Capítulo 5

Processos de Markov

Neste capítulo trataremos de uma seqüência de estados que segue um processo de Markov, tal que a probabilidade da próxima ocorrência dependerá apenas da ocorrência imediatamente anterior. Isto é, trataremos com cadeias de Markov de primeira ordem.

Processos de Markov constituem um tipo especial de processo estocástico que possui a propriedade de que as probabilidades associadas com o processo num dado instante do futuro dependem somente do estado presente, sendo, portanto, independentes dos eventos no passado. Desse modo, os processos markovianos são caracterizados pelo que se designa como 'falta de memória'.

Para caracterizar processos de Markov de maneira precisa é necessário estabelecer uma definição formal.

5.1 Definição e caracterização de processos de Markov

Antes de apresentar a definição de processos de Markov, vamos expor um conceito mais abrangente que é o de processo estocástico.

Processo estocástico é definido como uma coleção indexada de variáveis aleatórias $\{X_t\}$, onde o índice t pertence a um dado conjunto T. O conjunto T é normalmente composto de números inteiros não negativos, e X_t representa uma característica mensurável de interesse num instante de tempo t. Formalmente, a notação indicada pela expressão (5.1) define processo estocástico sobre um dado espaço de probabilidade

$$\{X_t \ ; \ t \in T\}. \tag{5.1}$$

Os valores assumidos pela variável aleatória X_t são chamados estados, e o conjunto de todos os possíveis valores forma o espaço de estado do processo.

Como exemplo de um processo estocástico podemos citar o tráfego de dados em uma rede local de computadores que se encontra interligada à rede Internet. Neste sistema, mensagens eletrônicas são recebidas e enviadas enquanto são feitos *downloads* de arquivos. A taxa de transferência de *bits* por unidade de tempo num dado servidor desta rede é uma variável incerta que depende da intensidade de uso do sistema pelos usuários conectados naquele momento. Podemos, neste sistema, caracterizar a variável aleatória X_t como a velocidade de transferência de dados em $bits/s$, onde t é o instante de tempo pertencente ao intervalo $T = [0, \infty)$. O espaço de probabilidade neste exemplo corresponde à função densidade de probabilidade que rege o comportamento da variável aleatória X_t, por exemplo, uma distribuição normal.

Definição 5.1: (Processo de Markov) Um processo estocástico $\{X_t\ ;\ t \in T\}$ é chamado um processo de Markov quando, para qualquer tempo $t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t$, a distribuição condicional de X_t para os valores dados de $X_{t_0}, X_{t_1}, \cdots, X_{t_n}$ dependem somente de X_{t_n}:

- se X_t assumir valores discretos, esta definição é expressa como

$$P(X_t = x \mid X_{t_n} = x_n,\ X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \cdots, X_{t_0} = x_0) = P(X_t = x \mid X_{t_n} = x_n), \tag{5.2}$$

- se X_t assumir valores contínuos, esta definição é expressa como

$$P(X_t \le x \mid X_{t_n} = x_n,\ X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \cdots, X_{t_0} = x_0) = P(X_t \le x \mid X_{t_n} = x_n). \tag{5.3}$$

Nestas expressões, $t_0, t_1, \cdots, t_{n-1}$ representam o passado, e t e t_n são o futuro e o presente respectivamente.

É interessante estabelecer claramente como é lida, por exemplo, a expressão (5.2), que é como segue: a probabilidade da variável X ter valor igual a certo valor x no tempo t, dado que a variável aleatória tenha assumido os valores x_n, $x_{n-1}, \cdots, x_0$, respectivamente, nos tempos t_n, $t_{n-1}, \cdots, t_0$, é igual a probabilidade da variável X ter valor igual a um certo valor x no tempo t, dado apenas que a variável tenha assumido o valor x_n no tempo t_n.

A Definição 5.1 pode ser traduzida para a linguagem natural, como segue: um processo estocástico é um processo de Markov se o futuro do processo, conhecido o estado presente, é independente do passado.

É fundamental no estudo de processos de Markov a noção de estado. Propriedades em comum entre indivíduos (ou objetos) caracterizam o que designamos por estados. São apresentados a seguir exemplos de objetos ou coisas que possuem propriedade em comum:

- máquinas em uma linha de produção, cujos estados podem ser máquina funcionando, máquina parada e em reparo, máquina parada aguardando por reparo;

- uma população que migra de uma região para outra, podendo encontrar-se em um dos seguintes estados: população ociosa, população empregada;

- safras de soja na região Centro-Oeste do Brasil, sendo que os estados podem ser safra boa, safra ruim ou safra razoável.

Os processos de Markov sempre envolvem a variável ‘tempo’, seja considerada na forma discreta onde o tempo varia em saltos (ou seja, intervalos regulares), ou na forma contínua podendo assumir valores reais.

Nos exemplos citados anteriormente podemos notar que o tempo está presente. Uma máquina ao estragar requer tempo para ser consertada, podendo, portanto, exibir alteração em seu estado se observada a intervalos regulares de tempo. Povos que migram de um lugar a outro fazem isto com certa periodicidade. Safras ocorrem em meses determinados que diferem em função da região e da cultura considerada.

5.2 Relevância dos processos de Markov e possíveis aplicações

Em todas as áreas da atividade humana busca-se quantificar eventos que possuem certo grau de incerteza de ocorrência. Isto implica de certa forma na necessidade de “prever o futuro”. Modelos matemáticos probabilísticos são concebidos para auxiliar o homem na tomada de decisão.

No mundo real há diversos sistemas dinâmicos que podem ser modelados como processos de Markov. Eis alguns exemplos de aplicações:

- planejamento de sistemas de atendimento a filas de espera que são normalmente modelados como processos de ‘nascimento e morte’;

- dimensionamento de recursos computacionais para servir a processos que compartilham tempo e espaço;

- avaliação de equipamentos em operação numa linha de produção industrial ou em instalações complexas;

- estudo de fenômenos econômicos e movimentos sociais;

- análise de processos biológicos, como a evolução de certas espécies vivas seja para fins de exploração comercial ou para a preservação;

- análise da evolução de certa epidemia numa comunidade.

Na bibliografia de Pesquisa Operacional são encontradas aplicações de processos de Markov que compreendem desde o estudo de sistemas móveis de comunicação, passando pelo tráfego de sinais digitais e o desenvolvimento de técnicas que objetivam disponibilizar o serviço aos usuários, bem como a análise da evolução de corporações e sistemas sociais com o passar do tempo. Em todas as aplicações nota-se um traço comum – o tempo.

Conforme estabelecido na Definição 5.1, há duas categorias de processos de Markov: (1) os processos de tempo discreto, em que o índice t assume apenas valores inteiros não negativos, ou seja, $t = 0, 1, 2, \cdots$; e (2) os processos nos quais a variável tempo é contínua, ou seja, $t \in [0, \infty)$. Em ambas as categorias, os estados são caracterizados por números inteiros não negativos definidos a partir dos valores que a variável aleatória X pode assumir.

5.3 Processos de Markov de tempo discreto

Um processo de Markov está completamente especificado se forem conhecidas as probabilidades de transição e a distribuição inicial de probabilidades dos estados.

Toda vez que um estado suceder a outro, dizemos que o processo estocástico markoviano deu um passo. O passo pode representar um período de tempo que resulte em outro estado possível. Se o número de passos é zero, tal situação representa o presente, igual a um estará representando um possível estado no próximo passo, e assim por diante.

Iniciaremos o estudo de processos de Markov de tempo discreto definindo probabilidades de transição.

Definição 5.2: (Probabilidades de transição) As probabilidades condicionais

$$P(X_{t+1} = j \mid X_t = i), \text{ para } t = 0, 1, 2, \cdots,$$

são chamadas de probabilidades de transição. Se, para cada i e j,

$$P(X_{t+1} = j \mid X_t = i) = P(X_1 = j \mid X_0 = i), \text{ para todo } t = 0, 1, 2, \cdots,$$

então as probabilidades de transição para um passo são ditas estacionárias e usualmente são denotadas por p_{ij}.

A probabilidade de transição do estado i ao estado j, em um passo, simbolizada por p_{ij}, é a probabilidade de um objeto que se encontra no estado i após um intervalo de tempo fixo predeterminado ser encontrado no estado j.

Para n passos à frente, como extensão da Definição 5.2, é possível escrever as probabilidades de transição para cada i e j, com $n = 0, 1, 2, \cdots$, conforme a expressão:

$$P(X_{t+n} = j \mid X_t = i) = P(X_n = j \mid X_0 = i), \text{ para todo } t = 0, 1, 2, \cdots \tag{5.4}$$

Para simplificar a notação, usaremos a seguinte simbologia:

$$P(X_1 = j \mid X_0 = i) = p_{ij},$$

$$P(X_n = j \mid X_0 = i) = p_{ij}(n).$$

De acordo com a referência (HILLIER e LIEBERMAN, 1995), a notação $p_{ij}(n)$ introduzida anteriormente implica que, para $n = 0$, $p_{ij}(0)$ é $P(X_0 = j \mid X_0 = i)$, sendo igual a 1 se $i = j$ e igual a 0 em caso contrário.

As probabilidades de estados são definidas como a seguir.

Definição 5.3: (Probabilidade de estado no instante n) A probabilidade do estado i tomada no instante n é a probabilidade de um objeto ocupar o estado i após um número n finito de passos. Formalmente, para $M + 1$ estados,

$$p_i(n) = P(X_n = i), \text{ para } i = 0, 1, 2, \cdots, M.$$

Especificamente para o instante inicial tem-se a distribuição inicial de probabilidades de estados, a qual é representada por um vetor linha $p(0)$, cujas componentes são as probabilidades $p_i(n)$, $i = 0, 1, 2, \cdots, M$.

$$p(0) = [\,p_0(0) \quad p_1(0) \quad p_2(0) \quad \cdots \quad p_M(0)] \tag{5.5}$$

De posse das definições estabelecidas nesta seção, estamos prontos para apresentar um exemplo numérico.

