КОМПЬЮТЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

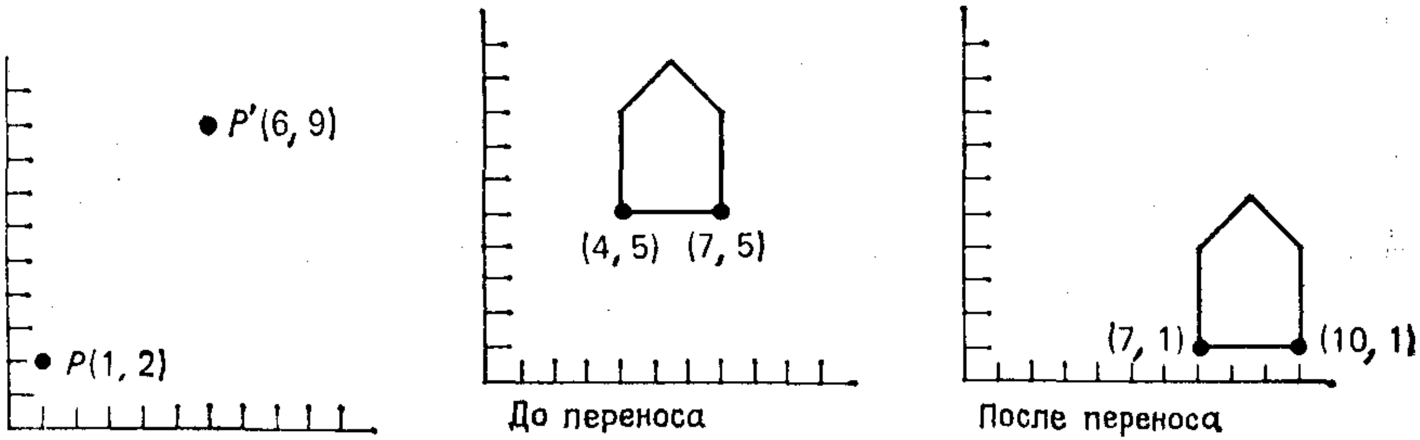
Компьютерная геометрия – математический аппарат, положенный в основу компьютерной графики.

Преобразования, как и компьютерную геометрию, разделяют на *двумерные* (или преобразования на плоскости) и *трехмерные* (или пространственные).

Координатный метод был введен в XVII веке французскими математиками Р. Декартом и П. Ферма.

ПРОСТЕЙШИЕ ДВУМЕРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. Перенос. $x' = x + Dx, \quad y' = y + Dy.$



$$P = [x\,y], \quad P' = [x'\,y'], \quad T = [Dx\,Dy],$$

$$[x' \quad y'] = [x \quad y] + [Dx\ Dy] = [x + Dx \quad y + Dy]$$

$$P' = P + T.$$

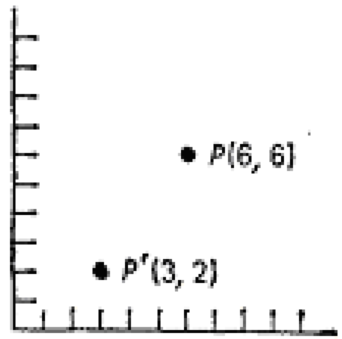
ПРОСТЕЙШИЕ ДВУМЕРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

2. Масштабирование. $x' = x \cdot Sx, \quad y' = y \cdot Sy.$

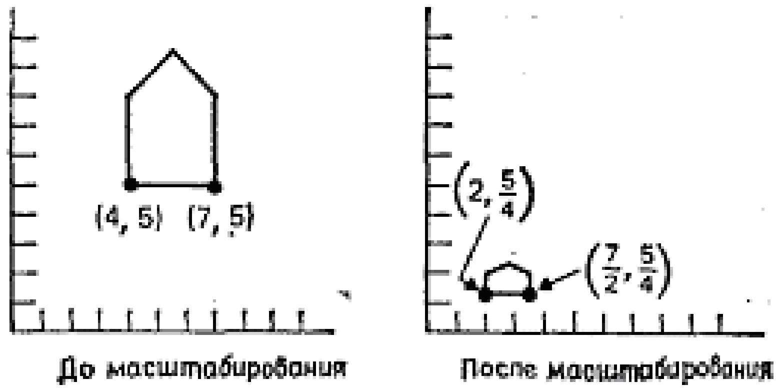
$$S = \begin{bmatrix} Sx & 0 \\ 0 & Sy \end{bmatrix}$$

$$[x'\ y'] = [x\ y] \begin{bmatrix} Sx & 0 \\ 0 & Sy \end{bmatrix}$$

$$P' = P \cdot S.$$



Масштабирование точки.



