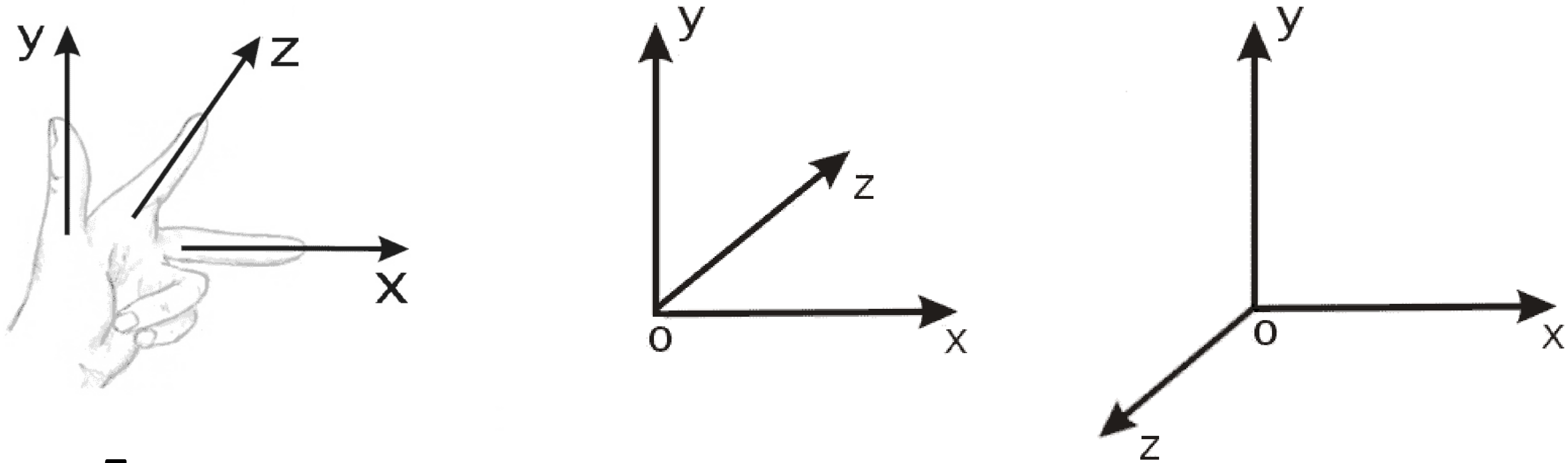
ТРЕХМЕРНАЯ СИСТЕМ КООРДИНАТ



Левосторонняя и правосторонння системы координат

Если посмотреть из положительной полуоси *Oz* в направлении начала координат, то для совмещения положительной полуоси *Ox* с положительной полуосью *Oy* необходимо повернуть *Ox* относительно начала координат против часовой стрелки – в этом случае имеем **правую систему координат**; если же поворот производится по часовой стрелке – то **система координат левая**.

ТРЕХМЕРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ОДНОРОДНЫХ КООРДИНАТАХ

Декартовые и однородные координаты

$$[X \quad Y \quad Z \quad W] = [x \quad y \quad z \quad 1]$$

$$[x \ y \ z \ 1] = [\frac{X}{W}, \frac{Y}{W}, \frac{Z}{W}, 1], \ W \neq 0.$$

Матрица 3?3 осуществляет линейное преобразование в виде изменения масштаба, сдвига и вращения.
Матрица-строка 1?3 производит перенос, а матрица-столбец 3?1 – преобразование в перспективе.
Последний скалярный элемент выполняет общее изменение масштаба.

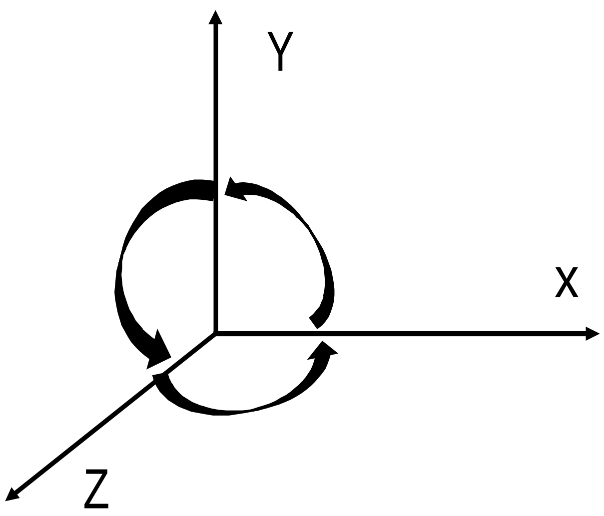
Обобщенная матрица преобразований

$$T = \begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ h & i & j & r \\ l & m & n & s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3\times 3 & 3\times 1 \\ 1\times 3 & 1\times 1 \end{bmatrix}$$

ТРЕХМЕРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ПРАВОСТОРОННЕЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Если смотреть из положительной части оси вращения (например, оси X) в направлении начала координат, то поворот на 90° против часовой стрелки будет переводить одну положительную полуось в другую (ось X в Y, в соответствии с правилом циклической перестановки).



