Exercícios

fiz ■ não consegui ■ prof fez ■ incompleto ■

1 ■ 2 □ 3 □ 4 □ 5 □ 6 □ 7 □ 8 □

9 □ 10 □

1. Sejam X, Y duas v.a. independentes, $X \sim \mathrm{U}[0,3]$, $Y \sim \mathrm{U}[1,5]$. a) Calcule $\Pr[X < Y - 1]$. b) Determine a distribuição de $X + 2Y$.

a) $X \sim U[0,3]$

$a = 0$; $b = 3$

$f(x) = \dfrac{1}{b-a}$

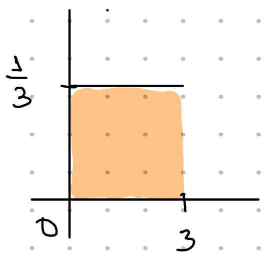
densidade → $f(x) = \dfrac{1}{3}$

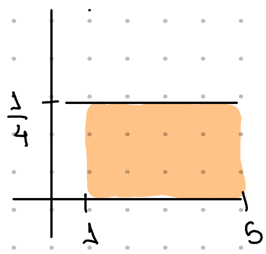
$Y \sim U[1,5]$

$a = 1$; $b = 5$

$f(x) = \dfrac{1}{b-a}$

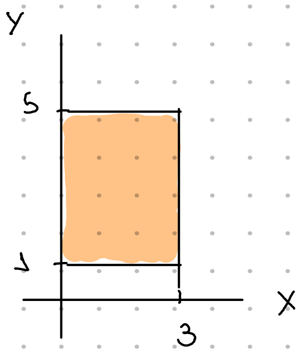
$f(x) = \dfrac{1}{4}$



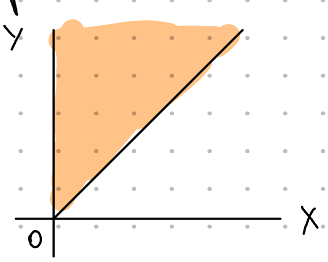


acho que isso não importa muito pro exercício, mas é legal lembrar. Se importar quer dizer que fiz errado

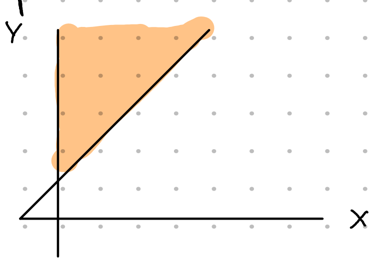
gráfico com X e Y



para $X < Y$ temos:

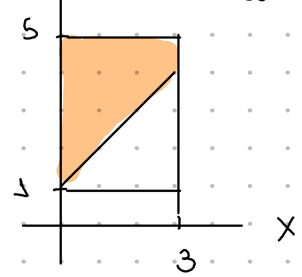


para $X < Y - 1$ temos



no gráfico de X e Y

com $X < Y - 1$



a $P(X < Y - 1)$ é a área marcada, ou seja:

$(3 \cdot 1) + (3 \cdot 3)/2 = 7{,}5$

dividido pela área total

$7{,}5 / (4 \cdot 3) = 0{,}625$

$P(X < Y - 1) = 0{,}625$

b) determine a distribuição $X + 2Y$

temos $W = X + 2Y$

$$F_W(x) = P(W \leq x) = P(X + 2Y \leq x)$$

$$X + 2Y = x$$

$$Y = \frac{x - X}{2}$$

2. Sejam X_0, X_1 v.a. independentes, $X_0 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$, $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$. Qual é a distribuição de probabilidade de $Z = X_0 + X_1$?

$X_0 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ $\qquad$ $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$

3. Uma galinha poedeira bota N ovos por dia, onde N tem distribuição Binomial, $B(n,p)$, com $n = 4$ e $p \in (0,1)$. Cada ovo gera uma nova galinha com probabilidade $q \in (0,1)$, independentemente dos demais. Seja K o número de novas galinhas geradas pelos ovos botados em um particular dia. Determine a distribuição de probabilidade de K.