Exemplo 5.1: Numa certa região durante o período de chuvas, que dura cerca de seis meses a cada ano, os estados observados são dois: dias ensolarados e dias chuvosos, os quais serão designados pelos índices 0 e 1, respectivamente. A partir de observações históricas, foram obtidas para um passo (ou seja, um dia) as probabilidades de transição supostas constantes. A um dia chuvoso sucederá um dia chuvoso com probabilidade igual a $3/4$ e, um dia ensolarado, com probabilidade $1/4$. Dias ensolarados sucedem dias ensolarados com probabilidades iguais a $1/2$, enquanto que, ao ocorrer um dia ensolarado, a probabilidade de chover no dia seguinte é $1/2$. Desejamos estudar o regime de chuvas dessa região modelando o processo estocástico descrito como um processo de Markov. Como primeira informação desse estudo, precisamos inferir sobre o número esperado de dias chuvosos anualmente se a tendência descrita pelas probabilidades permanecer inalterada.

Primeiramente vamos identificar os dados fornecidos no enunciado com as probabilidades definidas anteriormente. Sendo 0 o número associado ao estado "sol" e 1 o número associado ao estado "chuva", temos as probabilidades condicionais seguintes para um passo:

- dia chuvoso sucede dia chuvoso $\rightarrow P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1) = p_{11} = 3/4$;
- dia ensolarado sucede dia chuvoso $\rightarrow P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1) = p_{10} = 1/4$;
- dia chuvoso sucede dia ensolarado $\rightarrow P(X_1 = 1 \mid X_0 = 0) = p_{01} = 1/2$;
- dia ensolarado sucede dia ensolarado $\rightarrow P(X_1 = 0 \mid X_0 = 0) = p_{00} = 1/2$.

Para encontrar a probabilidade do estado 0 em um passo, $p_0(1)$, podemos utilizar o conceito de probabilidade total, o qual para dois estados possui a seguinte expressão:

$$p_0(1) = P(X_1 = 0) = P(X_1 = 0 \mid X_0 = 0)P(X_0 = 0) + P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1)P(X_0 = 1),$$

$$p_0(1) = p_{00}p_0(0) + p_{10}p_1(0).$$

Na última expressão observamos $p_0(0)$ e $p_1(0)$, que são as probabilidades iniciais dos estados (vide a Definição 5.3).

Procedendo de modo análogo, para encontrar a probabilidade do estado 1 em um passo, $p_1(1)$, utilizamos novamente o conceito de probabilidade total:

$$p_1(1) = P(X_1 = 1) = P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1)P(X_0 = 1) + P(X_1 = 1 \mid X_0 = 0)P(X_0 = 0),$$

$$p_1(1) = p_{11}p_1(0) + p_{01}p_0(0).$$

Se for de interesse determinar as probabilidades dos estados 0 e 1 em dois passos, respectivamente, $p_0(2)$ e $p_1(2)$, tendo em vista que as probabilidades de transição são constantes, basta escrever as expressões conforme mostradas a seguir:

$$p_0(2) = p_{00}p_0(1) + p_{10}p_1(1),$$

$$p_1(2) = p_{11}p_1(1) + p_{01}p_0(1).$$

Se prosseguirmos com esta forma de calcular, o cálculo se revelará enfadonho, com grande possibilidade de confusão com tantos índices.

Uma forma alternativa e muito mais funcional consiste no emprego da representação matricial. Das expressões de cálculo de $p_0(1)$ e $p_1(1)$, obtém-se a representação matricial mostrada a seguir:

$$[p_0(1) \quad p_1(1)] = [p_0(0) \quad p_1(0)]\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix}.$$

Analogamente, das expressões de cálculo de $p_0(2)$ e $p_1(2)$, extraímos a representação matricial mostrada a seguir:

$$[p_0(2) \quad p_1(2)] = [p_0(1) \quad p_1(1)]\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix}.$$

Ora, se substituirmos o vetor $[p_0(1) \quad p_1(1)]$ da segunda expressão pela primeira expressão obteremos o seguinte:

$$[p_0(2) \quad p_1(2)] = [p_0(0) \quad p_1(0)]\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix},$$

$$[p_0(2) \quad p_1(2)] = [p_0(0) \quad p_1(0)]\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix}^2.$$

Finalmente, ao empregarmos o Princípio da Indução Matemática é imediata a conclusão de que uma expressão para n passos pode ser escrita, conforme está indicada a seguir:

$$[p_0(n) \quad p_1(n)] = [p_0(0) \quad p_1(0)]\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix}^n.$$

Esta expressão resolveria o exemplo em pauta se conhecêssemos a distribuição inicial, isto é, o vetor $[p_0(0) \quad p_1(0)]$. No entanto, veremos à frente, neste capítulo, que, sob certas condições, as probabilidades dos estados a longo prazo são independentes da distribuição inicial, sendo esta outra propriedade inerente à maioria dos processos de Markov.

Retornamos então ao Exemplo 5.1. Para resolver o exemplo lançamos mão de um artifício conhecido por árvore de probabilidades. A Figura 5.1 ilustra o diagrama em árvore partindo do estado 0, onde são considerados apenas quatro passos. Outro diagrama poderia ser construído, porém, partiria do estado 1.

Mostraremos como se calcula a probabilidade do estado 1 após quatro passos, isto é, $p_1(4)$. Notamos na árvore de probabilidades (Figura 5.1) que, dado que os eventos são independentes, precisamos multiplicar todas as probabilidades dos 'caminhos' que levam ao estado 1 para calcular a probabilidade do estado 1 em quatro passos (BILLINTON, 1970).

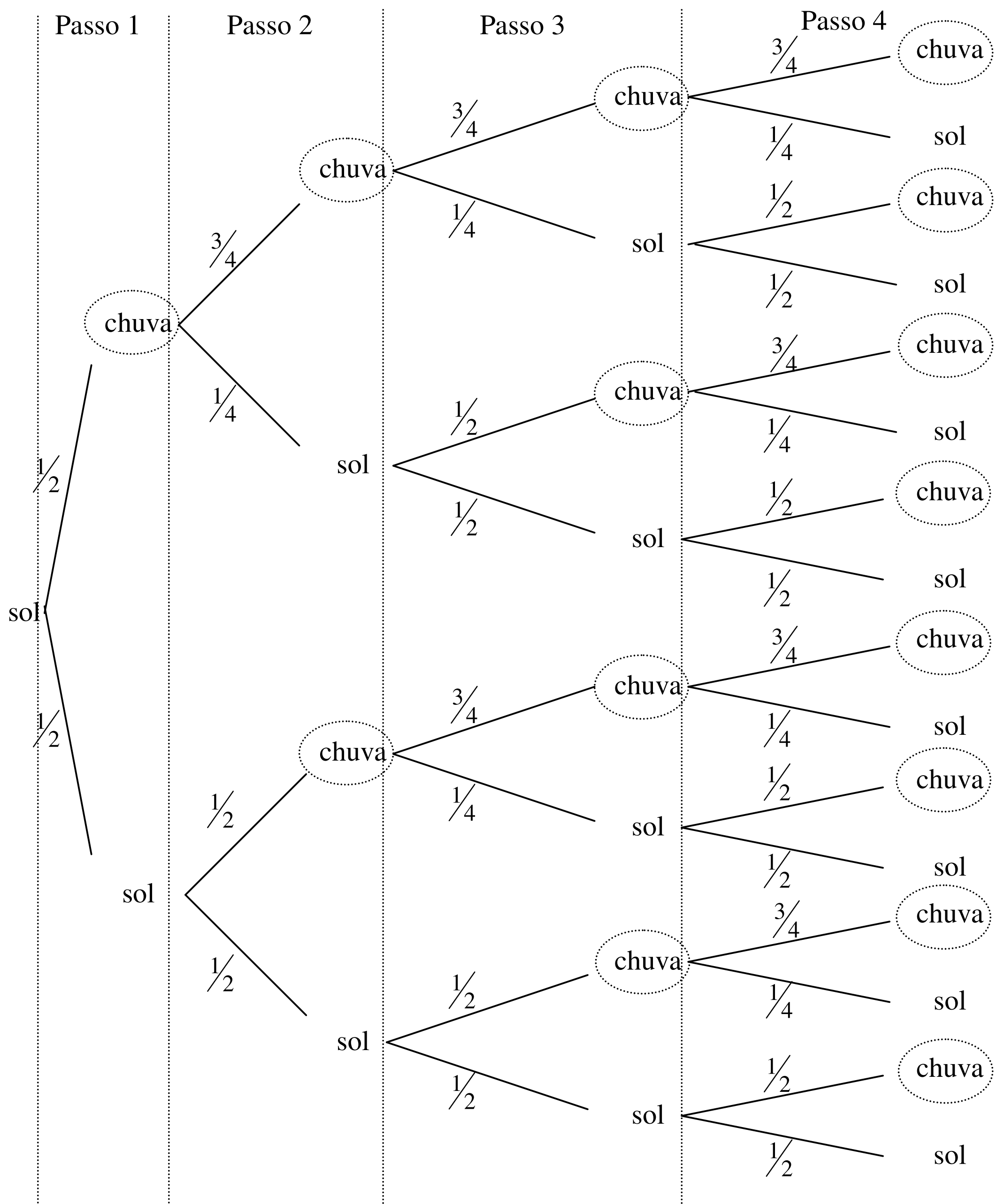

Figura 5.1: Diagrama em árvore de probabilidades iniciando no estado 0.

A Tabela 5.1 mostra em detalhes os cálculos para obtenção de $p_1(4)$.

Tabela 5.1: Planilha de cálculo da probabilidade do estado 1.

