# Guidorizzi solution volume 2 - cap. 13

Física

Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ)

15 pag.

# CAPÍTULO 13

*Exercícios 13.1*

**1. *a*)** $\nabla f(1, 3) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,3), \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,3)\right) = (2, 6)$ pois $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$.

A reta tangente a $\gamma$ em $\gamma(t_0) = (1, 3)$ coincide com a reta tangente à curva de nível $f(x, y) = 10$ em $(1, 3)$. A equação da reta tangente a $\gamma$ no ponto $(1, 3)$ é

$\nabla f(1, 3) \cdot [(x, y) - (1, 3)] = 0$

$(2, 6) \cdot (x - 1, y - 3) = 0$

$2(x - 1) + 6(y - 3) = 0$ ou $2x + 6y - 20 = 0$ ou

$$y = -\frac{x}{3} + \frac{10}{3}.$$

Em notação vetorial (o vetor $(-6, 2)$ é perpendicular a $\nabla f(1, 3) = (2, 6)$, logo é paralelo a $\gamma'(t_0)$):

$(x, y) = (1, 3) + \lambda(-6, 2) \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

***b*)** Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, satisfazendo

$[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 10$, ou seja,

$$\left(\frac{x(t)}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{y(t)}{\sqrt{10}}\right)^2 = 1.$$

Logo $\dfrac{x(t)}{\sqrt{10}} = \operatorname{sen} t$, $\quad x(t) = \sqrt{10}\ \operatorname{sen} t$,

$\dfrac{y(t)}{\sqrt{10}} = \cos t$ e $\quad y(t) = \sqrt{10}\ \cos t$. Assim,

$\gamma(t) = (\sqrt{10}\ \operatorname{sen} t, \sqrt{10}\ \cos t)$.

**2.** Seja $f(x, y) = xy - 10$.

$$\nabla f(2,5) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(2,5), \frac{\partial f}{\partial y}(2,5)\right) = (5, 2), \text{ pois } \frac{\partial f}{\partial x} = y \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = x.$$

Reta tangente em notação vetorial (o vetor $(-2, 5)$ é perpendicular ao vetor $\nabla f = (5, 2)$; logo, o vetor $(-2, 5)$ é paralelo à reta tangente):

$(x, y) = (2, 5) + \lambda(-2, 5) \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

Reta normal em notação vetorial (o $\nabla f = (5, 2)$ é um vetor normal à curva de nível de $f$ que passa por $(2, 5)$).

$(x, y) = (2, 5) + \lambda (5, 2)$.

**3.**

***a)*** $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\right) = (4, 2)$ pois $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y - 3$.

Reta tangente:

$(x, y) = (1, 2) + \lambda(-2, 4) \quad \lambda \in \mathbb{R}$ (em notação vetorial)

ou

$\nabla f \cdot [(x, y) - (1, 2)] = 0$,
$(4, 2) \cdot (x - 1, y - 2) = 0$,
$4(x - 1) + 2(y - 2) = 0$,
$4x - 4 + 2y - 4 = 0$ e, portanto, $y + 2x - 4 = 0$.

***b)*** Sendo $f(x, y) = e^{2x - y} + 2x + 2y$, temos

$f\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 4$ e

$\nabla f\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, 1\right), \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right) = (4, 1)$, pois $\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{2x-y} + 2$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = -e^{2x-y} + 2$.

Reta tangente:

$\nabla f(\frac{1}{2}, 1) \cdot \left[(x, y) - (\frac{1}{2}, 1)\right] = 0$

$(4, 1) \cdot \left(x - \frac{1}{2}, y - 1\right) = 0$
$4x - 2 + y - 1 = 0$ ou seja, $y = -4x + 3$.

**4.** $-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} = -\dfrac{4x_0}{2y_0} = -\dfrac{2x_0}{y_0}$ (é o coeficiente angular da reta tangente à elipse).

$2x + y = 5 \Rightarrow y = -2x + 5$ ($-2$ é o coeficiente angular da reta paralela).

