Seznam použitých veličin

B_g	geometrický faktor (1/cm)
B_m	materiálový faktor (1/cm)
B_n	vlastní číslo (1/cm)
D	difúzní koeficient (cm)
Φ	hustota toku neutronů (1/cm^{2}s)
k_{ef}	koeficient násobení (-)
k_∞	koeficient násobení pro nekonečný systém (-)
l	střední doba života neutronů (s)
L	difúzní délka (cm)
L^2	difúzní plocha (cm^2)
Λ	střední doba vzniku neutronů (s)
n	hustota neutronů (1/cm^3)
N	počet neutronů (-)
P	výkon (tepelný) (W)
Ψ_n	vlastní funkce (-)
Q	zdroj neutronů (1/cm^{3}s)
$\mathbf{r}$	polohový vektor (cm)
ρ	reaktivita (-)
Σ	makroskopický účinný průřez (1/cm)
Σ_a	makroskopický účinný průřez pro absorbci (1/cm)
Σ_f	makroskopický účinný průřez pro štěpení (1/cm)
t	čas (s)
T_e	perioda reaktoru (s)
v	rychlost (m/s)

Seznam použitých zkratek

1G	1-grupová
2G	2-grupová
FR	rychlý reaktor – Fast Reactor
LS	levá strana
LT	Laplaceova transformace
LWR	lehkovodní reaktor – Light Water Reactor
PS	pravá strana
ZV	zpětná vazba

0 Matematický aparát

0.1 Laplaceova transformace

Je potřeba k tomu, abychom byli schopni jednodušeji řešit soustavy diferenciálních rovnic.

Pod pojmem **Laplaceova transformace** (LT) funkce $f(t)$ definované na intervalu $(0, +\infty)$[1] chápeme zobrazení[2]:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) \equiv \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \tag{1}$$

kde s značí komplexní proměnnou. Definičním oborem nově vzniklé funkce je obor konvergence definovaného integrálu. Pro usnadnění zápisu budeme Laplaceovu transformaci označovat jako:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \tilde{f}(s).$$

Dále si zadefinujeme **konvoluci** jednorozměrných funkcí $f(t)$ a $g(t)$ jako:

$$(f * g)(t) \equiv \int_0^t f(x)g(t-x)dx. \tag{2}$$

Dále platí následující vztahy[3]:

- **LT je lineární zobrazení**, tj. pro $f(t)$, $g(t)$ z intervalu $(0, +\infty)$ a pro libovolné komplexní číslo α platí: $\mathcal{L}[f(t) + \alpha \cdot g(t)](s) = \tilde{f}(s) + \alpha \cdot \tilde{g}(s)$.
- **LT exponenciály:** $\mathcal{L}[A \cdot e^{Bt}](s) = \dfrac{A}{s-B}$, pokud platí $B < s$.
- **LT konvoluce:** $\mathcal{L}[(f * g)(t)](s) = \tilde{f}(s) \cdot \tilde{g}(s)$.
- **LT derivace:** $\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\tilde{f}(s) - f(0^+)$.
  Lze aplikovat i na vícenásobné derivace: $\mathcal{L}[f''(t)](s) = s^2\tilde{f}(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$, apod.
- **LT primitivní funkce:** $\mathcal{L}[F(t)](s) = \dfrac{F(0^+)}{s} + \dfrac{1}{s}\tilde{f}(s)$.
  Bereme-li primitivní funkci jako funkci horní meze, platí: $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right](s) = \dfrac{1}{s}\tilde{f}(s)$.
- **Speciální limity:**
  a) $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\tilde{f}(s)$,
  b) $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0^+} s\tilde{f}(s)$.

[1] V našem připaěd půjde typicky o časový interval, proto nám nevadí omezit se na kladný půlinterval.
[2] Matematici prominou, následující kapitola bude takové znásilňování matematické ideologie.
[3] Jejichž odvození je primitivní a zvládne je i cvičená opice

1 Kinetika a dynamika nulového reaktoru

Kinetika reaktoru = zkoumá časové chování reaktoru se změnou vstupních parametrů.

