $b_{ij} + b_{ji}$ может получаться при различных значениях слагаемых. Как было показано на лекциях, если ограничить данное отображение на множество симметричных билинейных форм, то тогда оно станет биективным (при условии, что $1 + 1 \neq 0$ в поле F). Таким образом, имеется естественное взаимно однозначное соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами.

В обозначениях выше, если билинейная форма симметрична (то есть $b_{ij} = b_{ji}$ при всех i,j), то формула (1) принимает вид

$$Q_\beta(x) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2b_{ij}x_i x_j.$$

Отсюда видно, что по квадратичной форме легко выписывается матрица соответствующей ей симметричной билинейной формы (только не забывайте про коэффициент 2 в слагаемых вида $2b_{ij}x_ix_j$ при $i \neq j$!). Эта матрица и называется матрицей квадратичной формы в рассматриваемом базисе. Пример: матрица квадратичной формы $x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2$ есть $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Далее поговорили про канонический вид квадратичной формы и про способы его нахождения. Ранее упомянутый симметричный метод Гаусса можно использовать для приведения к каноническому виду, вдобавок этот метод дает еще и матрицу перехода от старого базиса к новому.

Еще один метод, приводящий к каноническому виду — метод Якоби: если $\delta_1, \ldots, \delta_n$ — угловые миноры матрицы квадратичной формы и все они отличны от нуля, то квадратичную форму можно привести к каноническому виду $\delta_1 x_1^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1}x_2^2 + \ dots + \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}x_n^2$. Упомянули, что на самом деле метод Якоби работает и в случае $\delta_n = 0$ (но все остальные угловые миноры по-прежнему должны быть отличны от нуля!). Применили метод Якоби к нахождению канонического вида квадратичной формы из П1175. Дальше обсудили, что если из этой квадратичной формы выкинуть слагаемое x_1^2, то к новой квадратичной форме метод Якоби неприменим, однако он станет применимым, если занумеровать переменные в обратном порядке. В общем случае можно попробовать придумать какую-то промежуточную замену координат, и это возможно поможет вам избежать нулей в минорах и применить метод.

В конце поговорили про нормальный вид квадратичной формы над полем $\mathbb{R}$ и обсудили, как перейти от канонического вида к нормальному. В случае метода Гаусса приведение к нормальному виду заключается в применениях симметричных элементарных преобразований третьего вида.

♡

Домашнее задание к семинару 21. Дедлайн 21.02.2023

Номера с пометкой П даны по задачнику Проскурякова, с пометкой К – Кострикина.

В обоих задачниках координаты векторов из $\mathbb{R}^n$ всегда записываются в строчку через запятую, однако нужно помнить, что мы всегда записываем эти координаты в столбец.

1. К38.15(а,б) («функция» = «форма»)

2. К38.16(а,б) («функция» = «форма»)
3. Определите нормальный вид квадратичной формы из номера П1176.
4. Тот же вопрос для номера П1177.
5. Приведите квадратичную форму из номера П1181 к нормальному виду, выпишите полученный нормальный вид и базис, в котором этот вид принимается, а также соответствующую замену координат (выражение старых координат через новые).
6. Выясните, к каким из квадратичных форм номеров П1176, П1177, П1181 применим метод Якоби, и в каждом случае применимости найдите с его помощью нормальный вид соответствующей квадратичной формы.
7. Приведите квадратичную форму $x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_3$ к нормальному виду, выпишите полученный нормальный вид и базис, в котором этот вид принимается, а также соответствующую замену координат (выражение старых координат через новые).
8. Тот же вопрос для номера П1185.

♡