Logo:

$$-\frac{2x_0}{y_0} = -2 \;\Rightarrow\; x_0 = y_0$$

$(x_0, y_0) \in$ elipse $\;\Rightarrow\; 2x_0^2 + x_0^2 = 3 \;\Rightarrow x_0 = \pm\, 1 \Rightarrow \mathrm{y}_0 = \pm\, 1.$

Reta tangente que passa por (1, 1):
$\nabla f(1, 1) \cdot [(x, y) - (1, 1)] = 0$
$(4, 2) \cdot (x - 1, y - 1) = 0$
$4x - 4 + 2y - 2 = 0$ ou seja, $y = -2x + 3.$
Reta tangente por $(-1, -1)$:
$\nabla f\,(-1, 1) \cdot [(x, y) - (-1, -1)] = 0$
$(4, 2) \cdot (x + 1, y + 1) = 0$
$4x + 4 + 2y + 2 = 0$ ou seja, $y = -2x - 3.$

**5.** $-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} = -\dfrac{2x_0 + y_0}{2y_0 + x_0}$ (coeficiente angular da reta tangente).

$4x + 5y = 17 \;\Rightarrow\; 5\mathrm{y} = -4x + 17 \;\Rightarrow\; y = -\dfrac{4}{5}x + \dfrac{17}{5}$

(coeficiente angular da reta paralela: $-\dfrac{4}{5}$).

Então: $-\dfrac{2x_0 + y_0}{2y_0 + x_0} = -\dfrac{4}{5}$

$10x_0 + 5y_0 = 8y_0 + 4x_0 \;\Rightarrow\; 6x_0 = 3y_0 \;\Rightarrow\; y_0 = 2x_0.$

$(x_0, y_0) = (x_0, 2x_0) \;\in\;$ curva $\;\Rightarrow\; 4x_0^2 + 2x_0^2 + x_0^2 = 7 \Rightarrow\; x_0 = \pm 1$ e
$y_0 = \pm 2.$

Reta tangente à curva em (1, 2):

$\nabla f(1, 2) \cdot [(x, y) - (1, 2)] = 0$, ou seja,

$$y = -\frac{4}{5}\,x + \frac{14}{5}.$$

Reta tangente à curva em $(-1, -2)$:

$\nabla f(-1, -2) \cdot [(x, y) - (-1, -2)] = 0$, ou seja,

$$y = -\frac{4}{5}\,x - \frac{14}{5}.$$

**6.** ***a)*** $3\dfrac{\partial f}{\partial x} + 2\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0.$

Sendo $f(x, y)$ uma solução da equação a derivadas parciais, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, segue:

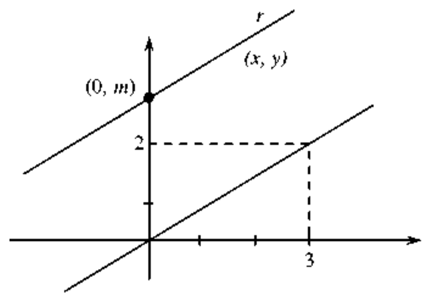
$$3\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

ou $(3, 2) \cdot \nabla f(x, y) = 0$.

Então, para todo $(x, y)$ ,$\nabla f(x, y)$ é perpendicular ao vetor (3, 2). Como $\nabla f(x, y)$ é perpendicular, em $(x, y)$, à curva de nível de $f$ que passa por (3, 2), então as curvas de nível de $f$ são retas paralelas a (3, 2). Assim $f$ é constante sobre cada reta paralela ao vetor (3, 2). Logo $f(x, y) = f(0, m)$. Temos

$$\frac{y-m}{x-0} = \frac{2}{3} \text{ ou } m = \frac{3y-2x}{3}.$$

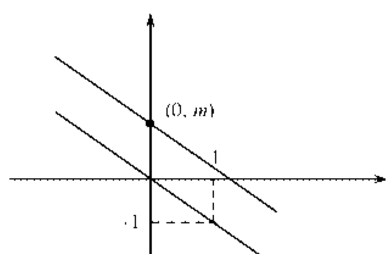
Assim, $f(x, y) = f\left(0, \frac{3y-2x}{3}\right)$.