Produtos de probabilidades de transição	Probabilidades parciais
$p_{00}p_{00}p_{00}p_{01} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$
$p_{00}p_{00}p_{01}p_{11} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{4}$	$\frac{3}{32}$
$p_{00}p_{01}p_{10}p_{01} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{2}$	$\frac{1}{32}$
$p_{00}p_{01}p_{11}p_{11} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{3}{4}$	$\frac{9}{64}$
$p_{01}p_{10}p_{00}p_{01} = \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$	$\frac{1}{32}$
$p_{01}p_{10}p_{01}p_{11} = \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{3}{4}$	$\frac{3}{64}$
$p_{01}p_{11}p_{10}p_{01} = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{2}$	$\frac{3}{64}$
$p_{01}p_{11}p_{11}p_{11} = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{3}{4}\frac{3}{4}$	$\frac{27}{128}$
Probabilidade total (probabilidade do estado 1 em quatro passos)	$\frac{85}{128} \approx 0{,}664$

Se construirmos uma tabela para mostrar os cálculos da probabilidade do estado 0 para quatro passos, chegaremos sem dúvida no valor $p_0(4) = {}^{43}\!/_{128} \approx 0{,}336$. Se estendermos os cálculos para mais passos não é difícil concluir que a probabilidade do estado 1 encaminhará para ${}^{2}\!/_{3}$, enquanto que a probabilidade do estado 0 será de ${}^{1}\!/_{3}$, preservadas as condições.

Com estes cálculos podemos responder à questão formulada no enunciado do Exemplo 5.1. Portanto, espera-se que, em seis meses, 120 dias serão chuvosos ($180 \times \frac{2}{3} = 120$), e 60 dias serão ensolarados.

5.3.1 Matriz de transição de probabilidades

Uma notação conveniente para representar probabilidades de transição para n passos é a forma de matriz.

Definição 5.4: (Matriz de probabilidades de transição para n passos) Seja $S = \{0, 1, \cdots, M\}$ o conjunto finito de estados, e seja o par de estados (i, j), tal que $(i, j) \in S \times S$. Associe a cada par (i, j) um número real $p_{ij}(n)$, de modo que sejam satisfeitas as propriedades

$0 \le p_{ij}(n) \le 1$ para $\forall\ (i,j) \in S \times S$ e $\sum_{j \in S} p_{ij}(n) = 1$ para $\forall\ i \in S$, define-se a matriz P^n (leia-se matriz P elevada ao expoente n),

$$P^n = \begin{bmatrix} p_{00}(n) & p_{01}(n) & \cdots & p_{0M}(n) \\ p_{10}(n) & p_{11}(n) & \cdots & p_{1M}(n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{M0}(n) & p_{M1}(n) & \cdots & p_{MM}(n) \end{bmatrix}. \tag{5.6}$$

Especificamente, para um passo, a matriz de probabilidades de transição é como representada em (5.7), onde é omitido o índice (1).

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0M} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M0} & p_{M1} & \cdots & p_{MM} \end{bmatrix}. \tag{5.7}$$

Em particular, para $n = 0$, tem-se como conseqüência natural que P^0 é a própria matriz identidade, I, de ordem $(M+1) \times (M+1)$, o que está de acordo com o fato de que $p_{ij}(0)$ é igual a $P(X_0 = j \mid X_0 = i)$ e

$$p_{ij}(0) = \begin{cases} 1, & se\ \ i = j \\ 0, & se\ \ i \ne j \end{cases}.$$

Com base no teorema da probabilidade total e na definição de probabilidade de transição para n passos, $p_{ij}(n) = P(X_n = j \mid X_{n-1} = i)$, tem-se a expressão (5.8) para o cálculo da probabilidade do estado j em n passos

$$p_j(n) = P(X_n = j) = \sum_i p_i(0) p_{ij}(n). \tag{5.8}$$

A partir da expressão (5.8) podemos concluir que a matriz P^n é relacionada à distribuição inicial de probabilidades, $p(0)$, definida pela expressão (5.5), e ao vetor de probabilidades de estados para n passos, através da expressão (5.9)

$$p(n) = p(0)P^n . \tag{5.9}$$

Esta expressão pode ser deduzida pela aplicação do Princípio da Indução Matemática, a exemplo do que foi feito durante a solução do Exemplo 5.1 para o caso particular de um processo de 2 estados.

Em relação à expressão (5.9), se o espaço de estados S do processo de Markov $\{X_n\}$ for finito, então o cálculo de P^n é relativamente fácil. Para processos de Markov com espaços de estados contáveis, porém infinitos, o cálculo de P^n não é trivial. Contudo, existem métodos para determinar o comportamento assintótico, isto é, quando $n \to \infty$, de $p(n)$ e P^n.

5.3.2 Cadeias de Markov

Uma forma visual conveniente para representar um processo de Markov é através de um grafo que se compõe de nós, que são os estados, e arcos direcionados que simbolizam as transições entre estados. Este grafo é denominado diagrama de transição.

Definição 5.5: (Cadeia de Markov) A seqüência $\{X_n\}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, é chamada uma cadeia de Markov homogênea de tempo discreto, com espaço de estados $S = \{0, 1, 2, \cdots, M\}$, e matriz de probabilidades de transição, P, se para todo $n = 0, 1, 2, \cdots$ a condição

$$P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) = P(X_1 = j \mid X_0 = i) = p_{ij}$$

é satisfeita para todo $(i, j) \in S \times S$.

Considere o exemplo apresentado a seguir.

Exemplo 5.2: Considere o problema enunciado no Exemplo 5.1. Desejamos utilizar a representação sob a forma de diagrama de transição de uma cadeia de Markov para expressar o problema daquele enunciado.

Identificamos dois estados, portanto, $M = 1$, e o espaço de estados é $S = \{0, 1\}$. O produto cartesiano, $S \times S$, é $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$. A matriz de probabilidades de transição para um passo é a seguinte:

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} \rightarrow P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

O grafo que corresponde à cadeia de Markov para este exemplo é ilustrado na Figura 5.2.

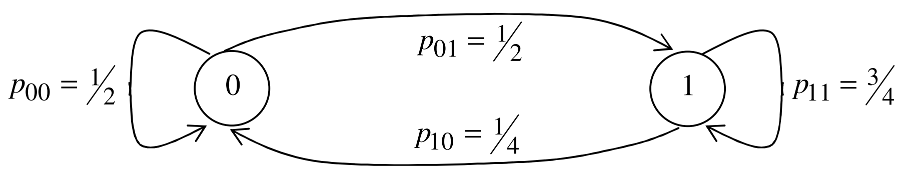

Figura 5.2: Diagrama de transição de uma cadeia de Markov com dois estados.

A análise de cadeias de Markov utilizando matriz de probabilidades de transição pode ser efetuada tomando-se certas precauções tendo em vista que nem todos os processos de Markov de tempo discreto comportam-se de modo semelhante à medida que o número de passos aumenta.

Surge então a necessidade de uma classificação das cadeias de Markov.

5.3.3 Classificação das cadeias de Markov

Os estados de um processo de Markov são divididos em transitório e recorrente. Esta classificação diz respeito à probabilidade do processo retornar a um dado estado i se o processo partiu deste estado.

Seja f_{ii} a probabilidade de que o processo retornará ao estado i dado que o processo tenha partido deste estado, então segue a definição de estado recorrente.

Definição 5.6: (Estado recorrente) Um estado i é recorrente se e somente se, partindo do estado i, o processo eventualmente retornará ao estado i com probabilidade $f_{ii} = 1$.

O processo cuja cadeia de Markov foi apresentada no Exemplo 5.2 possui ambos os estados recorrentes. Outro exemplo de estados recorrentes corresponde à matriz de probabilidades de transição mostrada a seguir:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uma cadeia de Markov com dois estados recorrentes está ilustrada na Figura 5.3.

Figura 5.3: Diagrama de transição de uma cadeia de Markov com dois estados recorrentes.

Estados transitórios, também conhecidos como não recorrentes, são aqueles que, partindo do estado i, há uma probabilidade positiva de que o processo não retornará a esse estado (isto é, $f_{ii} < 1$). Estados recorrentes e transitórios podem coexistir numa mesma cadeia de Markov. A caracterização de estados transitórios não é trivial e, por esta razão, os detalhes de processos de Markov desse tipo não serão enfatizados neste texto.

Um tipo especial de estado recorrente é o estado absorvente cuja definição é estabelecida a seguir, conforme a referência (TRIVEDI, 2002).

Definição 5.7: (Estado absorvente) Um estado i é dito ser um estado absorvente se e somente se a probabilidade p_{ii} é igual a 1.

A cadeia cujo diagrama de transição está ilustrado na Figura 5.3 tem ambos os estados absorventes.

É importante ressaltar que só é possível 'escapar' de um estado absorvente se o processo for reiniciado, ou seja, se o processo partir novamente de qualquer outro estado que não seja absorvente. Vamos apresentar um exemplo para tornar mais claras as definições.

Exemplo 5.3: Considere um navio com dois sistemas propulsores, que são duas turbinas idênticas. Seja X_n a variável aleatória tal que seu valor é o número de turbinas em operação normal no passo n. Se uma das turbinas falhar, ela poderá ser consertada, enquanto se ambas falharem, o navio pára, mas ainda haverá possibilidade de que uma das turbinas seja consertada sendo esta a reignição do processo de Markov e não a transição para outro estado. As probabilidades são as seguintes: se uma turbina que nunca passou por reparo é boa no tempo t_{n-1}, ela tem confiabilidade de 90% no tempo t_n; porém, uma turbina que se estragou no tempo t_{n-1}, após reparada, é apenas 60% confiável no tempo t_n. Suponha as probabilidades independentes e modele o problema como um processo de Markov de tempo discreto.

Os valores possíveis para a variável X são: 0, 1 e 2, sendo, respectivamente, duas turbinas estragadas, apenas uma operando e ambas operando. O modelo de probabilidades sugerido é o Binomial já que os eventos são independentes, ou seja, a falha de uma turbina não implica na falha da outra, e cada turbina só pode ser encontrada em uma dentre duas condições.

As probabilidades de transição são calculadas como a seguir.

