LISTA 6

CHECKLIST

fiz ☐ incompleto ☐ tem resolução ☐ não entendi ☐

- [ ] 1. verificar os somatórios
- [ ] 2. verificar propriedade telescópica
- [ ] 3. calcular a soma da série
- [ ] 4. calcular a soma da série
- [ ] 5. determinar convergência ou divergência das séries
- [ ] 6. determinar se converge ou não
- [ ] 7. determinar se converge ou não
- [ ] 8. verificar afirmações
- [ ] 9. convergente ou divergente? justifique
- [ ] 10. determinar se é convergente ou divergente
- [ ] 11. determinar se é convergente ou divergente
- [ ] 12. determinar se é convergente ou divergente
- [ ] 13. determinar se é convergente ou divergente (convergência absoluta ou cond.)
- [ ] 14. determinar $z \in \mathbb{C}$ para que a série seja convergente

EXERCÍCIOS DO GUIDORIZZI PARECIDOS COM O EX 2

2.1) 1.e)

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{(4K+1)(4K+5)}$$

como é uma série telescópica, podemos resolver como:

$$\sum_{K=0}^{n} b_K - b_{K+1}$$

$$b_K = \frac{1}{(4K+1)} \qquad b_{K+1} = \frac{1}{(4(K+1)+1)} = \frac{1}{(4K+5)}$$

temos ainda

$$x\left[\frac{1}{(4K+1)} - \frac{1}{(4K+5)}\right] = \frac{1}{(4K+1)(4K+5)}$$

$$\Rightarrow x\left[\frac{\cancel{4K}+5-(\cancel{4K}+1)}{\cancel{(4K+1)(4K+5)}}\right] = \frac{1}{\cancel{(4K+1)(4K+5)}}$$

$$\Rightarrow x \cdot 4 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

assim, temos

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{(4K+1)(4K+5)} = \frac{1}{4}\sum_{K=0}^{\infty} \boxed{\frac{1}{(4K+1)}} - \frac{1}{(4K+5)}$$

agora, fazemos o 1º termo com K_1

$$= \frac{1}{4}\left[1 - \frac{1}{4K+5}\right]$$

agora, calculamos o limite

$$\lim_{K\to\infty} \frac{1}{4}\left[1 - \frac{1}{4K+5}\right] = \frac{1}{4}[1-0] = \frac{1}{4}$$

assim, a série $\sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{(4K+1)(4K+5)}$ converge para $\frac{1}{4}$

EXERCÍCIOS DO GUIDORIZZI PARECIDOS COM O EX 3 E 4

2.1) 1.a. calcule a soma da série dada:

$$\sum_{K=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^K =$$

podemos perceber que é uma série geométrica de razão $r = \frac{1}{2}$

se $r < 1$, então a série converge para $\frac{a_1}{1 - r}$

temos que $a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$, então

$$\sum_{K=0}^{+\infty} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

portanto, a série converge para 2

2.1) 1.b calcule a soma da série dada:

$$\sum_{K=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^K$$

podemos perceber que é uma série geométrica de razão $r = \frac{1}{3}$

se $r < 1$, então a série converge para $\frac{a_1}{1 - r}$

temos que $a_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

$$\sum_{K=0}^{+\infty} = \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

portanto, a série converge para $\frac{1}{6}$

2.1) 1.c) calcule a soma da série dada:

$$\sum_{K=0}^{\infty} e^{-K} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{e}$$

é uma série geométrica com razão $\frac{1}{e}$, assim

$$\sum_{K=0}^{\infty} e^{-K} = \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1}{\frac{e-1}{e}} = \frac{e}{e-1}$$

2.1) 1. d) calcule a soma da série dada:

$$\sum_{K=1}^{\infty} [1 + (-1)^K]$$

podemos perceber que $\sum_{K=1}^{\infty} [1+(-1)^K] = \sum_{K=1}^{\infty} 1 + \sum_{K=1}^{\infty} (-1)^K$

temos que

$\sum_{K=1}^{n} 1 = n$ e $\sum_{K=1}^{n} (-1)^n$

como $n \to \infty$

$$\lim_{n \to \infty} n + (-1)^n = \infty$$

ou seja, a série tende ao infinito e, assim, diverge

3. Calcule a soma da série dada.

(a) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$.

