ПРОЕКЦИИ

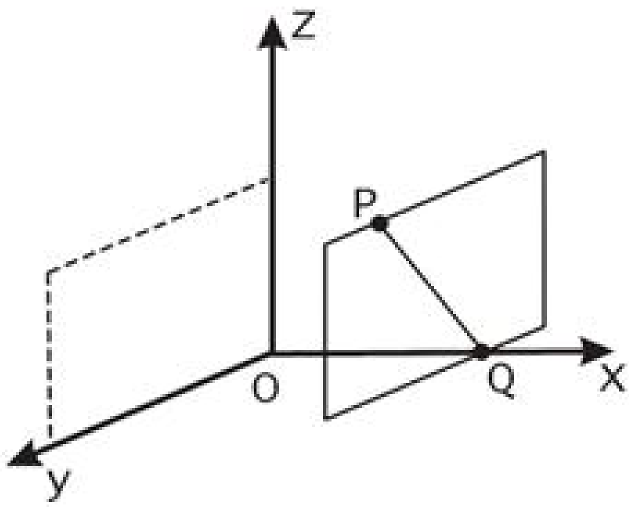
Проецирование – отображение точек, заданных в системе координат с размерностью N, в точки в системе меньшей размерности.

Проекторы (проецирующие лучи) – отрезки прямых, идущие из центра проекции через каждую точку объекта до пересечения с плоскостью проекции (картинной плоскостью).

Проекцией точки на координатную ось называется точка пересечения плоскости, проходящей через заданную точку и параллельной плоскости, образованной двумя другими осями координат. Например, на рис. 29 проекцией точки P на ось Ox является точка Q, которая принадлежит плоскости, параллельной плоскости zOy.

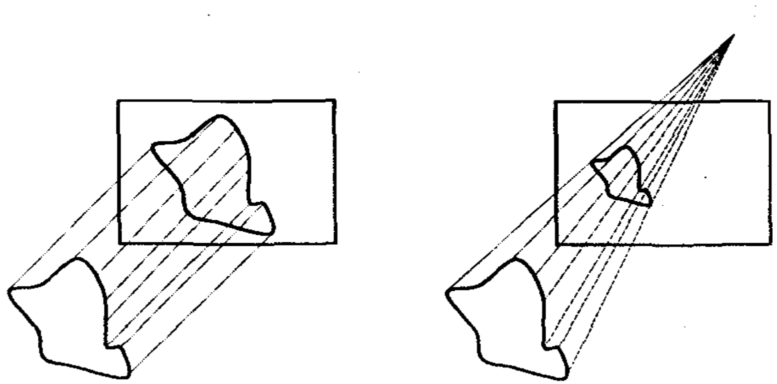
ПРОЕКЦИИ

Проекцией точки на координатную ось называется точка пересечения плоскости, проходящей через заданную точку и параллельной плоскости, образованной двумя другими осями координат. Например, на рис. 29 проекцией точки P на ось Ox является точка Q, которая принадлежит плоскости, параллельной плоскости zOy.



ПРОЕКЦИИ

Тип проецирования на плоскую, а не искривленную поверхность, где в качестве проецирующих лучей используются прямые, а не искривленные линии, называется плоской геометрической проекцией, которые делятся на два вида: центральные (перспективные) и параллельные.



ПРОЕКЦИИ

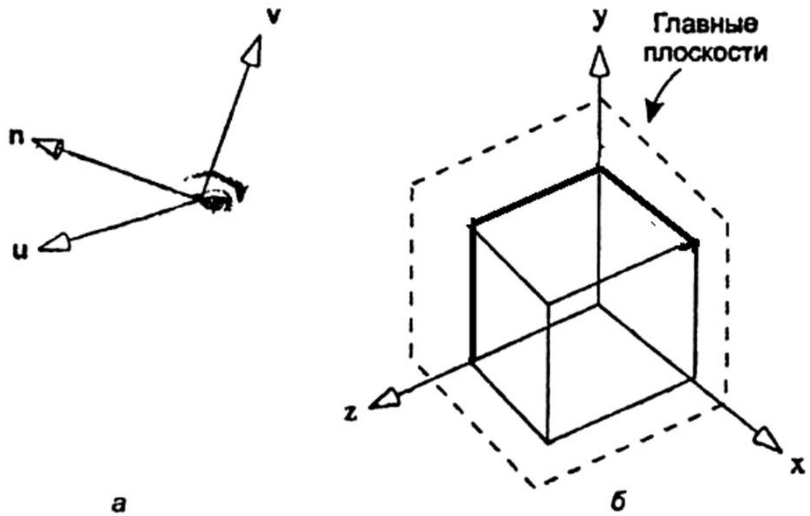
1. При параллельном проектировании считается, что центр лучей (прямых) бесконечно удален, а прямые параллельны.
2. При центральном проектировании (перспективном) все прямые исходят из одной точки, центр проекции находится на конечном расстоянии от проекционной плоскости.