Vstupní parametry = chápeme primárně k_{ef}, resp. ρ a lze je ovlivnit změnou materiálů či geometrií systému.

Výstupní parametry = to, co v systému měříme ($P(t)$, $\Phi(\mathbf{r},t)$ atd.).

Nulový reaktor = neboli reaktor nulového výkonu; reaktor pracující v takovém výkonovém rozsahu, že jsou jeho zpětné vazby (ZV) zanedbatelné.

- Výzkumné a energetické reaktory sem řadit nelze, jelikož se ZV projevují.
- Často složité odlišit, u některých nulových reaktorů lze pozorovat ZV (ve vyšších energetických hladinách) a naopak některé energetické reaktory lze provozovat bez ZV (při minimálním provozním výkonu).

Zpětná vazba = proces, díky kterému se změna výstupních parametrů (P, Φ) může podílet na změnu výstupních parametrů.

Dynamika reaktoru = to samé co kinetika, pouze už zvažuje zapojení ZV.

1.1 Rovnice kinetiky reaktoru

= Rovnice popisující závislost změny výstupních parametrů (výsledků) na změně vstupních parametrů.

K popisu lze využít transportní rovnici, resp. zjednodušenou difúzní rovnici $\to$ vede na komplikované soustavy, které nelze v obecném případě řešit analyticky (s projevem heterogenity systému).

Řešením jsou **Rovnice bodové kinetiky**, které zanedbávají změnu prostorového rozložení $\to$ nastane-li změna na vstupních parametrech (zvětší-li se reaktivita), tak změna výstupních parametrů (např. Φ) se ve všech místech změní stějnou měrou $\to$ výstupní parametry se tedy pouze škálují a průběh zůstává zachován.

Rovnice jednobodové kinetiky = kromě prostorové závislosti se zanedbává i energetické rozdělení $\to$ vede na 1G rovnice.

V reálu to tak není, ale kupodivu dávají rovnice přijatelné výsledky.

1.1.1 Odvození rovnice jednobodové kinetiky

Pro odvození se vychází z 1G difúzní rovnice (s konstantním D a Σ_a):

$$\frac{\partial n(\mathbf{r},t)}{\partial t} = D\Delta\Phi(\mathbf{r},t) - \Sigma_a\Phi(\mathbf{r},t) + Q(\mathbf{r},t), \tag{3}$$

kde:

- n ($1/\text{cm}^3$) značí hustotu neutronů,
- D (cm) značí difúzní koeficient,

- Φ (1/cm^{2}s) značí hustotu toku neutronů,
- Σ_a (1/cm) značí makroskopický účinný průřez pro absorbci a
- Q ((1/cm^{3}s) značí zdroj neutronů.

a) Odvození bez vlivu zpožděných neutronů

Uvažuji zjednodušení tvaru:

$$Q(\mathbf{r},t) = k_\infty \Sigma_a \Phi(\mathbf{r},t),$$

$$L^2 = \frac{D}{\Sigma_a},$$

$$B_m^2 = \frac{k_\infty - 1}{L^2},$$

$$n(\mathbf{r},t) = \frac{\Phi(\mathbf{r},t)}{v}$$

kde:

- k_∞ (-) značí koeficient násobenní pro nekonečný systém,
- L^2 (cm) značí difúzní délku (po umocnění difúzní plochu),
- B_m (1/cm) značí materiálový faktor a
- v (cm/s) značí rychlost neutronů (je konstantní, jelikož máme 1G přiblížení)

a předpokládáme, že rovnici (3) lze řešit metodou separace proměnných, tedy:

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \Psi(\mathbf{r}) \cdot T(t).$$

Poté rovnice (3) vede na rovnici:

$$vD\left(\frac{\Delta\Psi(\mathbf{r})}{\Psi(\mathbf{r})} + B_m^2\right) = \frac{1}{T(t)}\frac{dT(t)}{dt} = \text{konst.} = -\omega, \tag{4}$$

tedy na 2 obyčejné diferenciální rovnice provázané konstantou ω.