- ambas em operação, $P(X_n = 2 \mid X_{n-1} = 2) = p_{22}$,

$$p_{22} = 0{,}9 \times 0{,}9 = 0{,}81;$$

- uma turbina boa e a outra estragada dado que ambas estavam em operação,

$$P(X_n = 1 \mid X_{n-1} = 2) = p_{21},\ p_{21} = 0{,}9 \times 0{,}1 + 0{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}18;$$

- ambas estragadas dado que as duas estavam boas, $P(X_n = 0 \mid X_{n-1} = 2) = p_{20}$,

$$p_{20} = 1 - p_{22} - p_{21} = 0{,}01;$$

- uma em operação e a outra entra em operação após o reparo, $P(X_n = 2 \mid X_{n-1} = 1) = p_{12}$,

$$p_{12} = 0{,}9 \times 0{,}6 = 0{,}54\,;$$

- nenhuma em operação dado que apenas uma estava boa, $P(X_n = 0 \mid X_{n-1} = 1) = p_{10}$,

$$p_{10} = 0{,}1 \times 0{,}4 = 0{,}04\,;$$

- uma em operação dado que uma delas estava estragada, $P(X_n = 1 \mid X_{n-1} = 1) = p_{11}$,

$$p_{11} = 1 - p_{12} - p_{10} = 0{,}42\,.$$

O estado 0 é absorvente uma vez que entrando nele não se pode abandoná-lo exceto se o processo partir novamente, portanto, $p_{00} = 1$.

A matriz de probabilidades de transição para um passo fica conforme está mostrada:

$$P = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}81 & 0{,}18 & 0{,}01 \\ 0{,}54 & 0{,}42 & 0{,}04 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

As análises de sistemas cujos modelos são representados por processos de Markov de tempo discreto para elevado número de passos trazem informações importantes. No entanto, nem todos os processos comportam-se de maneira idêntica para $n \to \infty$ e, por isso, não permitem que certas conclusões sejam extraídas.

Daí advém a necessidade de estabelecer objetivamente sob quais condições as probabilidades limites existem e se possuem ou não algum significado físico.

Definição 5.8: (Probabilidade limite ou probabilidade estacionária) Para o estado j de uma cadeia de Markov, o elemento v_j, para $j = 0, 1, \cdots, M$, é definido como a probabilidade limite $v_j = \lim_{n \to \infty} p_j(n)$, ou seja, v_j é a probabilidade do estado j em regime estacionário. Em conseqüência, o vetor $v = [v_0 \quad v_1 \quad \cdots \quad v_M]$ é o vetor de regime estacionário.

Nos desenvolvimentos que seguem será mostrado que para determinadas cadeias nem sempre é possível obter o vetor de probabilidades limites. Uma propriedade requerida para a existência de v_j, tal como definida anteriormente, é que a cadeia seja aperiódica.

Definição 5.9: (Periodicidade de estados) Se partindo do estado i retornamos a este estado em um número par ou ímpar (maior que 1) de passos dizemos que o estado é periódico, com período igual ao menor número inteiro de passos que for necessário para alcançar o estado. A uma cadeia com estados periódicos designamos cadeia periódica. Por outro lado, será aperiódica se todos os estados forem aperiódicos.

Uma forma de verificar a periodicidade de estados é visualizar o processo como uma árvore de probabilidades. Por exemplo, a cadeia cuja matriz é

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

é periódica com período 2. A árvore de probabilidades ilustrada na Figura 5.4 mostra isto claramente.

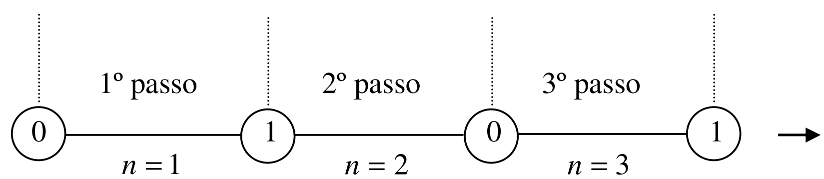

Figura 5.4: Árvore de probabilidades de uma cadeia de Markov com dois estados periódicos.

Por outro lado, ambos os estados da cadeia de Markov da Figura 5.3 são aperiódicos. Outro exemplo de cadeia com estados aperiódicos é a cadeia cuja árvore está ilustrada na Figura 5.1. Na árvore da Figura 5.1 é fácil visualizar que, partindo do estado 0, é possível alcançar o estado 0 em um passo; de modo análogo, se a partida for do estado 1 alcança-se o mesmo estado em um passo.

Em contraposição aos estados absorventes, se todos os estados de uma dada cadeia de Markov se comunicam a matriz de probabilidades de transição dessa cadeia exibirá propriedades especiais. A definição de estados comunicantes é dada em seguida.

Definição 5.10: (Estados comunicantes) O estado i se comunica com o estado j se, partindo do estado i, é possível alcançar o estado j direta ou indiretamente, observando-se o sentido do arco que os une.

Exemplo 5.4: Dadas as matrizes de transição associadas às cadeias de Markov, identificar se os estados se comunicam ou não. As posições marcadas com * (asterisco) representam números positivos (probabilidades de transição para um passo).

a)
$$P = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & * & 0 & * \\ 1 & * & * & * \\ 2 & * & * & * \end{array}.$$

Os estados da cadeia de Markov da matriz P são representados pelos números $0, 1$ e 2.

Partindo do estado 1, isto é, segunda linha da matriz, é possível chegar diretamente a qualquer um dos estados. Na primeira linha, de 0 não conseguimos chegar diretamente ao estado 1. Todavia, de 0 podemos chegar ao estado 2 e daí alcançamos 1. Portanto, na cadeia que a matriz P representa todos os seus estados se comunicam.

A outra matriz é mostrada a seguir.

b)
$$P = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & * & * & * \\ 1 & 0 & * & 0 \\ 2 & * & * & 0 \end{array}.$$

A partir desta matriz é possível construir o diagrama de transição da cadeia, na qual a existência de seta indica elemento positivo na matriz. A Figura 5.5 ilustra o diagrama de transição que corresponde à última matriz.

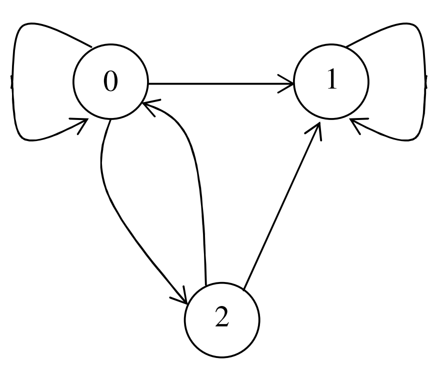

Figura 5.5: Diagrama de transição de uma cadeia de Markov onde o estado 1 é absorvente.

Ao analisarmos a cadeia da Figura 5.5 é imediata a constatação de que os estados 0 e 2 se comunicam e que o estado 1 não se comunica com os demais.

As cadeias de Markov em que todos os estados podem ser alcançados a partir de todos os outros estados em um número finito de passos são chamadas de cadeias irredutíveis. Assim, as cadeias dos Exemplos 5.2 e 5.4(a) são irredutíveis e aperiódicas.

Os autores Hillier e Lieberman demonstram que todos os estados em uma cadeia de Markov irredutível são recorrentes. Implicando que para identificar se uma cadeia de Markov é irredutível é o bastante provar que todos os estados do processo se comunicam. Esta assertiva pode ser colocada de outra forma, mais prática, conforme está exposta no Teorema 5.1.

Teorema 5.1: Uma condição suficiente para uma cadeia ser identificada como irredutível é que exista algum número n inteiro não negativo tal que $p_{ij}(n) > 0$ para todo i e j.

Este teorema fornece uma regra prática para a identificação de cadeias irredutíveis. Em outras palavras, ao elevarmos a matriz P da cadeia que se quer identificar a potências n de pequenos valores, por exemplo, $n = 2$, $n = 3$, etc., podemos verificar se existe algum n para o qual $p_{ij}(n) > 0$ para todo i e j. Em caso afirmativo, a cadeia é irredutível. A referência (BRONSON, 1985) designa a cadeia que atende à condição do Teorema 5.1 de cadeia regular.

Vamos aplicar o resultado do Teorema 5.1 para identificar as cadeias cujas matrizes são dadas no Exemplo 5.5.

Exemplo 5.5: Dadas as matrizes seguintes:

$$\text{a) } P = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & 0 & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}; \text{ e } \quad \text{b) } P = \begin{bmatrix} * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * \\ * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * \end{bmatrix};$$

verifique se elas correspondem à cadeias irredutíveis.

Tomamos a matriz P do caso (a) e a elevamos ao quadrado, obtendo-se:

$$P^2 = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & 0 & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & 0 & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}.$$

Ao efetuarmos o produto simbólico P por P, verificamos que todas as posições com elementos nulos foram preenchidas, portanto, é correto afirmar que a cadeia é irredutível (ou regular).

Tomamos a matriz P do caso (b) e a elevamos ao quadrado, obtendo-se:

$$P^2 = \begin{bmatrix} * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * \\ * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * \end{bmatrix}.$$

De posse de P^2, é imediata a constatação que a matriz P^3 exibe o mesmo padrão de preenchimentos com elementos positivos observado em P. Conseqüentemente, todas as potências, P^4, $P^5, \cdots, P^n$ exibirão padrões semelhantes ao de P. É possível concluir que não existe n de tal modo que $p_{ij}(n) > 0$. Isto implica que a cadeia em questão não é irredutível. Conclusão idêntica pode ser extraída se aplicarmos o resultado do Teorema 5.1 à matriz do Exemplo 5.4(b), confirmando assim a identificação feita pelo método dos estados comunicantes.

Para complementar a seção que trata da classificação das cadeias de Markov, considere a definição de estado recorrente positivo (ou não nulo).

Definição 5.11: (Estado recorrente positivo) O estado i é recorrente positivo se, partindo do estado i, o tempo esperado para o processo visitar novamente este estado é finito. Por outro lado, ao partir do estado i se o tempo esperado para o processo visitar este estado for infinito, o estado é dito recorrente nulo.