ПРОЕКЦИИ

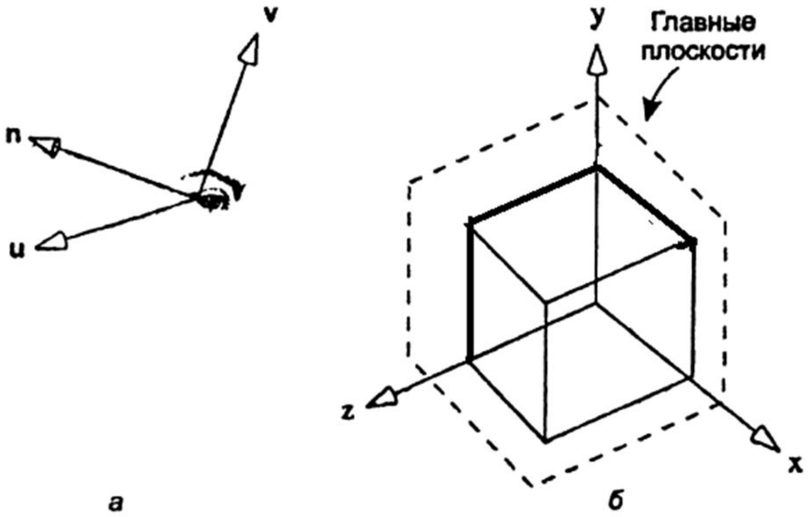
Проекции
Параллельные
Перспективные
Косоугольные
Ортогональные
Одноточ ечные
Двухточе чные
Трехточе чные
Проецирование на несколько плоскостей
Аксонометрические
Свободные
Кабинетные
Изометрия
Диметрия
Триметрия

ПЕРСПЕКТИВНЫЕ ПРОЕКЦИИ

Перспективные проекции обычно разделяются на три класса: одноточечные, двухточечные и трехточечные проекции, отличающиеся ориентацией камеры относительно мировой системы координат.



ПЕРСПЕКТИВНЫЕ ПРОЕКЦИИ



Единичный куб расположен в октанте с положительными значениями *x, y*, z, один угол куба совпадает с началом координат. Ребра выровнены по мировым координатным осям, заданными направлениями ортов i, j, k. Три плоскости *x*=0, *y*=0, *z*=0 называются главными плоскостями, и шесть граней куба выровнены по ним.

ПЕРСПЕКТИВНЫЕ ПРОЕКЦИИ

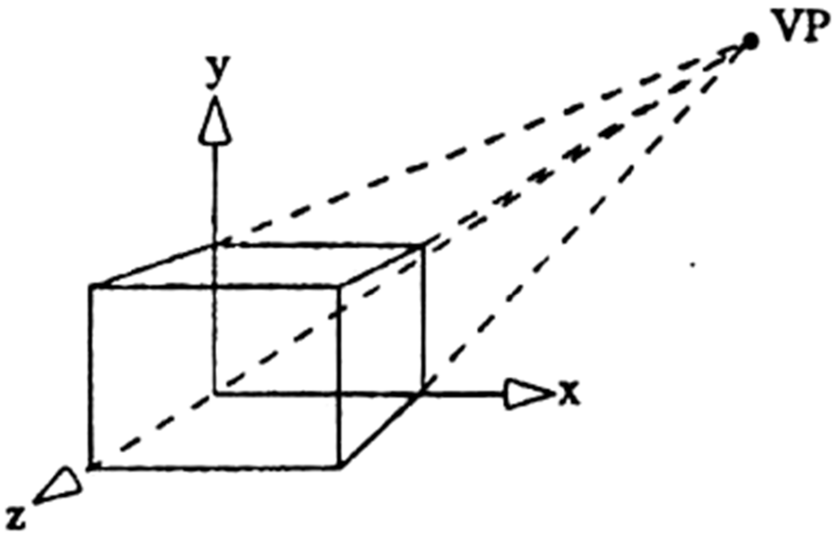
Ось n камеры может быть перпендикулярна той или иной главной оси. Традиционно принято разделять перспективные проекции по категориям в зависимости от числа конечных точек схода, образуемых главными осями.

Точкой схода называется точка пересечения центральных проекций любой совокупности параллельный прямых, которые не параллельны проекционной плоскости.

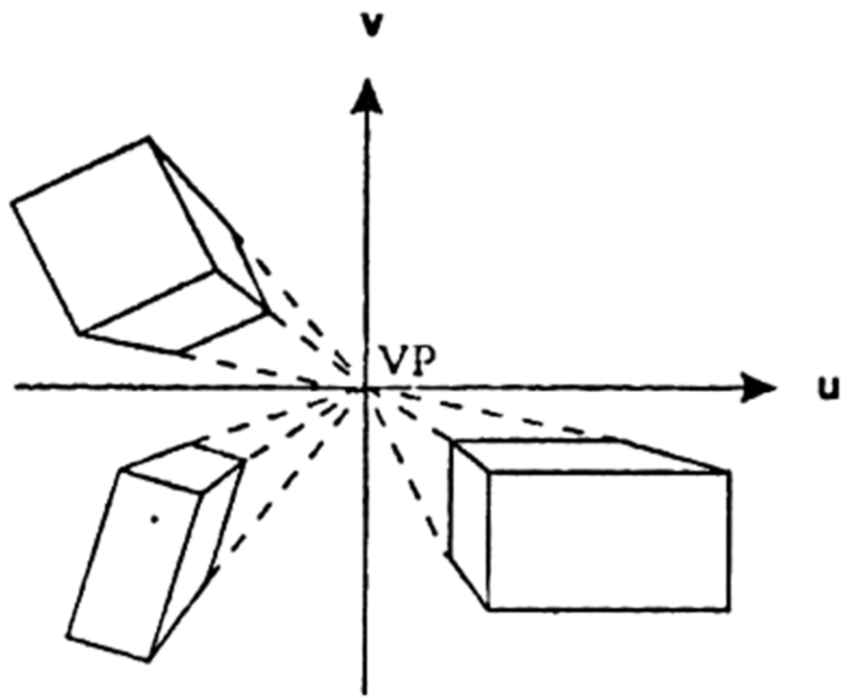
Существует бесконечное множество точек схода.

