Семинар 30 (16.05.2023)

Краткое содержание

Новая тема: сингулярное разложение матриц. Всякая матрица $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ представима в виде $A = U\Sigma V^T$, где $U \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$, $V \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ — ортогональные матрицы, $\Sigma \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ — диагональная матрица с числами $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_r > 0$ на диагонали, где $r = \mathrm{rk}\, A$. Более того, числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ определены однозначно. *Усечённое сингулярное разложение* матрицы A получается из обычного «обрезанием» матрицы Σ до квадратной размера $k \times k$, где $k = \min(m,n)$, при этом у одной из матриц U,V (у которой размер больше) нужно оставить только первые k столбцов, выкинув остальные.

Дальше исходя из вида сингулярного разложения $A = U\Sigma V^T$ вывели **алгоритм нахождения сингулярного разложения:**

I способ:

1) Вычисляем матрицу A^TA и находим все её ненулевые собственные значения $s_1, s_2, \ldots, s_r$ (если какое-то из этих значений имеет кратность $\geqslant 2$, то записываем его столько раз, какова кратность). Они все автоматически будут положительны; перенумеровываем их так, чтобы $s_1 \geqslant s_2 \geqslant \ldots \geqslant s_r > 0$. Полагаем $\sigma_i = \sqrt{s_i}$.

2) Находим ортонормированную систему из собственных векторов $v_1, \ldots, v_r$ (достаточно найти ортонормированный базис в каждом из собственных подпространств, после чего занумеровать эти векторы в соответствии с их собственными значениями, то есть чтобы выполнялось условие $A^TAv_i = s_iv_i$ для всех $i = 1, \ldots, r$).

3) Для каждого $i = 1, \ldots, r$ вычисляем $u_i = \frac{1}{\sigma_i}Av_i$; полученная система векторов $u_1, \ldots, u_r$ автоматически будет ортонормированна.

4) Дополняем обе системы $v_1, \ldots, v_r$ и $u_1, \ldots, u_r$ до ортонормированных базисов (в случае полного сингулярного разложения) или до ортонормированных систем $v_1, \ldots, v_k$ и $u_1, \ldots, u_k$ (в случае усечённого сингулярного разложения).

5) Составляем из чисел $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ матрицу Σ, а полученные на предыдущем шаге векторы $u_1,u_2, \ldots$ и $v_1,v_2, \ldots$ записываем в столбцы матриц U и V соответственно.

II способ фактически является I способом, применённым к матрице A^T:

1) Вычисляем матрицу AA^T и находим все её ненулевые собственные значения $s_1, s_2, \ldots, s_r$ (если какое-то из этих значений имеет кратность $\geqslant 2$, то записываем его столько раз, какова кратность). Они все автоматически будут положительны; перенумеровываем их так, чтобы $s_1 \geqslant s_2 \geqslant \ldots \geqslant s_r > 0$. Полагаем $\sigma_i = \sqrt{s_i}$.

2) Находим ортонормированную систему из собственных векторов $u_1, \ldots, u_r$ (достаточно найти ортонормированный базис в каждом из собственных подпространств, после чего занумеровать эти векторы так, чтобы выполнялось условие $AA^Tu_i = s_iu_i$ для всех $i = 1, \ldots, r$).

3) Для каждого $i = 1, \ldots, r$ вычисляем $v_i = \frac{1}{\sigma_i}A^Tu_i$; полученная система векторов $v_1, \ldots, v_r$ автоматически будет ортонормированна.

4) Дополняем обе системы $u_1, \ldots, u_r$ и $v_1, \ldots, v_r$ до ортонормированных базисов (в случае полного сингулярного разложения) или до ортонормированных систем $u_1, \ldots, u_k$ и $v_1, \ldots, v_k$ (в случае усечённого сингулярного разложения).

5) Составляем из чисел $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ матрицу Σ, а полученные на предыдущем шаге векторы $u_1,u_2, \ldots$ и $v_1,v_2, \ldots$ записываем в столбцы матриц U и V соответственно.

В качестве примера нашли полное и усечённое сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, используя II способ.

Дальше обсудили разложение матрицы в сумму компонент ранга 1, связанное с её сингулярным разложением.

Поговорили о приложениях сингулярного разложения.

Теорема о низкоранговом приближении:

Пусть $A = U\Sigma V^T$ — сингулярное разложение матрицы A ранга r. Для каждого значения $k < r$ обозначим через Σ_k матрицу, получаемую из Σ заменой диагональных элементов $\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_r$

нулями. Тогда среди всех матриц B (того же размера) ранга не выше k минимум величины $||A-B||$ достигается при $B = U\Sigma_k V^T$.

Воспользовавшись сингулярным разложением матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, нашли для неё наилучшее по норме Фробениуса приближение B ранга 1 и величину $||A-B||$, то есть расстояние от A до B по норме Фробениуса.

♡

Домашнее задание к семинару 31. Дедлайн 24.05.2023

Номера с пометкой П даны по задачнику Проскурякова, с пометкой К – Кострикина, с пометкой КК – Ким-Крицкова.

1. Найдите полное и усечённое сингулярные разложения матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ с семинара, используя I способ. Сравните потраченные усилия в I и II способах.
2. Найдите полное и усечённое сингулярные разложения матрицы $\begin{pmatrix} -5 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.
3. Найдите усечённое сингулярное разложение вектора-строки.
4. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{n\times 2}(\mathbb{R})$ и $a_1 = A^{(1)}$, $a_2 = A^{(2)}$ (то есть a_1,a_2 — соответственно первый и второй столбцы матрицы A). Пусть $\sigma_1 \geqslant \sigma_2$ — первое и второе сингулярные значения матрицы A. Докажите, что $\sigma_1 \geqslant |a_1| \geqslant \sigma_2$ и $\sigma_1 \geqslant |a_2| \geqslant \sigma_2$.
5. Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ — сингулярные значения матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, где $m \leqslant n$. Найдите все сингулярные значения матрицы $(A|E) \in \mathrm{Mat}_{m\times(n+m)}(\mathbb{R})$.
6. Найдите полное (оно же будет усечённым) сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$. Также найдите матрицу B ранга 1, наиболее близкую к A по норме Фробениуса, и вычислите $||A-B||$.
7. Найдите усечённое сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$. Также найдите матрицу B ранга 1, наиболее близкую к A по норме Фробениуса, и вычислите $||A-B||$.
8. Найдите полное (оно же будет усечённым) сингулярное разложение матрицы $\begin{pmatrix} 11 & -8 & 1 \\ -8 & 2 & 8 \\ 1 & 8 & 11 \end{pmatrix}$. Также найдите матрицы B и C рангов 2 и 1 соответственно, наиболее близкие к A по норме Фробениуса, и вычислите $||A-B||$, $||A-C||$.
9. Приведите пример матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ранга 2, для которой ближайшей по норме Фробениуса матрицей ранга 1 будет матрица $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

♡