Если ось вращения	Положительным будет направление поворота
x	от y к z
y	от z к x
z	от x к y

ТРЕХМЕРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ПРАВОСТОРОННЕЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

<u>Перемещение</u>

$$T(D_x, D_y, D_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ D_x & D_y & D_z & 1 \end{bmatrix},$$

$$[x, y, z, 1] \cdot T(D_x, D_y, D_z) = [x + D_x, y + D_y, z + D_z, 1].$$

<u>Масштабирование</u>

$$S(S_x, S_y, S_z) = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[x, y, z, 1] \cdot S(S_x, S_y, S_z) = [S_x \cdot x, S_y \cdot y, S_z \cdot z, 1]$$

ТРЕХМЕРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ПРАВОСТОРОННЕЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Масштабирование

$$S(S_x, S_y, S_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S \end{bmatrix}$$

$$S(S_x, S_y, S_z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{S} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{S} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[x, y, z, 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S \end{bmatrix} = [x, y, z, S] = \frac{x}{S}, \frac{y}{S}, \frac{z}{S}, 1$$

ТРЕХМЕРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ПРАВОСТОРОННЕЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Трехмерный сдвиг

$$[x\ y\ z\ 1]*\begin{bmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ h & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=[x+yd+hz,\ bx+y+iz,\ cx+fy+z,\ 1].$$

ТРЕХМЕРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ПРАВОСТОРОННЕЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

<u>Поворот вокруг оси</u>

$$R_z(\alpha)=\begin{bmatrix} Cos\alpha & Sin\alpha & 0 & 0 \\ -Sin\alpha & Cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$R_x(\alpha)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Cos\alpha & Sin\alpha & 0 \\ 0 & -Sin\alpha & Cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$R_y(\alpha)=\begin{bmatrix} Cos\alpha & 0 & -Sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ Sin\alpha & 0 & Cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ТРЕХМЕРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ПРАВОСТОРОННЕЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Обратные преобразования обратными матрицами

$$T^{-1}(D_x, D_y, D_z) = T(-D_x, -D_y, -D_z);$$

$$S^{-1}(S_x, S_y, S_z) = S(1/S_x, 1/S_y, 1/S_z);$$

$$R^{-1}(\alpha) = R(-\alpha).$$

ТРЕХМЕРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ПРАВОСТОРОННЕЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Отображения в пространстве относительно плоскостей

относительно плоскости xy имеет вид:

$$T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

относительно плоскости yz:

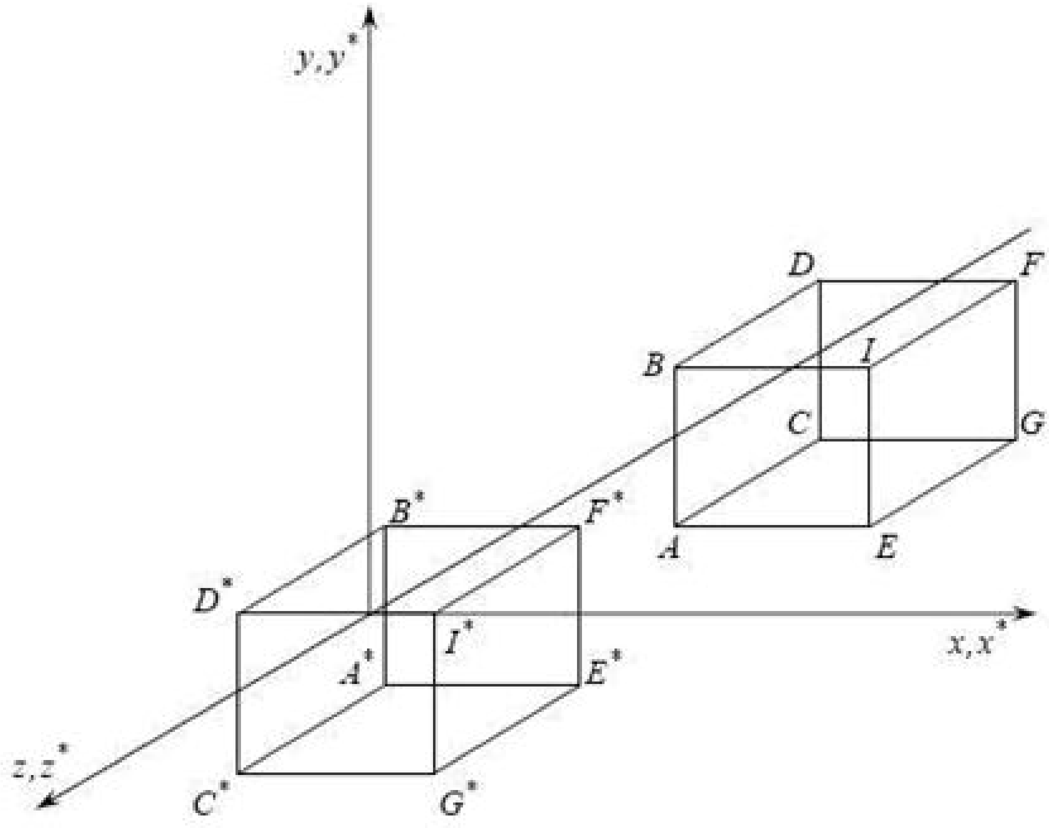
$$T=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