N = "# de ovos botados por uma galinha"

$N \sim Bin(n, p) \quad n = 4 \quad p \in (0,1)$

cada ovo gera nova galinha com prob $q \in (0,1)$, independentemente

K = "# de novas galinhas"

$K \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ℓ galinhas geradas

$P(K = \ell) = ?$ → é o que temos que achar

$$P(K=\ell) = \sum_{m=0}^{4} P(K=\ell, N=m)$$

$$\{K=\ell\} = \bigcup_{m=0}^{4} \{K=\ell, N=m\}$$

$$P(K=\ell, N=m) = P(K=\ell \mid N=m)\, \underbrace{P(N=m)}_{\binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}}$$

$$P(K=\ell \mid N=m) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ell > m \\ \binom{m}{\ell} q^\ell (1-q)^{m-\ell}, & \text{se } \ell \leq m \end{cases}$$

$$P(K=\ell) = \sum_{m=\ell}^{n} P(K=\ell \mid N=m)\, P(N=m)$$

$$= \sum_{m=\ell}^{n} \binom{m}{\ell} q^\ell (1-q)^{m-\ell} \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$$

questão para prova

$E[K] = E[K|N]$

$E[K|N]$ = "variável aleatória"

possíveis valores

$E[K|N=0] = 0$

$E[K|N=1] = q$

$E[K|N=\ell] = q\ell$

$E[K|N=n] = qn$

$$E[K] = E[E[K|N]]$$
$$= \sum_{\ell} E[K|N=\ell]\, P(N=\ell)$$
$$= \sum_{\ell} q\ell \binom{n}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{n-\ell}$$
$$= \boxed{q \sum_{\ell} \ell\, P(N=\ell)} = q \cdot np = npq$$

EN

4. Sejam T_1, T_2 e T_3 três v.a. independentes com distribuição exponencial com parâmetros, respectivamente, λ_1, λ_2 e λ_3. a) Determine $P(T_1 < \min\{T_2, T_3\})$. b) Determine $P(T_1 < T_2 | \min\{T_1, T_2\} \leq t)$.

5. Sejam U_1, U_2 variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo [0,3]. Denote $X = \min\{U_1, U_2\}$. Determine a distribuição de probabilidade de X.

6. O tempo de funcionamento de um certo tipo de lâmpada segue uma distribuição exponencial de média 50 horas. Suponha também que os tempos de funcionamento de lâmpadas distintas sejam independentes. (lembre que, se T é uma variável aleatória com distribuição exponencial então sua função densidade de probabilidade é dada por $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ e $E(T) = 1/\lambda$.) a) Uma lâmpada é acesa. Qual é a probabilidade de que ela funcione por mais de 50 horas? b) Três lâmpadas são acesas no mesmo instante. Qual é a probabilidade de que pelo menos uma delas funcione por mais de 50 horas? c) Numa caixa há 5 lâmpadas sendo que 2 estão queimadas e 3 estão funcionando normalmente. Escolho uma dessas lâmpadas ao acaso. Qual é a probabilidade que esta lâmpada funcione por mais de 50 horas?

7. A função distribuição de probabilidade acumulada de uma variável aleatória X é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{5}, & -1 \leq x < 2, \\ ax + b, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

a) Determine os valores de a e b se $P(X = 2) = \frac{1}{5}$ e $P(X = 3) = 0$. b) Se $a = \frac{4}{5}$ e $b = -\frac{7}{5}$ calcule $P(X \leq \frac{5}{2})$. c) Se $a = 0$ e $b = \frac{1}{2}$, calcule $P(X > 0|X < 3)$.

8. A função distribuição de probabilidade acumulada de uma variável aleatória X, F_X, é dada por

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{5}, & -1 \leq x < 1, \\ \frac{3}{5}, & 1 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

.

a) Determine $P(\frac{1}{2} \leq X \leq 2)$. b) Determine $P(\frac{1}{2} \leq X \leq 2|X \geq 1)$ c) Se $Y = 2X + 3$, determine a esperança $(E(Y))$.

9. O salário mensal de um vendedor é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo 1000 e 2000 reais. Qual é seu salário médio? Assumindo independência, qual é a probabilidade dele ganhar mais que 1800 reais em pelo menos um mes no decorrer de um semestre? Estime a probabilidade dele ganhar mais que 50.000 reais após três anos de trabalho.

10. O volume semanal de vendas de um posto de gasolina, em milhares de litros de gasolina, é uma variável aleatória X com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}, & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{8}{3}(1-x), & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Qual é a probabilidade da venda semanal ser superior a 250 litros?
b) Suponha que numa certa semana a venda foi superior a 200 litros de gasolina. Qual é a probabilidade da venda nesta semana ter sido inferior a 750 litros?

X = volume semanal de vendas em milhares de litros de gasolina

a) probabilidade da venda semanal ser superior a 250 litros

$= 1 - P(X \leq 0{,}25)$

pela função de densidade, sendo $0 \leq x < \frac{1}{2}$, temos que

$P(X > 0{,}25) = 1 - P(X \leq 0{,}25) = 1 - \frac{4}{3}$