

Seznam použitých veličin

B_g	geometrický faktor (1/cm)
B_m	materiálový faktor (1/cm)
B_n	vlastní číslo (1/cm)
β	podíl zpožděných neutronů (-)
β_{ef}	efektivní podíl zpožděných neutronů (-)
D	difúzní koeficient (cm)
I	funkce vlivu (-)
Φ	hustota toku neutronů (1/cm ² s)
k_{ef}	koeficient násobení (-)
k_{∞}	koeficient násobení pro nekonečný systém (-)
ℓ	střední doba života neutronů (s)
ℓ^*	efektivní střední doba života neutronů (s)
L	difúzní délka (cm)
L^2	difúzní plocha (cm ²)
λ	rozpadová konstanta (1/s)
Λ	střední doba vzniku neutronů (s)
Λ^*	efektivní střední doba vzniku neutronů (s)
n	hustota neutronů (1/cm ³)
N	počet neutronů (-)
ν_D	počet zpožděných neutronů (-) ze štěpení
ν_P	počet okamžitých neutronů (-) ze štěpení
ν_T	počet všech neutronů (-) ze štěpení
P	výkon (tepelný) (W)
Ψ_n	vlastní funkce (-)
Q	zdroj neutronů (1/cm ³ s)
\mathbf{r}	polohový vektor (cm)
ρ	reaktivita (-)
Σ	makroskopický účinný průřez (1/cm)
Σ_a	makroskopický účinný průřez pro absorpci (1/cm)
Σ_f	makroskopický účinný průřez pro štěpení (1/cm)
t	čas (s)
τ	střední doba života (s)
$T_{1/2}$	poločas rozpadu (s)
T_e	perioda reaktoru (s)
T_e^*	efektivní perioda reaktoru (s)
v	rychlost (m/s)

Seznam použitých zkratk

1G	1-grupová
2G	2-grupová
DP	dceřinný produkt – Daughter Product
FP	štěpný produkt (mateřské jádro) – Fission Product
FR	rychlý reaktor – Fast Reactor
LS	levá strana
LT	Laplaceova transformace
LWR	lehkovodní reaktor – Light Water Reactor
PS	pravá strana
ZV	zpětná vazba

Obsah

Seznam použitých veličin	1
Seznam použitých zkratk	2
0 Matematický aparát	4
0.1 Laplaceova transformace	4
1 Kinetika a dynamika nulového reaktoru	5
1.1 Rovnice kinetiky reaktoru	5
1.1.1 Odvození rovnic jednobodové kinetiky	5
1.1.2 Řešení rovnic jednobodové kinetiky	13

0 Matematický aparát

0.1 Laplaceova transformace

Je potřeba k tomu, abychom byli schopni jednodušeji řešit soustavy diferenciálních rovnic¹.

Pod pojmem **Laplaceova transformace** (LT) funkce $f(t)$ definované na intervalu $(0, +\infty)$ ² chápeme zobrazení:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) \equiv \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt, \quad (1)$$

kde s značí komplexní proměnnou. Definičním oborem nově vzniklé funkce je obor konvergence definovaného integrálu. Pro usnadnění zápisu budeme Laplaceovu transformaci označovat jako:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \tilde{f}(s).$$

Dále si zadefinujeme **konvoluci** jednorozměrných funkcí $f(t)$ a $g(t)$ jako:

$$(f * g)(t) \equiv \int_0^t f(x)g(t-x)dx. \quad (2)$$

Platí následující vztahy³:

- **LT je lineární zobrazení**, tj. pro $f(t)$, $g(t)$ z intervalu $(0, +\infty)$ a pro libovolné komplexní číslo α platí: $\mathcal{L}[f(t) + \alpha \cdot g(t)](s) = \tilde{f}(s) + \alpha \cdot \tilde{g}(s)$.
- **LT exponenciály**: $\mathcal{L}[A \cdot e^{Bt}](s) = \frac{A}{s - B}$, pokud platí $B < s$.
- **LT konvoluce**: $\mathcal{L}[(f * g)(t)](s) = \tilde{f}(s) \cdot \tilde{g}(s)$.
- **LT derivace**: $\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\tilde{f}(s) - f(0^+)$.
Lze aplikovat i na vícenásobné derivace: $\mathcal{L}[f''(t)](s) = s^2\tilde{f}(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$, apod.
- **LT primitivní funkce**: $\mathcal{L}[F(t)](s) = \frac{F(0^+)}{s} + \frac{1}{s}\tilde{f}(s)$.
Bereme-li primitivní funkci jako funkci horní meze, platí: $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right](s) = \frac{1}{s}\tilde{f}(s)$.
- **Speciální limity**:
 - a) $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\tilde{f}(s)$,
 - b) $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s\tilde{f}(s)$.

¹Matematici prominou, následující kapitola bude takové znásilňování matematiky.

²V našem případě půjde typicky o časový interval, proto nám nevadí omezit se na kladný půlinterval.

³Jejichž odvození je primitivní a zvládne je i cvičená opice.