Масштабирование объекта.

ПРОСТЕЙШИЕ ДВУМЕРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (ax + cy) & (bx + dy) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1x + 0y) & (0x + 1y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (ax + 0y) & (0x + 1y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (ax + 0y) & (0x + dy) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & dy \end{bmatrix}$$

ПРОСТЕЙШИЕ ДВУМЕРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[(-1x + 0y)(0x + 1y)\right] = \begin{bmatrix} -x & y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[(0x + 1y)(1x + 0y)\right] = [y, x]$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & (bx + y) \end{bmatrix}$$

ПРОСТЕЙШИЕ ДВУМЕРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

3. Поворот.

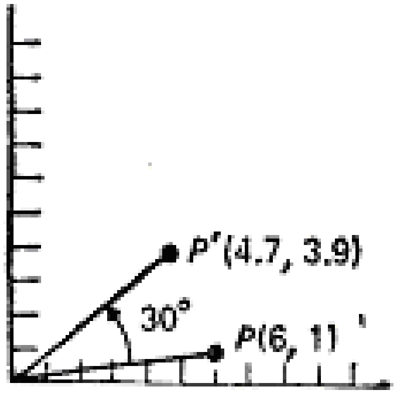
$$x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta,$$
$$y' = x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta.$$

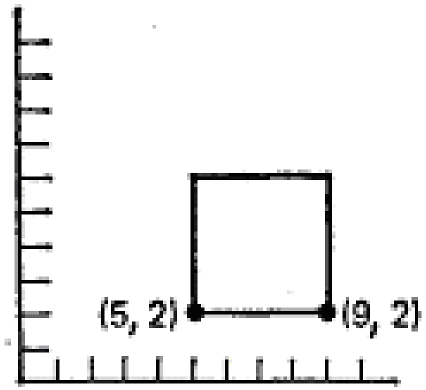
Матрица преобразования общего вида записывается так:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

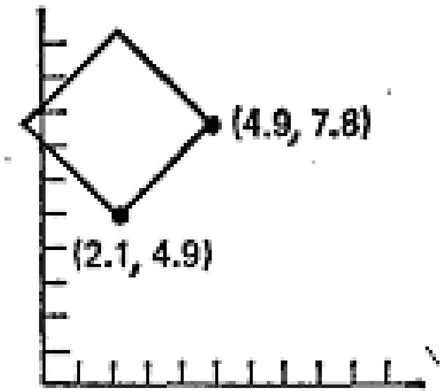
$$[x' \; y'] = [x \; y] \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$P' = P \cdot R,$$





До поворота



После поворота

ПРОСТЕЙШИЕ ДВУМЕРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

3. Поворот.

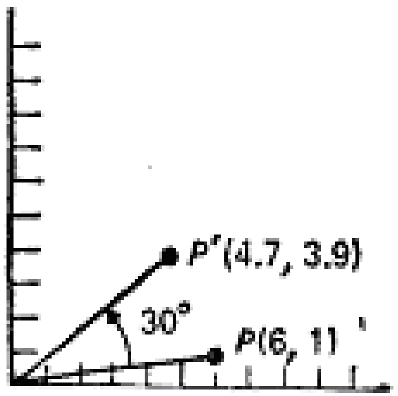
$$x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta,$$
$$y' = x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta.$$

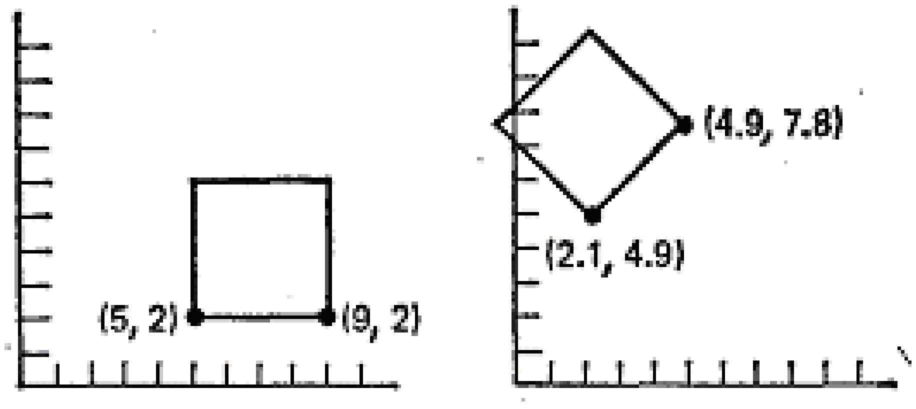
Матрица преобразования общего вида записывается так:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$[x' \; y'] = [x \; y] \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$P' = P \cdot R,$$





До поворота

После поворота

ПРОСТЕЙШИЕ ДВУМЕРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Поворот на 90.