Tomando-se $\varphi(u) = f\left(0, \frac{u}{3}\right)$, resulta que $f(x, y) = \varphi(3y - 2x)$, onde $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é função derivável, é solução de 6.***a***.

Assim, $e^{3y-2x}$, sen$(3y - 2x)$ etc. são soluções de 6.***a***.

***b***) $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0.$




Analogamente a ***a***:

$(1, -1) \cdot \nabla f(x, y) = 0$

$f(x, y) = f(0, m)$

$$\frac{y-m}{x-0} = -0 \quad \Rightarrow \quad m = x + y$$

$f(x, y) = f(0, x + y)$.

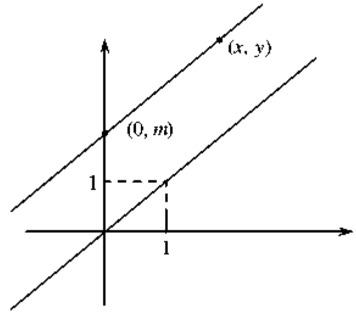
Tomando-se $\varphi(u) = f(0, u) \Rightarrow f(x, y) = \varphi(x + y)$ onde $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável, é solução de 6.***b***.

Assim, $e^{x+y}$, sen $(x + y)$ etc. são soluções de 6.***b***.

***c***) $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Como $f(x, y)$ é solução de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$

$\nabla f(x, y) \cdot (1, 1) = 0$.

$f(x, y) = f(0, m)$ onde $\dfrac{y - m}{x - 0} = 1, \quad m = y - x$




$\varphi(u) = f(0, u) \quad \Rightarrow f(x, y) = \varphi(y - x)$ é solução de 6.***c***.
Assim, $e^{y-x}$, sen $(y - x)$ etc. são soluções de 6.***c***.

***d***) $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$
$\nabla f\,(x, y)\,(y, -x) = 0$
$(y, -x)$ é vetor tangente, em $(x, y)$, à circunferência de centro na origem e que passa por este ponto. Assim, $f(x, y)$ deve ser constante sobre tais circunferências, logo,
$f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$, com $\varphi(u)$ diferenciável, é a solução da equação dada.

Assim, $e^{x^2 + y^2}$, sen $(x^2 + y^2)$ etc. são soluções de 6.***d***.

**7.** $z = f(x, y) = \varphi(x + y)$, com $\varphi(u)$ derivável, satisfaz à condição $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Seja $\varphi(u) = au^2 + bu + c$. Temos
$\varphi(1 + 1) = \varphi(2) = 3 \quad \Rightarrow 4a + 2b + c = 3$,
$\varphi(0 + 0) = \varphi(0) = 1 \quad \Rightarrow c = 1$,
$\varphi(0 + 1) = \varphi(1) = 2 \quad \Rightarrow a + b + c = 2$.
Então $a = 0, b = 1, \ c = 1$ e $(u) = u + 1$.

Assim $\varphi(x + y) = x + y + 1$ e, portanto, $f(x, y) = x + y + 1$ atende às condições propostas.

**8.** $z = f\,(x, y) = \varphi(u) = \varphi(2x + y)$ satisfaz $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Para que o gráfico de $f$ contenha a imagem de
$y(t) = (t, t, t^2), \quad t \in \mathbb{R}$, é preciso que $\underbrace{\varphi(3t)}_{\varphi(2t + t)} = t^2$

$[x = t, \ y = t, z = f(x, y) = t^2]$.

Assim $\varphi(u) = \dfrac{u^2}{9}$.

A função $f(x, y) = \dfrac{1}{9}\,(2x + y)^2$ resolve o problema.

**9.** Seja $F(x, y) = x^2 + 2y^2$**.**

Vamos determinar $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ que intercepte ortogonalmente $F(x, y) = c$. Devemos ter $\gamma'(t) = \nabla F(\gamma(t))$. Temos

$$\gamma'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right). \text{ Então } \frac{dx}{dt} = 2x \text{ e } \frac{dy}{dt} = 4y.$$

Segue que $x = k_1 e^{2t}$ e $y = k_2 e^{4t}$.