отображения на плоскости xz:

$$T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

ТРЕХМЕРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Пример



$$\begin{array}{c} A\\ B\\ C\\ D\\ E\\ F\\ G\\ I \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 1\\ 2 & 0 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{c} A^*\\ B^*\\ C^*\\ D^*\\ E^*\\ F^*\\ G^*\\ I^* \end{array}$$

Все преобразования выполняются относительно начала координат

ТРЕХМЕРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Пример

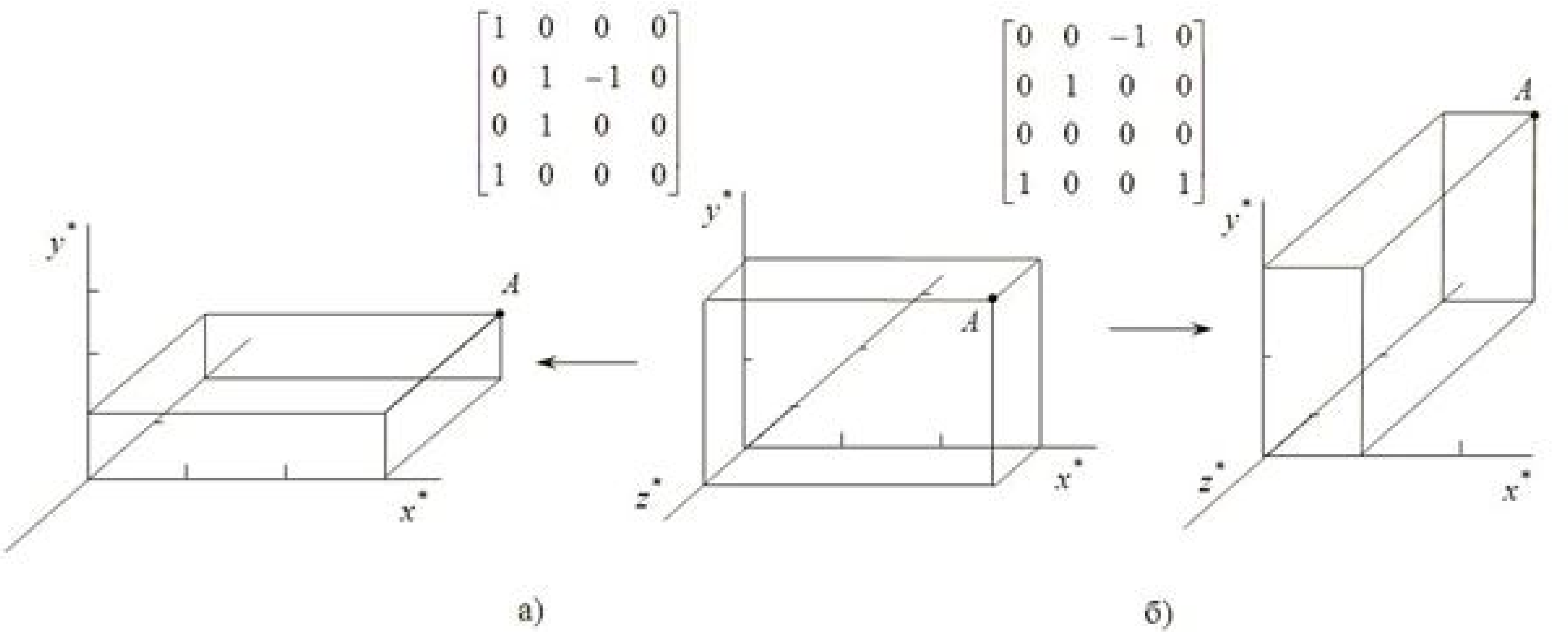
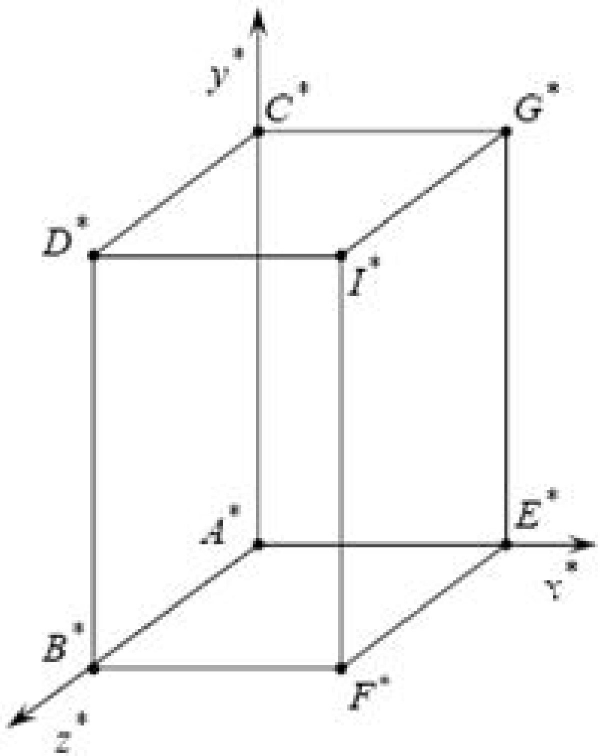