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Поворот на 180.

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

вращение вокруг линии $y = x$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

$$P' = P + T,$$
$$P' = P \cdot S,$$
$$P' = P \cdot R.$$

ОДНОРОДНЫЕ КООРДИНАТЫ

Декартовые координаты

$P\ (x,\ y)$

Однородные координаты

$P\ (W\cdot x,\ W\cdot y,\ W)\qquad W \neq 0.$

Однородные координаты

$P\ (X,\ Y,\ W).$

Декартовые координаты

$P\ (x,\ y)\qquad x=X/W$ и $y=Y/W.$

ПРОСТЕЙШИЕ ДВУМЕРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ОДНОРОДНЫЕ КООРДИНАТЫ

1. Перенос.

$$[x'\ y'\ 1] = [x\ y\ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Dx & Dy & 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = P \cdot T\,(Dx,\ Dy),$$

$$T\,(Dx,\ Dy) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Dx & Dy & 1 \end{bmatrix}.$$

ПРОСТЕЙШИЕ ДВУМЕРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ОДНОРОДНЫЕ КООРДИНАТЫ

1. Последовательный перенос.

$$P' = P \cdot T(Dx_1,\ Dy_1),$$
$$P'' = P' \cdot T(Dx_2,\ Dy_2).$$

$$P'' = (P \cdot T(Dx_1,\ Dy_1)) \cdot T(Dx_2,\ Dy_2) = P \cdot (T(Dx_1,\ Dy_1) \cdot T(Dx_2,\ Dy_2)).$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Dx_1 & Dy_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Dx_2 & Dy_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Dx_1 + Dx_2 & Dy_1 + Dy_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

ПРОСТЕЙШИЕ ДВУМЕРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ОДНОРОДНЫЕ КООРДИНАТЫ

2. Масштабирование.

$$[x'\ y'\ 1] = [x\ y\ 1] \cdot \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$S(Sx,\ Sy) = \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P' = P \cdot S(Sx,\ Sy).$$

ПРОСТЕЙШИЕ ДВУМЕРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ОДНОРОДНЫЕ КООРДИНАТЫ

2. Последовательное масштабирование.

$$P' = P \cdot S(Sx_1,\ Sy_1),$$
$$P'' = P' \cdot S(Sx_2,\ Sy_2),$$

$$P' = (P \cdot S(Sx_1,\ Sy_1)) \cdot S(Sx_2,\ Sy_2) = P \cdot (S(Sx_1,\ Sy_1) \cdot S(Sx_2,\ Sy_2)).$$

$$\begin{bmatrix} Sx_1 & 0 & 0 \\ 0 & Sy_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Sx_2 & 0 & 0 \\ 0 & Sy_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sx_1 \cdot Sx_2 & 0 & 0 \\ 0 & Sy_1 \cdot Sy_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ПРОСТЕЙШИЕ ДВУМЕРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ОДНОРОДНЫЕ КООРДИНАТЫ

3. Поворот.

$$[x' \ \ y' \ \ 1] = [x \ \ y \ \ 1] \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P' = P \cdot R(\theta).$$

ПРОСТЕЙШИЕ ДВУМЕРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ОДНОРОДНЫЕ КООРДИНАТЫ

3. Последовательные повороты.

$$R(\alpha)R(\beta)=\begin{bmatrix} Cos\alpha & Sin\alpha & 0 \\ -Sin\alpha & Cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Cos\beta & Sin\beta & 0 \\ -Sin\beta & Cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cos(\alpha+\beta) & Sin(\alpha+\beta) & 0 \\ -Sin(\alpha+\beta) & Cos(\alpha+\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ОДНОРОДНЫХ КООРДИНАТАХ

Общий вид матрицы преобразований

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & p \\ c & d & q \\ \hline m & n & s \end{array}\right]$$

Элементы a, b, c и d осуществляют изменение масштаба, сдвиг и вращение; m и n выполняют смещение, а p и q – получение проекций. Оставшаяся часть матрицы, элемент s, производит полное изменение масштаба.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ОДНОРОДНЫХ КООРДИНАТАХ

$$[X \quad Y \quad W] = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} = [x \quad y \quad s].$$

$X = x$, $Y = y$, а $W = s$.