$\gamma(0) = (1, 2)$ e $\gamma(0) = (k_1, k_2)$. Logo, $k_1 = 1$ e $k_2 = 2$.

Portanto, $\gamma(t) = (e^{2t}, 2e^{4t})$ intercepta ortogonalmente todas as curvas da família $x^2 + 2y^2 = c$ e passa por $(1, 2)$.

**10.** Seja $F(x, y) = xy$.

A função $y = y(x)$ deve interceptar ortogonalmente as curvas da família $xy = c$, com $x > 0$ e $y > 0$. O coeficiente angular da direção determinada pelo vetor $\nabla F$ é $\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$. Então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}, \text{ ou seja,}$$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$. Temos $x\,dx = y\,dy$ e daí $y^2 = x^2 + c$.

***a***) $y(1) = 1 \Rightarrow c = 0$. Logo,
$y = x$.

***b***) $y(1) = 2 \Rightarrow 4 = 1 + c \Rightarrow c = 3$. Daí
$y^2 = x^2 + 3$ e, portanto,
$y = \sqrt{x^2 + 3}$.

*Exercícios 13.2*

**1.** ***a***) $F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 8$. Temos

$$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = (2x, 6y, 8z) \text{ e daí}$$

$\nabla F(1, -1, 1) = (2, -6, 8)$.

Plano tangente em $(1, -1, 1)$:

$\nabla F(1, -1, 1) \cdot [(x, y, z) - (1, -1, 1)] = 0$, ou seja,

$x - 3y + 4z = 8$.

Reta normal em $(1, -1, 1)$:

$(x, y, z) = (1, -1, 1) + \lambda(2, -6, 8) \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

***b)*** $F(x, y, z) = 2xyz - 3$. Temos

$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = (2yz, 2xz, 2xy)$ e daí

$\nabla F(\frac{1}{2}, 1, 3) = (6, 3, 1)$.

Plano tangente em $(\frac{1}{2}, 1, 3)$:

$\nabla F(\frac{1}{2}, 1, 3) \cdot [(x, y, z) - (\frac{1}{2}, 1, 3)] = 0$, ou seja,

$6x + 3y + z = 9$.

Reta normal em $(\frac{1}{2}, 1, 3)$:

$(x, y, z) = (\frac{1}{2}, 1, 3) + \lambda(6, 3, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

***c)*** $F(x, y, z) = z\, e^{x-y} + z^3 - 2$.

$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = (ze^{x-y}, -ze^{x-y}, e^{x-y} + 3z^2)$ e daí

$\nabla F(2, 2, 1) = (1, -1, 4)$.

Plano tangente em $(2, 2, 1)$:

$\nabla F(2, 2, 1) \cdot [(x, y, z) - (2, 2, 1)] = 0$, ou seja,

$x - y + 4z = 4$.

Reta normal em $(2, 2, 1)$:

$(x, y, z) = (2, 2, 1) + \lambda(1, -1, 4), \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

**2.** $F(x, y) = x^3 + y^3 + z^3 - 10 \Rightarrow \nabla F(x, y, z) = (3x^2, 3y^2, 3z^2)$.

$z = f(x, y) = \sqrt[3]{10 - x^3 - y^3}$ e

$z = f(1, 1) = \sqrt[3]{8} = 2.$

Plano tangente em $(1, 1, f(1, 1)) = (1, 1, 2)$:

$\nabla F(1, 1, 2) \cdot [(x, y, z) - (1, 1, 2)] = 0$, ou seja,

$x + y + 4z = 10.$

**3.** Seja $F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - \dfrac{11}{6}$. Temos
$\nabla F\,(x, y, z) = (2x, 6y, 4z).$
Seja $(x_0, y_0, z_0)$ o ponto de tangência. Logo:

$x_0^2 + 3y_0^2 + 2z_0^2 = \dfrac{11}{6}.$
Da condição de paralelismo:
$\nabla F\,(x_0, y_0, z_0) = \lambda(1, 1, 1)$ (ortogonal ao plano $x + y + z = 10$).
Portanto:

$2x_0 = \lambda, \quad 6y_0 = \lambda, \quad 4z_0 = \lambda$, ou seja, $x_0 = \dfrac{\lambda}{2}$, $y_0 = \dfrac{\lambda}{6}$ e $z_0 = \dfrac{\lambda}{4}$.

