MAT0236 - CÁLCULO IV

lista 01

1-8. Resolver os oito exercícios ímpares 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 e 15, da seção 12.2, *Derivação de Funções Definidas Implicitamente. Teorema Das Funções Implícitas* no Capítulo 12 de *Um Curso de Cálculo*, **Vol 2, 5ª ed.**, de H. L. Guidorizzi, pp. 226-244.

Resolva os exercícios abaixo.

1. A equação $y^3 + xy + x^3 = 4$ define implicitamente alguma função diferenciável $y = y(x)$? Em caso afirmativo, expresse $\frac{dy}{dx}$ em termos de x e y.

(*Sugestão*: Observe que $(0, \sqrt[3]{4})$ satisfaz a equação e utilize o teorema das funções implícitas (caso $F(x, y) = 0$).)

- verificando se define implic. alguma f dif. $y = y(x)$

seja $F(x,y) = y^3 + xy + x^3 = 4.$

- F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$

(para saber se uma função é de classe C^1, basta encontrar sua derivada primeira e verificar se ela é contínua em um ponto dado.)

- $F(0, \sqrt[3]{4}) = 0$
- $\frac{\partial F}{\partial y}(0, \sqrt[3]{4}) \neq 0$

pelo teorema das funções implícitas, a equação define uma função $y = y(x)$ de classe C^1 num intervalo aberto I contendo 0.

- expressando $\frac{dy}{dx}$ em termos de x e y.

$$y^3 + xy + x^3 = 4$$

$$\underbrace{y^3 + xy + x^3 - 4}_{f(x,y)} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} = - \frac{y + 3x^2}{3y^2 + x}$$

em todo x no domínio de $y = y(x)$

com $3(y(x))^2 + x \neq 0$

3. Mostre que cada uma das equações a seguir define implicitamente pelo menos uma função diferenciável $z = z(x, y)$. Expresse $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ em termos de x, y e z.

a) $ex + y + z + xyz = 1$

b) $x^3 + y3 + z^3 = x + y + z$

Faltou enunciar o T. da função implícita e falar que é de classe C^1.

a) seja $F(x,y,z) = e^{x+y+z} + xyz - 1$

temos que,

- $F(0,0,0) = 0$
- $\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,0) \neq 0 \quad = 1$

(define implicitamente pelo menos uma função diferenciável $z = z(x,y)$)

$$e^{x+y+z} + xyz = 1$$

$$\underbrace{e^{x+y+z} + xyz - 1}_{f(x,y,z)} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)} = - \frac{e^{x+y+z} + yz}{e^{x+y+z} + xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)} = - \frac{e^{x+y+z} + xz}{e^{x+y+z} + xy}$$

em todo x e y no domínio de $z = z(x,y)$

b) seja $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - x - y - z$, temos que

$F(0,0,0) = 0$

$\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,0) \neq 0$

(define implicitamente pelo menos uma função diferenciável $z = z(x,y)$)

$$x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$$

$$\underbrace{x^3 + y^3 + z^3 - x - y - z}_{f(x,y,z)} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)} = - \frac{3x^2 - 1}{3z^2 - 1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)} = - \frac{3y^2 - 1}{3z^2 - 1}$$

Remake ex 1

TFI

1. A equação $y^3 + xy + x^3 = 4$ define implicitamente alguma função diferenciável $y = y(x)$? Em caso afirmativo, expresse $\frac{dy}{dx}$ em termos de x e y.

seja $f(x, y) = y^3 + xy + x^3 - 4$

verificando se f define implicitamente alguma função dif.

- f tem que ser de classe C^1 em $\mathbb{R}^n$
- f tem que ter raiz : $f(x_0, y_0) = 0$
- a derivada em y na raiz é diferente de 0 : $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$
- f é de classe C^1, porque a sua derivada primeira existe e é contínua.
- o ponto $(0, \sqrt[3]{4})$ define $f(0, \sqrt[3]{4}) = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(0, \sqrt[3]{4}) = 3 \cdot \sqrt[3]{4} + 0 \neq 0$

Enunciar teorema da função implícita

assim, pelo teorema da função implícita e as condições acima que satisfazem a função f, temos que $f(x,y)$ define implicitamente alguma função diferenciável $y = y(x)$.

expressando $\frac{dy}{dx}$ em termos de x e y.