1 Kinetika a dynamika nulového reaktoru

Kinetika reaktoru = zkoumá časové chování reaktoru se změnou vstupních parametrů.

Vstupní parametry = chápeme primárně k_{ef} , resp. ρ , a lze je ovlivnit změnou materiálů či geometrií systému.

Výstupní parametry = to, co v systému měříme ($P(t)$, $\Phi(\mathbf{r}, t)$ atd.).

Nulový reaktor = neboli reaktor nulového výkonu; reaktor pracující v takovém výkonovém rozsahu, že jsou jeho zpětné vazby (ZV) zanedbatelné.

- Výzkumné a energetické reaktory sem řadit nelze, jelikož se ZV projevují.
- Často složité odlišit, u některých nulových reaktorů lze pozorovat ZV (ve vyšších energetických hladinách) a naopak některé energetické reaktory lze provozovat bez ZV (při minimálním provozním výkonu).

Zpětná vazba = proces, díky kterému se změna výstupních parametrů (P , Φ) může podílet na změnu vstupních parametrů.

Dynamika reaktoru = to samé co kinetika, pouze už uvažuje zapojení ZV.

1.1 Rovnice kinetiky reaktoru

= Rovnice popisující závislost změny výstupních parametrů (výsledků) na změně vstupních parametrů.

K popisu lze využít transportní rovnici, resp. zjednodušenou difúzní rovnici \rightarrow vede na komplikované soustavy, které nelze v obecném případě řešit analyticky (s projevem heterogenity systému).

Řešením jsou **Rovnice bodové kinetiky**, které zanedbávají změnu prostorového rozložení \rightarrow nastane-li změna na vstupních parametrech (zvětší-li se reaktivita), tak změna výstupních parametrů (např. Φ) se ve všech místech změní stejnou měrou \rightarrow výstupní parametry se tedy pouze škálují a průběh zůstává zachován.

Rovnice jednobodové kinetiky = kromě prostorové závislosti se zanedbává i energetické rozdělení \rightarrow vede na 1G rovnice.

V reálu to tak není, ale kupodivu dávají rovnice přijatelné výsledky.

1.1.1 Odvození rovnic jednobodové kinetiky

Pro odvození se vychází z 1G difúzní rovnice (s konstantním D a Σ_a):

$$\boxed{\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D\Delta\Phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a\Phi(\mathbf{r}, t) + Q(\mathbf{r}, t),} \quad (3)$$

kde:

- n ($1/\text{cm}^3$) značí hustotu neutronů,
- D (cm) značí difúzní koeficient,
- Φ ($1/\text{cm}^2\text{s}$) značí hustotu toku neutronů,
- Σ_a ($1/\text{cm}$) značí makroskopický účinný průřez pro absorpci a
- Q ($1/\text{cm}^3\text{s}$) značí zdroj neutronů.

a) Odvození bez vlivu zpožděných neutronů

Uvažuji zjednodušení tvaru:

$$Q(\mathbf{r}, t) = k_\infty \Sigma_a \Phi(\mathbf{r}, t),$$

$$L^2 = \frac{D}{\Sigma_a},$$

$$B_m^2 = \frac{k_\infty - 1}{L^2},$$

$$n(\mathbf{r}, t) = \frac{\Phi(\mathbf{r}, t)}{v}$$

kde:

- k_∞ (-) značí koeficient násobení pro nekonečný systém,
- L (cm) značí difúzní délku (po umocnění difúzní plochu),
- B_m ($1/\text{cm}$) značí materiálový faktor a
- v (cm/s) značí rychlost neutronů (je konstantní, jelikož máme 1G přiblížení)

a předpokládáme, že rovnici (3) lze řešit metodou separace proměnných, tedy:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}) \cdot T(t).$$

Poté rovnice (3) vede na rovnici:

$$vD \left(\frac{\Delta\Psi(\mathbf{r})}{\Psi(\mathbf{r})} + B_m^2 \right) = \frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = \text{konst.} = -\omega, \quad (4)$$

tedy na 2 obyčejné diferenciální rovnice provázané konstantou ω .

Rovnice s $\Psi(\mathbf{r})$ vede po uvažování okrajových podmínek (extrapolované rozhraní, konečnost, spojitost apod.) na vlastní funkce, jejichž tvar závisí na použité geometrii a tvaru Laplaceho (kombinace goniometrických, Besselových, hyperbolických apod.). Řešení vyplývá z jednoduché vlnové rovnice:

$$\Delta\Psi(\mathbf{r}) + B_n^2\Psi(\mathbf{r}) = 0,$$

kde vztah mezi **vlastními čísly** B_n a **materiálovým faktorem** B_m je svázán pomocí určené konstanty ω jako:

$$\omega_n = vD \cdot (B_n^2 - B_m^2).$$

Obecně lze výsledek zapsat tvarem:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_n A_n \Psi_n(\mathbf{r}),$$

kde A_n značí normalizační konstantu a zjistíme ji z výkonu reaktoru.

