Семинар 27 (19.04.2023)

Краткое содержание

Продолжили тему линейных операторов.

Обсудили соответствие между линейными операторами и матрицами, формулу действия линейного оператора в координатах, формулу изменения матрицы линейного оператора при замене базиса. Обсудили, как изменится матрица линейного оператора при перестановке двух векторов базиса, а также при умножении одного из векторов базиса на ненулевой скаляр.

Определили собственные векторы и собственные значения линейного оператора, спектр, собственные подпространства, характеристический многочлен, а также критерий диагонализуемости.

Для линейного оператора с прошлого семинара посчитали его характеристический многочлен; его единственный корень — $\lambda = 0$, это единственное собственное значение. Для этого собственного значения нашли базис соответствующего собственного подпространства.

Определили алгебраическую и геометрическую кратности собственного значения линейного оператора, обсудили связь между ними.

Сформулировали критерий диагонализуемости: линейный оператор φ диагонализуем тогда и только тогда, когда выполнены два условия:

1) характеристический многочлен разлагается на линейные множители;

2) для всякого собственного значения геометрическая кратность равна алгебраической.

Решили номера П1472 и П1473, в каждом случае исследовали диагонализуемость, в П1473 нашли также базис, в котором матрица оператора диагональна, соответствующую матрицу перехода и саму диагональную матрицу.

Проговорили алгоритм проверки оператора на диагонализуемость и нахождения диагонального вида и соответствующей матрицы перехода: пусть A — матрица линейного оператора φ в некотором базисе.

1) вычисляем многочлен $\det(A - tE)$ от переменной t (с точностью до знака это характеристический многочлен оператора φ) и находим все его корни; это будут в точности все собственные значения оператора φ; убеждаемся, что многочлен раскладывается на линейные множители со своими корнями: $\chi_\varphi(t) = (x - \lambda_1)^{a_1} \dots (x - \lambda_k)^{a_k}$

2) для каждого найденного собственного значения λ_i находим базис соответствующего ему собственного подпространства $V_{\lambda_i}(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda_i \cdot v\}$ — это ФСР для ОСЛУ $(A - \lambda_i E)x = 0$; убеждаемся, что $g_i := dim V_{\lambda_i}(\varphi)$ равно a_i

3) если первые два пункта выполнились, то оператор диагонализуем. В этом случае матрица перехода C будет состоять из координат собственных векторов, которые вы нашли при поиске ФСР. Если собственные векторы (а точнее, их координаты) для λ_i есть $\{v_{i1}, \dots, v_{ia_i}\}$, то $C = (v_{11} \mid \dots \mid v_{1a_1} \mid v_{21} \mid \dots \mid v_{2a_2} \mid \dots \mid v_{k1} \mid \dots \mid v_{ka_k})$. В новом базисе новая будет диагональная матрица $C^{-1}AC = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_k)$, где каждое λ_i встречается по a_i раз.

♡

Домашнее задание к семинару 28. Дедлайн 26.04.2023

Номера с пометкой П даны по задачнику Проскурякова, с пометкой К – Кострикина, с пометкой КК – Ким-Крицкова.

1. П1448 (здесь и далее «линейное преобразование» = «линейный оператор»)
2. П1449
3. П1452(б)
4. П1458

   Номера 5)–8) решите с такой формулировкой: найти все собственные значения линейного оператора и базисы всех его собственных подпространств. Проверить, что линейный оператор не диагонализуем.

5. П1465

6. П1466
7. П1469
8. матрица $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (линейный оператор рассматривается над $\mathbb{R}$)

   В номерах 9)–11) докажите, что линейный оператор с заданной матрицей диагонализуем; найдите базис, в котором его матрица диагональна, выпишите эту матрицу и матрицу перехода к новому базису.

9. П1481 (над $\mathbb{R}$)
10. П1483 (над $\mathbb{R}$)
11. матрица из номера 8 (над $\mathbb{C}$)

♡