Точка схода называется главной, если совокупность прямых параллельна одной из координатных осей.

ОДНОТОЧЕЧНАЯ ПЕРСПЕКТИВА

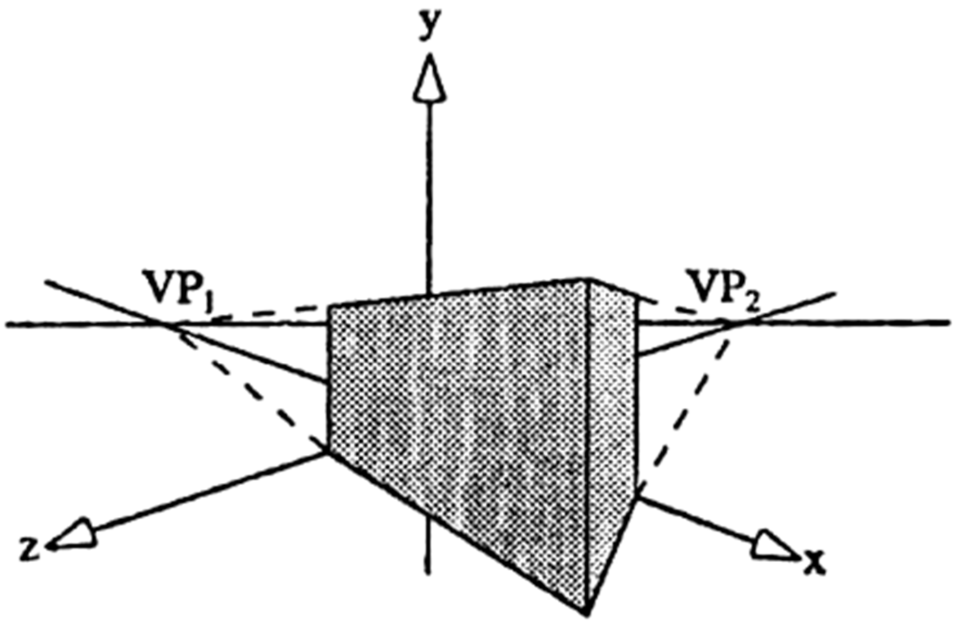


а

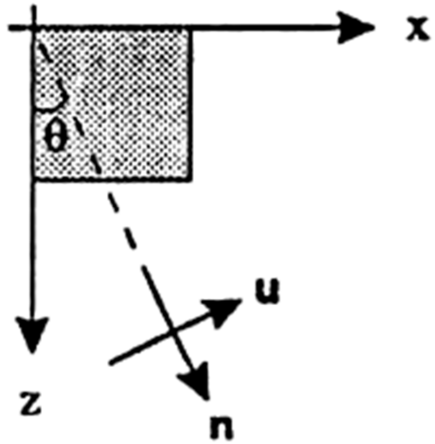


б

ДВУХТОЧЕЧНАЯ ПЕРСПЕКТИВА

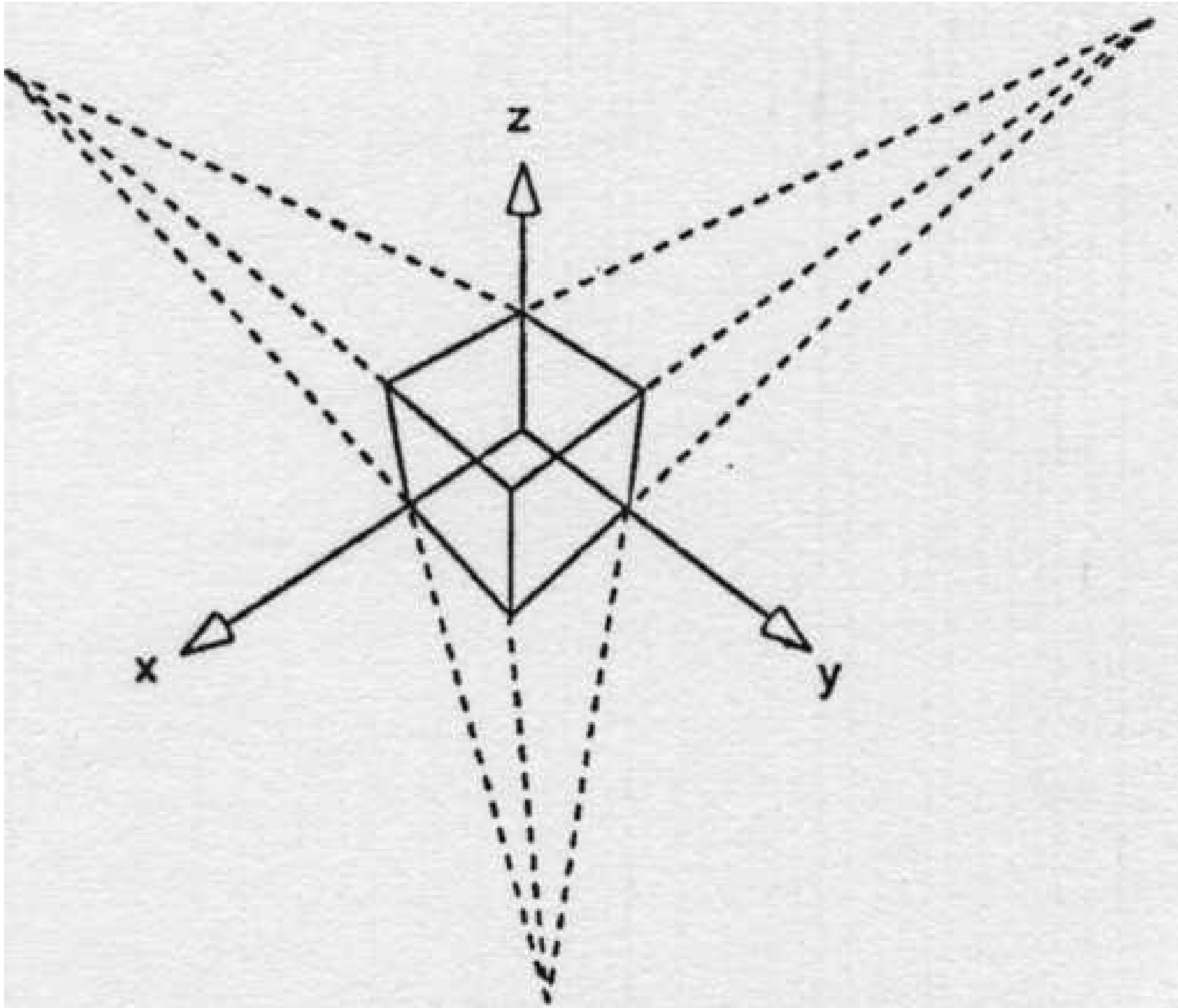


а



б

ТРЕХТОЧЕЧНАЯ ПЕРСПЕКТИВА



ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

– ортографические или ортогональные, в которых направление проецирования является нормалью к проекционной плоскости;