Rovnice s $T(t)$ vede na exponenciálu tvaru:

$$T(t) = Ce^{-\omega t}.$$

Jelikož je ovšem ω závislá na volbě vlastních čísel, tak i zde platí superpozice a celkovou hustotu toku neutronů $\Phi(\mathbf{r}, t)$ spočteme přes sumu všech vlastních funkcí jako:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sum_n A_n \Psi_n(\mathbf{r}) e^{-\omega_n t}. \quad (5)$$

Tabulka 1 udává vlastní čísla a vlastní funkce pro různé geometrie reaktoru (viz ZAF2).

Tabulka 1: Vlastní čísla a vlastní funkce pro různé geometrie.

Geometrie	B_n (1/cm)	Ψ_n (-)
Nek. deska	$n \left(\frac{\pi}{a} \right)$	$\cos(B_n x)$
Nek. válec	$n \left(\frac{2,405}{R} \right)$	$J_0(B_n r)$
Koule	$n \left(\frac{\pi}{R} \right)$	$\frac{\sin(B_n r)}{r}$

Jelikož vlastní čísla splňují bilanci $B_1 < B_2 < B_3 < \dots$, platí to samé i pro $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots$ a první vlastní číslo po chvíli převáží ta zbylá. Proto dále zavádíme **geometrický faktor** B_g

jako první nejmenší vlastní číslo, tedy $B_g = B_1$.

Pro stacionární systém navíc platí $\omega = 0$ a poté $B_m = B_g$ (viz ZAF2).

Nyní přejdeme k prostorové nezávislosti (což je vlastně smysl celé kapitoly :D). Lze uvažovat (za předpokladu převážení prvního členu v rovnici (5)), že:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) \doteq vn(t)\Psi_1(\mathbf{r})$$

a hustota neutronů $n(t)$ je zároveň úměrná maximální hustotě toku v soustavě (předpoklad rovnice jednobodové kinetiky), tedy:

$$n(t) \doteq \text{konst.} \cdot \Phi_{\max}(t).$$

Po dosazení do rovnice (4) získáme novou rovnici tvaru:

$$vD \left(\frac{\Delta \Psi_1(\mathbf{r})}{\Psi_1(\mathbf{r})} + B_m^2 \right) = \frac{1}{n(t)} \frac{dn(t)}{dt} = \text{konst.} = -\omega_1, \quad (6)$$

která opět vede na 2 obyčejné diferenciální rovnice provázané konstantou ω_1 . Nyní už ovšem nejde o superpozici, jelikož uvažujeme pouze první člen (ačkoliv nestacionaritu zachováváme).

Pro zopakování a osvěžení paměti, stále platí:

$$B_g = B_1,$$

$$\omega_1 = vD \cdot (B_g^2 - B_m^2).$$

Zavedeme novou veličinu ℓ (s) jako **střední dobu života neutronů** vztahem:

$$\ell \equiv \frac{1}{v\Sigma_a} \frac{1}{1 + L^2 B_g^2} \quad (7)$$

a připomeneme si 1G rovnici pro stacionární reaktor:

$$k_{\text{ef}} = \frac{k_{\infty}}{1 + L^2 B_g^2}.$$

Z těchto dvou vztahů lze vyjádřit parametr ω_1 (důkaz dosazením) jako:

$$\omega_1 = -\frac{k_{\text{ef}} - 1}{\ell},$$

Což lze dosadit do rovnice (6) (část s Ψ už nemusím řešit) a získáváme **Rovnici jednobodové kinetiky**:

$$\boxed{\frac{dn(t)}{dt} = \frac{k_{\text{ef}} - 1}{\ell} n(t).} \quad (8)$$

Tím jsme si odvodili obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu pro hustotu neutronů $n(t)$, kterou lze řešit jednoduše pomocí integračního faktoru/separace proměnných (čímkoliv). Často nás ale více než hustota neutronů zajímá časový vývoj výkonu, tedy $P(t)$. Zde platí jednoduchá úměra:

$$n(t) \sim P(t)$$

a tedy po přenormování platí:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{k_{\text{ef}} - 1}{\ell} P(t).$$

S předpokladem počáteční podmínky $P(0) = P_0$ a úvahy, že $k_{\text{ef}} = \text{konst.}$, poté rovnice jednobodové kinetiky pro výkon dává řešení tvaru:

$$P(t) = P_0 \exp\left(\frac{k_{\text{ef}} - 1}{\ell} t\right). \quad (9)$$

Př. 1:

Rovnice (9) udává, jak rychle se mění výkon v systému v závislosti na k_{ef} a ℓ . Zdefinujeme si **periodu reaktoru** T_e (s) jako dobu, za kterou se výkon v systému změní e -krát, pomocí vztahu:

$$\boxed{T_e \equiv \frac{\ell}{k_{\text{ef}} - 1}.} \quad (10)$$

Zatímco k_{ef} lze ovlivnit (geometrie, obohacení, materiály), ℓ je pevně dáno a spjata se systémem⁴. Přehled rozsahů pro různé systémy zobrazuje tabulka 2. Je tedy vidět, že např. rychlý reaktor bude na změny k_{ef} reagovat mnohem rychleji, než reaktor moderovaný grafitem.

