Nome: Sabrina Araújo da Silva nºUSP: 12566182

MAC105

E3

(i) Prove que P_k é válida para $k = 1$. [*Observação.* A validade de P_k para $k = 1$ implica que: se $x_1, x_2, x_3, \ldots$ é uma sequência infinita de naturais, então existem $i_1 < i_2 < \ldots$, com infinitos i_j, tais que $x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq x_{i_3} \leq \ldots$]

temos que,

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ PK: $\exists\, a < b$ tq. $x_a \leq x_b$

por contradição: $\forall\, a < b$ temos $x_a > x_b$

para uma sequência $x_1, x_2, x_3, \ldots$
no qual o x_1 escolhido é 100, vale que,

$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{100}$

$\downarrow$

$100, 99, 98, 97, \ldots, 1$

por ser uma sequência infinita, temos $x_{101} = 0$

$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{100}, x_{101}$

$\downarrow$

$100, 99, 98, 97, \ldots, 1, 0$

pelo princípio da boa ordem, $\forall i \in \mathbb{N}$, $\exists a$ tq. $x_a \leq x_i$

nesse sentido, o mínimo no conjunto $\mathbb{N}$ seria $a = 0$

porém no conjunto dos números naturais não temos um valor para que satisfaça a condição $xa > xb$ para $xa = 0$

então, chegamos em um absurdo na prova por contradição, assim, temos que PK é válida para $K = 1$

(ii) **Prove que P_k é válida para $k = 2$.**

para $K = 2$, temos que o conjunto é formado por elementos do tipo (a_x, b_x)

uma K-upla será menor do que uma segunda K-upla se o elemento da primeira K-upla na primeira posição, na qual as duas K-uplas não coincidem, for menor do que o elemento naquela posição na segunda K-upla.

por exemplo: $(1, 2, 3, 6) < (1, 2, 4, 3)$, pois as primeiras posições coincidem, mas na terceira o elemento da primeira K-upla é menor que o da segunda.

para um conjunto infinito, sempre teremos um elemento $a < b$ tq $xa \leq xb$

por exemplo: temos $b = (100, 100)$ para encontrar $a < b$ além de $xa = xb$ $\underline{a}$ tem que seguir:

$a = (x, y)$ tal que

$x < 100$ e y pode assumir qualquer valor nos números naturais infinitamente.

ou:

$x = 100$ e $y < 100$

(ex: $(99, 182)$; $(99, \infty)$; $(100, 99)$; $(100, 1)$)

exemplo 2: temos $b = (0, 1)$

a pode ser da forma:

(além de $x_a = x_b$)

$a = (x, y)$ tq.

- $x = 0$ e $y < 1$

assim, temos que é válido para $k = 2$

(iii) Prove que P_k é válida para qualquer $k \geq 1$.

como PK para K = 2 é válida e uma K-upla é menor que uma segunda K-upla se a primeira posição (no qual os elementos não coincidem) for um elemento menor que a da segunda, temos que para K ≥ 1 é válido, pois não existir infinitas combinações na qual sempre terá um $xa \leq xb$.