Семинар 3 (23.09.2022)

Краткое содержание Повторили определение системы линейных уравнений (СЛУ) и разобрали число решений СЛУ в самом простом случае. Так,
$0 \cdot x = 1 \implies$ нет решений.
$1 \cdot x = 1 \implies$ 1 решение.
$0 \cdot x = 0 \implies \infty$ решений.
Разобрали элементарные преобразования строк матрицы и приведение матрицы к ступенчатому и улучшенному ступенчатому виду. Решили СЛУ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$. Привели ее к ул. ступ. виду $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 7/3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1 \end{array}\right)$. Столбцы со ступеньками соответствуют главным переменным. Если переписывать это на лад уравнения, получаем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \frac{7}{3}x_4 = 4, \\ x_3 + \frac{1}{3}x_4 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 4 - x_2 - \frac{7}{3}x_4, \\ x_3 = 1 - \frac{1}{3}x_4 \end{cases}$$

Можно заметить, что в каждом уравнении главная переменная только одна – x_1 в первом, x_3 во втором. И каждая главная переменная выражается через свободные переменные и свободные члены. Решение СЛУ можно записать в трех видах

- $x_2 = a \in \mathbb{R}, x_4 = b \in \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(4 - a - \frac{7}{3}b, a, 1 - \frac{1}{3}b, b\right)$
- $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 - \begin{pmatrix} 7/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} x_4$
- $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 - \begin{pmatrix} 7/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$

Поговорили про целочисленные матрицы и как упрощать себе жизнь и оставаться в целых числах, приводя их к ул. ступ. виду.
Поговорили про то, как в общем случае понять, сколько решений имеет СЛУ. После этого решили номер П88, чтобы закрепить усвоенное. Не успели дорешать, полное решение номера здесь:
$$\begin{cases} ax + 4y + z = 0, \\ 2y + 3z - 1 = 0, \\ 3x - bz + 2 = 0. \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} a & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -b & -2 \end{array}\right)$$
Хочу привести матрицу с ступенчатому виду. Для этого надо избавиться от a или от тройки в первом столбце. В любом случае придется делить на a. Рассмотрим случай, когда $a = 0$:
1. $a = 0$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -b & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -b & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -b & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \end{array}\right)$$
Привели к ступенчатому виду, где ступеньки есть на каждом столбце. Значит, все переменные, главные, свободных переменных нет. в конечном счете, когда мы приведем матрицу к ул. ступ. виду, все переменные будут однозначно выражаться через свободные члены. Значит при $a = 0, b \in R$ решение системы одно.
2. $a \neq 0$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -b & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4/a & 1/a & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -b & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4/a & 1/a & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -12/a & -b - 3/a & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & {}^4\!/_a & {}^1\!/_a & 0 \\ 0 & 1 & {}^3\!/_2 & {}^1\!/_2 \\ 0 & -{}^{12}\!/_a & -b - {}^3\!/_a & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & {}^4\!/_a & {}^1\!/_a & 0 \\ 0 & 1 & {}^3\!/_2 & {}^1\!/_2 \\ 0 & 0 & -b - {}^3\!/_a + {}^3\!/_2 \cdot {}^{12}\!/_a & -2 + {}^1\!/_2 \cdot {}^{12}\!/_a \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & {}^4\!/_a & {}^1\!/_a & 0 \\ 0 & 1 & {}^3\!/_2 & {}^1\!/_2 \\ 0 & 0 & -b - {}^{15}\!/_a & -2 + {}^6\!/_a \end{array}\right)$$

Число решений СЛУ зависит напрямую от двух чисел внизу в последней строчке в расширенной матрице. Обозначим $-b - {}^{15}\!/_a$ за M, $-2 + {}^6\!/_a$ за N. Надо понять, что

1. Если $M = 0, N = 0$, то СЛУ будет иметь бесконечное число решений.
2. Если $M = 0, N \neq 0$, то СЛУ решений иметь не будет.
3. Если $M \neq 0, N = 0$, то СЛУ будет иметь одно решение.

Можем решить простую систему уравнений на переменные a, b и понять, что

1. $M = 0, N = 0 \iff a = 3, b = 5$
2. $M = 0, N \neq 0 \iff a \in (-\infty, 3) \cup (3, +\infty), b = \frac{15}{a}$
3. $M \neq 0, N = 0 \iff$ все остальные пары a, b.

♡

Домашнее задание к семинару 4. Дедлайн 3.10.2022

Номера с пометкой П даны по задачнику Проскурякова, с пометкой К – Кострикина.

В заданиях 1. – 6. требуется решить СЛУ методом Гаусса.

1. П76
2. П83
3. П85
4. П567
5. П578
6. П580
7. Найдите число решений СЛУ из номера П89 в зависимости от значений параметров.
8. П715
9. П718
10. Докажите, что элементарное преобразование второго типа можно выразить через преобразования первого и третьего типов.
11. По мотивам обсуждения на семинаре про целочисленные вычисления в методе Гаусса. Докажите, что всякую целочисленную матрицу можно привести к ступенчатому виду целочисленными элементарными преобразованиями строк только первого типа.

♡