Tabulka 2: Střední doby života pro různé typy reaktorů.

Typ systému	ℓ (s)
FR	10^{-7}
LWR	$10^{-5} - 10^{-4}$
Grafit	10^{-3}

Pokud uvažujeme LWR reaktor ($\ell = 10^{-5}$), tak pro:

- $k_{\text{ef}} = 1,01$ vychází perioda $T_e = 0,01$ s a za 1 s se změní výkon $2,69 \cdot 10^{43}x$,
- $k_{\text{ef}} = 1,001$ vychází perioda $T_e = 0,1$ s a za 1 s se změní výkon $2,20 \cdot 10^4x$,

⁴Teoreticky to lze také ovlivnit, ale asi těžko z rychlého reaktoru uelám tak jednoduše lehkovodní, žejo.

- $k_{\text{ef}} = 1,0001$ vychází perioda $T_e = 1$ s a za 1 s se změní výkon 2,72x.

K rovnici (8) je možné dojít i jednoduchou úvahou. Jelikož platí úměra mezi $n(t)$ a $N(t)$:

$$n(t) \sim N(t),$$

lze vycházet právě z počtu neutronů v jedné generaci. Pro přírůstek mezi generacemi totiž platí:

$$dN = k_{\text{ef}}N - N,$$

což po vydělení časem dt na LS rovnice, resp. dobou života jedné generace ℓ na PS rovnice spěje k tíženému řešení:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{k_{\text{ef}} - 1}{\ell} N(t).$$

Dále je možné rovnici (8) přepsat pomocí reaktivity ρ . K tomu si zavedeme **střední dobu vzniku neutronů** Λ (s) jako:

$$\Lambda \equiv \frac{\ell}{k_{\text{ef}}}. \quad (11)$$

Po lehké úpravě, usměrnění rovnice (8) a úvaze, že $\Lambda = \text{konst.}$, dostáváme nový výraz pro rovnici jednobodové kinetiky:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho(t)}{\Lambda} n(t). \quad (12)$$

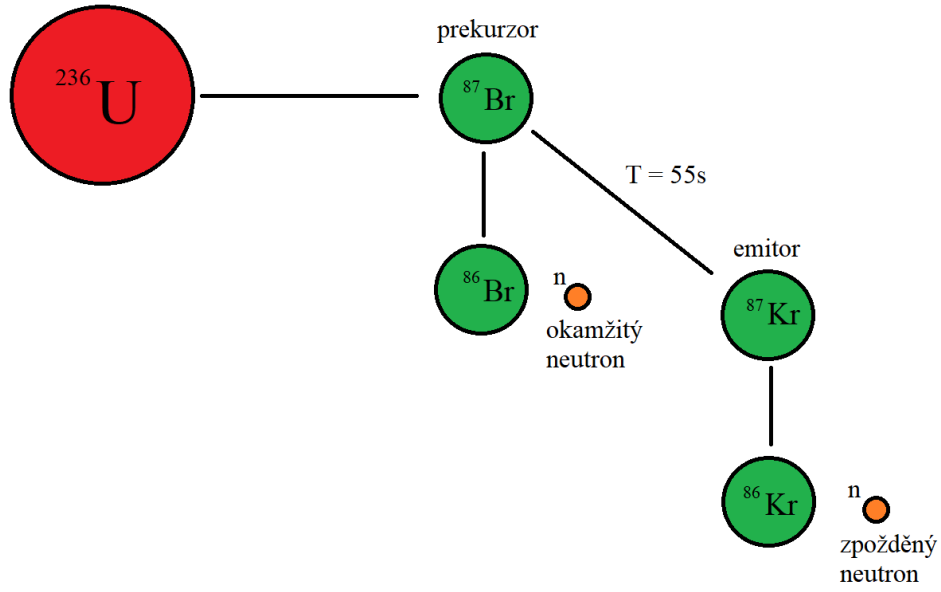
Λ v podstatě vyjadřuje dobu, za kterou se zreprodukuje 1 neutron. Platí tedy:

- $k_{\text{ef}} > 1 \rightarrow \Lambda < \ell \rightarrow$ nadkritický systém a tedy neutrony se zreprodukují rychleji, než je doba jejich života,
- $k_{\text{ef}} < 1 \rightarrow \Lambda > \ell \rightarrow$ podkritický systém a zreprodukování neutronu trvá déle, než doba jejich života.

b) Odvození s vlivem zpožděných neutronů

Nejprve si ujasníme, o co se jedná. Neutrony vznikající při štěpení můžeme členit na:

- **Okamžité neutrony** – vznikají ihned (do 10^{-13} s) emisí z mateřského jádra (FP – Fission Product) se střední energií cca 2 MeV. Při štěpení se FP nacházejí v excitovaném stavu a s přebytkem neutronů \rightarrow těch se mohou zbavit buď za pomoci β^- rozpadu (vzniká dceřiné jádro), nebo emisí okamžitého neutronu. Často se tyto FP označují jako **prekurzory**.
- **Zpožděné neutrony** – jedná se o neutrony, které se uvolňují až po nějaké době, se střední energií cca 0,5 MeV. Vznikají emisí neutronů z dceřiných jader (DP – Daughter Product), které vznikají radioaktivním rozpadem FP. DP se často označují jako **emitory**.