O tempo esperado para um processo re-visitar o estado i, também conhecido como tempo médio de recorrência, é definido pela esperança matemática indicada pela expressão (5.10)

$$\mu_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}(n), \text{ para } \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}(n) = 1, \tag{5.10}$$

onde, $f_{ii}(n)$ é a probabilidade de re-visitar o estado i em n passos.

O tempo esperado para um processo que tenha partido do estado i, após n passos, retornar ao estado j, também conhecido como tempo de primeira passagem, é definido conforme (5.11)

$$\mu_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}(n), \tag{5.11}$$

onde, $f_{ij}(n)$ é a probabilidade em n passos de visitar o estado j se o processo partiu do estado i.

Dado que $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(n) = 1$ para $(i, j) \in S \times S$, onde, $S = \{0, 1, 2, \cdots, M\}$, as probabilidades $f_{ij}(n)$ podem ser calculadas pelas relações recursivas (5.12)

$$\begin{gathered} f_{ij}(1) = p_{ij}(1) = p_{ij}, \\ f_{ij}(2) = p_{ij}(2) - f_{ij}(1) p_{jj}, \\ \vdots \\ f_{ij}(n) = p_{ij}(n) - f_{ij}(1) p_{jj}(n-1) - f_{ij}(2) p_{jj}(n-2) \cdots - f_{ij}(n-1) p_{jj}. \end{gathered} \tag{5.12}$$

A aplicação das expressões (5.10) a (5.12) será feita posteriormente.

Estados recorrentes positivos que são aperiódicos são chamados de estados ergódicos. Conseqüentemente, cadeias que têm todos os estados ergódicos são designadas como cadeias ergódicas.

5.3.4 Análise de cadeias finitas irredutíveis com estados aperiódicos

As cadeias finitas de Markov cujos estados são recorrentes positivos e aperiódicos gozam de uma propriedade singular, que está expressa no Teorema 5.2 (TRIVEDI, 2002).

Teorema 5.2: Para uma cadeia irredutível e aperiódica, com todos os estados recorrentes positivos, o vetor de probabilidades limites, $v = [v_0 \quad v_1 \quad \cdots \quad v_M]$, tal que $v_j = \lim_{n \to \infty} p_j(n)$, é o único vetor de probabilidades de regime estacionário e satisfaz as relações (5.13) e (5.14), a saber:

$$v = vP\,, \tag{5.13}$$

$$\sum_{j=0}^{M} v_j = 1\,,\ v_j \geq 0\,. \tag{5.14}$$

O cálculo do vetor v pode ser efetuado usando o computador através da equação iterativa $v^{(k+1)} = v^{(k)}P$, para $k = 0, 1, 2, \cdots$, arbitrando um vetor de estimativa inicial $v^{(0)}$, até que a convergência seja alcançada. Uma maneira alternativa para a obtenção de v é o método analítico: constrói-se o sistema (5.13) e troca-se uma das $M+1$ equações lineares pela relação (5.14), para, em seguida, solucionar o sistema de equações resultante.

Vamos aplicar o resultado do Teorema 5.2 para calcular as probabilidades estacionárias dos estados do sistema do Exemplo 5.1.

Exemplo 5.6: Dado que a cadeia do Exemplo 5.1 atende as condições do Teorema 5.2, isto é, é irredutível e aperiódica com estados recorrentes positivos, calcule as probabilidades de regime estacionário.

Primeiramente, vamos utilizar a equação de iteração tomando o vetor inicial $v^{(0)} = [1 \quad 0]$, que para este exemplo fica conforme está mostrada a seguir:

$$[v_0^{(k+1)} \quad v_1^{(k+1)}] = [v_0^{(k)} \quad v_1^{(k)}]\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}, \text{com}\, v^{(0)} = [1 \quad 0]\,.$$

A Tabela 5.2 resume os cálculos iterativos.

Tabela 5.2: Iterações para obtenção do vetor de probabilidades de regime estacionário.

k	$v^{(k)}$	$v^{(k+1)}$	$v^{(k+1)} - v^{(k)}$
0	[1 0]	[0,500 0,500]	[−0,500 0,500]
1	[0,500 0,500]	[0,375 0,625]	[−0,125 0,125]
2	[0,375 0,625]	[0,344 0,656]	[−0,031 0,031]
3	[0,344 0,656]	[0,336 0,664]	$[-8\times10^{-3} \quad 8\times10^{-3}]$
4	[0,336 0,664]	[0,334 0,666]	$[-2\times10^{-3} \quad 2\times10^{-3}]$

Em função da precisão requerida nos cálculos, mais iterações podem ser realizadas. Sugerimos que o leitor repita o procedimento iterativo mostrado anteriormente tomando qualquer outro vetor $v^{(0)}$ como estimativa inicial.

A Figura 5.6 ilustra a evolução das probabilidades dos estados 0 e 1 à medida que o número de passos aumenta. Ressaltamos nestes cálculos a coincidência entre o número de passos n e o contador de iterações k.

Os gráficos ilustrados na Figura 5.6 merecem alguns comentários. No gráfico da esquerda, o vetor de probabilidades iniciais é $p(0) = [1 \quad 0]$. Enquanto que, no gráfico da direita, o vetor de probabilidades iniciais é $p(0) = [0 \quad 1]$. Observa-se que o vetor de probabilidades de regime estacionário obtido, ou seja, $v = [v_0 \quad v_1] = [p_0(\infty) \quad p_1(\infty)]$, independe do vetor de probabilidades iniciais.

Regra geral: para qualquer cadeia irredutível aperiódica, as probabilidades limites dos estados $v_j = \lim_{n\to\infty} p_j(n) = \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n)$ existem e são independentes do vetor de probabilidades iniciais $p(0)$.

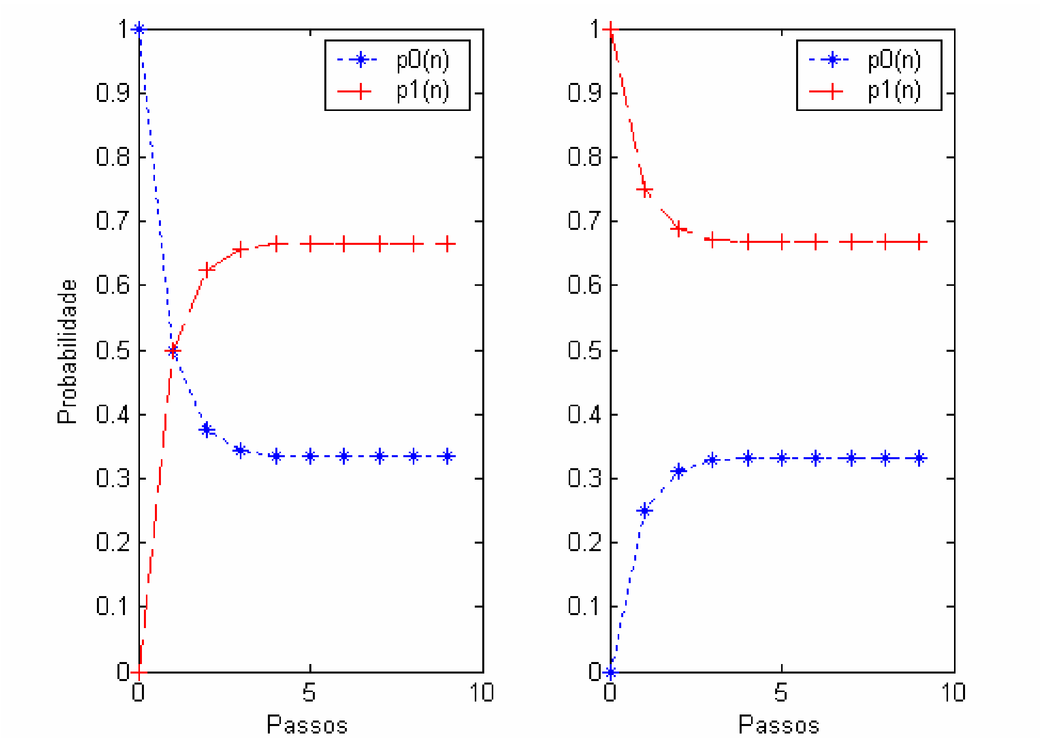

Figura 5.6: Probabilidades dos estados em função do número de passos para dois vetores de probabilidades iniciais distintos.

O leitor é convidado a voltar ao Exemplo 5.1 e traçar um paralelo entre a solução obtida aqui através do processo iterativo e os cálculos efetuados naquele exemplo.

Agora, o cálculo das probabilidades estacionárias será feito analiticamente. Para tal, com base na expressão (5.13) obtemos o sistema de equações:

$$[v_0 \quad v_1] = [v_0 \quad v_1]\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}v_0 - \frac{1}{4}v_1 = 0 \\ -\frac{1}{2}v_0 + \frac{1}{4}v_1 = 0 \end{cases}.$$

Como as equações são linearmente dependentes, substitui-se a segunda equação (arbitrou-se a segunda, mas poderia ser a primeira) pela equação (5.14). O sistema de equações assim obtido é o seguinte:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}v_0 - \frac{1}{4}v_1 = 0 \\ v_0 + v_1 = 1 \end{cases}.$$

A solução deste sistema nos fornece $v = [1/3 \quad 2/3]$, que é a mesma solução para a qual converge o método iterativo.

Ao estudar processos de Markov é natural a expectativa do leitor por conhecer as aplicações dessa interessante teoria em problemas do mundo real. A interpretação física dos resultados obtidos com os cálculos e a tradução desses resultados para a linguagem natural são etapas essenciais para a compreensão do comportamento do sistema sob análise.