Substituindo na equação, temos

$\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^2 + 3\left(\dfrac{\lambda}{6}\right)^2 + 2\left(\dfrac{\lambda}{4}\right)^2 = \dfrac{11}{6}$ e, portanto, $\lambda^2 = 4$, ou seja, $\lambda = \pm 2$. Assim, os pontos de tangência são $\left(1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$ e $\left(-1, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

Plano tangente em $(1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2})$:

$\nabla F(1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2})\,[(x, y, z) - (1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2})] = 0$, ou seja,

$x + y + z = \dfrac{11}{6}.$

Plano tangente em $(-1, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{2})$:

$\nabla F(-1, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{2})\,[(x, y, z) - (-1, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{2})] = 0$

ou seja, $x + y + z = -\dfrac{11}{6}.$

**4.** $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$

$\nabla F\ (x, y, z) = 2x, 2y, 2z)$ e daí

$$\nabla F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = (1, 1, \sqrt{2}).$$

$\nabla F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot [(x, y, z) - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})] = 0$, ou seja,

$x + y + \sqrt{2}z = 2$ é a equação do plano tangente.

**5.** $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 3$ e
$G(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - z^2 = 3.$

Para todo $t$ no domínio de $\gamma$ tem-se
$F(\gamma(t) = 3$ e $G(\gamma(t)) = 3$, pois a imagem de $\gamma$ está contida nas superfícies
$F(x, y, z) = 3$ e $G(x, y, z) = 3$. Segue que
$\nabla F(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0$ e
$\nabla G(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0.$

$\gamma'(t_0)$ é normal aos vetores $\nabla F\ (1, 1, 1) = (2, 2, 2)$ e $\nabla G(1, 1, 1) = (2, 6, -2)$.

Logo $\gamma'(t_0)$ é paralelo ao produto vetorial

$$\nabla F(1,1,1) \wedge \nabla G(1,1,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -16\vec{i} + 8\vec{j} + 8\vec{k}.$$

A equação da reta tangente a $\gamma$ no ponto $\gamma(t_0) = (1, 1, 1)$ é

$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(-16, 8, 8)$ ou

$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 1, 1), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$

**6. *a*)** $F(x, y, z) = x^2 + y^2 = 2$ e

$G(x, y, z), = x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Temos

$\nabla F(1, 1, 1) = (2x, 2y, 0) = (2, 2, 0)$ e

$\nabla G(1, 1, 1) = (2x, 2y, 2z) = (2, 2, 2).$

$$\nabla F(1,1,1) \wedge \nabla G(1,1,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 4\vec{j}.$$

Reta tangente:

$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(1, -1, 0), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$

***b*)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow z^2 = 1 \Rightarrow z = 1$ ou $z = -1.$

Como a curva deve passar por (1, 1, 1) vamos considerar $z = 1$.

$x^2 + y^2 = 2 \quad \Rightarrow \left(\dfrac{x(t)}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{y(t)}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$. Fazendo

$\dfrac{x(t)}{\sqrt{2}} = \text{sen}\, t$ e $\dfrac{y(t)}{\sqrt{2}} = \cos t$ temos a curva

$\gamma(t) = (\sqrt{2}\ \text{sen}\ t, \sqrt{2} \cos t, 1)$.

**7. *a*)** $F(x, y, z) = 4x^2 + y^2 = 1$ e
$G(x, y, z) = x + y + z = 1$.

$\nabla F(0, 1, 0) = (8x, 2y, 0) = (0, 2, 0)$ e

$\nabla G(0, 1, 0) = (1, 1, 1) = (1, 1, 1)$.

$$\nabla F(0,1,0) \wedge \nabla G(0,1,0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{k}.$$

Reta tangente a $\gamma$ em $\gamma(t_0) = (0, 1, 0)$:

$(x, y, z) = (0, 1, 0) + \lambda(1, 0, -1), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$.