temos que $f(x,y) = y^3 + xy + x^3 - 4$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} = -\frac{y + 3x^2}{3y^2 + x}$$

em todo x no domínio de $y = y(x)$ e $3(y(x))^2 + x \neq 0$

2. Mostre que cada uma das equações seguintes define implicitamente pelo menos uma função diferenciável $y = y(x)$. Expresse $\frac{dy}{dx}$ em termos de x e y.

a) $x^2y + \text{sen}\, y = x$

b) $y^4 + x^2y^2 + x^4 = 3$

a) seja $f(x,y) = x^2y + \text{sen}\, y - x$

temos que

- $f(x,y)$ é de classe C^1, pois sua derivada primeira existe e é contínua em um aberto A em $\mathbb{R}^2$
- $f(0,\pi) = 0^2 \cdot \text{sen}(\pi) + \text{sen}(\pi) - 0 = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi) = 0^2 + \cos(\pi) - 0 = 1 \neq 0$

Assim, devido a essas condições o Teorema da Função Implícita pode ser aplicado

Enunciar TFI

e portanto $f(x,y)$ define implicitamente alguma função $y = y(x)$.

expressando $\frac{dy}{dx}$ em termos de x e y.

temos que $f(x,y) = x^2y + \text{sen}\, y - x$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} = -\frac{2xy - 1}{x^2 + \cos y}$$

para todo x no domínio de $y = y(x)$ e $x^2 + \cos(y(x)) \neq 0$

b) seja $f(x,y) = y^4 + x^2y^2 + x^4 - 3$

temos que

- a função $f(x,y)$ é de classe C^1, pois a sua derivada primeira existe e é contínua em um aberto A em $\mathbb{R}^2$
- o ponto $(1,1)$ satisfaz $f(1,1) = 1^4 + 1^2 \cdot 1^2 + 1^4 - 3 = 0$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 4 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1 \cdot 1^2 = 6 \neq 0$

Assim, devido as condições acima, o Teorema da Função Implícita pode ser aplicado

Enunciar TFI

e portanto $f(x,y)$ define implicitamente alguma função diferenciável $y = y(x)$

expressando $\dfrac{dy}{dx}$ em termos de x e y

temos que $f(x,y) = y^4 + x^2y^2 + x^4 - 3$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)} = \frac{2xy^2 + 4x^3}{4y^3 + 2yx^2}$$

para todo x no domínio de $y = y(x)$ e

$4(y(x))^3 + 2(y(x))x^2 \neq 0$

Teorema das funções implícitas (*Caso* $F(x,y) = 0$). Seja $F(x,y)$ de classe C^1 num aberto A de $\mathbb{R}^2$ e seja $(x_0, y_0) \in A$, com $F(x_0, y_0) = 0$. Nestas condições, se $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, então existirão intervalos abertos I e J, com $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$, tais que, para cada $x \in I$, existe um único $g(x) \in J$, com $F(x, g(x)) = 0$. A função $g : I \to J$ é diferenciável e

$$g'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}.$$

TF.I

não era pra fazer KKKK

4. Suponha que $y = y(x)$ seja diferenciável e dada implicitamente pela equação $x = F(x^2 + y, y^2)$, onde $F(u, v)$ é suposta diferenciável. Expresse $\frac{dy}{dx}$ em termos de x, y e das derivadas parciais de F.

expressando $\frac{dy}{dx}$ em termos de x, y e das derivadas de F

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial F(u,v)}{\partial(x)}}{\frac{\partial F(u,v)}{\partial(y)}} = \frac{1 - 2x\,\frac{\partial F}{\partial u}(x^2+y, y^2)}{1 \cdot \frac{\partial F}{\partial u}(x^2+y, y^2) + 2y\,\frac{\partial F}{\partial v}(x^2+y, y^2)}$$

$$= \frac{1 - 2x\,\frac{\partial F}{\partial u}(u,v)}{\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) + 2y\,\frac{\partial F}{\partial u}(u,v)}$$

para $u = x^2+y$ e $v = y^2$

5. Suponha que $y = g(x)$ seja diferenciável no intervalo aberto I e dada implicitamente pela equação $f(x, y) = 0$, onde $f(x, y)$ é suposta de classe C^2. Suponha, ainda, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ em D_f.

a) Prove que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ é uma *condição necessária* para que x_0 seja ponto de máximo local de g.

b) Prove que g'' é contínua em I.

c) Prove que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$$

e

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3} > 0 \text{ em } (x_0, y_0)$$

é *condição suficiente* para que x_0 seja ponto de máximo local de g.