Rovnice s $\Psi(\mathbf{r})$ vede po uvažování okrajových podmínek (extrapolované rozhraní, konečnost, spojitost apod.) na vlastní funkce, jejichž tvar závisí na použité geometrii a tvaru Laplaciánu (kombinace goniometrických, Besselových, hyperbolických apod.). Řešení vyplývá z jednoduché vlnové rovnice:

$$\Delta\Psi(\mathbf{r}) + B_n^2\Psi(\mathbf{r}) = 0,$$

kde vztah mezi **vlastními čísly** B_n a **materiálovým faktorem** B_m je svázán pomocí určené konstanty ω jako:

$$\omega_n = vD \cdot (B_n^2 - B_m^2).$$

Obecně lze výsledek zapsat tvarem:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_n A_n \Psi_n(\mathbf{r}),$$

kde A_n značí normalizační konstantu a zjistíme ji z výkonu reaktoru.

Rovnice s $T(t)$ vede na exponenciálu tvaru:

$$T(t) = Ce^{-\omega t}.$$

Jelikož je ovšem ω závislá na volbě vlastních čísel, tak i zde platí superpozice a celkovou hustotu toku neutronů $\Phi(\mathbf{r}, t)$ spočteme přes sumu všech vlastních funkcí jako:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sum_n A_n \Psi_n(\mathbf{r}) e^{-\omega_n t}. \tag{5}$$

Tabulka 1 udává vlastní čísla a vlastní funkce pro různé geometrie reaktoru (viz ZAF2).

Tabulka 1: Vlastní čísla a vlastní funkce pro různé geometrie.

Geometrie	B_n (1/cm)	Ψ_n (-)
Nek. deska	$n\left(\frac{\pi}{a}\right)$	$\cos(B_n x)$
Nek. válec	$n\left(\frac{2,405}{R}\right)$	$J_0(B_n r)$
Koule	$n\left(\frac{\pi}{R}\right)$	$\frac{\sin(B_n r)}{r}$

Jelikož vlastní čísla splňují bilanci $B_1 < B_2 < B_3 < ...$, platí to samé i pro $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < ...$ a první vlastní číslo po chvíli převáží ta zbylá. Proto dále zavádíme **geometrický faktor** B_g jako první nejmenší vlastní číslo, tedy $B_g = B_1$.

Pro stacionární systém navíc platí $\omega = 0$ a poté $B_m = B_g$ (viz ZAF2).

Nyní přejdeme k prostorové nezávislosti (což je vlastně smysl celé kapitoly :D). Lze uvažovat (za předpokladu převážení prvního členu v rovnici (5)), že:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) \doteq vn(t)\Psi_1(\mathbf{r})$$

a hustota neutronů $n(t)$ je zároveň úměrná maximální hustotě toku v soustavě (předpoklad rovnice jednobodové kinetiky), tedy:

$$n(t) \doteq \text{konst.} \cdot \Phi_{max}(t).$$

Po dosazení do rovnice (4) získáme novou rovnici tvaru:

$$vD\left(\frac{\Delta\Psi_1(\mathbf{r})}{\Psi_1(\mathbf{r})} + B_m^2\right) = \frac{1}{n(t)}\frac{dn(t)}{dt} = \text{konst.} = -\omega_1, \tag{6}$$

která opět vede na 2 obyčejné diferenciální rovnice provázané konstantou ω_1. Nyní už ovšem nejde o superpozici, jelikož uvažujeme pouze první člen (ačkoliv nestacionaritu zachováváme).

Pro zopakování a osvěžení paměti, stále platí:

$$B_g = B_1,$$

$$\omega_1 = vD \cdot (B_g^2 - B_m^2).$$

Zavedeme novou veličinu l (s) jako **střední dobu života neutronů** vztahem:

$$l = \frac{1}{v\Sigma_a} \frac{1}{1 + L^2 B_g^2} \tag{7}$$

a připomeneme si 1G rovnici pro stacionární reaktor:

$$k_{\text{ef}} = \frac{k_\infty}{1 + L^2 B_g^2}.$$

Z těchto dvou vztahů lze vyjádřit parametr ω_1 (důkaz dosazením) jako:

$$\omega_1 = -\frac{k_{\text{ef}} - 1}{l},$$

Což lze dosadit do rovnice (6) (část s Ψ už nemusím řešit) a získáváme **Rovnici jednobodové kinetiky**:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{k_{\text{ef}} - 1}{l} n(t). \tag{8}$$