Neste contexto, apresentamos em seguida algumas interpretações relevantes:

- a probabilidade de regime estacionário, v_i, é a porcentagem do tempo total considerado que o processo permanece no estado i;

- para cadeias ergódicas, o recíproco da probabilidade de regime estacionário, designado por μ_{ii}, é o tempo esperado de recorrência do estado i, isto é,

$$\mu_{ii} = \frac{1}{v_i}, \text{ para } i = 0,1,2,\cdots,M,$$

onde, μ_{ii} é o tempo médio do processo re-visitar o estado i;

- seja f uma função da variável aleatória X, por exemplo, custos financeiros associados aos estados. As probabilidades estacionárias v_i podem ser utilizadas para calcular a esperança matemática de $f(X)$, assim:

$$E(f(X)) = \sum_{i=0}^{M} v_i f(i)\,. \tag{5.15}$$

Em seguida, apresentamos um exemplo que permite a interpretação dos resultados obtidos de maneira mais prática.

Exemplo 5.7: Uma fábrica possui duas máquinas idênticas essenciais ao processo de manufatura e são operadas continuamente, exceto quando elas estão quebradas. Devido ao fato que essas máquinas são muito sensíveis e quebram freqüentemente, é necessário remunerar em tempo integral um técnico para reparar a máquina quando ocorrer alguma falha. Suponha que o intervalo de tempo de observação seja de um dia e que a variável aleatória X_n representa o número de máquinas quebradas no dia n. Os valores possíveis para a variável aleatória são $X_n = 0,\ 1\ \text{e}\ 2$. Admita que durante cem dias de observações foram anotadas as situações das duas máquinas, chegando-se às probabilidades de transições dos estados para 1 dia, que estão mostradas na matriz P:

$$P = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 40 & 20 & 40 \\ 40 & 40 & 20 \\ 20 & 20 & 60 \end{bmatrix} \end{array} \frac{1}{100} \rightarrow P = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Outro dado importante é que custos de estar nos estados 0, 1 e 2 são, respectivamente, \$ 0,00, \$ 1.500,00 e \$ 10.000,00, e há também o custo fixo de remuneração do técnico, que é \$ 100,00 ao dia. O custo de duas máquinas paradas é alto porque implica na parada da linha de produção, podendo causar sérios transtornos à fábrica. A partir das probabilidades de regime estacionário, calcule:

(a) se ambas as máquinas se estragam, a probabilidade que o tempo para consertar uma dessas máquinas seja de dois dias;

(b) na ocorrência de ambas as máquinas fora de operação, em quantos dias espera-se que esta situação ocorra novamente;

(c) o número esperado de dias de ociosidade do técnico;

(d) o custo por dia a longo prazo para manter as máquinas.

A partir da matriz, conclui-se que a cadeia é irredutível e aperiódica, com estados recorrentes positivos. Por isso, podemos aplicar o Teorema 5.2 para calcular o vetor v, donde obtemos:

$$v = [0{,}3125 \quad 0{,}2500 \quad 0{,}4375] .$$

Para responder o item (a) precisamos calcular a probabilidade que o tempo de primeira passagem do estado 0 ao estado 1 seja igual a 2 dias, ou seja, $f_{01}(2)$. Utilizamos então as relações recursivas para obter $f_{01}(2)$

$$f_{01}(1) = p_{01} \rightarrow f_{01}(1) = 0{,}2 ,$$
$$f_{01}(2) = p_{01}(2) - f_{01}(1)p_{11} .$$

Para concluir o item (a), precisamos calcular $p_{01}(2)$.

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}32 & 0{,}24 & 0{,}44 \\ 0{,}36 & 0{,}28 & 0{,}36 \\ 0{,}28 & 0{,}24 & 0{,}48 \end{bmatrix} \rightarrow p_{01}(2) = 0{,}24 .$$

Portanto, a probabilidade que o tempo para consertar uma dessas máquinas seja de dois dias é igual a:

$$f_{01}(2) = p_{01}(2) - f_{01}(1)p_{11} \rightarrow f_{01}(2) = 0{,}24 - 0{,}2 \times 0{,}4 \rightarrow f_{01}(2) = 0{,}16 .$$

O item (b) pede o tempo de recorrência para o estado 2. Basta calcular $\mu_{22} = \dfrac{1}{v_2}$, resultando no seguinte valor:

$$\mu_{22} = 1/_{0,3125} \rightarrow \mu_{22} = 3{,}2 \text{ dias.}$$

Para o item (c), o número esperado de dias de ociosidade do técnico corresponde aos dias em que ambas as máquinas ficam em operação, ou seja, é o tempo de recorrência do estado 0,

$$\mu_{00} = 1/_{0,4375} \rightarrow \mu_{00} = 2{,}3 \text{ dias.}$$

Finalmente, para o item (d), o custo por dia a longo prazo para manter as máquinas é a esperança matemática da função custo em regime estacionário.

$$E(f(X)) = 0{,}4375 \times 0{,}00 + 0{,}25 \times 1.500{,}00 + 0{,}3125 \times 10.000{,}00 \rightarrow$$
$$E(f(X)) = 3.500{,}00\,.$$

Devemos adicionar ao valor obtido anteriormente o custo fixo devido à remuneração do técnico. Portanto, o custo por dia a longo prazo para manter as máquinas é \$ 3.600,00.

As cadeias de Markov analisadas nesta seção exibem a propriedade especial de que a potência P^n para n tendendo ao infinito resulta numa matriz cujas linhas são todas iguais. A expressão (5.16) exprime a mencionada propriedade de forma mais clara

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} v_0 & v_1 & \cdots & v_M \\ v_0 & v_1 & \cdots & v_M \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_0 & v_1 & \cdots & v_M \end{bmatrix}. \tag{5.16}$$

Por exemplo, a matriz do Exemplo 5.6 ao ser elevada a expoentes cada vez mais altos resulta na seguinte matriz:

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

Esta é uma propriedade inerente às cadeias finitas irredutíveis e aperiódicas. No entanto, cadeias que possuem estados absorventes constituem uma classe especial de processos que não exibem tal propriedade. Por exemplo, a matriz do Exemplo 5.3 é um caso que não atende à propriedade.

5.3.5 Análise de cadeias finitas com estados absorventes

O estudo das cadeias de Markov finitas com estados absorventes requer que a matriz de probabilidades de transição P seja expressa de modo especial. Isto implica que as linhas de P que correspondem aos estados não absorventes devem ser arranjadas em primeiro lugar e, em seguida, nas últimas linhas figuram os estados absorventes.

A expressão (5.17) mostra uma representação na forma canônica da matriz de probabilidades de transição quando há estados absorventes,

$$P = \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1r} & c_{1r+1} & \cdots & c_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{r1} & \cdots & q_{rr} & c_{rr+1} & \cdots & c_{rs} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \rightarrow P = \begin{bmatrix} Q & C \\ 0 & I \end{bmatrix}, \tag{5.17}$$

estados não absorventes	Q	C
estados absorventes	0	I

O cálculo da potência P^n passa pelo seguinte desenvolvimento. Primeiramente, para k natural, prova-se que P^k é igual a identidade (5.18)

$$P^k = \begin{bmatrix} Q^k & \tilde{C} \\ 0 & I \end{bmatrix}, \tag{5.18}$$

onde, o elemento da posição (i, j) da matriz Q^k denota a probabilidade de chegar ao estado não absorvente j após k passos partindo do estado não absorvente i, enquanto que $\tilde{C}$ denota a submatriz C após k passos.

Uma das informações mais relevantes na análise de cadeias absorventes é o número esperado de passos em que o processo ficará no estado não absorvente i antes da absorção. Considere o seguinte teorema.

Teorema 5.2: Para uma cadeia de Markov com pelo menos um estado absorvente, o número esperado de passos para a absorção partindo do estado não absorvente i é o somatório dos elementos da $i-$ésima linha da matriz $(I-Q)^{-1}$.

Uma prova deste teorema fundamenta-se no fato de que para o processo alcançar a absorção este deve transitar antes por todos os estados não absorventes nos passos $0, 1, 2, \cdots, \infty$. Assim, o número esperado de passos antes da absorção se o processo partiu do estado não absorvente i é a $i-$ésima linha da matriz que resulta do somatório

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q^k = Q^0 + Q + Q^2 + \cdots + Q^{\infty},$$

lembrando que $Q^0 = I$ e que a norma da matriz Q seja menor que 1 (isto é, $\|Q\| < 1$).

Finalmente, recorremos às séries convergentes, neste caso, aplicadas a matrizes, que nos permite concluir que o somatório anterior é igual à matriz $(I-Q)^{-1}$.

A matriz $(I-Q)^{-1}$ é designada como matriz fundamental e é uma rica fonte de informação sobre cadeias de Markov. Os elementos dessa matriz dão os números de passos (ou os números de vezes) que o processo visita os estados não absorventes antes de alcançar a absorção (vide expressão (5.12)).

Antes de passarmos a um exemplo de aplicação vamos estabelecer mais um conceito importante sobre cadeias absorventes. Suponhamos que o processo tenha partido do estado não absorvente i e desejamos calcular a probabilidade de absorção no estado j. Note-se que aqui o índice j indica um estado absorvente.

Teorema 5.4: Para uma cadeia de Markov com pelo menos um estado absorvente, a probabilidade do processo que partiu do estado não absorvente i ser absorvido no estado j é o elemento da posição (i, j) da matriz que resulta do produto $(I-Q)^{-1}C$.

A demonstração deste teorema é deixada como exercício para o leitor. A referência (SHAMBLIN, 1989) traz um argumento que pode auxiliar o leitor nesta tarefa.

Outra forma possível para se concluir pela validade do Teorema 5.4 é mostrar que o limite $\lim_{n\to\infty} P^n$ comporta-se como mostrado a seguir (TRIVEDI, 2002).

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} Q & C \\ 0 & I \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 0 & (I-Q)^{-1}C \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{5.20}$$

Estamos de posse de métodos e informações que permite resolver um exemplo de aplicação.