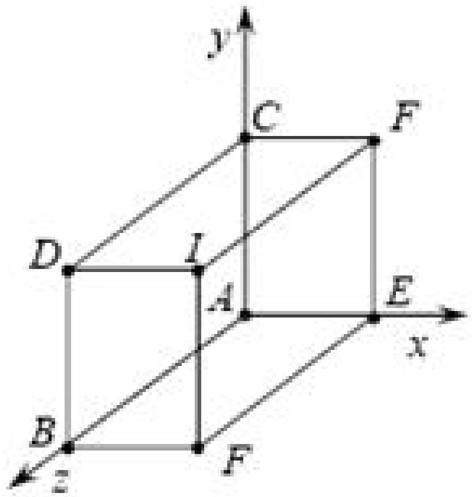
Рисунок – Поворот на – 90° относительно оси x – а); поворот на 90° вокруг оси y – б).

ТРЕХМЕРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Пример

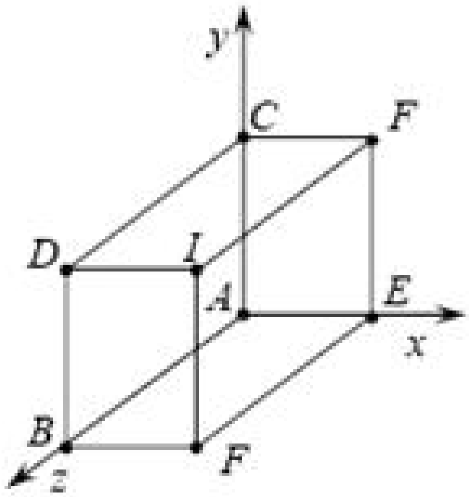


$$
\begin{array}{c}A^*\\B^*\\C^*\\D^*\\E^*\\F^*\\G^*\\I^*\end{array}
\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&3&0&1\\0&3&1&1\\2&0&0&1\\2&0&1&1\\2&3&0&1\\2&3&1&1\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0&0\\0&\frac{1}{3}&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&1\\1&0&0&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}
\begin{array}{c}A\\B\\C\\D\\E\\F\\G\\I\end{array}
$$



ТРЕХМЕРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

<u>Пример</u>



$$
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ I \end{array}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}
\begin{array}{c} A^* \\ B^* \\ C^* \\ D^* \\ E^* \\ F^* \\ G^* \\ I^* \end{array}
$$