7. A função diferenciável $z = z(x, y)$ é dada implicitamente pela equação $f\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{x^\lambda}\right) = 0$ ($\lambda \neq 0$ um real fixo), onde $f(u, v)$ é suposta diferenciável e $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \neq 0$. Verifique que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \lambda z.$$

9. Suponha que $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ sejam dadas implicitamente pelo sistema

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases} \qquad (x \neq 0).$$

Mostre que $\frac{\partial x}{\partial u}\left(1 + \frac{y}{x}\right) = 1.$

11. Calcule:

a) $\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}$ sendo $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ e $G(x, y, z) = x + y + z$.

b) $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)}$ sendo $u = xyz$ e $v = x^3 + y^2$.

c) $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)}$ sendo $x = r + 3s + t^2$ e $y = r^2 - s^2 - 3t^2$.

d) $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}$ sendo $x = r + 3s + t^2$ e $y = r^2 - s^2 - 3t^2$.

notação:

Notações. O símbolo $\dfrac{\partial (F, G)}{\partial (y, z)}$ é usado para indicar o *determinante jacobiano* de F e G em relação a y e z:

$$\frac{\partial (F, G)}{\partial (y, z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Da mesma forma:

$$\frac{\partial (F, G)}{\partial (x, z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{\partial (F, G)}{\partial (y, x)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial x} \\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}$$

Com estas notações, $\dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{dz}{dx}$ se escrevem:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial (F, G)}{\partial (x, z)}}{\dfrac{\partial (F, G)}{\partial (y, z)}} \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial (F, G)}{\partial (y, x)}}{\dfrac{\partial (F, G)}{\partial (y, z)}}.$$

a) $$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

$G(x, y, z) = x + y + z$

$\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x$ $\qquad$ $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y$

$\dfrac{\partial G}{\partial x} = 1$ $\qquad$ $\dfrac{\partial G}{\partial y} = 1$

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 2y = 2(x - y)$$

b) $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix}$

$u = xyz$

$v = x^3 + y^2$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = xz \qquad \dfrac{\partial u}{\partial z} = xy \qquad \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2y \qquad \dfrac{\partial v}{\partial z} = 0$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} xz & xy \\ 2y & 0 \end{vmatrix} = xz \cdot 0 - xy\, 2y = -2xy^2$$

c) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} = 1 & \dfrac{\partial x}{\partial s} = 3 \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} = 2r & \dfrac{\partial y}{\partial s} = -2s \end{vmatrix} = -2s - 6r = -2(s+3r)$

$x = r + 3s + t^2$

$y = r^2 - s^2 - 3t^2$

d) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} = 3 & \dfrac{\partial x}{\partial t} = 2t \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} = -2s & \dfrac{\partial y}{\partial t} = -6t \end{vmatrix} = -18t - (-4st) = -2t(9-2s)$

$x = r + 3s + t^2$

$y = r^2 - s^2 - 3t^2$

13. Sejam $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ dadas implicitamente pelo sistema

① $$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = xy \end{cases}$$

a) Expresse $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial y}{\partial u}$ em termos de x e y.

b) Determine um par de funções $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ definidas implicitamente por ①.

a) $$\begin{cases} x^2 + y^2 - u = 0 \\ xy - v = 0 \end{cases}$$

para obtermos $\dfrac{dx}{du}$ e $\dfrac{dy}{du}$, vamos derivar os dois membros de ① em relação a u, observando que x e y são funções de u e v.