podemos perceber que é uma série geométrica com razão $r = \frac{1}{10}$

assim, se $r < 1$, a série converge para $\frac{a_1}{1-r}$

portanto:

$$\sum_{K=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^K = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^0}{1 - \frac{1}{10}} = 1 \cdot \frac{10}{9} = \frac{10}{9}$$

(b) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \pi^{-k}$.

podemos perceber que é uma série geométrica com razão $r = \frac{1}{\pi}$

se $r > 1$, a série converge para $\frac{a_1}{1-r}$

assim, temos que

$$\sum_{K=0}^{+\infty} \pi^{-K} = \frac{\frac{1}{\pi^0}}{1 - \frac{1}{\pi}} = \frac{1}{\frac{\pi - 1}{\pi}} = \frac{\pi}{\pi - 1}$$

(c) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+5)}$.

como é uma série telescópica, podemos resolver como:

$$\sum_{K=0}^{n} b_K - b_{K+1}$$

$$b_K = \frac{1}{(4K+1)} \qquad b_{K+1} = \frac{1}{(4(K+1)+1)} = \frac{1}{(4K+5)}$$

temos ainda

$$x\left[\frac{1}{(4K+1)} - \frac{1}{(4K+5)}\right] = \frac{1}{(4K+1)(4K+5)}$$

$$\Rightarrow x\left[\frac{\cancel{4K} + 5 - (\cancel{4K} + 1)}{\cancel{(4K+1)(4K+5)}}\right] = \frac{1}{\cancel{(4K+1)(4K+5)}}$$

$$\Rightarrow x \cdot 4 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

assim, temos

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{(4K+1)(4K+5)} = \frac{1}{4} \sum_{K=0}^{\infty} \boxed{\frac{1}{(4K+1)}} - \frac{1}{(4K+5)}$$

agora, fazemos o 1º termo com K1

$$= \frac{1}{4}\left[1 - \frac{1}{4K+5} \right]$$

agora, calculamos o limite

$$\lim_{K \to \infty} \frac{1}{4}\left[1 - \frac{1}{4K+5} \right] = \frac{1}{4}[1 - 0] = \frac{1}{4}$$

assim, a série $\sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{(4K+1)(4K+5)}$ converge para $\frac{1}{4}$

(d) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$.

mesmo que a c)

4. Calcule a soma da série dada

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

mesmo que a 3)c)

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha^n$, $0 < \alpha < 1$.

podemos pensar na série $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n$ que é uma série geométrica de razão α se $\alpha < 1$, então podemos calcular a série como $\frac{a_1}{1-\alpha}$, assim temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{\alpha^0}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$

temos que

$$\frac{d}{d\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^n$$

portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^n = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) = - \frac{\frac{d}{d\alpha}(1-\alpha)}{(1-\alpha)^2} = \frac{-(-1)}{(1-\alpha)^2} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$$

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)^2}$

mesmo que as outras que não fiz

5. Determine a convergência ou divergência das séries (v. Guidorizzi, Vol. 4).

(a) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1}$

seja $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

temos que

- f é contínua
- f é positiva
- e $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$, portanto f é decrescente

portanto, podemos utilizar o critério da integral para determinar a convergência ou divergência.

agora, calculamos a integral definida de 0 a b (sendo que $b \to \infty$) de f

$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{x^2+1}\,dx$ = sabemos que a primitiva é $\operatorname{arctg}(x)$ = $\operatorname{arctg} x \Big|_0^b$

$= \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(0) = \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg}(b) = \frac{\pi}{2}$

assim, como $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}$ converge para $\frac{\pi}{2}$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$ também converge para $\frac{\pi}{2}$

(b) $\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^2\log(k)}$.

podemos perceber que essa série se aproxima da série harmônica generalizada: $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, nesse caso $\alpha = 2$, portanto $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge pelo critério da integral para a série harmônica generalizada.

sendo assim, pelo critério da comparação, temos:

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{k^2\log(k)} \le \int_3^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

assim, como $\int_3^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ converge $\int_3^{+\infty} \frac{1}{k^2\log(k)}$ também converge e, portanto

