Nome: Sabrina Araujo da Silva   nºUSP: 12566182

MAC0338 - ANÁLISE DE ALGORITMOS

LISTA 1

exercícios 1, 3(a), 3(b), 3(e) e 4(b)

1. Lembre-se que $\lg n$ denota o logaritmo na base 2 de n. Usando a definição de notação O, prove que

(a) 3^n não é $O(2^n)$

para $n_0 = 1$ e $c = 1$ temos que

$3^n \geq 1 . 2^n \geq 0$

ou seja, para $T(n) = 3^n$ e $O(f(n)) = O(2^n)$ não temos que $T(n) \leq c\, f(n)$ para todo $n \geq n_0$.

(b) $\log_{10} n$ é $O(\lg n)$

para $n_0 = 1$, $c = 1$ e $n \geq n_0$ temos que

$0 \leq \log_{10} n \leq 1 . \lg n$

(c) $\lg n$ é $O(\log_{10} n)$

para $n_0 = 1$, $c = 4$ e $n \geq n_0$ temos que

$0 \leq \lg n \leq 4 \log_{10} n$

3. Prove ou dê um contra-exemplo para as afirmações abaixo:

(a) $\lg \sqrt{n} = O(\lg n)$ $(\lg \sqrt{n} \in O(\lg n))$

para $n_0 = 1$, $c = 1$ e $n \geq n_0$ temos que

$0 \leq \lg \sqrt{n} \leq 1 . \lg n$

(b) Se $f(n) = O(g(n))$ e $g(n) = O(h(n))$ então $f(n) = O(h(n))$.

Sabemos que funções que são $O(g(n))$ são funções que não crescem mais rápido que $g(n)$, assim como $f(n)$. E, assim, temos que $g(n)$ é uma função que não cresce mais rápido que $h(n)$, pois $g(n) = O(h(n))$. Portanto, se $f(n)$ cresce mais lentamente que $g(n)$ e $g(n)$ cresce mais lentamente que $h(n)$, $f(n)$ também não cresce mais rápido que $h(n)$, logo $f(n) = O(h(n))$.

(e) Se $f(n) = O(g(n))$ então $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$.

Sabemos que $f(n)$ é uma função que não cresce mais rápido que $g(n)$. E 2^x é uma função crescente para $x \geq 0$. Portanto, temos que $0 \leq 2^{f(n)} \leq 2^{g(n)}$ e, assim, $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$.

4. Prove que

(b) $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} \leq 2.$

Para $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i}$ temos

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \frac{6}{2^6} + \dots + \frac{n}{2^n}$$

podemos escrever o somatório separando-o em várias PGs para cada valor de i

- para $i = 1$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}$

- para $i = 2$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
$+ \frac{1}{4}$

- para $i = 3$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
$+ \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
$+ \frac{1}{8}$

portanto para $i = n$ $\Rightarrow$

$$\begin{array}{llllll} \frac{1}{2} + & \frac{1}{4} + & \frac{1}{8} + & \frac{1}{16} + \cdots & & + \frac{1}{2^n} \\ & \frac{1}{4} + & \frac{1}{8} + & \frac{1}{16} + \cdots & & + \frac{1}{2^n} \\ & & \frac{1}{8} + & \frac{1}{16} + \cdots & & + \frac{1}{2^n} \\ & & & \frac{1}{16} + \cdots & & + \frac{1}{2^n} \\ & & & & & + \frac{1}{2^n} \end{array}$$

como o somatório foi dividido em PGs temos que a razão de cada uma é $\frac{1}{2}$.

Cada PG é uma série geométrica de razão $r = \frac{1}{2}$, se $r < 1$, então a série converge para $\frac{a_1}{1 - r}$.

- para a linha 1 Temos $a_1 = \frac{1}{2}$, então

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

- para a linha 2 temos $a_2 = \frac{1}{4}$, então

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

- para a linha 3 temos $a_3 = \frac{1}{8}$, então

$$\sum_{i=3}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

- para a linha n temos $a_n = \frac{1}{2^n}$, então

$$\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Assim, podemos perceber que surge uma série do tipo: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}}$ a partir das somas das PGs.

Seja a série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \dots$

da algebra elementar temos a seguinte propriedade

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

para $a = 1$ e $b = \frac{1}{2}$:

$$\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

seja $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{i-1}}$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) s_n \Rightarrow s_n = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

calculando o limite:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} 2\left(1 - \frac{1}{2n}\right) = 2$$

Portanto, a série $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}}$ converge e a soma é igual a 2.

Assim, podemos concluir que $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} \leq 2$