$\dfrac{d}{du}(x^2+y^2) = \dfrac{d}{du}(u)$, ou seja, $2x\dfrac{dx}{du} + 2y\dfrac{dy}{du} = 1$

$$\frac{d}{du}(xy) = 0 \quad \text{, ou seja,} \quad y\frac{dx}{du} + x\frac{dy}{du} = 0$$

assim:

$$\begin{cases} 2x\dfrac{dx}{du} + 2y\dfrac{dy}{du} = 1 \\ y\dfrac{dx}{du} + x\dfrac{dy}{du} = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{dx}{du} = -\frac{x}{y}\frac{dy}{du}$$

substituindo na primeira equação

$$-\frac{2x^2}{y}\cdot\frac{dy}{du} + 2y\frac{dy}{du} = 1 \rightarrow -\frac{2x^2}{\cancel{y}}\frac{dy}{du}\cancel{y} + 2yy\frac{dy}{du} = y$$

$$\rightarrow -2x^2\cdot\frac{dy}{du} + 2y^2\frac{dy}{du} = y \rightarrow 2\frac{dy}{du}(y^2 - x^2) = y$$

$$\rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{y}{2(y^2 - x^2)}$$

para $\frac{dx}{du}$, temos

$$\frac{dy}{du} = -\frac{y}{x}\frac{dx}{du} \rightarrow 2x\frac{dx}{du} - 2\frac{y^2}{x}\frac{dx}{du} = 1$$

$$\rightarrow 2x^2\frac{dx}{du} - 2y^2\frac{dx}{du} = x \rightarrow \frac{dx}{du}2(x^2 - y^2) = x$$

$$\rightarrow \frac{dx}{du} = \frac{x}{2(x^2 - y^2)}$$

b) temos o sistema

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = xy \end{cases}$$

resolvendo o sistema nas incógnitas x e y:

x em função de u e v:

$$y = \frac{v}{x} \rightarrow u = x^2 + \frac{v^2}{x^2} \rightarrow u = \frac{1}{x^2}(x^4 + v^2)$$

$$\rightarrow ux^2 = x^4 + v^2 \rightarrow x^4 - ux^2 + v^2 = 0 \rightarrow m = x^2$$

$$\rightarrow m^2 - um + v^2 = 0$$

$$m = \frac{-(-u) \pm \sqrt{(-u)^2 - 4\cdot 1\cdot v^2}}{2} \rightarrow m = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4v^2}}{2}$$

$$\rightarrow m_1 = \frac{u + \sqrt{u^2 - 4v^2}}{2} \qquad m_2 = \frac{u - \sqrt{u^2 - 4v^2}}{2}$$

substituindo $w = x^2$

$$x = \pm\sqrt{\frac{u + \sqrt{u^2 - 4v^2}}{2}} \qquad x = \pm\sqrt{\frac{u - \sqrt{u^2 - 4v^2}}{2}}$$

y em função de u e v.

$$y = \pm\sqrt{\frac{u + \sqrt{u^2 - 4v^2}}{2}} \qquad y = \pm\sqrt{\frac{u - \sqrt{u^2 - 4v^2}}{2}}$$

podemos ter como um par de funções:

$$x = +\sqrt{\frac{u + \sqrt{u^2 - 4v^2}}{2}} \qquad y = +\sqrt{\frac{u - \sqrt{u^2 - 4v^2}}{2}}$$

15. Sejam $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ definidas implicitamente pelo sistema

$$\begin{cases} x^2 + uy^2 = v \\ x + y^2 = u. \end{cases}$$

a) Expresse $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ em termos de x, y e u.

b) Determine um par de funções $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ definidas implicitamente pelo sistema.

a) derivando as duas equações em função de u:

$\dfrac{d}{du}(x^2 + uy^2) = \dfrac{d}{du}(v)$, ou seja, $2x\dfrac{dx}{du} + y^2 + 2yu\dfrac{dy}{du} = 0$

$\dfrac{d}{du}(x + y^2) = \dfrac{d}{du}(u)$, ou seja, $\dfrac{dx}{du} + 2y\dfrac{dy}{du} = 1$

assim

$$\begin{cases} 2x\dfrac{dx}{du} + y^2 + 2yu\dfrac{dy}{du} = 0 \\ \dfrac{dx}{du} + 2y\dfrac{dy}{du} = 1 \end{cases} \rightarrow 2y\frac{dy}{du} = 1 - \frac{dx}{du}$$ substituindo na 2ª

$$2x\frac{dx}{du} + y^2 + u - u\frac{dx}{du} = 0 \rightarrow 2x\frac{dx}{du} - u\frac{dx}{du} = -y^2 - u$$

$$\rightarrow \frac{dx}{du}(2x - u) = -y^2 - u \rightarrow \boxed{\frac{dx}{du} = \frac{-y^2 - u}{2x - u}}$$