Obrázek 1: Vznik okamžitých a zpožděných neutronů.

Ačkoliv jsou zpožděné neutrony emitovány emitory, pro jejich charakteristiku je přiřazujeme původním prekurzorům. Těch mohou být desítky, proto je dělíme do několika skupin (JEFF 8 skupin, ENDF/B 6 skupin) podle poločasu rozpadu. Pro popis se zavádí tzv. **podíl zpožděných neutronů** β (-) jako:

$$\beta \equiv \frac{\nu_D}{\nu_T}, \quad (13)$$

kde:

- ν_D (-) značí střední počet zpožděných neutronů vzniklých při jednom štěpení a
- ν_T (-) značí střední počet všech vzniklých neutronů.

Obdobně lze zavést ν_i , β_i , $T_{1/2}^i$, τ_i a λ_i pro jednotlivé skupiny (rodiny) zpožděných neutronů.

Dále se pro popis zavádí tzv. **efektivní střední doba života** ℓ^* (s) jako:

$$\ell^* \equiv \ell(1 - \beta) + \sum_i \beta_i \tau_i, \quad (14)$$

efektivní střední doba vzniku Λ^* (s) jako:

$$\Lambda^* = \frac{\ell^*}{k_{\text{ef}}} \quad (15)$$

a **efektivní perioda reaktoru** T_e^* (s) jako:

$$T_e^* \equiv \frac{\ell^*}{k_{\text{ef}} - 1}. \quad (16)$$

V podstatě se jedná o vážený průměr přes koeficienty β , a ačkoliv je podíl zpožděných neutronů minimální (do 1 %), díky dlouhým τ se efektivní doba života velmi prodlouží a perioda reaktoru natáhne. Proto jsou zpožděné neutrony velmi důležité k řízení reaktoru. Nastane-li kritičnost na okamžitých neutronech, tento prodlužovací efekt zcela vymizí, perioda reaktoru se zkrátí až o několik řádů a máme tu druhý Černobyl.

Př. 2:

Pro klasický PWR reaktor platí, že $\sum \beta_i \tau_i \approx 0,1$ s. Vezměme hodnoty z př. 1 a koukněme se, jak se změní perioda reaktoru:

- $k_{\text{ef}} = 1,01$ vychází efektivní perioda $T_e^* = 10$ s a za 1 s se změní výkon 1,105x (původně $2,69 \cdot 10^{43}$ x),
- $k_{\text{ef}} = 1,001$ vychází efektivní perioda $T_e^* = 100$ s a za 1 s se změní výkon 1,010x (původně $2,20 \cdot 10^4$ x),
- $k_{\text{ef}} = 1,0001$ vychází efektivní perioda $T_e^* = 1000$ s a za 1 s se změní výkon 1,001x (původně $2,72$ x).

Je vidět, že s uvažováním zpožděných neutronů se efektivní perioda natáhne o několik řádů a reaktor už není tolik citlivý na změnu k_{ef} .

Lépe se řídí takové systémy, které mají větší β . Ve skutečnosti není reaktor takto ideální. Je třeba dále započítávat fotoneutrony (vznikající (γ, n) reakcí na lehkých jádrech, např. Be), více skupin zpožděných neutronů apod. Důležitá je i energetická závislost. Jelikož zpožděné neutrony vznikají s menší energií (0,5 Mev vs. 2 Mev) a mají náskok ve zpomalování. Díky nižší energii nemohou zpožděné neutrony nikdy zapříčinit štepení na štěpitelných jádrech.

Kvůli tomu všemu se zavádí tzv. **efektivní podíl zpožděných neutronů** $\beta_{\text{ef}} (-)$, což je umělá hodnota, která koriguje energetický rozdíl ve skupinách, jelikož každá ze skupin má jiný vliv na štepení. Lze ji zavést pomocí vztahu:

$$\beta_{\text{ef}} = \beta \cdot I, \quad (17)$$

kde $I (-)$ značí tzv. **funkci vlivu** a závisí na konkrétním reaktoru. Říká, jak je snadné pro zpožděné neutrony štěpit, oproti okamžitým neutronům. Obecně se pohybuje okolo ≈ 1 , při bližším studiu lze napsat: $\text{FR} < 1$ a $\text{LWR} > 1$.

Nyní si ještě ukažme rovnice jednobodové kinetiky se zpožděnými neutrony. Odvození je podobné jako v předcházejícím případě, pouze se původní vztah modifikuje. Výsledkem je soustava lineárních diferenciálních rovnic v destruktivním tvaru:

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = \frac{k_{\text{ef}}(1 - \beta_{\text{ef}}) - 1}{\ell} N(t) + \sum_{i=1}^m \lambda_i C_i(t),} \quad (18)$$

$$\boxed{\frac{dC_i}{dt} = -\lambda_i C_i(t) + \frac{\beta_{\text{ef},i} k_{\text{ef}} N(t)}{\ell},} \quad (19)$$

resp. rovnice v produkčním tvaru:

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = \frac{\rho - \beta_{\text{ef}}}{\Lambda} N(t) + \sum_{i=1}^m \lambda_i C_i(t),} \quad (20)$$

$$\boxed{\frac{dC_i}{dt} = -\lambda_i C_i(t) + \frac{\beta_{\text{ef},i} N(t)}{\Lambda}.} \quad (21)$$

c) Opáčko

Na závěr kapitoly rychlá vzorečkárna (viz tabulka 3).