– косоугольные, в которых направление проецирования и нормаль к проекционной плоскости не совпадают.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

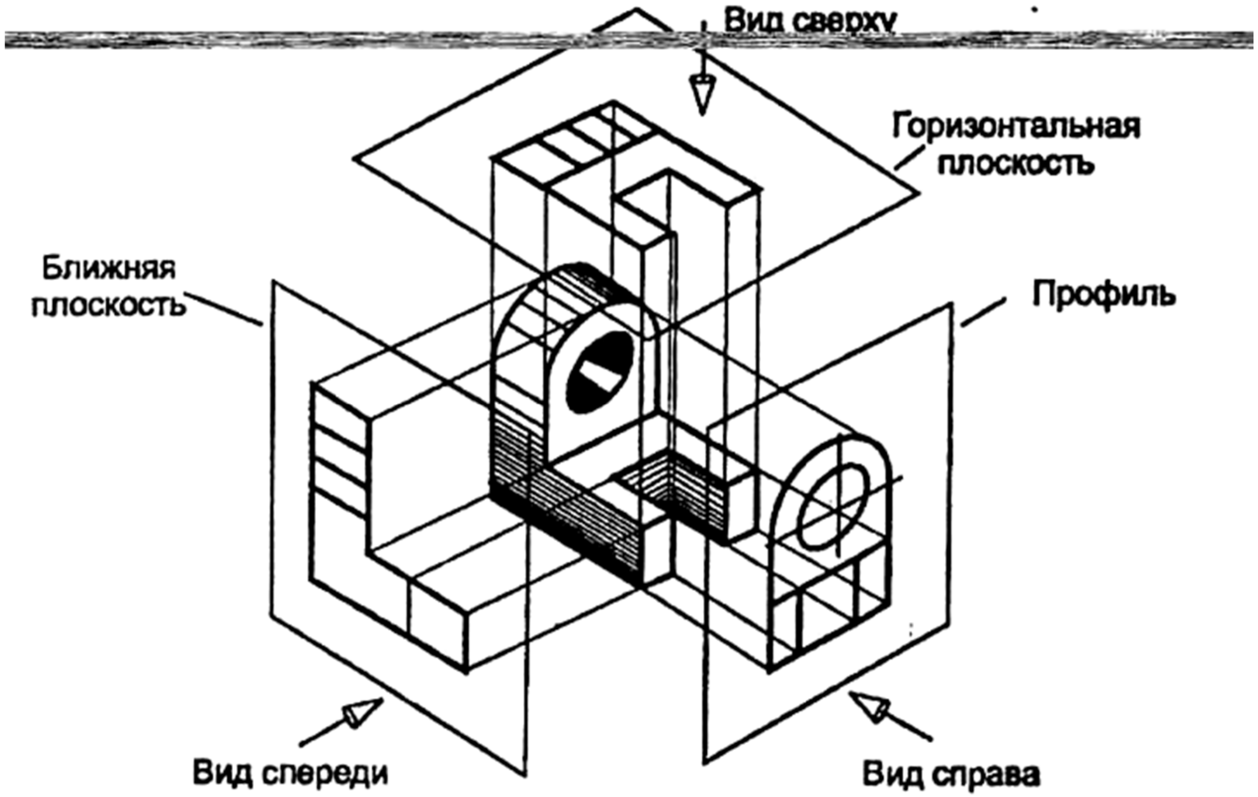
В зависимости от положения осей системы координат объекта относительно проекционной плоскости ортографические проекции могут быть:

– параллельная прямоугольная проекция;

– аксонометрические проекции.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

Простейшей проекцией является параллельная прямоугольная проекция. В ней совместно изображаются виды сверху, спереди и сбоку.



ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

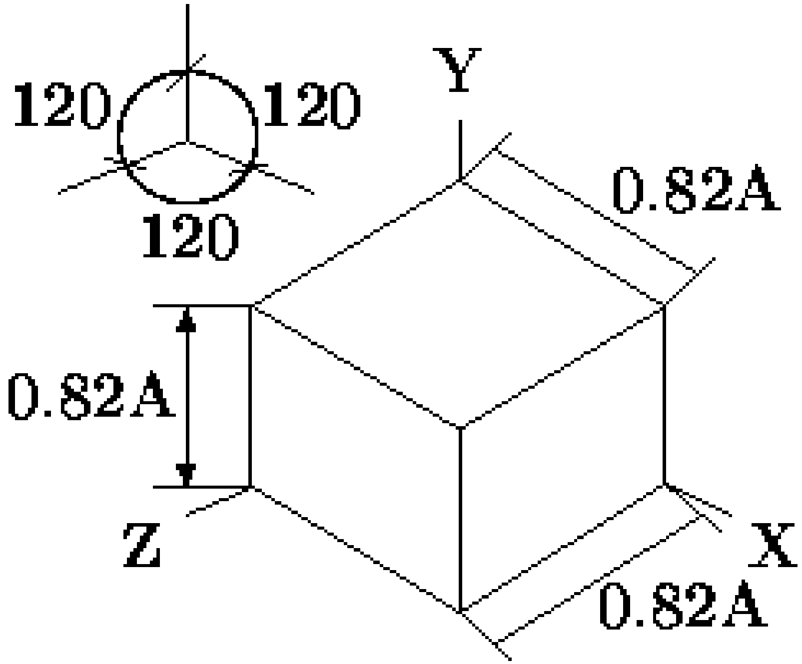
Аксонометрическая проекция — это проекция на одну плоскость. При этом направление проецирования выбирают так, чтобы оно не совпадало ни с одной из координатных осей.

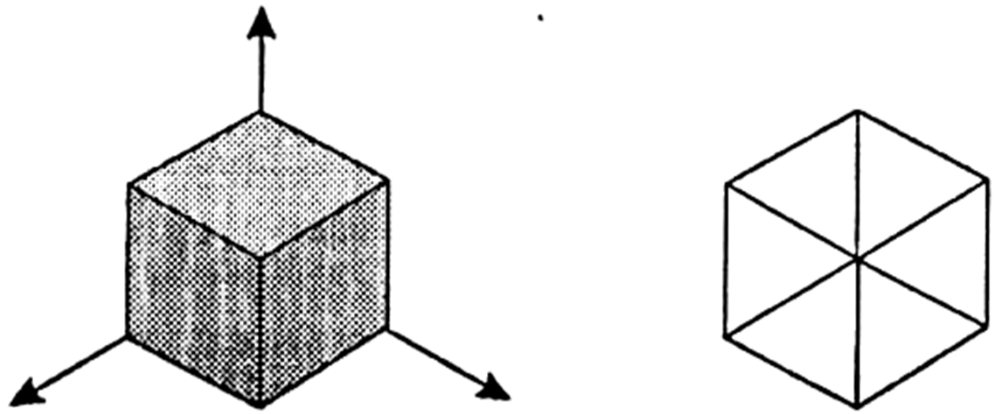
Аксонометрические проекции делятся на три основных вида:

1) изометрические, т.е. одинакового измерения (оси z', x' и y' наклонены одинаково; следовательно, уменьшение размеров по направлению всех трех осей одинаковое);

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

Изометрические.

