DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

SIGLE DU COURS : IFT 1065 (Hiv2018)

NOM DU PROFESSEUR : Nadia El-Mabrouk

TITRE DU COURS : Structures discrètes en informatique

EXAMEN INTRA

Date	: 22 Février 2018
Heure	: 9h30 - 11h20
Salles	: Z-220 et Z-240, Pav. Claire-McNicoll

DIRECTIVES PÉDAGOGIQUES :

- **Aucune documentation** n'est permise.
- **Inscrivez tout de suite votre nom et code permanent** en bas de cette page.
- Répondez **sur le questionnaire** en utilisant l'espace libre qui suit chaque question.
- Lisez attentivement toutes les questions avant de commencer.
- Les exercices sont indépendants les uns des autres.

1. ________ /26
2. ________ /28
3. ________ /18
4. ________ /16
5. ________ /12

Total : ________ /100

Nom : ________________________________ **Matricule :** ________________

Règlement sur le plagiat : (extrait du règlement disciplinaire sur le plagiat de l'Université de Montréal).
Constitue un plagiat :

1. Faire exécuter son travail par un autre ;
2. Utiliser, sans le mentionner, le travail d'autrui ;
3. Échanger des informations lors d'un examen ;
4. Falsifier des documents.

Le plagiat est passible de sanctions allant jusqu'à l'exclusion du programme.

Exercice 1 : (26 points)

Pour chacun des énoncés suivants indiquer s'il est vrai ou faux en encerclant VRAI ou FAUX.

1.	$((P \Rightarrow Q) \wedge P)) \equiv Q$	VRAI	FAUX
2.	$((P \wedge \neg Q) \Rightarrow (R \wedge \neg R)) \equiv P \Rightarrow Q$	VRAI	FAUX
3.	Pour tout prédicat $P(x,y)$, $(\forall\, x,\ \exists\, y\ /\ P(x,y)) \equiv (\exists\, y / \forall\, x,\ P(x,y))$	VRAI	FAUX
4.	$\exists\, x \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, y \in \mathbb{N} \setminus \{x\},\ x < y$	VRAI	FAUX
5.	$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + y^2 \geq 0$	VRAI	FAUX
6.	Pour deux ensembles quelconques X et Y, $X \cap Y = X \Rightarrow X \cup Y = Y$	VRAI	FAUX
7.	Pour trois ensembles quelconques X, Y et Z, $X \cup (Y - Z) = (X \cup Y) - (X \cup Z)$	VRAI	FAUX
8.	La fonction $mod : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ qui associe à toute paire (n,d) le reste de la division entière de n par d est injective	VRAI	FAUX
9.	Soit f une fontion d'un ensemble fini X sur un ensemble fini Y. Si f est injective, alors $\lvert X\rvert \leq \lvert Y\rvert$	VRAI	FAUX
10.	Toute relation $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble X qui n'est pas symétrique est anti-symétrique	VRAI	FAUX

Justifier UNE de vos réponses précédentes (dire quelle réponse est justifiée)

Exercice 2 : (28 points)

Dans cet exercice, on vous demande d'écrire des définitions ou phrases en notation propositionnelle ($\forall$, $\exists$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$...). **L'opérateur unaire $\neg$ devra être distribué au maximum**. Par exemple $\neg(\forall\, x,\ P(x) \vee Q(x))$ devra être écrit : $\exists x,\ \neg P(x)\ \wedge\ \neg Q(x)$.

1. Donner la négation de la proposition suivante :

$$\forall\, x,\ \exists\, y,\ (P(x,y)\ \wedge\ Q(x,y))\ \Leftrightarrow\ R(x,y)$$

2. Écrire chacune des définitions suivantes en notation propositionnelle.

   a. Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble X **n'est pas anti-symétrique** si et seulement si...

b. Une relation R d'un ensemble X vers un ensemble Y **n'est pas une fonction** si et seulement si...

3. Écrire les phrases suivantes en notation propositionnelle.

   (a) "Tout ensemble fini admet un plus grand élément".

(b) "L'ensemble $\mathbb{N}$ est un ensemble infini". (N.B. : Ne pas utiliser la notion de cardinalité, mais bien les quantificateurs $\forall$ et $\exists$)

Pour les phrases suivantes, on utilisera $\mathcal{E}$ pour l'ensemble des étudiants, $\mathcal{P}$ pour l'ensemble des directeurs susceptibles d'encadrer un étudiant, le prédicat P sur $\mathcal{E} \times \mathcal{P}$ telque $P(x, y)$ est vrai si y encadre x, et le prédicat Q sur $\mathcal{E}$ telque $Q(x)$ est vrai si x termine sa maîtrise.

(c) "Un étudiant inscrit à la maîtrise n'a pas forcément un directeur de mémoire."

(d) "Tout étudiant ne finalise sa maîtrise que s'il a un directeur."

Exercice 3 : (18 points)

Faire une preuve détaillée de chacune des propositions suivantes.

1. Soient A, B deux sous-ensembles quelconques d'un ensemble universel U.

$$A \cap \overline{B} = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

2. Soit $M = \frac{s_1+s_2+\cdots s_n}{n}$ la moyenne de n nombres réels $s_1, s_2, \cdots s_n$. Montrer qu'il existe $i, 1 \leq i \leq n$ telque $s_i \leq M$.

Exercice 4 : (16 points)

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$

1. Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4. En déduire une formule explicite pour S_n.

2. Faire une preuve par induction de votre conjecture.

Exercice 5 : (12 points)

Soit f la fonction de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par $f(m, n) = mn$. Est-ce que f est une fonction Injective ? Surjective ? Bijective ? Faites des preuves de vos réponses.