***b*)** $[2x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 1$ onde $x(t) = \dfrac{\text{sen}\, t}{2}$ e $y(t) = \cos t$.

De $x + y + z = 1$ vem $z(t) = 1 - x - y$. Daí

$z(t) = 1 - \dfrac{\text{sen}\, t}{2} - \cos t$ e, portanto,

$\gamma(t) = (\dfrac{1}{2}\ \text{sen}\, t, \cos t, 1 - \dfrac{1}{2}\ \text{sen}\ t - \cos t)$.

**8. *a*)** $z = \dfrac{\sqrt[4]{8 + x^2 + y^2}}{y} \quad \Rightarrow zy = \sqrt[4]{8 + x^2 + y^2}$

$$\Rightarrow \quad y^4 z^4 = 8 + x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^2 + y^2 - y^4 z^4 + 8}_{F(x,y,z)} = 0.$$

***b*)** $\nabla F(2, 2, 1) \cdot [(x, y, z) - (2, 2, 1)] = 0$, ou seja,

$x - 7y - 16z = -28$.

**9.** $\nabla F(1, 2, 3) \wedge \nabla G(1, 2, 3)$ é perpendicular ao plano normal a determinar. Como

$\nabla F(1, 2, 3) = (2, 4, 6)$ e

$\nabla G\ (1, 2, 3) = (6, 3, 2)$, resulta

$$\nabla F(1,2,3) \wedge \nabla G(1,2,3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -10\vec{i} + 32\vec{j} - 18\vec{k}.$$

$(-10, +32, -18) \cdot (x - 1, y - 2, z - 3) = 0$, ou seja,

$-5x + 16y - 9z = 0.$

**10.** Equação do plano tangente $\alpha$ em $(x_0, y_0, z_0)$:

$x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + z_0(z - z_0) = 0$. Temos

$$\begin{array}{ll} (5,0,1) \in \alpha & \Rightarrow\ x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 - z_0 - 5x_0 = 0, \\ (1,0,3) \in \alpha & \Rightarrow\ x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 - x_0 - 3z_0 = 0 \text{ e} \\ & \phantom{\Rightarrow}\ x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 = 7. \end{array}$$

Daí $5x_0 + z_0 = 7$ e $x_0 + 3z_0 = 7$.
Logo $x_0 = 1$, $z_0 = 2$ e $y_0 = \pm 1$.

Plano tangente em $(1, 1, 2)$:
$(2, 4, 4)\ (x - 1, y - 1, z - 2) = 0 \Rightarrow 2(x - 1) + 4(y - 1) + 4(z - 2) = 0$
$\Rightarrow x + 2y + 2z = 7$.

Plano tangente em $(1, -1, 2)$:
$2(x - 1) + 4(y + 1) + 4(z - 2) = 0 \Rightarrow x - 2y + 2z = 7$.

*Exercícios 13.4*
**1. *a*)** Sejam $f(x, y) = x^2 - 3y^2$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$ e

$$\vec{u} = \frac{(2,1)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \cdot \vec{u}, \text{ ou seja,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = (2, -12) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{-8}{\sqrt{5}}.$$

***b*)** Sejam $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$; $(x_0, y_0) = (1, 1)$ e $\vec{u} = \dfrac{(3,4)}{5} = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \cdot \vec{u} \text{ e}$$

$\nabla f(x, y) = (2xe^{x^2 - y^2}, -2ye^{x^2 - y^2})$. Então,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1) = (2, -2) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = -\frac{2}{5}.$$

**2.** ***a***) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ em (1, 1).

$\nabla f(1, 1) = (3, 3) = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ aponta, em (1, 1), a direção e sentido de maior crescimento da função.

$-\nabla f(1, 1) = -3\vec{i} - 3\vec{j}$ dá a direção e sentido de maior decrescimento da função.

***b***) $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ em (1, −1).

$$\nabla f(1, -1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1), \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1)\right) = \left(\frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2}, \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

$\vec{i} - \vec{j}$ dá a direção e o sentido de maior crescimento e

$-\vec{i} + \vec{j}$ dá a direção e o sentido de decrescimento mais rápido.

