anotações - MAE0228

- Noções de probabilidade
  - probabilidade condicional
  - problema do prêmio
- Variáveis aleatórias
  - caso discreto
    - Bernoulli
    - Binomial
    - Hipergeométrica
    - Poisson
    - valor esperado de uma v.a. discreta
  - caso multivariado
  - caso bivariado
    - variáveis aleatórias independentes
      - variância da Binomial
  - variáveis aleatórias contínuas
    - distribuição acumulada
    - caso discreto
    - caso contínuo
    - esperança condicional
- Processo Estocástico
  - Cadeia de Markov em tempo discreto
    - condição de Markov
  - Cadeia de Ehrenfest
  - Ruina do jogador
  - Passeio aleatório
  - Matriz de transição
  - Equação de Charman - Kolmogorov
  - Classificação dos Estados de uma cadeia
  - Período de um estado

Variáveis Aleatórias

Duas variáveis aleatórias são independente quando a ocorrência de uma não é influenciada pela ocorrência da outra.

Distribuição Uniforme

Uma variável aleatória X tem distribuição uniforme e contínua no intervalo [a,b], se sua função de densidade $f(x)$ é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para indicar que a v.a. X segue esse modelo no intervalo [a,b], escrevemos $X \sim U(a,b)$.

Para calcular probabilidades com essa v.a. tem que integrar no intervalo pedido.

EXEMPLO: $X \sim U(0, 30)$

queremos calcular $P(X > 24)$

$$\boxed{P(X > x) = \int_x^b f(x)\,dx = \int_x^b \frac{1}{b-a}\,dx}$$

$$P(X > 24) = \int_{24}^{30} \frac{1}{30-0}\,dx$$

$$P(X > 24) = \frac{x}{30}\Big|_{24}^{30}$$

$$P(X > 24) = 1 - \frac{24}{30}$$

$$= \frac{6}{30} = 0,2$$

Distribuição Poisson

- Irá calcular a quantidade de vezes que determinado evento ocorre em certo período que pode ser de tempo, volume, área, entre outros.
- As chances de ocorrer o evento não muda em cada intervalo, ou seja, ela se mantém a mesma em todos os intervalos.
- O número das ocorrências presente em um intervalo não é dependente de outro.

FÓRMULA: $P(X=K) = \dfrac{\lambda^K e^{-\lambda}}{K!}$

λ - número real que corresponde ao número de ocorrências que se espera dentro de um determinado intervalo de tempo.

e - número de Euler (2,71828)

K - quantidade de vezes que, dentro de um certo intervalo, um evento ocorre.

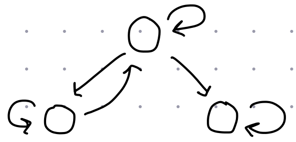
CADEIA DE MARKOV

colunas (PARA)

linhas (DE) $\begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{bmatrix} \longrightarrow$ a linha tem que somar 1

a matriz acima é uma matriz de transição

a cadeia de markov é o esquema com setas



RECORRENTE

Um estado é dito ser **recorrente** se entrando neste estado, o processo nunca irá deixar este estado.

Portanto, um estado é **recorrente**, se e somente se, não é transiente. Uma vez que o estado **recorrente** será "revisitado" após cada visita (não necessariamente no próximo passo do processo), este será visitado infinitamente para o processo em tempo **infinito**.

se sair de um dado estado ele irá retornar em algum momento

TRANSIENTE

Um estado é dito ser **transiente** se, entrando neste estado, o processo pode nunca retornar novamente para este estado.

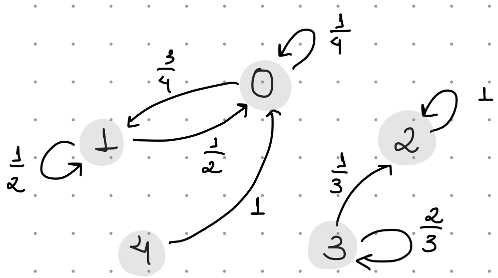
Portanto, o estado i é transiente se e somente se existe um estado j ($j \neq i$) que é alcançável a partir do estado i mas não vice-versa, isto é, o estado i não é alcançável a partir do estado j. Consequentemente, um estado **transiente** será visitado somente um número **finito** de vezes.

se sair de um dado estado não da para retornar

EXEMPLO

suponha que a cadeia de Markov possui a seguinte matriz de transição P.

$$
P = \begin{array}{c|ccccc}
\text{estado} \downarrow & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\
4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$



- o estado 3 é transiente, porque se o processo está no estado 3, há uma probabilidade positiva que ele nunca irá retornar para este estado.
- o estado 4 é transiente, porque se o processo começa nesse estado, imediatamente o processo o deixa e nunca mais irá retornar para este estado.
- O estado 0 e 1 são recorrentes, porque se o processo começar a partir de um desses dois estados, este nunca deixará estes dois estados.
- o estado 2 é recorrente, porque se o processo começar nesse estado ele nunca sairá dele.