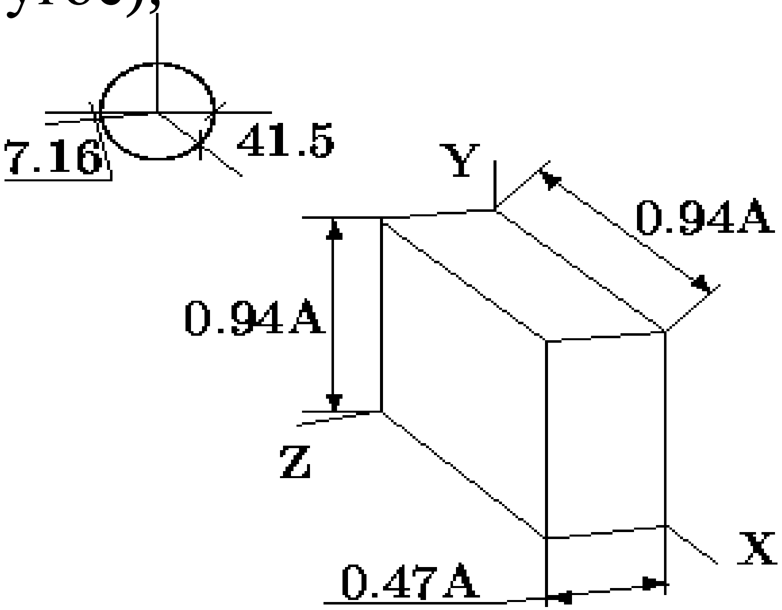


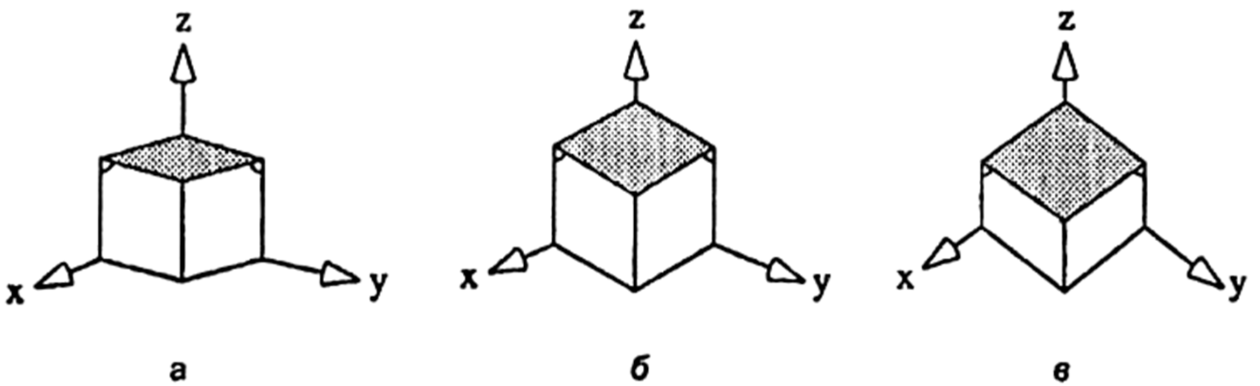


а б

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

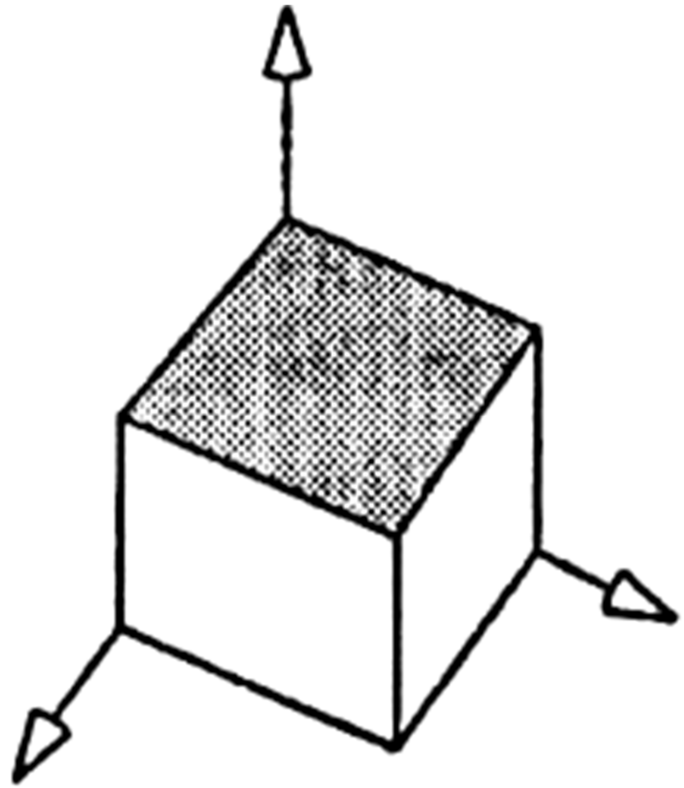
2) диметрические, т. е. двойного измерения (две оси координат имеют один и тот же наклон, а третья − другой; следовательно, уменьшение размеров по этим двум осям будет одно и то же, а по третьей оси − другое);





ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

3) триметрические, т.е. тройного измерения (все оси имеют разный наклон; следовательно, уменьшение размеров по направлению всех трех осей разное).



КОСОУГОЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

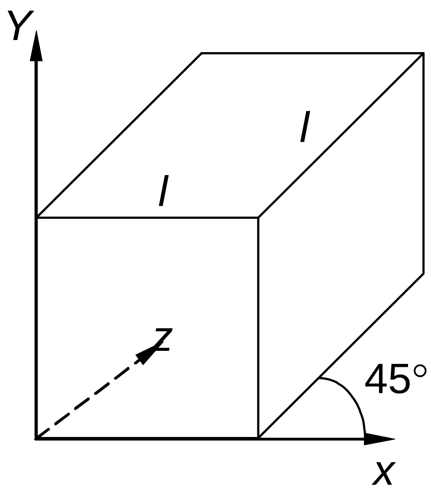
Косоугольные (наклонные) проекции сочетают в себе свойства ортографических проекций (видов спереди, сверху и сбоку) со свойствами аксонометрии. В этом случае проекционная плоскость перпендикулярна главной координатной оси, поэтому сторона объекта, параллельная этой плоскости, проецируется так, что можно измерить углы и расстояния.

КОСОУГОЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

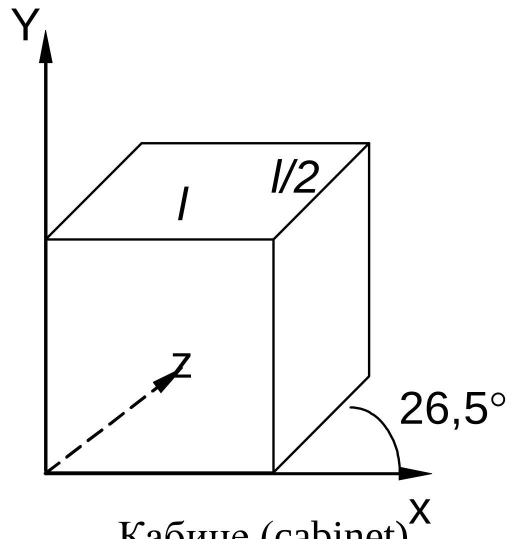
Двумя важными видами косоугольных проекций являются проекции:

– Кавалье (cavalier) – горизонтальная косоугольная изометрия (военная перспектива);

– Кабине (cabinet) – фронтальная косоугольная диметрия.