***c***) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$, em $\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Temos

$\nabla f(1, \frac{1}{2}) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Assim,

$-i - j$ dá a direção e o sentido de maior crescimento e

$i + j$ dá a direção e o sentido de decrescimento mais rápido.

**7.** $T(x, y, z) = 16 - 2x^2 - y^2$**.**

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$ e

$\gamma'(t) = \nabla T(\gamma(t))$.

$\gamma'(t) = \nabla T(\gamma(t)) \Leftrightarrow (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (-4x(t), -2y(t))$.

$\dot{x} = -4x \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = k_1 e^{-4t}$ e

$\dot{y} = -2y \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = k_2 e^{-2t}$**.**

De $x(0) = 1$ e $y(0) = 2$ segue $k_1 = 1$ e $k_2 = 2$.

Logo, $x(t) = e^{-4t}$ e $y(t) = 2e^{-2t}$, $t \geqslant 0$.

**9.** Sejam $\gamma(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, f(x_0 + at, y_0 + bt))$ e $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

$\nabla f(x, y) = (y, x) \quad \Rightarrow \quad \nabla f(1, 2) = (2, 1)$.

Então $\gamma(t) = (1 + 2t, 2 + t, f(1 + 2t, 2 + t))$.

$\gamma(0) = (1, 2, f(1, 2)) = (1, 2, 2)$

$\gamma'(0) = \left(a, b, \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2)\right)$, com $(a, b)$ unitário.

$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2) = \nabla f(1, 2) \cdot \vec{u} = (2, 1) \cdot \frac{\nabla f(1, 2)}{\|\nabla f(1, 2)\|}$, ou seja,

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2) = (2, 1) \cdot \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = \dfrac{4}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$. Então

$\gamma'(0) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}, \sqrt{5}\right).$

A tangente em $\gamma(0)$ é a reta procurada:

$$(x, y, z) = (1, 2, 2) + \lambda\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \sqrt{5}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

ou
$(x, y, z) = (1, 2, 2) + \lambda(2, 1, 5).$

**11.** $\nabla f(x, y) = (8x, 2y)$, daí
$\nabla f(1, 1) = (8, 2).$

Sendo P′ a projeção de P sobre o plano $xy$, P′ move-se na direção e sentido de máximo crescimento de $f$, ou seja, na direção do vetor $\nabla f(x, y) = (8x, 2y)$.

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{8x} \quad \Rightarrow \quad \ln y = \dfrac{1}{4} \ln x + k.$ Como $y(1) = 1$ temos $k = 0$ e $y = \sqrt[4]{x}$.
$y = t \quad \Rightarrow \quad x = t^4.$
$z = f(x(t), y(t)) = f(t^4, t) = 4t^8 + t^2.$
Logo, a parametrização para a trajetória de P é
$\gamma(t) = (t^4, t, 4t^8 + t^2).$

**14.** ***a***) $T(x, y) = 40 - x^2 - 2y^2$ e
$T(3, 2) = 23.$
$40 - x^2 - 2y^2 = 23 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2y^2 = 17.$

***b***) $\nabla T(3, 2) = (-2x, -4y) = (-6, -8) = -6\vec{i} - 8\vec{j}.$

***c***) $\dfrac{\partial T}{\partial \vec{u}}(3, 2) = \|\nabla T(3, 2)\| = \|(-6, -8)\| = 10.$

A partir do ponto (3, 2) e na direção e sentido de $\nabla T(3, 2) = -6\vec{i} - 8\vec{j}$, a temperatura está aumentando a uma taxa de 10°C por km. Caso caminhe 0,01 km nesta direção a temperatura se elevará de $0{,}01 \cdot 10 = 0{,}1$°C, aproximadamente.

***d***) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{j}}(3, 2) = \nabla T(3, 2) \cdot (0, 1) = (-6, -8) \cdot (0, 1) = -8.$

Na direção $\vec{j}$ a temperatura decresce a uma taxa de 8°C por km.

