Семинар 11 (21.11.2022)

Краткое содержание

Обсудили понятия линейной зависимости и независимости набора векторов. Выяснили, что для пространства F^n вопрос о линейной зависимости/независимости конечного набора векторов сводится к составлению ОСЛУ и вопросу о наличии у неё ненулевого решения.

Дальше обсудили, почему в пространстве всех функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ система функций $\sin x, \sin^2 x, \ldots, \sin^n x$ линейно независима при любом n. Это можно свести к определителю Вандермонда, выбрав n точек, в которых принимаются попарно различные ненулевые значения. Затем поговорили про систему функций $e^{a_1 x}, \ldots, e^{a_n x}$ при попарно различных $a_1, \ldots, a_n$, разобрали два разных доказательства линейной независимости (оба сводятся к определителю Вандермонда): один способ – взять значения в точках $0, 1, \ldots, n-1$; второй способ – последовательно дифференцировать приравненную к нулю линейную комбинацию (достаточно дифференцировать $n-1$ раз) и каждый раз брать значения в точке 0 (для удобства).

Следующая тема – базис и размерность векторного пространства. Нашли базис и размерность подпространств из номера К35.2(а,б). Нашли базис и размерность для пространства симметричных квадратных матриц произвольного порядка.

♡

Домашнее задание к семинару 12. Дедлайн 28.11.2022

Номера с пометкой П даны по задачнику Проскурякова, с пометкой К – Кострикина.

1. П641, 642
2. К34.2(а)
3. П649, П650
4. П652
5. П1825 (считать областью определения функций множество $x > 0$)
6. П1826(а,б)
7. П1828
8. Найдите базис и размерность для подпространств из номера К35.2(в,г). Ответы обоснуйте.
9. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — векторное пространство всех многочленов степени не выше n с действительными коэффициентами. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подмножество, состоящее из всех многочленов, имеющих корень $c \in \mathbb{R}$. Докажите, что U является подпространством, а также найдите его базис и размерность (тоже с доказательством!).

♡