Семинар 29 (10.05.2023)

Краткое содержание

Начали семинар с теоремы о приведении квадратичной формы к главным осям:

Для всякой квадратичной формы Q в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, в котором Q имеет канонический вид $Q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$; причём числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ определены однозначно с точностью до перестановки (они являются собственными значениями самосопряжённого линейного оператора, который в ортонормированном базисе имеет такую же матрицу, как и данная квадратичная форма).

Проговорили, что задача приведения квадратичной формы к главным осям эквивалентна задаче диагонализации (в ортонормированном базисе) самосопряжённого оператора и потому решается так же (а это мы разбирали на прошлом семинаре). Подробно разобрали номер П1251.

Новая тема: ортогональные операторы. Сформулировали определение и упомянули ещё 5 эквивалентных условий. Вывели, что среди действительных собственных значений ортогонального оператора могут быть только 1 или -1. Обсудили, какие бывают линейные операторы, которые одновременно являются ортогональными и самосопряжёнными.

Дальше проговорили теорему о каноническом виде ортогонального оператора. Важный частный случай этой теоремы — описание всех ортогональных операторов в трёхмерном евклидовом пространстве: всякий такой оператор — это либо поворот вокруг некоторой прямой, либо «зеркальный поворот» вокруг некоторой прямой. Обсудили алгоритм нахождения ортонормированного базиса, в котором матрица ортогонального оператора φ в $\mathbb{R}^3$ имеет канонический вид. Если A — матрица данного линейного оператора в исходном ортонормированном базисе, то поступать можно так:

(I) Если $A = A^T$, то оператор самосопряжён, и к нему можно применить известный алгоритм для самосопряжённого оператора. (Единственный нюанс — тут не надо считать характеристический многочлен, поскольку его корни мы и так знаем: это 1 и -1.)

(II) Если $A \neq A^T$, то оператор не самосопряжён, поэтому в каноническом виде один из блоков обязательно будет матрицей $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ поворота на угол α, не кратный πk. Вторым из блоков будет ± 1, поэтому одно из чисел 1 или -1 будет собственным значением для φ. Дальше делаем следующее.

1) Рассматривая матрицу $A - \lambda E$ при $\lambda = 1, -1$, находим то значение $\lambda = \lambda_0 \in \{\pm 1\}$, которое будет собственным для φ, а также соответствующий собственный вектор e_3 единичной длины.

2) Выбираем любой ортонормированный базис (e_1, e_2) в $e_3^\perp$, тогда (e_1, e_2, e_3) будет ортонормированным базисом, в котором φ имеет канонический вид. Осталось только найти этот вид.

3) Если α — угол поворота для φ, то $\varphi(e_1) = \cos\alpha \cdot e_1 + \sin\alpha \cdot e_2$ и тогда $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ находятся по формулам $\cos\alpha = (\varphi(e_1), e_1)$ и $\sin\alpha = (\varphi(e_1), e_2)$.

Полностью осуществили данный алгоритм для линейного оператора из номера П1574.

♡

Домашнее задание к семинару 30. Дедлайн 16.05.2023

Номера с пометкой П даны по задачнику Проскурякова, с пометкой К – Кострикина, с пометкой КК – Ким-Крицкова.

1. П1243

   В следующих трёх заданиях явно выписывайте искомую ортогональную замену координат (выражение старых координат через новые).

2. П1248
3. П1254
4. П1259
5. П1564

6. П1571
7. П1572
8. К46.6(к)
9. Ортогональный линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет каноничесакий вид, и выпишите эту матрицу. Укажите ось и угол поворота, определяемого оператором φ.

$\heartsuit$