Caso caminhe, na direção $\vec{j}$, 0,01 km a temperatura decrescerá $0{,}01 \cdot 8 = 0{,}08$°C aproximadamente.

**15.** ***a***) $f(x, y, z) = xyz$ em (1, 1, 1) e na direção $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Temos

$\vec{u} = \dfrac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}\,\vec{i} + \dfrac{1}{\sqrt{6}}\,\vec{j} - \dfrac{1}{\sqrt{6}}\,\vec{k},$

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1, 1) = \nabla f(1, 1, 1) \cdot \vec{u}$, ou seja,

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1, 1) = (1, 1, 1) \cdot \left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}.$

**16)** $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 1, 1) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1), \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1), \dfrac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1)\right) \cdot \left(0, \dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right) = 1,$

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{w}}(1, 1, 1) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1), \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1), \dfrac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1)\right) \cdot \left(-\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}, 0\right) = 2$ e

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{j}}(1, 1, 1) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1), \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1), \dfrac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1)\right) \cdot (0, 1, 0) = 0.$ Assim,

$\dfrac{4}{5}\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{3}{5}\dfrac{\partial f}{\partial z} = 1; \quad -\dfrac{4}{5}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{3}{5}\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2; \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0.$

Logo, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1) = -\dfrac{5}{2}; \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1) = 0; \quad \dfrac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1) = \dfrac{5}{3}.$ Então

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1, 1) = \|\nabla f(1, 1, 1)\| = \left\|\left(-\dfrac{5}{2}, 0, \dfrac{5}{3}\right)\right\| = \sqrt{\dfrac{325}{36}} = \dfrac{5\sqrt{13}}{6}.$

**17.** $\nabla f(x, y)$ é um vetor do $\mathbb{R}^2$**.**

Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores unitários e ortogonais de $\mathbb{R}^2$, eles constituem uma base ortonormal do $\mathbb{R}^2$.

Logo $\nabla f(x, y)$ deve ser escrito como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Então $\nabla f(x, y) = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$ onde $a$ e $b$ são as componentes de $\nabla f(x, y)$ em relação à base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

Por outro lado, $\nabla f(x, y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ e $\nabla f \cdot \vec{u} = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}.$

Fazendo o produto escalar:

$\underbrace{\nabla f(x, y) \cdot \vec{u}}_{\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}} = a\,\underbrace{\vec{u} \cdot \vec{u}}_{\|u\|^2 = 1} + b\,\underbrace{\vec{v} \cdot \vec{u}}_{0}$ (os vetores são ortogonais), logo $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y) = a$

$\underbrace{\nabla f(x, y) \cdot \vec{v}}_{\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}} = a\,\underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}}_{0} + b\,\underbrace{\vec{v} \cdot \vec{v}}_{\|v\|^2 = 1}$, logo, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y) = b.$

Portanto,

$\nabla f(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y)\,\vec{u} + \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y)\,\vec{v}.$

**19.** $f(x, y) = \left[\text{arcsen}\,\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right]^4$. Seja $g(r, \theta) = f(x, y)$ onde

$x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$. Temos

$$g(r, \theta) = \left[\text{arcsen}\,\frac{r\,\text{sen}\,\theta}{\underbrace{\sqrt{r^2\,\cos^2\theta + r^2\text{sen}^2\theta}}_{r}}\right]^4 = \theta^4$$

Sabemos que pelo item $c$ do Exercício 18,

$\|\nabla f(x, y)\|^2 = \dfrac{1}{r^2}[4\theta^3]^2 = \dfrac{16\theta^6}{r^2}$.

Temos $x = 1$, $y = 1$, $r\cos\theta = 1$, $r\,\text{sen}\,\theta = 1$, $r^2 = 2$, $r = \sqrt{2}$ e $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Daí

$\|\nabla f(1, 1)\|^2 = \dfrac{16\theta^6}{r^2} \Rightarrow \|\nabla f(1, 1)\| = \dfrac{4|\theta^3|}{r} \Rightarrow \|\nabla f(1, 1)\| = \dfrac{\sqrt{2}\,\pi^3}{32}$.