$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2\log(k)}$ converge

7. Determine se convergem ou não as séries abaixo.

(a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{1+4^n}$.

podemos observar pelo termo dominante que $\frac{3^n}{1+4^n} > \frac{3^n}{4^n}$, assim, pelo critério da comparação, se $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n}$ convergir, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n}{1+4n}$ também irá convergir.

assim, para determinar se $\sum_{n=0}^{\infty}$ converge ou não, iremos utilizar o critério da raiz, então temos:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{4^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{3}{4} = \frac{3}{4} < 1$$

como o limite é menor que 1, temos pelo critério da raiz que a série analisada converge, portanto, pelo critério da comparação, temos que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{1+4^n}$ Também converge

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!2^n}{n^n}$

como termo n! vamos utilizar o teste da razão

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)!\,2^{(n+1)}}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{n!\,2^n} = \frac{\cancel{(n+1)} \cdot (\cancel{n})! \cdot 2 \cdot \cancel{2^{(n)}}\, n^n}{\cancel{(n+1)} \cdot (n+1)^{(n)}\, \cancel{n!}\, \cancel{2^n}}$$

$$= \frac{2 \cdot n^n}{(n+1)^n} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2 \cdot \lim_{n \to} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2e^{-1} = \frac{2}{e} < 1$$

assim, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,2^n}{n^n}$ converge pois o limite resultou em um valor menor que 1

(c) $\sum_{n=3}^{+\infty}[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}]$.

expandindo a série, temos

$$\sum_{n=3}^{K}[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}] = [\sqrt{4}-\sqrt{3}]+[\sqrt{5}-\sqrt{4}]+[\sqrt{6}-\sqrt{5}]+\dots+[\sqrt{K+1}-\sqrt{K}]$$

podemos perceber que os termos se anulam, sobrando $\sqrt{K+1}-\sqrt{3}$

sabendo que $K \to \infty$

$$\lim_{K\to\infty} \sqrt{K+1}-\sqrt{3} = \infty$$

então, a série diverge

(d) $\sum_{n=4}^{+\infty}\frac{n^3+4}{2^n}$

para determinar se a série converge ou diverge, vamos utilizar o critério da razão

assim,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3+4}{2^{(n+1)}}\cdot\frac{2^n}{n^3+4} = \frac{(n+1)^3+4}{2\cdot(n^3+4)} = \frac{(n+1)^3+4}{2(n^3+4)}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{n^3+3n^2+3n+5}{n^3+4} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2+3n+5}{n^3+4}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3n^2}{n^3}+\frac{3n}{n^3}+\frac{5}{n^3}}{1+\frac{4}{n^3}} = \frac{1}{2} < 1$$

como o limite é menor que 1, a série $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{n^3+4}{2^n}$ converge

10. Determine se é convergente ou divergente a série dada abaixo.

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(1 - \cos \frac{1}{n^2})$

sejam $a_n = n^2\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ e $b_n = \frac{1}{n^2}$ sequências numéricas positivas

pelo critério da comparação no limite, vamos calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^4}}$$

L. Hopital

$$= \frac{-\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right) \cdot -2\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{-4}{n^5}} = -\frac{\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)}{n^3}}{\frac{-4}{n^5}} = \frac{-2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)}{n^3} \cdot \frac{n^5}{-4}$$

2. Hopital

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right) n^2 = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{-2\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)}{n^3}}{\frac{-2}{n^3}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{-2}\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\cancel{n^3}}{\cancel{n^3(-2)}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot 1$$

assim, como o limite $L = \frac{1}{2}$ está no intervalo $0 < L < +\infty$, as duas séries são comparáveis

portanto, como a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\left(1 - \cos\frac{1}{n^2}\right)$ também converge.

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \log(1 + \frac{1}{n^2})$

sejam $a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ e $b_n = \frac{1}{n^2}$ sequências numéricas positivas

pelo critério da comparação no limite, vamos calcular

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} \overset{\text{L. Hopital}}{=} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}} \cdot \cancel{\left(-\frac{2}{x^3}\right)}}{\cancel{\left(-\frac{2}{x^3}\right)}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}} = 1$$

portanto, as duas sequências são comparáveis

como a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, pelo critério da comparação no limite temos que a serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ também converge.