Exemplo 5.8: Considere o problema do enunciado do Exemplo 5.3. Ambas as turbinas em falha constituem um estado absorvente, do qual só se pode escapar se uma das turbinas puder ser consertada enquanto o navio estiver completamente parado, ou, se de algum modo, turbinas novas puderem ser transportadas ao navio. Desejamos determinar o tempo médio (ou seja, o número de passos) para o navio paralisar totalmente suas máquinas supondo que ele se encontra com ambas as turbinas operando normalmente. Calcule também as probabilidades de absorção.

Do Exemplo 5.3, temos que a matriz de probabilidades de transição para este problema é a seguinte:

$$P = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}81 & 0{,}18 & 0{,}01 \\ 0{,}54 & 0{,}42 & 0{,}04 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

De acordo com a expressão (5.18), as matrizes Q, C e I são como dadas a seguir.

$$Q = \begin{bmatrix} 0{,}81 & 0{,}18 \\ 0{,}54 & 0{,}42 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0{,}01 \\ 0{,}04 \end{bmatrix} \text{ e } I = [1].$$

A primeira pergunta refere-se ao número de passos para alcançar o estado absorvente 0 tendo partido do estado 2. Portanto, necessitamos calcular a matriz $(I-Q)^{-1}$.

$$I-Q=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0{,}81 & 0{,}18\\0{,}54 & 0{,}42\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}19 & -0{,}18\\-0{,}54 & 0{,}58\end{bmatrix},$$

$$(I-Q)^{-1}=\begin{bmatrix}0{,}19 & -0{,}18\\-0{,}54 & 0{,}58\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}44{,}6154 & 18{,}8462\\41{,}5385 & 14{,}6154\end{bmatrix}.$$

A matriz fundamental $(I-Q)^{-1}$ é então da seguinte forma:

$$(I-Q)^{-1}=\begin{array}{c}2\\1\end{array}\begin{bmatrix}44{,}6154 & 18{,}8462\\41{,}5385 & 14{,}6154\end{bmatrix}.$$

A resposta à primeira questão é a soma dos elementos da primeira linha da matriz fundamental, que resulta em $44{,}6154+18{,}8462=63{,}4616$. Isto significa que se duas turbinas estiverem em operação, o número esperado de passos até que as duas se estraguem é de 63,5 unidades de tempo.

As probabilidades de absorção são calculadas com base no Teorema 5.4.

$$(I-Q)^{-1}C=\begin{bmatrix}0{,}19 & -0{,}18\\-0{,}54 & 0{,}58\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0{,}01\\0{,}04\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}44{,}6154 & 18{,}8462\\41{,}5385 & 14{,}6154\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}01\\0{,}04\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1{,}000\\1{,}000\end{bmatrix}.$$

$$(I-Q)^{-1}C=\begin{array}{c}2\\1\end{array}\begin{bmatrix}1{,}000\\1{,}000\end{bmatrix}.$$

Partindo do estado com duas turbinas, a probabilidade de absorção é igual a 1. Do mesmo modo, partindo do estado com uma turbina, a probabilidade de absorção é também igual a 1.

As probabilidades para alcançar a absorção partindo de qualquer um dos estados não absorventes nem sempre são iguais a unidade. Isto ocorreu neste exemplo porque na cadeia de Markov analisada há apenas um estado absorvente. O exemplo que será apresentado a seguir considera uma cadeia com dois estados absorventes e tem por objetivo principal mostrar uma forma alternativa ao Teorema 5.3 de se calcular os tempos médios para absorção.

Exemplo 5.9: Um reservatório de uma usina hidrelétrica é utilizado com a finalidade de prover renda adicional à população que habita suas vizinhanças através da atividade pesqueira. Periodicamente, a companhia que detém a concessão supre o reservatório com alevinos, que se tornarão adultos, procriarão e também servirão ao propósito da pesca. Estudos mostraram que existem dois bons estados para pesca, os quais serão designados por s_2 e s_3. No entanto, se a atividade pesqueira for intensificada, a população de peixes pode cair a níveis em que a pesca precisa ser interrompida por certo tempo. Além disso, por causas naturais, o crescimento excessivo da população de plantas aquáticas (algas e outras) pode alcançar um nível a ponto de prejudicar a pesca, levando também a suspensão da atividade, que somente será retomada após a limpeza do lago. Este sistema físico foi modelado como um processo de Markov em que o período de tempo considerado razoável para ser tomado como unidade de tempo é de um mês (isto significa que um passo equivale ao tempo de um mês). O estado que corresponde a inserção de alevinos no reservatório é um estado transitório e é denotado por s_1. Os estados de interrupção da pesca por redução do número de peixes e suspensão da atividade por poluição aquática são simbolizados, respectivamente, por s_4 e s_5, sendo estes estados absorventes. As probabilidades de transição foram levantadas por métodos estatísticos e estão indicadas na matriz mostrada a seguir. Desejamos conhecer o comportamento deste processo no regime estacionário. Determine os tempos de primeira passagem partindo de estados não absorventes até os estados absorventes. Calcule também a probabilidade de absorção no estado s_4 se o processo partiu do estado transitório.

$$P = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0{,}8 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

O grafo da cadeia de Markov deste exemplo está ilustrado na Figura 5.7 a título de ilustração apenas. Note-se nesta figura o estado transitório s_1 e os estados absorventes s_4 e s_5.

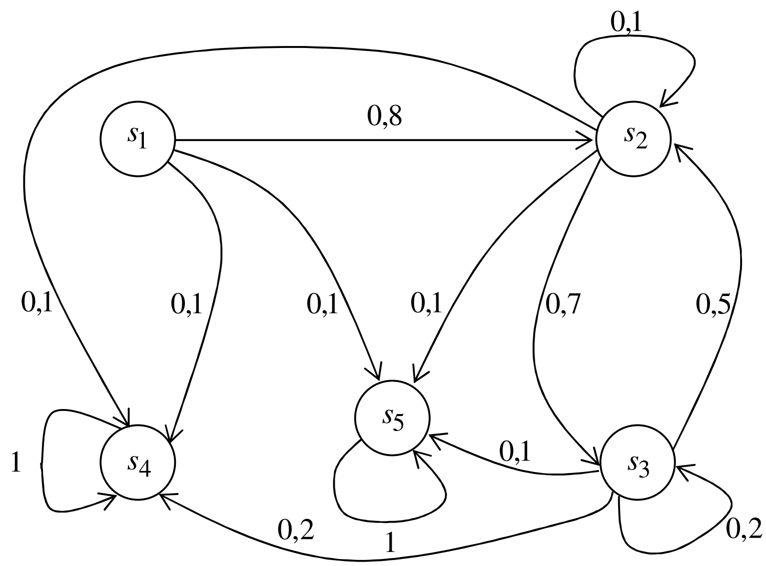

Figura 5.7: Diagrama de transição da cadeia de Markov do modelo de piscicultura do reservatório.

Os tempos médios para alcançar a absorção, que são os números esperados de meses para atingir os estados absorventes, podem ser calculados pela aplicação do Teorema 5.3, de maneira análoga ao que foi feito no exemplo anterior.

$$I - Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}7 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & -0{,}7 \\ 0 & -0{,}5 & 0{,}8 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$(I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & -0{,}7 \\ 0 & -0{,}5 & 0{,}8 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1{,}73 & 1{,}51 \\ 0 & 2{,}16 & 1{,}89 \\ 0 & 1{,}35 & 2{,}43 \end{bmatrix}.$$

A matriz fundamental $(I - Q)^{-1}$ é então da seguinte forma:

$$(I-Q)^{-1} = \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1{,}73 & 1{,}51 \\ 0 & 2{,}16 & 1{,}89 \\ 0 & 1{,}35 & 2{,}43 \end{bmatrix}.$$

Os passos esperados antes da absorção são mostrados na Tabela 5.3.

Tabela 5.3: Cálculos dos passos esperados antes da absorção a partir dos elementos da matriz fundamental.

Estado não absorvente de partida	Passos esperados antes da absorção
s_1	$1+1{,}73+1{,}51 = 4{,}24$ meses
s_2	$2{,}16+1{,}89 = 4{,}05$ meses
s_3	$1{,}35+2{,}43 = 3{,}78$ meses

Os passos calculados na Tabela 5.3 são os tempos para absorção partindo de estados não absorventes.

As probabilidades de absorção são obtidas aproveitando-se a matriz fundamental com base no procedimento proposto no Teorema 5.4.

$$(I-Q)^{-1}C = \begin{bmatrix} 1 & 1{,}73 & 1{,}51 \\ 0 & 2{,}16 & 1{,}89 \\ 0 & 1{,}35 & 2{,}43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{bmatrix},$$

$$(I-Q)^{-1}C = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} s_4 & s_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}58 & 0{,}42 \\ 0{,}59 & 0{,}41 \\ 0{,}62 & 0{,}38 \end{bmatrix} \end{array}.$$

A probabilidade de absorção no estado s_4 se o processo partiu do estado transitório é $0{,}58$.

Os números que figuram na matriz obtida anteriormente podem ser obtidos aplicando o processo iterativo estabelecido na seção 5.3.4 que foi também utilizado no Exemplo 5.6. Arbitrando o vetor inicial $v^{(0)} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$, após trinta iterações, obtém-se o vetor $v^{(30)} = \begin{bmatrix}0 & 0{,}0001 & 0{,}0001 & 0{,}5756 & 0{,}4243\end{bmatrix}$. Os dois últimos elementos de $v^{(30)}$ referem-se aos estados absorventes.

Um método alternativo de obtenção dos tempos de primeira passagem usa as fórmulas recursivas (5.12) e (5.13). A aplicação dessas fórmulas exige cálculos sucessivos de potências da matriz de probabilidades de transição, o que implica necessariamente no emprego de computador (HILLIER e LIEBERMAN, 1995).

