Семинар 7 (18.10.2022)

Краткое содержание

Сначала выяснили, какое наибольшее значение может принимать определитель 3-го порядка при условии, что все его элементы равны ± 1.

Затем проговорили поведение определителя при элементарных преобразованиях строк или столбцов, разобрали определители с углом нулей и разложение определителя по строке/столбцу. Обсудили оптимальный алгоритм вычисления определителя с конкретными числовыми элементами: при помощи элементарных преобразований строк/столбцов добиться того, чтобы в какой-либо строке (или каком-либо столбце) остался только один ненулевой элемент, после чего разложить по этой строке (соответственно столбцу) и свести задачу к определителю меньшего порядка.

Разобрали номера П238, П239, П257.

Следующий сюжет – определитель Вандермонда и явная формула для него. Проговорили, что в задаче нахождения интерполяционного многочлена матрица коэффициентов возникающей СЛУ является как раз матрицей Вандермонда, а из неравенства нулю её определителя получается доказательство единственности интерполяционного многочлена: определитель не равен нулю $\implies$ можно умножить обе части СЛУ слева на обратную матрицу.

В конце обсудили вопрос о том, как обратить блочную матрицу вида $\begin{pmatrix} E & U \\ 0 & E \end{pmatrix}$, где оба блока E квадратны (но могут быть разных размеров). Первый способ нахождения обратной матрицы – используя элементарные преобразования. Второй способ – используя блочное умножение матриц.

♡

Домашнее задание к семинару 8. Дедлайн 31.10.2022

Номера с пометкой П даны по задачнику Проскурякова, с пометкой К – Кострикина.

1. П212, П221, П225
2. Как изменится определитель матрицы, если её «транспонировать» (то есть отразить) относительно побочной диагонали?
3. Как изменится определитель матрицы A, если при всех i,j элемент a_{ij} умножить на c^{i-j}, где $c \neq 0$ – некоторое фиксированное число?
4. П227, П228
5. П229
6. П236, П240
7. П260, П263
8. Даны матрицы $A, B \in M_4(\mathbb{R})$. Известно, что $\det A = 1$ и
$$B^{(1)} = 3A^{(3)} - 2A^{(4)},\ \ B^{(2)} = 2A^{(1)} + 3A^{(2)},\ \ B^{(3)} = -2A^{(1)} + 2A^{(3)} + A^{(4)},\ \ B^{(4)} = 2A^{(2)} + 3A^{(4)},$$
где $A^{(i)}$ и $B^{(j)}$ обозначают i-й столбец матрицы A и j-й столбец матрицы B соответственно. Найдите $\det B$.
9. Используя блочное умножение матриц, найдите матрицу, обратную к матрице с углом нулей $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, где матрицы A и C квадратны и невырожденны (не обязательно одного размера).

♡