MAC0209 - modelagem e simulação

anotações para P1

semana 1

MODELOS MATEMÁTICOS E SOLUÇÕES COMPUTACIONAIS

fenômeno → sensor → dados observados (modelo matemático; teoria científica) → análise computacional → síntese computacional (simulação) → visualização

MÉTODO CIENTÍFICO

1. coloque-se uma questão
2. formule uma hipótese
3. formule um experimento
4. observe (coleta de dados)
5. analise os resultados
6. volte para o passo 2 se a hipótese não for correta
7. relate os resultados.

COMO SE FAZ UM MODELO?

1. identifique o problema e as questões científicas
2. identifique as variáveis relevantes (e irrelevantes)
3. identifique o tipo de modelo matemático
   - função
   - equação de diferença
   - equação diferencial, etc.
4. monte o modelo (relacionando as variáveis)
5. simplifique até que seja tratável
   - analiticamente: as equações precisam ser solúveis
   - computacionalmente: o problema precisa ser solúvel

6. resolva as equações
7. responda as questões científicas
8. modifique o modelo, compare soluções
9. estude a sensibilidade do modelo
10. compare as saídas com as observações experimentais.

VELOCIDADE MÉDIA

$x(t) = a + bt$ (espaço)

$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$ (velocidade do movimento)

$x(t) = x_0 + v(t - t_0)$ (lei horária)

JUPITER NOTEBOOK

- introdução ao Python

semana 2

VELOCIDADE MÉDIA

$x(t) = a + bt$

a velocidade instantânea $v(t)$ num instante t qualquer, num movimento descrito por $x = x(t)$, é dada por

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

PROBLEMA INVERSO

queremos calcular o espaço a partir do $v(t)$

consideremos um movimento cuja velocidade $v(t)$ é dada por:

$$v(t) = 2at + b$$

a área a calcular neste caso é o trapézio sombreado

$$\frac{dx}{dt} = 2at + b$$

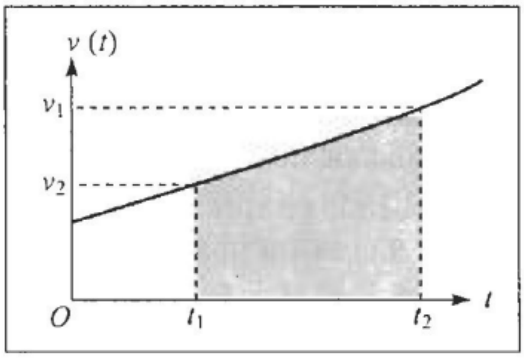

Figura 2.12 Exemplo de integração.

ACELERAÇÃO

a aceleração instantânea é a derivada em relação ao tempo da velocidade instantânea

$x(t) \rightarrow$ deriva $\rightarrow v(t) \rightarrow$ deriva $\rightarrow a(t)$

$$a(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

LEI HORÁRIA DO MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

ou

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

VELOCIDADE DO MOVIMENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

ou

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta S$$

ALGORITMO DE EULER

e quando não soubermos a solução analítica?

- métodos analíticos representam soluções baseadas em fórmulas matemáticas.
- métodos numéricos são aplicações de algoritmos pelas quais é possível formular e resolver problemas matemáticos usando operações aritméticas menos complexas.

O método de Euler é uma forma de resolver numericamente uma equação diferencial ordinária

As EDOs são equações que não só lidam com diversas variáveis, como também lidam com funções e suas derivadas.

Assume-se ser conhecidas a derivada de uma função que se quer encontrar ("resolver") e um valor inicial da equação a ser integrada

Por exemplo, no caso do movimento uniformemente acelerado:

$a = b =$ constante $\qquad v(t) = x'(t) = \dfrac{dx}{dt} = 2at + b$

$$x(0) = 0$$

A ideia do método de Euler é substituir a derivada por uma aproximação de Taylor, desprezando-se os termos maiores que segunda ordem. Isto é:

$$x'(t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = 2at + b$$

Portanto, podemos escrever

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t\,(2at+b)$$

Isso permite implementar o algoritmo de Euler para calcular a posição futura $x(t+\Delta t)$ a partir da posição inicial $x(t)$.

