Семинар 22 (28.02.2023)

Краткое содержание

Начали с обсуждения понятия матрицы Грама системы векторов евклидова пространства и её свойств.

Следующий сюжет — определение квадратных матриц произвольного порядка, являющихся матрицами Грама каких-то систем векторов евклидова пространства.

Пусть $v_1, \ldots, v_k$ — некоторая система векторов евклидова пространства $\mathbb{E}$, и пусть G — её матрица Грама. Предположим, что векторы $v_1', \ldots, v_m' \in \mathbb{E}$ выражаются через $v_1, \ldots, v_k$; тогда можно записать $(v_1', \ldots, v_m') = (v_1, \ldots, v_k)C$ для некоторой матрицы $C \in \mathrm{Mat}_{k\times m}(\mathbb{R})$. Показали, что матрица Грама системы $v_1', \ldots, v_m'$ равна C^TGC. Применили полученный результат для доказательства следующей теоремы.

Теорема. Квадратная матрица A является матрицей Грама некоторой системы векторов евклидова пространства тогда и только тогда, когда A симметрична и неотрицательно определённа (то есть таковой является квадратичная форма с этой матрицей).

Доказательство (содержит алгоритм построения требуемой системы векторов). Если $A \in \mathrm{M}_k(\mathbb{R})$ — матрица Грама некоторой системы векторов в $\mathbb{R}^n$, то A симметрична. Мы уже знаем, что квадратичная форма с матрицей A путём замены координат приводится к диагональному виду. Это означает, что существует невырожденная матрица $C \in \mathrm{M}_k(\mathbb{R})$, для которой $C^TAC = D$, где $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_k)$. Как уже отмечалось выше, в данной ситуации D тоже должна являться матрицей Грама некоторой системы векторов в $\mathbb{R}^n$, поэтому все её диагональные элементы должны быть неотрицательны, откуда и следует неотрицательная определённость соответствующей квадратичной формы.

Обратно, пусть теперь $d_i \geqslant 0$ для всех $i = 1, \ldots, k$. Тогда легко предъявить систему векторов $(f_1, \ldots, f_k)$ с матрицей Грама D. Например, если $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, то можно взять $f_i = \sqrt{d_i}e_i$, $i = 1, \ldots, k$. В соответствии с разобранным выше у системы векторов $(f_1, \ldots, f_k)C^{-1}$ матрицей Грама будет $(C^{-1})^TDC^{-1} = A$, что и требовалось.

Применили данный алгоритм к матрице $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Дальше поговорили про ортогональное дополнение подмножества евклидова пространства, обсудили его основные свойства. Ортогональное дополнение к системе векторов $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ (а также к их линейной оболочке) совпадает с множеством решений ОСЛУ $\{(v_i, x) = 0 \mid i = 1, \ldots, k\}$, поэтому базис ортогонального дополнения есть просто ФСР для указанной ОСЛУ.

Следующий сюжет — ортогональные и ортонормированные системы векторов, ортогональные и ортонормированные базисы. Обсудили формулу для координат вектора в ортогональном (ортонормированном) базисе. Разобрали метод ортогонализации Грама–Шмидта, который позволяет построить ортогональный базис подпространства, стартуя с какого-то базиса. А именно, для исходной линейно независимой системы векторов $e_1, \ldots, e_k$ формулы $f_i = e_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} \frac{(e_i, f_j)}{(f_j, f_j)} f_j$ определяют ортогональный базис $f_1, \ldots, f_k$ в подпространстве $\langle e_1, \ldots, e_k \rangle$.

Обсудили, как с помощью ортогонализации Грама–Шмидта дополнять ортогональную систему векторов до ортогонального базиса. Есть два способа:

1) сначала найти базис в ортогональном дополнении, а затем ортогонализовать его;

2) дополнить исходный базис до какого-нибудь базиса и затем ортогонализовать его.

Применили оба этих способа для решения номера П1359.

♡

Домашнее задание к семинару 23. Дедлайн 7.03.2023

Номера с пометкой П даны по задачнику Проскурякова, с пометкой К – Кострикина.

В обоих задачниках координаты векторов из $\mathbb{R}^n$ всегда записываются в строчку через запятую, однако нужно помнить, что мы всегда записываем эти координаты в столбец.

1. Существует ли система векторов в $\mathbb{R}^3$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 6 & 4 \\ -3 & 4 & 11 \end{pmatrix}$? Если существует, то укажите её.

2. Тот же вопрос для матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Тот же вопрос для матрицы $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

4. П1366

5. П1367

6. Найдите базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^3$ к множеству решений уравнения $x_1+2x_2+3x_3=0$.

7. П1357, П1360

8. П1361

9. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 4}$ со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$.

   При помощи метода ортогонализации постройте ортогональный базис в подпространстве $\langle 1,x,x^2,x^3 \rangle$.

♡