IRREDUTÍVEL

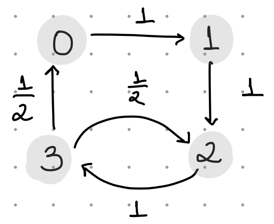
Uma cadeia de Markov é dita **irredutível** se todos os seus estados se comunicam. Uma cadeia de Markov com uma única classe é dita irredutível. (não pode ser reduzida a classes).

PERÍODO DE UM ESTADO

Período de um estado i: $d(i) = MDC(n \in \mathbb{N}_+ \mid P_{ii}^n > 0)$

ou seja, o máximo divisor comum de todos os $n \in \mathbb{N}_+$ tal que $P_{ii}^n > 0$.

EXEMPLO



$P_{00} = 0$ (caminho de 0 para 0 em 1 passo)

$P_{00}^2 = 0$ (caminho de 0 para 0 em 2 passos)

$P_{00}^3 = 0$ $\quad P_{00}^4 = \frac{1}{2}$ $\quad P_{00}^5 = 0$ $\quad P_{00}^6 = \frac{1}{4}$ $\quad P_{00}^7 = 0$

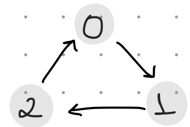
$P_{00}^8 = \frac{1}{8}$

↳ multiplicação das prob dos caminhos

$d(0) = MDC\{4, 6, 8\} = 2$

↳ número do caminho que a prob $\neq 0$

Teorema: se $i \longleftrightarrow j$, então $d(i) = d(j)$



- se tivermos uma cadeia de Markov irredutível, então todos os estados têm o mesmo período.

APERIÓDICA

uma cadeia de Markov é **aperiódica** se todos os seus estados possuem período $d(i) = 1$, $\forall i = 0, 1, \dots, n$.

para uma cadeia irredutível se $P_{ii} > 0$ então $d(i) = 1$

DISTRIBUIÇÃO ESTACIONÁRIA

Em uma cadeia de Markov irredutível e aperiódica com estados $j = 0, 1, \dots$

$$\lim_{n \to \infty} P_{ij}^n = \pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i = 1$$

probabilidade de sair de i e chegar em j em infinitos passos

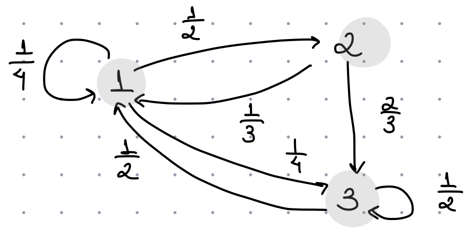
$\pi_i = \lim_{n \to \infty} (X_n = i)$ (não depende X_0, processo perde memória)

- o conjunto $(\pi)_{i=0}^{\infty}$ é chamado **distribuição estacionária** de probabilidade da cadeia de Markov.

$$P(X_{n+1} = j) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) P(X_n = i) = \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij} P(X_n = 1)$$

prob de chegar em j depois de $n+1$ passos independente de onde começou

EXEMPLO (distribuição estacionária)



$$\boxed{\pi = \pi P}$$

a) a cadeia é irredutível ?

$1 \longleftrightarrow 2$; $1 \longleftrightarrow 3$; $2 \longleftrightarrow 3$

todos se comunicam, então a cadeia tem só uma classe, portanto é irredutível

b) é aperiódica

para ser aperiódica: $d(1) = d(2) = d(3)$

$P_{11} = \frac{1}{4} > 0 \qquad d(1) = MDC\{1, \dots\} = 1$

portanto $d(1) = d(2) = d(3) = 1$, é periódica

c) encontre a distribuição estacionária

$$P = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{3} \pi_i P_{ij}$$

$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_1 P_{11} + \pi_2 P_{21} + \pi_3 P_{31} \\ \pi_2 = \pi_1 P_{12} + \pi_2 P_{22} + \pi_3 P_{32} \\ \pi_3 = \pi_1 P_{13} + \pi_2 P_{23} + \pi_3 P_{33} \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \frac{\pi_1}{4} + \frac{\pi_2}{3} + \frac{\pi_3}{3} \\ \pi_2 = \frac{\pi_1}{2} + 0 + 0 \\ \pi_3 = \frac{\pi_1}{4} + \frac{2}{3}\pi_2 + \frac{\pi_3}{2} \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

resolvendo o sistema:

$\Rightarrow \pi_1 = \frac{3}{8}$; $\pi_2 = \frac{3}{16}$; $\pi_3 = \frac{7}{16}$

temos então

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & \frac{3}{8} & \frac{3}{16} & \frac{7}{16} \\ 2 & \frac{3}{8} & \frac{3}{16} & \frac{7}{16} \\ 3 & \frac{3}{8} & \frac{3}{16} & \frac{7}{16} \end{array}$$

DISTRIBUIÇÃO ESTACIONÁRIA ÚNICA

Seja P uma matriz de transição de uma cadeia de Markov irredutível. Então existe uma **única** distribuição estacionária π em Ω ($\eta = \Omega$) tal que $\pi = \pi P$ e $\pi(x) > 0$ para todo x em Ω.