Кавалье (cavalier)



Кабине (cabinet)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПЛОСКИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Центральная (перспективная) проекция получается путем перспективного преобразования и проецирования на некоторую двухмерную плоскость «наблюдения». Перспективная проекция на плоскость Z = 0 обеспечивается преобразованием

$$[X\ Y\ Z\ H] = [x\ y\ z\ 1]*\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x\ y\ 0\ (rz+1)].$$

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПЛОСКИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Одноточечная перспектива

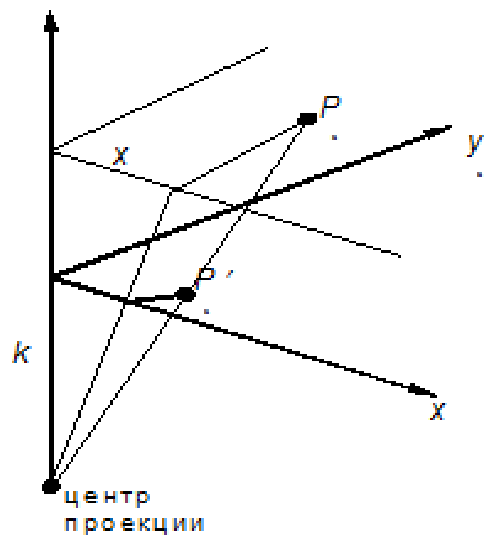
$$x' = \frac{X}{H} = \frac{x}{rz+1};$$

$$y' = \frac{Y}{H} = \frac{y}{rz+1};$$

$$z' = \frac{Z}{H} = \frac{0}{rz+1},$$

$$r = \frac{1}{k}.$$

$$[X\,Y\,Z\,H] = [x\,y\,z\,1] * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x\,y\,0\,(rz+1)].$$



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПЛОСКИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Одноточечная перспектива

$$[X\ Y\ Z\ H] = [x\ y\ z\ 1] * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x\ y\ z\ (rz+1)].$$

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПЛОСКИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Одноточечная перспектива

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПЛОСКИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

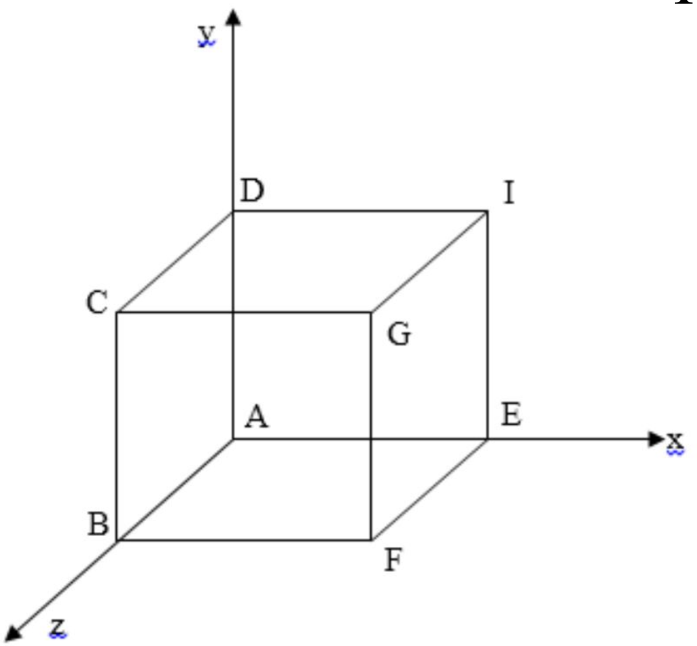
Двухточечная перспектива

$$(x',\ y',\ z',\ 1) = (x,\ y,\ z,\ 1)\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & p\\ 0 & 1 & 0 & q\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = [x,\ y,\ 0,\ (px+qu+1)];$$

$$(x',\ y',\ z',\ 1) = \left(\frac{x}{px+qy+1}, \frac{y}{px+qy+1}, 0, 1\right).$$

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПЛОСКИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