Tím jsme si odvodili obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu pro hustotu neutronů $n(t)$, kterou lze řešit jednoduše pomocí integračního faktoru/separace proměnných (čímkoliv). Často nás ale více než hustota neutronů zajímá časový vývoj výkonu, tedy $P(t)$. Zde platí jednoduchá úměra:

$$n(t) \sim P(t)$$

a tedy po přenormování platí:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{k_{\text{ef}} - 1}{l} P(t).$$

S předpokladem počáteční podmínky $P(0) = P_0$ a úvahy, že $k_{\text{ef}} =$ konst., poté rovnice jednobodové kinetiky pro výkon dává řešení tvaru:

$$P(t) = P_0 \exp\left(\frac{k_{\text{ef}} - 1}{l} t\right). \tag{9}$$

Př. 1:

Rovnice (9) udává, jak rychle se mění výkon v systému v závislosti na k_{ef} a l. Zadefinujeme si **periodu reaktoru** T_e (s) jako dobu, za kterou se výkon v systému změní e-krát, pomocí vztahu:

$$T_e = \frac{l}{k_{\text{ef}} - 1}. \tag{10}$$

Zatímco k_{ef} lze ovlivnit (geometrie, obohacení, materiály), l je pevně dáno a spjato se systémem[4]. Přehled rozsahů pro různé systémy zobrazuje tabulka 2. Je tedy vidět, že např. rychlý reaktor bude na změny k_{ef} reagovat mnohem rychleji, než reaktor moderovaný grafitem.

Pokud uvažujeme LWR reaktor ($l = 10^{-5}$), tak pro:

[4]Teoreticky to lze také ovlivnit, ale asi těžko z rychlého reaktoru udělám lehkovodní, žejo.

Tabulka 2: Střední doby života pro různé typy reaktorů.

Typ systému	l (s)
FR	10^{-7}
LWR	$10^{-5} - 10^{-4}$
Grafit	10^{-3}

- $k_{\text{ef}} = 1,01$ vychází perioda $T_e = 0,01$ s a za 1 s se změní výkon $2,69 \cdot 10^{43}$x,
- $k_{\text{ef}} = 1,001$ vychází perioda $T_e = 0,1$ s a za 1 s se změní výkon $2,20 \cdot 10^{4}$x,
- $k_{\text{ef}} = 1,0001$ vychází perioda $T_e = 1$ s a za 1 s se změní výkon $2,72$x.

K rovnici (8) je možné dojít i jednoduchou úvahou. Jelikož platí úměra mezi $n(t)$ a $N(t)$:

$$n(t) \sim N(t),$$

lze vycházet právě z počtu neutronů v jedné generaci. Pro přírůstek mezi generacemi totiž platí:

$$dN = k_{\text{ef}} N - N,$$

což po vydělení časem dt na LS rovnice, resp. dobou života jedné generace l na PS rovnice spěje k tíženému řešení:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{k_{\text{ef}} - 1}{l} N(t).$$

Dále je možné rovnici (8) přepsat pomocí reaktivity ρ. K tomu si zavedeme **střední dobu vzniku neutronů** Λ (s) jako:

$$\Lambda = \frac{l}{k_{\text{ef}}}. \tag{11}$$

Po lehké úpravě, usměrnění rovnice (8) a úvaze, že $\Lambda =$ konst., dostáváme nový výraz pro rovnici jednobodové kinetiky:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho(t)}{\Lambda} n(t). \tag{12}$$

Λ v podstatě vyjadřuje dobu, za kterou se zreprodukuje 1 neutron. Platí tedy:

- $k_{\text{ef}} > 1 \rightarrow \Lambda < l \rightarrow$ nadkritický systém a tedy neutrony se zreprodukují rychleji, než je doba jejich života,
- $k_{\text{ef}} < 1 \rightarrow \Lambda > 1 \rightarrow$ podkritický systém a zreprodukování neutronu trvá déle, než doba jejich života.