Семинар 24 (14.03.2023)

Краткое содержание

Обсудили понятие расстояния в евклидовом пространстве и проговорили основную теорему о расстоянии от вектора до подпространства:

Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство и $x \in \mathbb{E}$. Тогда $\rho(x,S) = |\mathrm{ort}_S x|$, причём $\mathrm{pr}_S x$ является ближайшим к x вектором из S.

Дальше обсудили метод наименьших квадратов для несовместных систем линейных уравнений, а также явную формулу для псевдорешения в случае, когда столбцы матрицы коэффициентов линейно независимы. Нашли псевдорешение для системы

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 &= 3, \\ x_1 + 7x_2 &= -1, \\ 2x_1 - 4x_2 &= -1. \end{cases} \tag{1}$$

Следующий сюжет — k-мерный параллелепипед и его k-мерный объём. Разобрали определение и формулу для объёма в терминах матрицы Грама системы векторов, задающих k-мерный параллелепипед, а также формулу для n-мерного объёма в n-мерном пространстве через определитель матрицы координат в ортонормированном базисе. Нашли площадь параллелограмма в $\mathbb{R}^3$, натянутого на векторы $(2,1,2)$ и $(1,-2,1)$.

Дальше разобрали понятия ориентации и ориентированного объёма в евклидовом пространстве.

Новая тема — векторные операции в пространстве $\mathbb{R}^3$ с фиксированной ориентацией.

Векторное произведение двух векторов $a,b \in \mathbb{R}^3$ можно определить как единственный вектор $[a,b] \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющий соотношению $([a,b],x) = \mathrm{Vol}(a,b,x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^3$. Разобрали геометрические свойства векторного произведения, которыми оно обычно определяется:

1) $[a,b]$ ортогонально каждому из векторов a,b;

2) длина вектора $[a,b]$ равна площади параллелограмма, натянутого на a,b;

3) $\mathrm{Vol}(a,b,[a,b]) \geqslant 0$.

Упомянули антикоммутативность, билинейность векторного произведения, а также критерий коллинеарности: два вектора $a,b \in \mathbb{R}^3$ коллинеарны (= пропорциональны = линейно зависимы) тогда и только тогда, когда $[a,b] = \vec{0}$. Также разобрали формулу для вычисления векторного произведения в координатах в положительно ориентированном ортонормированном базисе.

Смешанное произведение трёх векторов $a,b,c \in \mathbb{R}^3$ — это величина (a,b,c), равная попросту ориентированному объёму натянутого на них параллелепипеда. Проговорили основные свойства смешанного произведения и формулу для его вычисления в координатах в положительно ориентированном ортонормированном базисе. Упомянули критерий компланарности: три вектора $a,b,c \in \mathbb{R}^3$ компланарны (= линейной зависимы) тогда и только тогда, когда $(a,b,c) = 0$.

Решили номера КК25.7, КК25.8. Нашли ядро и образ линейного отображения $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto [x,a]$, где a — заданный ненулевой вектор.

♡

Домашнее задание к семинару 25. Дедлайн 21.03.2023

Номера с пометкой П даны по задачнику Проскурякова, с пометкой К – Кострикина, с пометкой КК – Ким-Крицкова.

В обоих задачниках координаты векторов из $\mathbb{R}^n$ всегда записываются в строчку через запятую, однако нужно помнить, что мы всегда записываем эти координаты в столбец.

1. К43.21(а)

2. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$.

   Найдите расстояние от вектора x^3 до подпространства $\langle 1,x,x^2 \rangle$.

3. Найдите псевдорешение системы (1) по явной формуле.

4. Найдите псевдорешение для СЛУ из номера К43.30(а) двумя способами (через проекцию и по явной формуле).
5. Найдите объём параллелепипеда в $\mathbb{R}^4$ (со стандартным скалярным произведением), натянутого на:

   (1) первые три вектора из номера К43.36(б);

   (2) все векторы из номера 43.36(б).
6. Докажите, что $\operatorname{vol} P(a_1, \ldots, a_k) \leqslant |a_1| \cdot \ldots \cdot |a_k|$, то есть объём параллелепипеда не превосходит произведения длин его рёбер, выходящих из одной вершины. В каком случае в этом неравенстве достигается равенство?
7. КК25.17
8. КК25.18, 25.24(а)
9. КК25.36

♡