Tabulka 3: Vzorečky s rovnicemi jednobodové kinetiky.

Parametr	Bez zpožděnek	Se zpožděnkami
Střední doba života	$\ell = \frac{1}{v\Sigma_a} \frac{1}{1 + L^2 B_g^2}$	$\ell^* = \ell(1 - \beta) + \sum_i \beta_i \tau_i$
Střední doba vzniku	$\Lambda = \frac{\ell}{k_{\text{ef}}}$	$\Lambda^* = \frac{\ell^*}{k_{\text{ef}}}$
Perioda reaktoru	$T_e = \frac{\ell}{k_{\text{ef}} - 1}$	$T_e^* = \frac{\ell^*}{k_{\text{ef}} - 1}$
R-ce v destrukčním tvaru	$\frac{dN}{dt} = \frac{k_{\text{ef}} - 1}{\ell} N(t)$	$\frac{dN}{dt} = \frac{k_{\text{ef}}(1 - \beta_{\text{ef}}) - 1}{\ell} N(t) + \sum_{i=1}^m \lambda_i C_i(t)$ $\frac{dC_i}{dt} = -\lambda_i C_i(t) + \frac{\beta_{\text{ef},i} k_{\text{ef}} N(t)}{\ell}$
R-ce v produkčním tvaru	$\frac{dN}{dt} = \frac{\rho}{\Lambda} N(t)$	$\frac{dN}{dt} = \frac{\rho - \beta_{\text{ef}}}{\Lambda} N(t) + \sum_{i=1}^m \lambda_i C_i(t)$ $\frac{dC_i}{dt} = -\lambda_i C_i(t) + \frac{\beta_{\text{ef},i} N(t)}{\Lambda}$

1.1.2 Řešení rovnic jednobodové kinetiky

a) Řešení bez vlivu zpožděných neutronů

Řešení rovnice bez započtení zpožděných neutronů je triviální (jedná se pouze o jednu lineární diferenciální rovnici prvního řádu) a už zde bylo zmíněno. Pro zopakování, řešíme rovnici:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\rho(t)}{\Lambda} N(t)$$

s počáteční podmínkou $N(0) = N_0$ (ustálený stav). Rovnice (při $\rho = \text{konst.}$) vede na řešení:

$$\boxed{N(t) = N_0 \exp\left(\frac{\rho}{\Lambda} t\right)}. \quad (22)$$

b) Řešení s vlivem zpožděných neutronů

Řešíme soustavu lineárních diferenciálních rovnic:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta_{\text{ef}}}{\Lambda} N(t) + \sum_{i=1}^m \lambda_i C_i(t),$$

$$\frac{dC_i}{dt} = -\lambda_i C_i(t) + \frac{\beta_{\text{ef},i} N(t)}{\Lambda}.$$

s počátečními podmínkami (ustálený stav) $N(0) = N_0$ a $C_i(0) = C_{i,0}$. Tento stav lze předpokládat, pokud se reaktor nachází dostatečně dlouhou dobu v ustáleném stavu (při konstantním výkonu), potom je i koncentrace jader C_i konstantní. Tuto koncentraci lze získat z druhé rovnice z doby před $t = 0$:

$$0 = -\lambda_i C_{i,0} + \frac{\beta_{\text{ef},i} N_0}{\Lambda \lambda_i} \rightarrow C_{i,0} = \frac{\beta_{\text{ef},i} N_0}{\Lambda}.$$

Aplikujeme na obě rovnice LT, dostaneme:

$$s\tilde{N}(s) - N_0 = \frac{\mathcal{L}[\rho(t)N(t)](s)}{\Lambda} - \frac{\beta_{\text{ef}}\tilde{N}(s)}{\Lambda} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \tilde{C}_i(s),$$

$$s\tilde{C}_i(s) - C_{i,0} = -\lambda_i \tilde{C}_i(s) + \frac{\beta_{\text{ef},i}\tilde{N}(s)}{\Lambda}.$$

Do druhé rovnice můžeme rovnou dosadit za $C_{i,0}$ (známe z počátečních podmínek, N_0 zachováváme, to získáme z normalizace výkonu), čímž získáváme soustavu algebraických rovnic:

$$s\tilde{N}(s) - N_0 = \frac{\mathcal{L}[\rho(t)N(t)](s)}{\Lambda} - \frac{\beta_{\text{ef}}\tilde{N}(s)}{\Lambda} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \tilde{C}_i(s),$$

$$s\tilde{C}_i(s) - \frac{\beta_{\text{ef},i}N_0}{\Lambda} = -\lambda_i \tilde{C}_i(s) + \frac{\beta_{\text{ef},i}\tilde{N}(s)}{\Lambda}.$$

