Семинар 12 (28.11.2022)

Краткое содержание

Первый сюжет — как находить (какой-то один) базис в подпространстве пространства F^n, заданном как линейная оболочка конечного набора векторов. **Первое соображение**: при элементарных преобразованиях данной системы векторов (прибавить к одному вектору другой, умноженный на скаляр; поменять местами два вектора; умножить один вектор на ненулевой скаляр) её линейная оболочка сохраняется. **Второе соображение**: набор векторов вида

$$\begin{pmatrix} \diamond \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \\ * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \diamond \\ * \\ \vdots \\ * \\ * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \diamond \\ \vdots \\ * \\ * \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \diamond \\ * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \diamond \end{pmatrix},$$

где $\diamond \neq 0$ и $*$ – произвольные элементы, всегда линейно независим (и, в частности, образует базис в F^n), а значит, всякая подсистема набора такого вида тоже линейно независима. Эти два соображения дают алгоритм нахождения искомого базиса:

1. записать векторы в матрицу по столбцам
2. элементарными преобразованиями столбцов привести её к транспонированно-ступенчатому виду
3. записать в базис все ненулевые столбцы полученного вида

Можно заметить, что тот же самый алгоритм можно делать и по строчкам, и ничего концептуально не поменяется – записать векторы в строки матрицы, элементарными преобразованиями строк привести её к ступенчатому виду, после чего записать в базис все ненулевые строки полученного вида.

Посмотрели, как данный алгоритм работает на наборе векторов $(2,-3,1),(3,-1,-2),(1,-4,3)$ в $\mathbb{R}^3$.

Второй сюжет — даны векторы $v_1,\ldots,v_m \in F^n$. Требуется выбрать среди этих векторов базис их линейной оболочки $\langle v_1,\ldots,v_m\rangle$ и выразить через этот базис все остальные векторы данной системы. **Ключевое соображение**: при элементарных преобразованиях **строк** матрицы сохраняются все линейные зависимости между её **столбцами**. Алгоритм:

1. записываем векторы в столбцы матрицы
2. элементарными преобразованиями строк приводим эту матрицу к ступенчатому виду
3. пусть $i_1,\ldots,i_s$ – номера ведущих элементов строк этой получившейся матрицы; тогда векторы $v_{i_1},\ldots,v_{i_s}$ (то есть векторы с теми же номерами в исходной матрице) образуют искомый базис в $\langle v_1,\ldots,v_m\rangle$.

Чтобы выразить остальные векторы через найденный базис, нужно довести матрицу до улучшенного ступенчатого вида, из него вся нужная информация извлекается сразу. Например, если улучшенный ступенчатый вид есть $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, то получаем, что базис будут образовывать векторы v_1 и v_3, а остальные будут выражаться через них так: $v_2 = 2v_1$, $v_4 = -v_1 + 2v_3$.

Последний сюжет — понятие фундаментальной системы решений (ФСР) однородной системы линейных уравнений $Ax = 0$ и метод построения одной конкретной ФСР. Алгоритм:

1. приводим матрицу A элементарными преобразованиями строк к улучшенному ступенчатому виду

2. выражаем главные переменные через свободные (как делали раньше при решении ОСЛУ)
3. число векторов в базисе (или ФСР) равно числу свободных переменных. i-ый вектор базиса получается так: в выражениях главных через свободных в i-ую свободную переменную подставляем ненулевое значение (например, 1), а в остальные свободные – 0; считаем получившиеся значения главных переменных. записываем эти значения (и главных, и свободных) в вектор в соответстующие координаты и получаем i-ый вектор базиса.

Разобрали, как этот метод работает для ОСЛУ с матрицами $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

При помощи ФСР нашли базис в подпространстве $\{f \mid f(1) = 0, f'(1) = 0\}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ многочленов степени не выше 3 с действительными коэффициентами.

♡

Домашнее задание к семинару 13. Дедлайн 5.12.2022

Номера с пометкой П даны по задачнику Проскурякова, с пометкой К – Кострикина.

1. П1310 (применить первый алгоритм с семинара, находящий какой-то базис)
2. П1311
3. Среди векторов $a_1, \ldots, a_5$ из номера П1310 выберите базис их линейной оболочки и выразите через него все остальные векторы данной системы.
4. В пространстве $\mathbb{R}^5$ даны векторы $v_1 = (-2, 1, -3, 2, 3)$, $v_2 = (-2, 3, -5, 7, 4)$, $v_3 = (2, 1, 1, 3, -2)$, $v_4 = (9, -2, 4, -3, -8)$.

   (а) Выделите среди этих векторов базис их линейной оболочки $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

   (б) Перечислите все подсистемы (подмножества) системы $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, являющиеся базисами в $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.
5. П725, П727
6. П729, П730
7. (1) Докажите, что для всякой матрицы $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ множество векторов $x \in \mathbb{R}^n$ со свойством $Ax = 2x$ является подпространством в $\mathbb{R}^n$.

   (2) Найдите базис и размерность этого подпространства, если $n = 4$ и
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$
8. (1) Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Докажите, что множество всех матриц $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, коммутирующих с A (то есть удовлетворяющих условию $AX = XA$), является подпространством в $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

   (2) Найдите базис и размерность этого подпространства, если $n = 2$ и $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
9. (1) Пусть $Y \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Докажите, что множество всех матриц $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию $\mathrm{tr}(YX) = 0$, является подпространством в пространстве $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

   (2) Найдите базис и размерность этого подпространства, если $n = 2$ и $Y = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

♡