Семинар 32 (31.05.2023)

Краткое содержание

Новая тема — жорданова нормальная форма (ЖНФ) линейного оператора. Обсудили понятия корневого вектора, отвечающего данному собственному значению λ линейного оператора φ, и соответствующего корневого подпространства $V^{\lambda}(\varphi) = \{v \in V \mid \exists\, m \geqslant 0 : (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id})^m v = 0\}$, то есть подпространства, состоящего из всех корневых векторов, отвечающих собственному значению λ. Из определения следует включение $V_{\lambda}(\varphi) \subseteq V^{\lambda}(\varphi)$ для всякого $\lambda \in \operatorname{Spec}\varphi$, то есть всякий собственный вектор автоматически является корневым.

Если характеристический многочлен линейного оператора φ разлагается на линейные множители и $\operatorname{Spec}\varphi = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$, то $V = V^{\lambda_1}(\varphi) \oplus \ldots \oplus V^{\lambda_s}(\varphi)$. Кроме того, для всякого собственного значения $\lambda \in \operatorname{Spec}\varphi$ имеет место равенство $\dim V^{\lambda}(\varphi) = a_{\lambda}$ и характеристический многочлен ограничения оператора φ на подпространство $V^{\lambda}(\varphi)$ равен $(t-\lambda)^{a_{\lambda}}$.

Число и размеры жордановых клеток с собственным значением λ в жордановой форме линейного оператора φ однозначно определяются действием оператора φ в соответствующем корневом подпространстве $V^{\lambda}(\varphi)$. А именно, рассмотрим неубывающую цепочку подпространств

$$\{0\} = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id})^0 \subseteq \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id})^1 \subseteq \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id})^2 \subseteq \ldots. \tag{1}$$

Так как объемлющее векторное пространство V конечномерно, то в этой цепочке рано или поздно встретится знак равенства. Пусть $m \geqslant 0$ — наименьшее число, для которого $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id})^m = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{m+1}$. Тогда начиная с этого места в цепочке (1) все знаки «$\subseteq$» на самом деле являются равенствами. Легко видеть, что тогда $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id})^m = V^{\lambda}(\varphi)$.

Для каждого $i \geqslant 0$ положим $d_i = \dim \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id})^i$. Тогда имеем цепочку

$$0 = d_0 < d_1 < \ldots < d_m = a_{\lambda},$$

где $a_{\lambda} = \dim V^{\lambda}(\varphi)$ — алгебраическая кратность собственного значения λ. Важно отметить, что цепочка чисел $d_1, d_2, d_3, \ldots$ строго возрастает до тех пор, пока не достигнет значения a_{λ}. На практике числа d_i вычисляются очень просто: если $A \in \mathrm{M}_n$ — матрица линейного оператора φ в каком-либо базисе, то $d_i = n - r_i$, где $r_i = \operatorname{rk}(A - \lambda E)^i$.

На семинаре обсудили, что число d_1, оно же размерность собственного подпространства $V_{\lambda}(\varphi)$, оно же геометрическая кратность собственного значения λ, равно количеству жордановых клеток с собственным значением λ в ЖНФ оператора φ. Поэтому если вдруг обнаружилось, что $d_1 = 1$, то жорданова клетка с собственным значением λ будет одна (размера a_{λ}). Дальше вывели, что в ЖНФ число жордановых клеток (с собственным значением λ) размера k равно $2d_k - d_{k+1} - d_{k-1}$, или же $r_{k-1} + r_{k+1} - 2r_k$.

Получили следующий **алгоритм поиска жордановой формы**:

1. Вычисляем характеристический многочлен оператора и находим его спектр $\operatorname{Spec}\varphi = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ с алгебраическими кратностями для каждого значения $\{a_{\lambda_1}, \ldots, a_{\lambda_s}\}$
2. Для каждого λ_i суммарный размер всех клеток в ЖНФ, отвечающих этому собственному значению, равен a_{λ_i}. Осталось определить, сколько всего таких клеток и какого они размера.
   (a) Общее количество клеток равно числу $d_1 = n - \operatorname{rk}(A - \lambda_i E)$
   (b) Количество клеток размера ровно k вычисляется через $2d_k - d_{k+1} - d_{k-1}$ или же $\operatorname{rk}(A - \lambda_i E)^{k-1} + \operatorname{rk}(A - \lambda_i E)^{k+1} - 2\operatorname{rk}(A - \lambda_i E)^k$

   С этой информацией можно однозначно определить набор искомых клеток.

Нашли жорданову форму у линейных операторов, имеющих в некотором базисе матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

♡

Домашнее задание к семинару 33. Дедлайн 7.06.2023

Номера с пометкой П даны по задачнику Проскурякова, с пометкой К – Кострикина, с пометкой КК – Ким-Крицкова.

Во всех номерах требуется найти жорданову нормальную форму линейного оператора с заданной матрицей.

1. П1533
2. П1534
3. К41.1(е)
4. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
6. П1536
7. К41.1(и)
8. К41.1(л)

♡