# Семинар 16 (17.01.2023)

### Краткое содержание

Поговорили про понятие линейной независимости подпространств и пять эквивалентных условий, определяющих эту линейную независимость. Обсудили разложение векторного пространства в прямую сумму подпространств (по определению это означает, что подпространства линейно независимы и в сумме дают всё пространство).

Разобрали частный случай двух подпространств: подпространства $U$,$W$ векторного пространства $V$ линейно независимы тогда и только тогда, когда $U \cap W = \{0\}$ или, эквивалентно, $\dim U + \dim W = \dim(U + W)$ (см. пять эквивалентных условий). Отсюда следует, что

$$V = U \oplus W \quad \Leftrightarrow \quad U \cap W = \{0\} \text{ и } U + W = V \quad \Leftrightarrow \quad U \cap W = \{0\} \text{ и } \dim U + \dim W = \dim V. \qquad (1)$$

(Последнее условие часто удобнее всего проверять в конкретных задачах.) Если есть разложение в прямую сумму $V = U \oplus W$, то тогда всякий вектор $v \in V$ единственным образом представляется в виде суммы $v = u + w$, где $u \in U$ и $w \in W$. В этом случае $u$ называется проекцией вектора $v$ на $U$ вдоль $W$, а $w$ называется проекцией вектора $v$ на $W$ вдоль $U$.

В качестве простейшего примера разобрали разложение пространства $\mathbb{R}^2$ в прямую сумму двух одномерных подпространств, из которых первое — это ось $Ox$, а второе — прямая $y = x$. Разобрали графически, как в этом случае находятся обе проекции для произвольного вектора. Аналогично рассмотрели разложение $\mathbb{R}^2$ в прямую сумму оси $Ox$ и другой прямой и обсудили, как устроены обе проекции в этом случае. Подчеркнули, что для одного и того же вектора проекции на одну и ту же ось $Ox$ вдоль разных дополнительных прямых отличаются (вообще говоря).

Если $U = \langle u_1, \ldots, u_k\rangle$ и $W = \langle w_1, \ldots, w_m\rangle$ — два подпространства в $F^n$, то разложение $F^n = U \oplus W$ удобно доказывать при помощи одного из условий в (1). Чтобы найти проекции заданного вектора $v \in F^n$ на $U$ вдоль $W$ и наоборот, достаточно решить СЛУ $\lambda_1 u_1 + \ldots \lambda_k u_k + \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_m w_m = v$ относительно неизвестных $\lambda_i, \mu_j$, и тогда искомые проекции будут равны $\lambda_1 u_1 + \ldots \lambda_k u_k$ и $\mu_1 w_1 + \cdots + \mu_m w_m$.

Разобрали номер 35.18.

Следующий вопрос: верно ли, что если три подпространства $U_1, U_2, U_3$ векторного пространства $V$ удовлетворяют условию $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \{0\}$, то они линейно независимы? В общем случае неверно: в качестве примера можно взять три различных прямых в $\mathbb{R}^2$.

♡

### Домашнее задание к семинару 16. Дедлайн 24.01.2023

Номера с пометкой П даны по задачнику Проскурякова, с пометкой К – Кострикина.

1. К35.19
2. К35.21
3. Рассмотрим в пространстве $M_n(\mathbb{R})$ подпространства $U$ и $W$, где $U$ состоит из всех симметричных матриц, а $W$ — из всех строго верхнетреугольных (то есть верхнетреугольных с нулями на диагонали) матриц. Докажите, что $M_n(\mathbb{R}) = U \oplus W$, и найдите проекцию матрицы из предыдущей задачи на каждое из этих подпространств вдоль другого.
4. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^5$ подпространства $U_1 = \langle(1,1,1,1,0)\rangle$, $U_2 = \langle(0,1,0,0,-1)\rangle$ и $U_3$, являющееся множеством решений системы
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_3 - x_5 = 0. \end{cases}$$
Докажите, что $\mathbb{R}^5 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$.

♡