Pokračujeme tak, že z druhé rovnice vyjádříme $\lambda_i \tilde{C}_i(s)$:

$$\lambda_i \tilde{C}_i(s) = \frac{\beta_{\text{ef},i}\lambda_i \tilde{N}(s) + \beta_{\text{ef},i}N_0}{\Lambda(\lambda_i + s)}$$

a dosadíme do první rovnice (s vynásobením Λ):

$$\Lambda(s\tilde{N}(s) - N_0) = \mathcal{L}[\rho(t)N(t)](s) - \beta_{\text{ef}}\tilde{N}(s) + \sum_{i=1}^m \frac{\beta_{\text{ef},i}\lambda_i\tilde{N}(s)}{\lambda_i + s} + \sum_{i=1}^m \frac{\beta_{\text{ef},i}N_0}{\lambda_i + s}.$$

Nyní rozepíšeme β_{ef} do sumy přes $\beta_{\text{ef},i}$ a rozšíříme přes $\lambda_i + s$. Po vynásobení se něco počere:

$$\Lambda(s\tilde{N}(s) - N_0) = \mathcal{L}[\rho(t)N(t)](s) - \sum_{i=1}^m \frac{\beta_{\text{ef},i}\tilde{N}(s)}{\lambda_i + s}(\lambda_i + s) + \sum_{i=1}^m \frac{\beta_{\text{ef},i}\lambda_i\tilde{N}(s)}{\lambda_i + s} + \sum_{i=1}^m \frac{\beta_{\text{ef},i}N_0}{\lambda_i + s},$$

$$\Lambda(s\tilde{N}(s) - N_0) = \mathcal{L}[\rho(t)N(t)](s) - \sum_{i=1}^m \frac{\beta_{\text{ef},i}\lambda_i\tilde{N}(s)}{\lambda_i + s} - \sum_{i=1}^m \frac{\beta_{\text{ef},i}s\tilde{N}(s)}{\lambda_i + s} + \sum_{i=1}^m \frac{\beta_{\text{ef},i}\lambda_i\tilde{N}(s)}{\lambda_i + s} + \sum_{i=1}^m \frac{\beta_{\text{ef},i}N_0}{\lambda_i + s},$$

$$\Lambda(s\tilde{N}(s) - N_0) = \mathcal{L}[\rho(t)N(t)](s) - \sum_{i=1}^m \frac{\beta_{\text{ef},i}s\tilde{N}(s)}{\lambda_i + s} + \sum_{i=1}^m \frac{\beta_{\text{ef},i}N_0}{\lambda_i + s}.$$

Z PS rovnice vytáhneme $(s\tilde{N}(s) - N_0)$:

$$\Lambda(s\tilde{N}(s) - N_0) = \mathcal{L}[\rho(t)N(t)](s) - \left[\sum_{i=1}^m \frac{\beta_{\text{ef},i}}{\lambda_i + s} (s\tilde{N}(s) - N_0) \right]$$

a po převedení sumy na LS:

$$\left(\Lambda + \sum_{i=1}^m \frac{\beta_{\text{ef},i}}{\lambda_i + s} \right) (s\tilde{N}(s) - N_0) = \mathcal{L}[\rho(t)N(t)](s).$$

Nyní je konečně možné vyjádřit $\tilde{N}(s)$:

$$\tilde{N}(s) = \frac{\mathcal{L}[\rho(t)N(t)](s)}{s \left(\Lambda + \sum_{i=1}^m \frac{\beta_{\text{ef},i}}{\lambda_i + s} \right)} + \frac{N_0}{s}.$$

Nyní pro zjednodušení zápisu zavedeme tzv. **přenosovou funkci nulového reaktoru** $\tilde{G}_0(s)$ vztahem:

$$\boxed{\tilde{G}_0(s) \equiv \frac{1}{s \left(\Lambda + \sum_{i=1}^m \frac{\beta_{\text{ef},i}}{\lambda_i + s} \right)}}. \quad (23)$$

Potom platí:

$$\tilde{N}(s) = \tilde{G}_0(s) \cdot \mathcal{L}[\rho(t)N(t)](s) + \frac{N_0}{s}.$$

Teď už pouze zbývá provést inverzní LT. Ale to je voprz, takže budeme postupovat obráceně. Z vět o LT konvoluce a konstanty (0. kapitola) je jasné, že:

$$\begin{aligned}\tilde{N}(s) &= \tilde{G}_0(s) \cdot \mathcal{L}[\rho(t)N(t)](s) + \frac{N_0}{s} \\ &\Leftrightarrow \\ N(s) &= G_0(s) * [\rho(t)N(t)] + N_0.\end{aligned}$$

