**Données initiales**

La fonction f(x)=x2+x−2x−2f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}f(x)=x−2x2+x−2​ est définie sur R∖{2}\mathbb{R} \setminus \{2\}R∖{2}.

**1. Montrer que f(x)=x+3+4x−2f(x) = x + 3 + \frac{4}{x - 2}f(x)=x+3+x−24​ pour x≠2x \neq 2x=2**

On décompose le numérateur x2+x−2x^2 + x - 2x2+x−2 :

x2+x−2=(x−2)(x+3)x^2 + x - 2 = (x - 2)(x + 3)x2+x−2=(x−2)(x+3)

Ainsi :

f(x)=x2+x−2x−2=(x−2)(x+3)x−2,x≠2f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 3)}{x - 2}, \quad x \neq 2f(x)=x−2x2+x−2​=x−2(x−2)(x+3)​,x=2

Simplifions :

f(x)=x+3+4x−2f(x) = x + 3 + \frac{4}{x - 2}f(x)=x+3+x−24​

**2a. Montrer que f′(x)=x(x−4)(x−2)2f'(x) = \frac{x(x - 4)}{(x - 2)^2}f′(x)=(x−2)2x(x−4)​ pour x≠2x \neq 2x=2**

La dérivée de f(x)=x+3+4x−2f(x) = x + 3 + \frac{4}{x - 2}f(x)=x+3+x−24​ est donnée par :

* La dérivée de x+3x + 3x+3 est 111.
* La dérivée de 4x−2\frac{4}{x - 2}x−24​ est −4(x−2)2-\frac{4}{(x - 2)^2}−(x−2)24​.

Ainsi :

f′(x)=1−4(x−2)2f'(x) = 1 - \frac{4}{(x - 2)^2}f′(x)=1−(x−2)24​

Réécrivons f′(x)f'(x)f′(x) sous un dénominateur commun :

f′(x)=(x−2)2(x−2)2−4(x−2)2=(x−2)2−4(x−2)2f'(x) = \frac{(x - 2)^2}{(x - 2)^2} - \frac{4}{(x - 2)^2} = \frac{(x - 2)^2 - 4}{(x - 2)^2}f′(x)=(x−2)2(x−2)2​−(x−2)24​=(x−2)2(x−2)2−4​

Factorisons le numérateur (x−2)2−4(x - 2)^2 - 4(x−2)2−4 (identité remarquable) :

(x−2)2−4=(x−2−2)(x−2+2)=(x−4)x(x - 2)^2 - 4 = (x - 2 - 2)(x - 2 + 2) = (x - 4)x(x−2)2−4=(x−2−2)(x−2+2)=(x−4)x

Donc :

f′(x)=x(x−4)(x−2)2f'(x) = \frac{x(x - 4)}{(x - 2)^2}f′(x)=(x−2)2x(x−4)​

**2b. Déterminer le signe de f′(x)f'(x)f′(x) selon xxx**

f′(x)=x(x−4)(x−2)2f'(x) = \frac{x(x - 4)}{(x - 2)^2}f′(x)=(x−2)2x(x−4)​ :

* Le dénominateur (x−2)2(x - 2)^2(x−2)2 est toujours positif.
* Le signe de f′(x)f'(x)f′(x) dépend du numérateur x(x−4)x(x - 4)x(x−4).

Analysons le signe de x(x−4)x(x - 4)x(x−4) :

* x(x−4)>0x(x - 4) > 0x(x−4)>0 si x∈  ]−∞,0[∪]4,+∞[x \in \; ]-\infty, 0[ \cup ]4, +\infty[x∈]−∞,0[∪]4,+∞[
* x(x−4)<0x(x - 4) < 0x(x−4)<0 si x∈  ]0,4[x \in \; ]0, 4[x∈]0,4[

Tableau de signes pour f′(x)f'(x)f′(x) :

| **xxx** | **−∞-\infty−∞** | **000** | **222** | **444** | **+∞+\infty+∞** |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| f′(x)f'(x)f′(x) | +++ | −-− | Non défini | −-− | +++ |

**2c. Déterminer les variations de f(x)f(x)f(x)**

* f(x)f(x)f(x) est croissante sur ]−∞,0[]-\infty, 0[]−∞,0[ et ]4,+∞[]4, +\infty[]4,+∞[.
* f(x)f(x)f(x) est décroissante sur ]0,2[]0, 2[]0,2[ et ]2,4[]2, 4[]2,4[.

**2d. Limites de f(x)f(x)f(x)**

1. Lorsque x→−∞x \to -\inftyx→−∞ ou x→+∞x \to +\inftyx→+∞ :

lim⁡x→±∞f(x)=x+3+4x−2→x+3→∞\lim\_{x \to \pm\infty} f(x) = x + 3 + \frac{4}{x - 2} \to x + 3 \to \inftyx→±∞lim​f(x)=x+3+x−24​→x+3→∞

1. Aux abords de x=2x = 2x=2 :

lim⁡x→2−f(x)=−∞,lim⁡x→2+f(x)=+∞\lim\_{x \to 2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim\_{x \to 2^+} f(x) = +\inftyx→2−lim​f(x)=−∞,x→2+lim​f(x)=+∞

**2e. Calcul de f(0)f(0)f(0) et f(4)f(4)f(4)**

1. Pour f(0)f(0)f(0) :

f(0)=0+3+40−2=3−2=1f(0) = 0 + 3 + \frac{4}{0 - 2} = 3 - 2 = 1f(0)=0+3+0−24​=3−2=1

1. Pour f(4)f(4)f(4) :

f(4)=4+3+44−2=7+2=9f(4) = 4 + 3 + \frac{4}{4 - 2} = 7 + 2 = 9f(4)=4+3+4−24​=7+2=9

**3a. Montrer que la droite Δ:x=2\Delta : x = 2Δ:x=2 est asymptote verticale**

Pour x=2x = 2x=2, f(x)→±∞f(x) \to \pm\inftyf(x)→±∞, donc Δ\DeltaΔ est une asymptote verticale.

**3b. Montrer que la droite D:y=x+3D : y = x + 3D:y=x+3 est une asymptote oblique**

Pour x→±∞x \to \pm\inftyx→±∞, f(x)=x+3+4x−2f(x) = x + 3 + \frac{4}{x - 2}f(x)=x+3+x−24​ :

* 4x−2→0\frac{4}{x - 2} \to 0x−24​→0, donc f(x)→x+3f(x) \to x + 3f(x)→x+3.

Ainsi, D:y=x+3D : y = x + 3D:y=x+3 est une asymptote oblique.

**3c. Positions relatives de (C)(C)(C) et (D)(D)(D)**

* Étudiez le signe de f(x)−(x+3)=4x−2f(x) - (x + 3) = \frac{4}{x - 2}f(x)−(x+3)=x−24​.

**4. Tracer Δ\DeltaΔ et DDD, puis la courbe (C)(C)(C)**

* Δ\DeltaΔ est une droite verticale en x=2x = 2x=2.
* DDD est une droite oblique y=x+3y = x + 3y=x+3.
* Tracez (C)(C)(C) en tenant compte des asymptotes, variations, et limites.