Семинар 4 (27.09.2022)

Краткое содержание

Обсудили задачу интерполяции: даны $n+1$ попарно различных точек $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ и набор чисел $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Требуется найти многочлен $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ такой, чтобы $f(x_i) = y_i \;\; \forall i = 1 \ldots n$. Обратите внимание, что количество точек на единицу больше, чем степень многочлена и совпадает с количеством коэффициентов у многочлена. Условия $y_i = f(x_i)$ дают СЛУ вида

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Такая система в случае разных x_i имеет единственное решение. Также была показана явная конструкция построения такого многочлена через интерполяционные многочлены Лагранжа:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i l_i(x), \quad l_i(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

Дальше поговорили, как оптимизировать решение большого количества СЛУ $Ax = b_1, Ax = b_2, \ldots Ax = b_s$ с одной и той же матрицей коэффициентов. Их не нужно решать по отдельности, часть вычислений можно провести одновременно, выполняя элементарные преобразования строк в матрице $(A \mid B)$, где B состалена из столбцов $b_1, b_2, \ldots, b_s$. После приведения матрицы A к улучшенному ступенчатому виду уже можно выполнять дальнейший анализ (сводящийся к выписыванию ответа) каждой из систем по отдельности.

Затем рассмотрели очень похожую, но другую ситуацию: дана матрица коэффициентов A, и нам нужно решать большое количество систем вида $Ax = b$, где столбцы b к нам поступают в режиме реального времени (их полный список неизвестен). В этом случае удобно заранее «запомнить», каким образом матрица A приводится к улучшенному ступенчатому виду. Для этого вспомним, что каждое элементарное преобразование строк матрицы реализуется при помощи умножения слева на соответственную «элементарную» матрицу. Тогда если A приводится к улучшенному ступенчатому виду A' при помощи элементарных преобразований, соответствующих умножению слева на матрицы $U_1, \ldots, U_k$, то $A' = U_k \ldots U_1 A$. Если обозначить $U = U_k \ldots U_1$, то любая система $Ax = b$ после умножения слева на U переходит в эквивалентную систему $A'x = Ub$. Таким образом, при поступлении очередного столбца b для решения системы $Ax = b$ достаточно вычислить Ub, и уже можно выписывать ответ. Для оптимального вычисления обеих матриц A' и U нужно записать матрицу $(A \mid E)$ и, выполняя в ней элементарные преобразования строк, привести A к улучшенному ступенчатому виду. Тогда справа от черты будет стоять U, то есть результирующая матрица как раз и будет $(A' \mid U)$. (Обратите внимание, что должно выполняться соотношение $UA = A'$.)

Дальше обсудили, что решение матричного уравнения вида $AX = B$ (где A, X, B имеют размеры $m \times n, n \times k, m \times k$ соответственно) эквивалентно решению k систем

$$AX^{(1)} = B^{(1)},\ AX^{(2)} = B^{(2)},\ \ldots,\ AX^{(k)} = B^{(k)}.$$

С учётом сказанного выше в этом случае для решения нужно составить матрицу $(A \mid B)$ и, выполняя в ней элементарные преобразования строк, привести A к улучшенному ступенчатому виду, из которого уже выписывается общее решение. Единственный нюанс: исходное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда разрешима каждая из систем $AX^{(i)} = B^{(i)}$. Проговорили, что матричное уравнение вида $YA = B$ при помощи транспонирования приводится к виду $A^T Y^T = B^T$, рассмотренному выше. Также упомянули, что уравнение вида $AXB = C$ надо решать в два этапа, сначала решая уравнение $YB = C$, а затем $AX = Y$.

Матрицей, обратной к данной матрице $A \in M_n$, называется такая матрица $B \in M_n$, что $AB = BA = E$. Обозначение: A^{-1}. Позже на лекциях будет доказано, что если обратная матрица существует, то она определена однозначно, и что из условия $AB = E$ автоматически следует $BA = E$. Последнее даёт практический способ нахождения обратной матрицы: она является решением матричного уравнения $AX = E$ (если решение существует). Для решения этого уравнения нужно взять матрицу $(A \mid E)$ и элементарными преобразованиями строк привести её к виду $(E \mid B)$, тогда $B = A^{-1}$. В связи с данным методом нахождения обратной матрицы обсудили, что если квадратная матрица $A \in M_n$ приведена к улучшенному ступенчатому виду A', то либо $A' = E$, либо последняя строка в A' нулевая. В первом случае матрица A обратима (как следует из алгоритма выше), а вот во втором – нет.

♡

Домашнее задание к семинару 5. Дедлайн 8.10.2022 23:59

Номера с пометкой П даны по задачнику Проскурякова, с пометкой К – Кострикина.

1. Найдите многочлен $P(x)$ степени не выше 3, для которого $P(-1) = -4, P(0) = 1, P(1) = 2, P(2) = 2$. Ответ упростите.
2. Найдите многочлен $P(x)$ степени не выше 3, для которого $P(1) = 3, P'(1) = 5, P'(-1) = -3, P''(-1) = 1$ (символы P', P'' обозначают соответственно первую и вторую производную многочлена P). Ответ упростите.
3. П863
4. П865
5. П868
6. П871
7. Для данной матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ найдите такую квадратную матрицу U, что матрица UA имеет улучшенный ступенчатый вид, а также выпишите этот вид.
8. П836, П837. Решить номера через метод Гаусса.
9. П842
10. Для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ найдите обратную матрицу, если она существует.
11. (бонус) Докажите, что если улучшенный ступенчатый вид квадратной матрицы A содержит нулевую строку, то A необратима. (Разрешается пользоваться только определением обратной матрицы, утверждением о ее единственности не разрешается.)

♡