Po aplikaci definice konvoluce (opět 0. kapitola) získáváme **Rovnici jednobodové kinetiky v integrálním tvaru**:

$$\boxed{N(t) = \int_0^t G_0(t-t')\rho(t')N(t')dt' + N_0.} \quad (24)$$

To je všechno pěkný, ale musíme ještě znát obraz přenosové funkce $G_0(t)$. Zde musíme vycházet z definice $\tilde{G}_0(s)$, kterou převedeme na parciální zlomky a aplikací vět z 0. kapitoly není obtížné nalézt původní funkci $G_0(t)$. To ale dělat nebudeme, musí nám stačit vědět, že něco takového je možné⁵. Platí totiž:

$$\tilde{G}_0(s) = \frac{\varphi(s)}{\Psi(s)} = \sum_{n=0}^m \frac{A_n}{s - s_n},$$

kde $\varphi(s)$ je libovolný polynom, $\Psi(s)$ je polynom řádu m a s_n jsou jeho kořeny. A_n jsou konstanty získané dle:

$$A_n = \frac{\varphi(s_n)}{\Psi'(s_n)}.$$

Po převodu dostaneme:

$$G_0(t) = \sum_{n=0}^m A_n e^{s_n t}.$$

Ještě si trochu pohrajeme s $\tilde{G}_0(s)$. Definovaný vztah (23) rozšíříme výrazem $\prod_{n=1}^m (s + \lambda_n)$, čímž se nám ve jmenovateli něco požere:

$$\tilde{G}_0(s) \equiv \frac{\prod_{n=1}^m (s + \lambda_n)}{s \left(\Lambda \prod_{n=1}^m (s + \lambda_n) + \sum_{n=1}^m \beta_{\text{ef},n} \prod_{k=1, k \neq n}^m (\lambda_k + s) \right)}.$$

Jaké budou kořeny polynomu ve jmenovateli? První je jasný, tj. $s_0 = 0$. Výraz v hranaté závorce je natuty kladný \rightarrow zbylé kořeny nemohou být kladné \rightarrow zbylé kořeny jsou určitě záporné, tj. $s_1, s_2, \dots, s_n < 0$.

Abychom získali konstanty A_n , je vhodné si polynomy upravit do lepšího tvaru. Z MAA1 víme:

⁵.)

$$\Psi(s) = K \cdot \prod_{n=0}^m (s - s_n)$$

a jelikož známe první kořen $s_0 = 0$:

$$\Psi(s) = K \cdot s \prod_{n=1}^m (s - s_n)$$

Chybí nám už pouze získat konstantu K . Tu získáme z řešení limity $\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \tilde{G}_0(s)$. Z definice přenosové funkce (23) platí:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \left[\frac{1}{s \left(\Lambda + \sum_{n=1}^m \frac{\beta_{\text{ef},n}}{\lambda_n + s} \right)} \right] = \frac{1}{\Lambda}$$

a z námi upraveného tvaru pro polynom $\Psi(s)$ (ten, ve kterém se objevuje konstanta K) zase platí:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \left[\frac{\prod_{n=1}^m (s + \lambda_n)}{K \cdot s \prod_{n=1}^m (s - s_n)} \right] = \frac{1}{K}$$

Je tedy jasné, že:

$$K = \Lambda,$$

a tedy:

$$\tilde{G}_0(s) = \frac{\prod_{n=1}^m (s + \lambda_n)}{\Lambda \cdot s \prod_{n=1}^m (s - s_n)}.$$

Pro ty co se ztratili v tom, o co se vlastně snažíme. Pokoušíme se nalézt konstanty A_n , které jsme si pro připomenutí definovali jako:

$$\tilde{G}_0(s) = \frac{\varphi(s)}{\Psi(s)} = \sum_{n=0}^m \frac{A_n}{s - s_n},$$

$$A_n = \frac{\varphi(s_n)}{\Psi'(s_n)},$$

kde v našem značení:

$$\Psi(s) = \Lambda \cdot s \prod_{n=1}^m (s - s_n).$$

Funkci $\Psi(s)$ musíme derivovat, což je jednoduché, jelikož se jedná o produkt. Pro jeho derivaci platí:

$$\frac{d}{dx} \left(\prod_{i=1}^k f_i(x) \right) = \sum_{i=1}^k \left(\frac{f'_i(x)}{f_i(x)} \prod_{j=1, j \neq i}^k f_j(x) \right).$$

Už je pozdě a je zbytečné rozepisovat postupy, zkrátka platí, že:

$$\Psi'(s) = \Lambda \prod_{n=1}^m (s - s_n) + \Lambda \cdot s \sum_{n=1}^m \prod_{k=1, k \neq n}^m (s - s_k).$$

Při dosazení prvního kořene $s_0 = 0$ je řešení triviální, při dosazování zbylých kořenů je první člen vždy nulový a u druhého členu vypadne suma. Tedy:

$$\Psi'(s_0) = \Lambda \cdot \prod_{i=1, i \neq n}^m (-s_i), \quad n = 0,$$

$$\Psi'(s_n) = \Lambda \cdot s_n \prod_{i=1, i \neq n}^m (s_n - s_i), \quad \forall \widehat{n}.$$

Rovněž platí (a bude se hodit):

$$\sum_{n=0}^m A_n = \frac{1}{\Lambda}.$$