Семинар 2 (20.09.2022)

Краткое содержание

Поговорили про способы упрощения выражений с матрицами со степенями. Так, $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$ и $(A^m)^n = A^{m \cdot n}$.
Определили такую операцию как многочлен от матрицы. Если $f(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0 \in \mathbb{R}$, $X \in Mat_m(\mathbb{R})$, то $f(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 E \in Mat_m(\mathbb{R})$.
Поговорили про последовательность Фибоначчи, ее рекурсивную запись в обычном и матричном формате. Матричный формат:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Разобрав П808 и упомянув понятие обратной матрицы, выяснили, что задача возведения матрицы A в произвольную степень сильно упрощается, если известно разложение вида $A = BCB^{-1}$, где C – диагональная матрица. В этом случае получается $A^k = BC^kB^{-1}$. Задачу нахождения такого разложения (а также вопрос его существования) отложили до будущих времен. Для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, про которую мы говорили выше, это разложение существует и выглядит как

$$\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Проговорили свойства основных операций над матрицами, обсудили, как оптимально посчитать матричное выражение $2AA^T - 3AB + 4B^TA^T - 6B^TB$. Также обсудили, как решать матричное уравнение $XX^T - XA^T - AX^T + AA^T = 0$, в котором X – неизвестная матрица заданного порядка, а A – известная матрциа с коэффициентами из $\mathbb{R}$.
Упомянули понятие следа квадратной матрицы, а также его основное свойство $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$. Обсудили, что если A, B – квадратные матрицы одного порядка и B обратима, то $\operatorname{tr} BAB^{-1} == \operatorname{tr} A$. Вывели отсюда, что матричное уравнение $B \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ корней не имеет. Проговорили, как сдвигать три матрицы под следом. Поняли, что по сути можно брать только матрицы с краю и перемещать их в другой край (то есть, по циклу). Так, $\operatorname{tr} ABC == \operatorname{tr} BCA == \operatorname{tr} CAB$. Выяснили, что равенство $\operatorname{tr} ABC = \operatorname{tr} ACB$ не верно для всех матриц. Построение примера предложено в качестве домашнего задания.
В конце поупражнялись со свойствами следа, упростив выражение
$\operatorname{tr}[(6AB^T - 3BA^T)^TC + C(2AB^T - 4BA^T)]$, где $A, B, C \in M_n, \quad C = C^T$.

♡

Домашнее задание к семинару 3 (23.09.2022). Дедлайн 27.09.2022

Номера с пометкой П даны по задачнику Проскурякова, с пометкой К – Кострикина.

1. К17.5
2. П829
3. П809
4. П815
5. П832
6. Приведите пример трех квадратных (2x2)-матриц A, B, C, для которых $\operatorname{tr} ABC \neq \operatorname{tr} ACB$.

7. Квадратная матрица A называется *верхнетреугольной*, если $a_{ij} = 0$ при всех $i > j$, то есть все ее элементы ниже главной диагонали равны нулю. Докажите, что произведение двух верхнетреугольных матриц снова будет верхнетреугольной матрицей.

8. Назовем квадратную матрицу побочно-диагональной, если все ее элементы вне побочной диагонали равны нулю. Пусть A, B – две побочно-диагональные матрицы, причем у матрицы A (соответственно B) на побочной диагонали стоят элементы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (соответственно $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$), если считать от правого верхнего угла к левому нижнему. Найдите произведения AB и BA и определите условия, при которых матрицы A и B коммутируют (то есть $AB = BA$).

♡