Nesse caso, $a, b, \Delta t$ são parâmetros de entrada, bem como a posição inicial $x(0) = 0$

Observamos que para esse caso, é possível calcular a solução $x(t)$ analiticamente:

$$v(t) = x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 2at + b \Rightarrow x(t) = at^2 + bt + c$$

JUPITER NOTEBOOK

- implementando o algoritmo de Euler

Para a implementação ficar organizada, crie duas funções:

- nextXeuler(x,t,params,dt): que recebe um vetor de parâmetros iniciais, params, o tempo e a posição atual, t e x, respectivamente, e o delta de tempo, dt (note que com isso desacoplamos os índices do incremento). A função retorna a nova posição $x(t+\Delta t)$ conforme explicado acima.
- nextXa(t,params): que recebe um vetor de parâmetros iniciais, params, e o tempo atual. A função retorna a nova posição x_t de acordo com a equação integrada analiticamente: $x(t) = at^2 + bt + c$.

params pode ser implementada como uma lista $[a, b, c]$.

Crie uma função main que itera essas duas funções entre os tempos 0s e 2s (com um dt de 0.1s) calcula e imprime a diferença absoluta entre elas (erro) e as grafique.

semana 3

MEDIDAS

- "um conjunto de operações com o objetivo de determinar o valor de uma quantidade"
- quantidade é um atributo de um fenômeno, corpo, ou substância que pode ser distinguido qualitativamente e determinado quantitativamente.
- uma medida é algo que fazemos que resulta num número e numa unidade.
- para obter a medida, comparamos nosso sistema desconhecido com um sistema conhecido.

ERROS E INCERTEZAS

- o erro é a diferença entre o resultado de uma medição e o valor real do que está sendo medido.
- existem 3 tipos de erro
- erro grosseiro ou por engano: não tem como prevenir e pode comprometer significamente o resultado (medição), de difícil tratamento.
- erro sistemático: o método pode estar errado e não importa quantas vezes repitamos o experimento, não melhoraremos o resultado, desvio consistente do valor verdadeiro.
- erro aleatório: é todo tipo de erro que não é por engano e nem sistemático.

PRECISÃO E ACURÁCIA

- acurácia é um conceito relacionado a obter a resposta certa com incerteza aceitável
- precisão é inversamente proporcional à incerteza.

JUPITER NOTEBOOK

- formato JSON

Exercício: limpeza e simplificação do JSON

Usando o arquivo 'extracted_sample1.json' gerado na seção anterior, execute a célula anterior e crie um novo arquivo JSON chamado 'cleaned_sample1.json' em que cada objeto da sequência 'photos' contém somente os campos:

- 'lat'
- 'lng'
- 'heading'
- 'shot_date'

Ou seja, o novo arquivo gerado a partir do 'extracted_sample1.json' deverá seguir o modelo:

`{ "photos" : [ { 'lat': '32.188423', 'lng' : '-81.195239', 'heading' : '72.76266', 'shot_date': '2018-03-03 20:29:36' }, ... ] }`

Medindo a distância entre dois pontos

Neste exercício você deve implementar a função distancia_euclidiana.

Esta função recebe dois vetores (i.e. array numpy) cada um com duas dimensões e retorna a distância euclidiana entre eles.

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} = \text{distância euclidiana}$$

Exercício - Visualizando o comprimento de cada trecho

Usando a função criada no exercício anterior vamos agora ver a distância percorrida pelo veículo a cada passo do sub-trajeto selecionado:

A ideia aqui é que todos os pontos da faixa de pontos selecionada sejam percorridos, e para cada par de pontos subsequentes seja calculada a distância entre eles e impressa essa distância.

Imprima uma lista como o exemplo a seguir usando a sua função de medir distância entre dois pontos:

- trecho 1000 a 1001 ; d = 0
- trecho 1001 a 1002 ; d = 0
- trecho 1002 a 1003 ; d = 0
- trecho 1003 a 1004 ; d = 0
- ...
- trecho 1097 a 1098 ; d = 0
- trecho 1098 a 1099 ; d = 0
- trecho 1099 a 1100 ; d = 0

Dica, você pode usar a linha abaixo para imprimir uma vez que a distância foi calculada:

```
print(f'trecho {i} {i+1} ; d = {dist}')
```

semana 4

FORÇAS EM EQUILÍBRIO

o movimento é afetado pela ação do que costumamos chamar de "forças".

