Семинар 5 (4.10.2022)

Краткое содержание

Новая тема – перестановки. Обсудили, как представлять перестановки визуально. Обсудили инверсии, знак и чётность, произведение перестановок, тождественную перестановку и обратную перестановку. Обсудили, как решать уравнения вида $\sigma x = \rho, x\sigma = \rho, \sigma x\tau = \rho$ относительно неизвестной перестановки x. (В этих случаях искомая перестановка выражается формулами $x = \sigma^{-1}\rho, x = \rho\sigma^{-1}, x = \sigma^{-1}\rho\tau^{-1}$ соответственно.) На доске перемножили две перестановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ в обоих порядках, для первой нашли обратную.

Проговорили, что такое циклы. На примере перестановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

обсудили разложение перестановок в произведение **независимых** циклов. Поскольку циклы в таком разложении коммутируют, m-я степень перестановки есть просто произведение m-х степеней всех циклов, и тогда задача возведения произвольной перестановки в степень сводится к той же задаче для циклов. Если цикл имеет длину k, то его k-я степень есть id (тождественная перестановка), поэтому для вычисления его m-й степени достаточно возвести этот цикл в степень $m \bmod k$. Важно помнить, что нулевая степень любой перестановки есть id. Нашли в явном виде 100-ю, 101-ю и 102-ю степени указанной выше перестановки.

Важное дополнение к семинару!!!

Изначально вычисление знака перестановки определялось, как $sgn(\sigma) = (-1)^{\#\text{инверсий}}$. Когда перестановки большие, число инверсий искать тяжелее – нужно перебирать много ($\frac{n(n-1)}{2}$) пар элементов. При разложении перестановки на независимые циклы, подсчет знака сильно упрощается. Знак определеятся как $sgn(\sigma) = (-1)^{dec(\sigma)}$, где $dec(\sigma)$ – декремент подстановки. Он равен $n - \#$циклов $- \#$неподвижных точек. Если вы разложили перестановку на независимые циклы, декремент и, следовательно, знак считать очень легко.

Пример: перестановка $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 7 & 5 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ раскладывается на независимые циклы $(1432)(576)(8)(9)$. 8 и 9 – это неподвижные точки, так как они все время переходят сами в себя. А цикла в этой перестановке всего два – (1432) и (576). Таким образом, $dec(\sigma) = 9 - 2 - 2 = 5$. Значит, $sgn(\sigma) = (-1)^5 = -1 \implies \sigma$ – нечетная.

♡

Домашнее задание к семинару 6. Дедлайн 12.10.2022

Номера с пометкой П даны по задачнику Проскурякова, с пометкой К – Кострикина.

1. К3.1(б,в)
2. К3.2(а–г), К3.3(а,б)
3. Вычислить число инверсий в следующих перестановках:

   1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & n+1 & n+2 & n+3 & n+4 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & 6 & 8 & \dots & 2n \end{pmatrix}$

   2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-k+1 & n-k+2 & n-k+3 & \dots & n \\ k & k+1 & \dots & n & 1 & 2 & \dots & k-1 \end{pmatrix}$.
4. К3.6(а–г)

5. Решите следующее уравнение относительно неизвестной перестановки X:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 7 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 4 & 6 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Вычислите σ^{77}, σ^{90}, σ^{119}, σ^{148}, если $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 9 & 11 & 3 & 8 & 10 & 2 & 12 & 7 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

7. На сколько может измениться число инверсий в перестановке $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$, если в её нижней строке поменять местами два соседних элемента? А как при этом изменится её знак?

8. Пусть ρ — перестановка, полученная из перестановки σ предыдущей задачи путём перестановки элементов $\sigma(i)$ и $\sigma(j)$ в нижней строке. Опишите перестановку $\sigma^{-1}\rho$.

♡