

## Семинар 1

---

### Краткое содержание

Обсудили сложение матриц. Доказали коммутативность этой операции. Упомянули транспонирование матриц.

Обсудили умножение матриц. Решили простой пример на понимание операций – вычислили значение  $AB^T + 3C$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Перемножили матрицы  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  в разном порядке и убедились, что умножение матриц не коммутативно.

Определили натуральную степень матрицы, а также нулевую степень:  $A^0 = E$ . Методом математической индукции доказали, что  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Обсудили быстрое возведение матрицы в степень. Поняли, что оно работает абсолютно также, как и с действительными числами. Игрушечный пример:

$A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A \rightarrow 3$  операции (3 раза умножили).

$A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A^2 \rightarrow 2$  операции (один раз возвели в степень, во второй раз перемножили результат друг на друга).

$A^9 = A^8 \cdot A = A^4 \cdot A^4 \cdot A \rightarrow 4$  операции (2 операции на возведение  $A$  в 4ую степень, 3-я на перемножение  $A^4$  на  $A^4$ , 4-ая на умножение на последнюю  $A$ )

Суть: переиспользуем уже подсчитанные результаты, перемножаем уже посчитанные степени матрицы. Обычно это делается по основанию двойки.

Посмотрели на результат умножения следующих матриц и получили:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \mu_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \mu_n \end{pmatrix}$$

Сделали вывод, что умножение диагональных матриц дает нам тоже диагональную матрицу.

Посмотрели на результат умножения следующих матриц и получили:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \dots & \lambda_n a_{1n} \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \dots & \lambda_n a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 a_{m1} & \lambda_2 a_{m2} & \dots & \lambda_n a_{mn} \end{pmatrix}$$

То есть, используя нотацию  $A^i$  –  $i$ -ый столбец матрицы  $A$ , получаем:

$$(A^1 \ A^2 \ \dots \ A^n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 A^1 \ \lambda_2 A^2 \ \dots \ \lambda_n A^n)$$



## Домашнее задание к семинару 2 (13.09.2022)

Номера с пометкой П даны по задачнику Проскурякова, с пометкой К – Кострикина.

1. Пусть  $A, B$  – произвольные матрицы одинакового размера и  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Докажите (расписав подробно), что  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$  и  $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ .
2. K17.1(г), K17.2(б)
3. Найдите все  $2 \times 2$ -матрицы  $B$ , коммутирующие с матрицей  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , то есть удовлетворяющие условию  $AB = BA$ .
4. Найти, чему равно выражение (расписать подробно):

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{pmatrix},$$

где  $A_i$  –  $i$ -ая строчка матрицы  $A \in Mat_{n \times m}(\mathbb{R})$ . Другими словами, правая матрица в выражении – это матрица  $A$ , записанная в терминах строчек. Найденный ответ надо записать тоже в таких же терминах.

5. П802
6. П803
7. П805
8. K17.7