2ª lei de Newton:

$$F = m.a$$

"a variação do momento é proporcional à força impressa, e tem a direção da força."

QUEDA LIVRE

a força P que atua sobre um corpo na vizinhança da superfície da Terra devido à atração gravitacional por ela exercida sobre o corpo é:

$$P = m.g$$

Para uma partícula em queda livre, a 2ª lei de Newton leva à

$$a = g$$

- partícula em queda livre

$$F_g = -mg$$

- segunda lei de Newton

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F$$

JUPITER NOTEBOOK

- analise dos dados do acelerômetro nos experimentos de queda livre

Exercícios

Crie um programa em Python que analise os dados do acelerômetro e detecte automaticamente os pontos de:

1. início da estabilização (repouso)
2. início da queda livre
3. início da fase de forte influência do atrito do ar
4. final da queda livre
5. início da estabilização (repouso)
6. início da passagem do Bob Esponja na fila indiana
7. final da passagem do Bob Esponja na fila indiana

Calcule quanto tempo demorou cada período acima.

Calcule a velocidade alcançada pelo Bob Esponja no final da queda.

semana 5

SISTEMAS DINÂMICOS

Sistemas dinâmicos são sistemas fora do equilíbrio, caracterizados por estados que mudam com o tempo.

São usados para modelar e fazer previsões de sistemas físicos, biológicos, financeiros, etc.

- visão computacional
- estado
  - variáveis de estado
  - vetor de estado (vetor de variáveis: $\vec{V}(t)$)

Processos que evoluem em função de alguma dimensão independente (ex: Tempo)

A lei de evolução é definida por um modelo matemático como uma função ou equação diferencial.

Podem ser:

- contínuos ou discretos
- determinísticos ou estocásticos

VETORES DE ESTADOS

equações diferenciais do movimento:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

Euler:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + x(t)\Delta t$$

$$v(t + \Delta t) = v(t) + a(t)\Delta t$$

assim, o movimento 1D da partícula pode ser representado por um vetor de estados:

$$\vec{s} = (x, v)$$

o vetor de estados:

$$\vec{s} = (x(t), v(t))$$

define a posição e a velocidade da partícula no instante de tempo t.

- a implementação do modelo de movimento da partícula com o vetor de estados em uma modelagem por sistemas dinâmicos usando o algoritmo de Euler pode ser definida como:

$$\vec{s}(t + \Delta t) = \vec{s}(t) + \vec{r}(t)\Delta t$$

em que $\vec{s}$ é o vetor de estados e $\vec{r}$ é o vetor de taxas de variação.

JUPITER NOTEBOOK

Exercício: $\frac{dx}{dt} = 2t + 1$

A partícula se movimenta segundo a equação:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 2t + 1$$
$$x(0) = 0$$

Solução analítica:

$$x(t) = t^2 + t + c$$

Como $x(0) = 0 \implies c = 0$

Solução de Euler:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + (2t + 1)\Delta t$$
$$v(t + \Delta t) = 2(t + \Delta t) + 1 = (2t + 1) + 2\Delta t = v(t) + 2\Delta t$$

Exercício: Resolva na célula abaixo antes de olhar a solução

Dado que temos a equação analítica da velocidade, vamos usá-la na atualização da coordenada da velocidade no vetor de estados. O programa abaixo implementa a solução desse problema **com** a modelagem por sistemas dinâmicos e vetores de estado.

Exercício: $\frac{d^2x}{dt^2} = 6t$

Escreva a solução para a EDO:

$\frac{d^2x}{dt^2} = 6t$

SEMANA 6

MOVIMENTO BIDIMENSIONAL

Se adotarmos coordenadas cartesianas, a posição de uma partícula em movimento no plano será descrita pelo par de funções:

$$(x(t),\ y(t))$$

O movimento 2D da partícula pode ser representado pelo vetor de estados

$$\vec{s} = (\vec{x}, \vec{v}) = ([x_1, x_2], [v_1, v_2])$$

JUPITER NOTEBOOK

Exercício: $\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{a}(t)$

Escreva a solução para as EDOs:

$\frac{d^2x_0}{dt^2} = \sin(k_0 \pi t)$

$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \cos(k_1 \pi t)$