Семинар 2 (6.09.2022)

Краткое содержание

Обсудили сложение матриц. Доказали коммутативность этой операции. Упомянули транспонирование матриц.
Обсудили умножение матриц. Решили простой пример на понимание операций – вычислили значение $AB^T + 3C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Перемножили матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ в разном порядке и убедились, что умножение матриц не коммутативно.
Определили натуральную степень матрицы, а также нулевую степень: $A^0 = E$. Методом математической индукции доказали, что $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Обсудили быстрое возведение матрицы в степень. Поняли, что оно работает абсолютно также, как и с действительными числами. Игрушечный пример:
$A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A \to 3$ операции (3 раза умножили).
$A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A^2 \to 2$ операции (один раз возвели в степень, во второй раз перемножили результат друг на друга).
$A^9 = A^8 \cdot A = A^4 \cdot A^4 \cdot A \to 4$ операции (2 операции на возведение A в 4ую степень, 3-я на перемножение A^4 на A^4, 4-ая на умножение на последнюю A)
Суть: переиспользуем уже подсчитанные результаты, перемножаем уже посчитанные степени матрицы. Обычно это делается по основанию двойки.
Посмотрели на результат умножения следующих матриц и получили:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

Сделали вывод, что умножение диагональных матриц дает нам тоже диагональную матрицу.
Посмотрели на результат умножения следующих матриц и получили:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \dots & \lambda_n a_{1n} \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \dots & \lambda_n a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 a_{m1} & \lambda_2 a_{m2} & \dots & \lambda_n a_{mn} \end{pmatrix}$$

То есть, используя нотацию A^i – i-ый столбец матрицы A, получаем:

$$\begin{pmatrix} A^1 & A^2 & \dots & A^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 A^1 & \lambda_2 A^2 & \dots & \lambda_n A^n \end{pmatrix}$$

♡

Домашнее задание к семинару 2 (13.09.2022)

Номера с пометкой П даны по задачнику Проскурякова, с пометкой К – Кострикина.

1. Пусть A, B – произвольные матрицы одинакового размера и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Докажите (расписав подробно), что $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ и $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.
2. К17.1(г), К17.2(б)
3. Найдите все 2x2-матрицы B, коммутирующие с матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то есть удовлетворяющие условию $AB = BA$.
4. Найти, чему равно выражение (расписать подробно):
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{pmatrix},$$
где A_i – i-ая строчка матрицы $A \in Mat_{n\times m}(\mathbb{R})$. Другими словами, правая матрица в выражении – это матрица A, записанная в терминах строчек. Найденный ответ надо записать тоже в таких же терминах.
5. П802
6. П803
7. П805
8. К17.7

♡