Домашнее задание 4

Задача 1. (Номер 7.) Для данной матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ найдите такую квадратную матрицу U, что матрица UA имеет улучшенный ступенчатый вид, а также выпишите этот вид.

Решение. Как мы знаем, приведение матрицы к ул.ступ. виду происходит за счет элементарных преобразований, что по сути происходит через умножение нашей матрицы A на соответствующую элементарную матрицу слева. Поэтому, приводя матрицу A к ул.ступ. виду через цепочку $A \implies A_1 \implies A_2 \implies \cdots \implies A_k$, где A_k - ул.ступ. вид матрицы, на самом деле мы имеем выражения $A \implies U_1 \cdot A \implies U_2 U_1 \cdot A \implies \cdots \implies U_k \dots U_2 U_1 \cdot A$. В задаче матрица U – это и есть $U_k \dots U_2 U_1$.

Есть способ найти эту матрицу U, который лежит на поверхности и которым воспользовалось большинство из вас. Можно привести матрицу А к у.с. виду, запомнить все те преобразования, которые вы над ней совершили, и перемножить соответствующие матрицы этих преобразований. Но умножать несколько матриц друг на друга это муторно и отстойно, есть большой шанс намесить ошибок.

Есть способ полегче. Вспоминаем, что «умножить элементарную матрицу на нашу матрицу А» и «применить к матрице А элементарное преобразование» – это одно и то же действие. Только применять построчные преобразования куда легче. Тогда давайте я буду приводить матрицу к у.с. виду через элементарные **преобразования**, но рядом с ней запишу еще единичную матрицу E – $(A \mid E)$. И буду применять преобразования вот к такой расширенной матрице.

К чему это я клоню? Давайте посмотрим, к чему нас эта конструкция приведет. Я хочу применить к матрице А эл. преобразование $Э_1$ (неважно, какое оно именно). Применяя это преобразование, я делаю что-то со строчками матрицы A и E и получаю расширенную матрицу $(A_1 \mid W)$, W пока нам неизвестна. Но еще раз как мы помним, применить преобразование по строчкам, это все равно что умножить слева на U_1 – $A_1 = U_1 \cdot A$. Но значит, W это не какая-то там матрица непонятная, а это $U_1 \cdot E$. Значит $W = U_1$.

Применяя второе преобразование $Э_2$, я из $(A_1 \mid U_1)$ получаю $(A_2 \mid U_2 U_1)$. И тд и тп, пока не дойду до $(A_k \mid U_k \dots U_1)$, где A_k – у.с. вид. По завершении этого алгоритма я получу справа от черты мою искомую матрицу $U = U_k \dots U_1$, и при этом я вообще не вспотела даже и ни одной матрицы и не умножила, а только делала операции со строчками матриц. Давайте теперь решим в чиселках, чтобы стало понятнее:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \implies_{(2)-2\cdot(1)} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \implies_{(3)+3\cdot(1)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 6 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \implies_{(3)+2\cdot(2)} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \implies_{(2)\cdot -1/3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \implies_{(1)-(2)} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & -1/3 & 1 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Все, я привела матрицу A к у.с. виду, и справа от черты у меня записана результирующая матрица U, такая что $UA ==$ у.с. вид.

Важно отметить, что 1) элементарная матрица имеет размер 3 на 3, и матрица U также имеет размер 3 на 3; 2) алгоритм гаусса для приведения матрицы к у.с. виду я применяла именно к матрице до черты; то, что справа от черты стоит, я грубо говоря не трогаю; «не трогаю» значит, что я не обращаю на ступеньки после черты, меня интересуют ступеньки только до черты.