Семинар 28 (26.04.2023)

Краткое содержание

Обсудили инвариантные подпространства. На примере линейного оператора из домашнего задания показали, как для линейного оператора над $\mathbb{R}$ отыскивать двумерное инвариантное подпространство над $\mathbb{R}$, отвечающее комплексному собственному значению.

Дальше доказали, что если характеристический многочлен линейного оператора разлагается на линейные множители, то существует базис исходного пространства, в котором матрица линейного оператора имеет верхнетреугольный вид.

Дальше сформулировали теорему о жордановой нормальной форме.

Новая тема: сопряжённые линейные отображения, сопряжённые линейные операторы, самосопряжённые линейные операторы в евклидовых пространствах. Обсудили, что если A — матрица линейного отображения в паре ортонормированных базисов $(\mathbb{e}, \mathbb{f})$, то матрицей сопряжённого линейного отображения в паре базисов $(\mathbb{f}, \mathbb{e})$ будет A^T. Аналогично, если A — матрица линейного оператора в каком-то ортонормированном базисе, то матрицей сопряжённого линейного оператора в том же базисе будет A^T. В частности, линейный оператор самосопряжён тогда и только тогда, когда его матрица в ортонормированном базисе симметрична.

Дальше сформулировали основную теорему о самосопряжённых линейных операторах:

Пусть φ — самосопряжённый линейный оператор в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$. Тогда:

1) существует ортонормированный базис в $\mathbb{E}$, состоящий из собственных векторов оператора φ (в частности, φ диагонализуем над $\mathbb{R}$);

2) собственные подпространства оператора φ, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны.

Разобрали пример с самосопряжённым оператором, заданным в некотором ортонормированном базисе матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$: нашли ортонормированный базис, в котором матрица этого оператора диагональна.

♡

Домашнее задание к семинару 29. Дедлайн 10.05.2023

Номера с пометкой П даны по задачнику Проскурякова, с пометкой К – Кострикина, с пометкой КК – Ким-Крицкова.

1. П1519
2. К40.14 (характеристические числа матрицы — это корни её характеристического многочлена, то есть собственные значения)
3. Докажите, что операция перехода к сопряжённому линейному отображению в евклидовых пространствах обладает свойствами из номера К44.1(а,б,г,д) (в пункте (г) игнорировать черту над λ).
4. Пусть $\varphi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ — линейное отображение евклидовых пространств. Докажите, что
$$\operatorname{Ker}\varphi^* = (\operatorname{Im}\varphi)^\perp \quad \text{и} \quad \operatorname{Im}\varphi^* = (\operatorname{Ker}\varphi)^\perp.$$
5. К44.4 (здесь речь именно о сопряжённом операторе, а не отображении!) + указать геометрический смысл сопряжённого оператора
6. П1585
7. П1586

♡