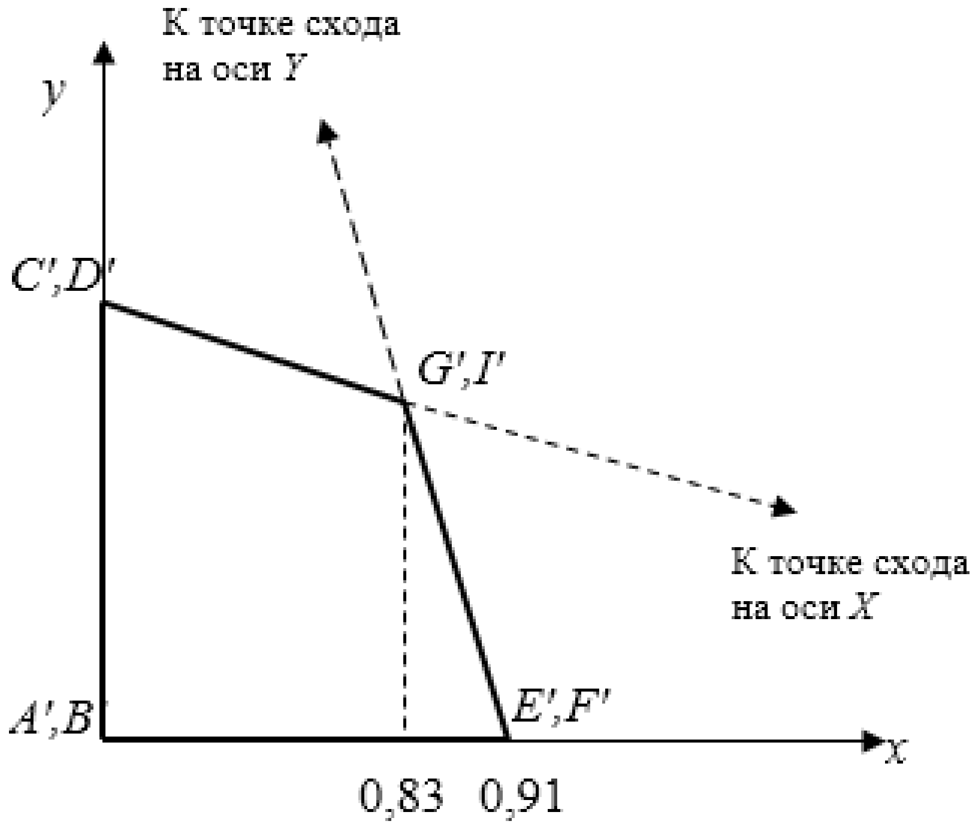
Пример



$$\begin{array}{c} A\\ B\\ C\\ D\\ E\\ F\\ G\\ I \end{array}\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&1&1&1\\0&1&0&1\\1&0&0&1\\1&0&1&1\\1&1&1&1\\1&1&0&1\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1&0&0&0{,}1\\0&1&0&0{,}1\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&1{,}1\\0&1&0&1{,}1\\1&0&0&1{,}1\\1&0&0&1{,}1\\1&1&0&1{,}2\\1&1&0&1{,}2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0{,}91&0&1\\0&0{,}91&0&1\\0{,}91&0&0&1\\0{,}91&0&0&1\\0{,}83&0{,}83&0&1\\0{,}83&0{,}83&0&1\end{bmatrix}\begin{array}{c} A'\\ B'\\ C'\\ D'\\ E'\\ F'\\ G'\\ I' \end{array}$$

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПЛОСКИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Пример



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПЛОСКИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Трехточечная перспектива

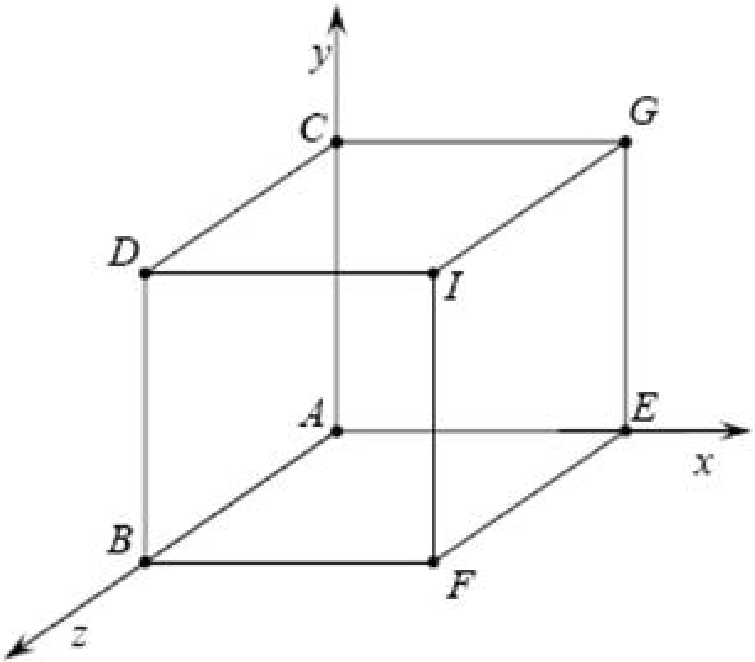
$$(x', y', z', 1) = (x, y, z, 1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x\ y\ z\ (px+qy+rz+1)]$$

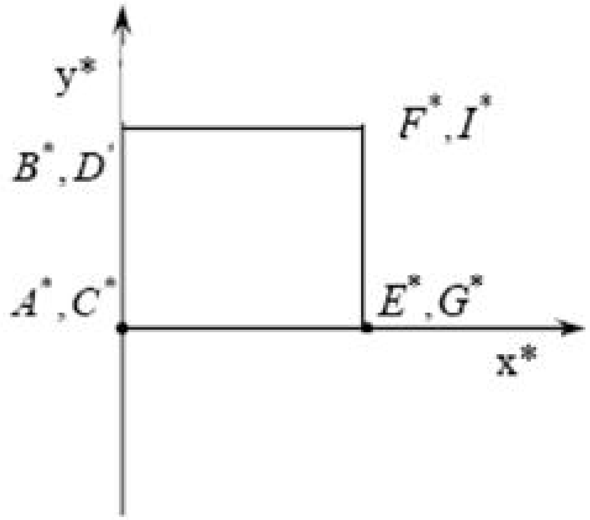
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПЛОСКИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Ортографические проекции

$$T_{opt}(x=0)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad T_{opt}(y=0)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad T_{opt}(z=0)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Пример





$$
\begin{array}{c}
A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ I
\end{array}
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{array}{c}
A^* \\ B^* \\ C^* \\ D^* \\ E^* \\ F^* \\ G^* \\ I^*
\end{array}
$$