$[x \;\; y \;\; 1] \; \text{–>} \; [x/s \;\; y/s \;\; 1]$

КОМПОЗИЦИЯ ДВУМЕРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

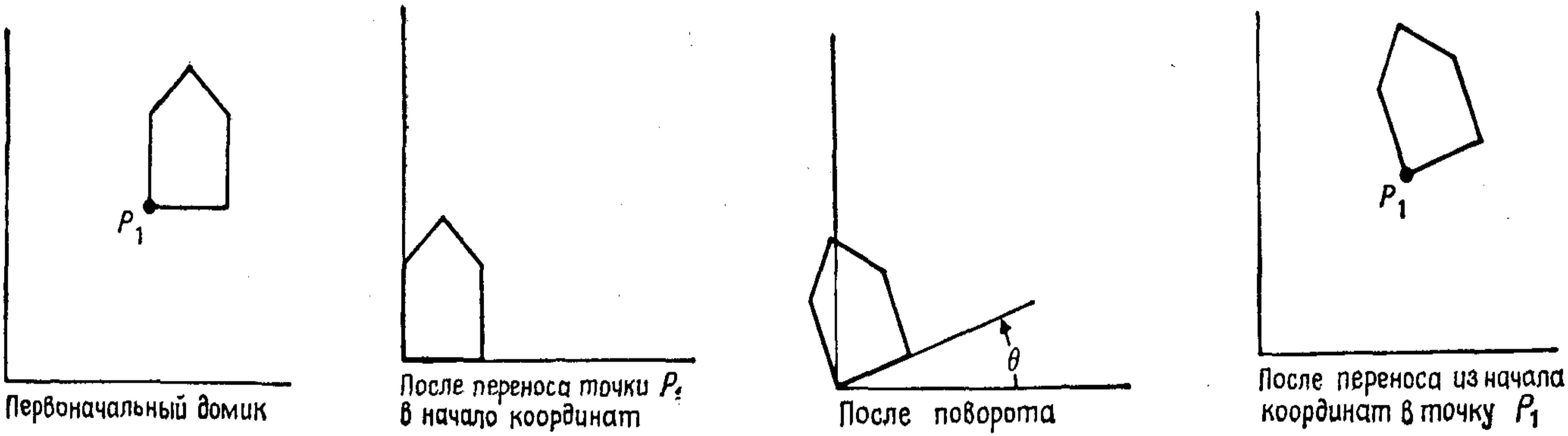
Поворот объекта относительно некоторой произвольной точки P_i.

1. Перенос объекта и точки P_i, при котором точка P_i перемещается в начало координат.

2. Выполнить поворот объекта относительно начала координат.

3. Перенос объекта и точки P_i, при котором точка P_i, из начала координат возвращается в первоначальное положение P_i.

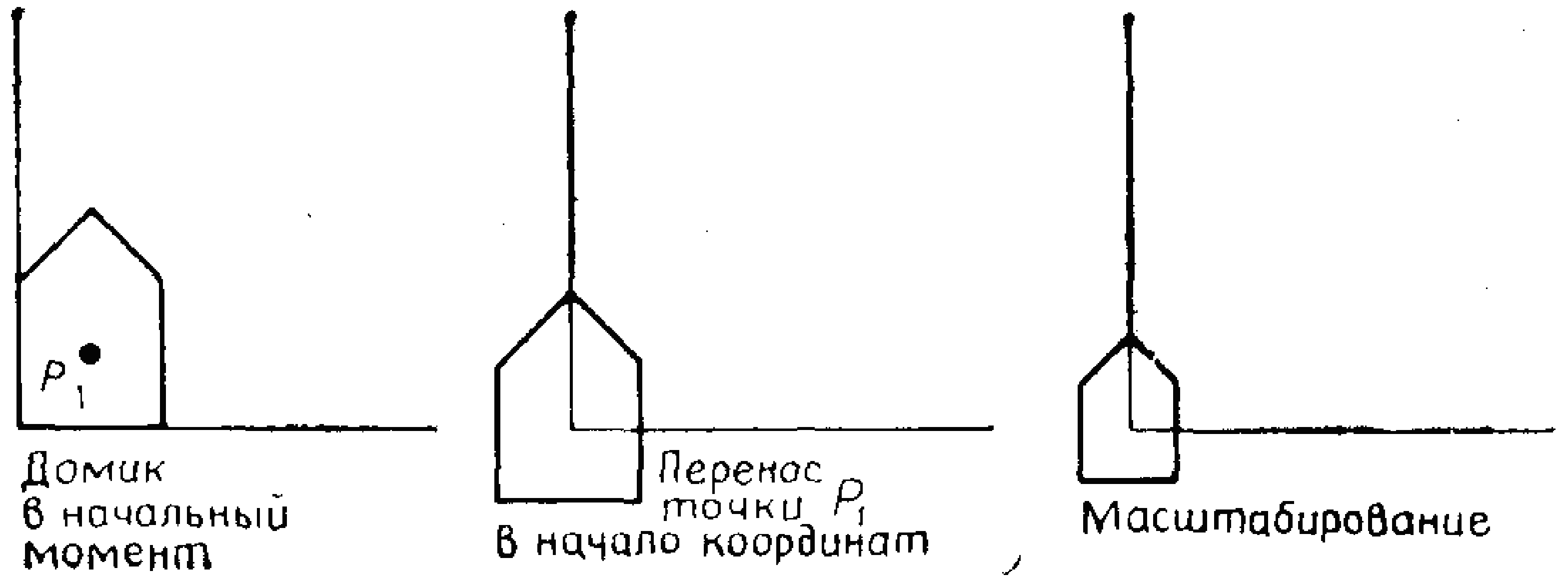
КОМПОЗИЦИЯ ДВУМЕРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ



Поворот вокруг точки P_1.

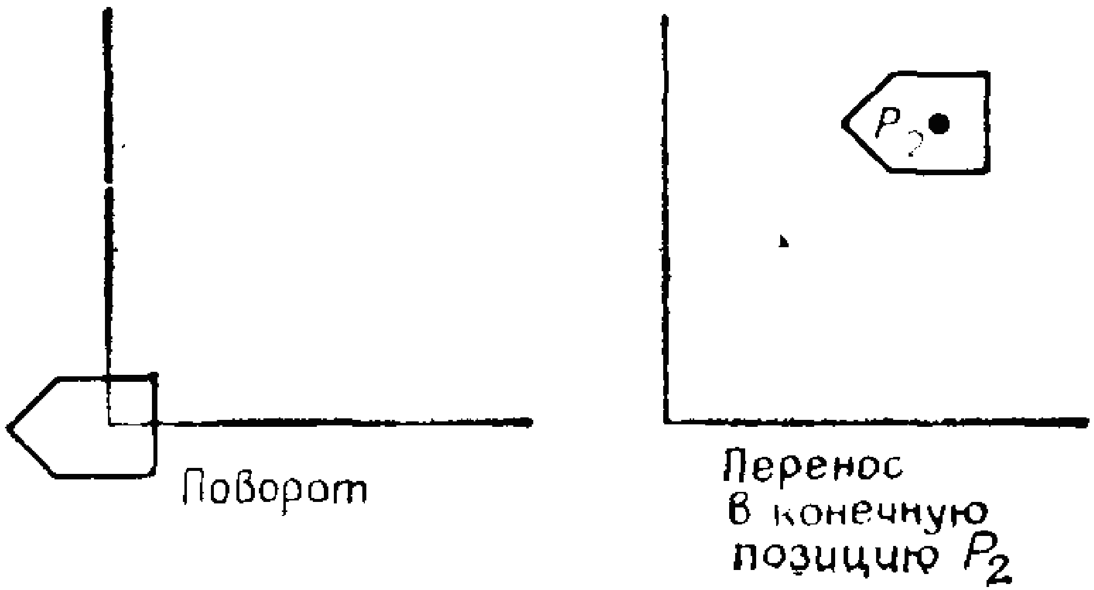
КОМПОЗИЦИЯ ДВУМЕРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Масштабирование объекта относительно некоторой произвольной точки P_i.



КОМПОЗИЦИЯ ДВУМЕРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Поворот объекта относительно некоторой произвольной точки P_i.



КОМПОЗИЦИЯ ДВУМЕРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Для отражения объекта относительно произвольной прямой_необходимо выполнить следующие действия:

– перемещение линии и объекта, таким образом, чтобы линия прошла через начало координат;
– поворот линии и объекта вокруг точки начала координат до совпадения с одной из координатных осей;
– отражение относительно координатной оси;
– обратный поворот вокруг начала координат;
– перемещение в исходное положение.

КОММУТАТИВНОЕ УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

$$M_1 * M_2 \neq M_2 * M_1$$

За исключением

M_1	M_2
Перенос	Перенос
Масштабирование	Масштабирование
Поворот	Поворот
Масштабирование (при $S_x = S_y$)	Поворот