Vamos exemplificar os cálculos supondo s_1 o estado de partida, ou seja, $i = 1$. Para $j = 4$, temos:

$$f_{14}(1) = p_{14}(1) = 0{,}1\,,$$
$$f_{14}(2) = p_{14}(2) - f_{14}(1)p_{44} \rightarrow f_{14}(2) = 0{,}18 - 0{,}1\times 1 \rightarrow f_{14}(2) = 0{,}08\,,$$
$$f_{14}(3) = p_{14}(3) - f_{14}(1)p_{44}(2) - f_{14}(2)p_{44} \rightarrow f_{14}(3) = 0{,}3 - 0{,}1\times 1 - 0{,}08\times 1 \rightarrow$$
$$\rightarrow\ f_{14}(3) = 0{,}12\,,$$
$$f_{14}(4) = p_{14}(4) - f_{14}(1)p_{44}(3) - f_{14}(2)p_{44}(2) - f_{14}(3)p_{44} \rightarrow$$
$$\rightarrow\ f_{14}(4) = 0{,}3624 - 0{,}1\times 1 - 0{,}08\times 1 - 0{,}12\times 1 \rightarrow f_{14}(4) = 0{,}0624\,,$$
$$f_{14}(5) = p_{14}(5) - f_{14}(1)p_{44}(4) - f_{14}(2)p_{44}(3) - f_{14}(3)p_{44}(2) - f_{14}(4)p_{44} \rightarrow$$
$$f_{14}(5) = 0{,}4207 - 0{,}1\times 1 - 0{,}08\times 1 - 0{,}12\times 1 - 0{,}0624\times 1 \rightarrow\ f_{14}(5) = 0{,}0583, \cdots .$$

Para $j = 5$, temos:

$$f_{15}(1) = p_{15}(1) = 0{,}1\,,$$
$$f_{15}(2) = p_{15}(2) - f_{15}(1)p_{55} \rightarrow f_{15}(2) = 0{,}18 - 0{,}1\times 1 \rightarrow f_{15}(2) = 0{,}08\,,$$
$$f_{15}(3) = p_{15}(3) - f_{15}(1)p_{55}(2) - f_{15}(2)p_{55} \rightarrow f_{15}(3) = 0{,}244 - 0{,}1\times 1 - 0{,}08\times 1 \rightarrow$$
$$\rightarrow\ f_{15}(3) = 0{,}064\,,$$
$$f_{15}(4) = p_{15}(4) - f_{15}(1)p_{55}(3) - f_{15}(2)p_{55}(2) - f_{15}(3)p_{55} \rightarrow$$
$$\rightarrow\ f_{15}(4) = 0{,}2896 - 0{,}1\times 1 - 0{,}08\times 1 - 0{,}064\times 1 \rightarrow f_{15}(4) = 0{,}0456\,,$$
$$f_{15}(5) = p_{15}(5) - f_{15}(1)p_{55}(4) - f_{15}(2)p_{55}(3) - f_{15}(3)p_{55}(2) - f_{15}(4)p_{55} \rightarrow$$
$$f_{15}(5) = 0{,}3244 - 0{,}1\times 1 - 0{,}08\times 1 - 0{,}064\times 1 - 0{,}0456\times 1 \rightarrow\ f_{15}(5) = 0{,}0348, \cdots .$$

Obviamente os cálculos devem continuar até um valor de n considerado alto. A Tabela 5.4 mostra os resultados parciais obtidos com o uso do computador. Aplicamos então a expressão (5.12) duas vezes, resultando em μ_{14} e em μ_{15}.

$$\mu_{14} = 2{,}5448 \text{ e } \mu_{15} = 1{,}6981\,.$$

Adicionando os dois tempos médios, encontramos o número esperado de passos antes da absorção partindo do estado s_1, $2{,}5448 + 1{,}6981 = 4{,}2429$ meses. Este resultado se arredondado com duas casas decimais é o mesmo obtido anteriormente através da matriz fundamental (vide Tabela 5.3).

Tabela 5.4: Valores de $f_{14}(k)$ e $f_{15}(k)$ para $k = 1, 2, \cdots, 40$.

$f_{14}(k)$				$f_{15}(k)$			
0,1000	0,0091	0,0005	0,0000	0,1000	0,0058	0,0003	0,0000
0,0800	0,0068	0,0004	0,0000	0,0800	0,0043	0,0002	0,0000
0,1200	0,0050	0,0003	0,0000	0,0640	0,0032	0,0002	0,0000
0,0624	0,0037	0,0002	0,0000	0,0456	0,0024	0,0001	0,0000
0,0583	0,0028	0,0001	0,0000	0,0348	0,0018	0,0001	0,0000
0,0381	0,0021	0,0001	0,0000	0,0255	0,0013	0,0001	0,0000
0,0307	0,0015	0,0001	0,0000	0,0191	0,0010	0,0001	0,0000
0,0218	0,0011	0,0001	0,0000	0,0142	0,0007	0,0000	0,0000
0,0167	0,0009	0,0000	0,0000	0,0106	0,0005	0,0000	0,0000
0,0122	0,0006	0,0000	0,0000	0,0078	0,0004	0,0000	0,0000

O livro intitulado *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, uma publicação da SIAM de autoria de Carl D. Meyer, traz interessante abordagem sobre a Teoria de Perron-Frobenius, que pode auxiliar o leitor na compreensão deste capítulo especificamente no que se refere ao tratamento de matrizes estocásticas.

Existem processos estocásticos com características de processos de Markov em que o tempo não é uma variável discreta, embora os estados sejam discretos. Esta classe de processos markovianos será estudada na seção seguinte.

5.4 Processos de Markov de tempo contínuo

Processos de Markov de tempo contínuo são similares aos processos de Markov de tempo discreto exceto pelo fato de que as transições entre estados podem ocorrer em qualquer instante de tempo. O conjunto que denota o espaço de estados do processo, a exemplo dos processos de Markov estudados anteriormente, é discreto, podendo ser finito ou infinito.

Com o objetivo de caracterizar precisamente os processos markovianos de tempo contínuo, buscaremos a seguir estabelecer formalmente as relações que regem seu comportamento.

Em primeiro lugar, a Definição 5.1 se aplica aos processos de Markov de tempo contínuo, em particular a expressão (5.3). Resta definir probabilidades de transição.

Definição 5.12: (Probabilidades de transição) Sejam dois estados i e j, o instante de tempo u tal que $0 \le u \le t$, e $X(t)$ e $X(u)$ as variáveis aleatórias discretas que contêm os números dos estados nos tempos t e u, respectivamente, a probabilidade de transição $p_{ij}(u,t)$ é definida pela probabilidade condicional

$$p_{ij}(u,t) = P(X(t) = j \mid X(u) = i),$$

sendo i, $j = 0,1,2,\cdots$, e

$$p_{ij}(t,t) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

As cadeias de Markov $\{X(t)\ ;\ t \ge 0\}$ são designadas como cadeias tempo-homogêneas se as probabilidades de transição $p_{ij}(u,t)$ dependem somente da diferença de tempos $t-u$.

Para definirmos completamente um processo de Markov de tempo contínuo precisamos definir as probabilidades dos estados, $p_j(t)$ no instante t, para $j = 0,1,2,\cdots$.

Definição 5.13: (Probabilidade de estado) A probabilidade do processo ser encontrado no estado j no instante de tempo t é definida por

$$p_j(t) = P(X(t) = j).$$

Com base no teorema da probabilidade total, expressamos $P(X(t) = j)$ como o somatório:

$$\sum_i P(X(t) = j \mid X(u) = i)P(X(u) = i),$$

de modo que, para $u = 0$, resulta na expressão:

$$p_j(t) = \sum_i p_{ij}(0,t)\, p_j(0)\,. \qquad (5.21)$$

A expressão (5.21) mostra que um processo de Markov de tempo contínuo está completamente definido se as probabilidades de transição e o vetor inicial de probabilidades dos estados, $p(0) = [\,p_0(0) \quad p_1(0) \quad \cdots \quad p_M(0)]$, são especificados, para $M+1$ estados.

Em seguida, apresentaremos uma conseqüência notável das propriedades dos processos de Markov de tempo contínuo.

Uma propriedade inerente às cadeias de Markov de tempo contínuo do tipo tempo-homogêneas é que o futuro do processo é completamente definido no estado presente. Portanto, a distribuição da variável aleatória tempo de permanência de um processo em um dado estado deve ser 'sem memória'. Designando por Y tal variável aleatória, a seguinte probabilidade condicional

$$P(Y \le t + r \mid Y \ge t) = P(Y \le r)$$

descreve objetivamente essa propriedade.

Para auxiliar o leitor na compreensão desse conceito foi elaborada a Figura 5.8, na qual estão ilustradas no eixo dos tempos as localizações de t e r, sendo $Y \in [t, t+r]$. A variável r é uma variável auxiliar que, no decorrer da análise, tenderá a zero.

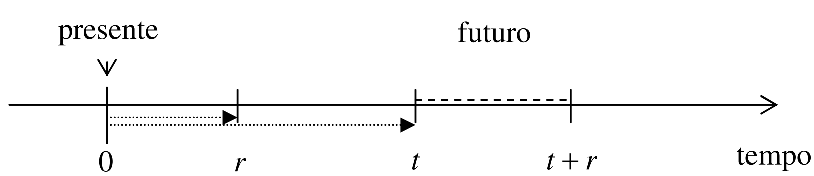

Figura 5.8: Localização de variáveis no eixo dos tempos.

Com base na referência (TRIVEDI, 2002), segue então o teorema.

Teorema 5.5: Para cadeias de Markov tempo-homogêneas, a variável aleatória tempo que o processo gasta (ou permanece) num dado estado possui distribuição exponencial negativa com taxa igual a β.

A demonstração deste teorema é como segue. Seja $f_Y(t)$ a função densidade de probabilidade exponencial, tal que $f_Y(t) = \beta e^{-\beta t}$, $t \in [0, \infty)$, $f_Y(t) = \dfrac{dF_Y(t)}{dt}$, de modo que genericamente $F_Y(t) = P(Y \leq t)$. A derivada de $F_Y(t)$ será denotada por $F_Y^{'}(t)$.

Do conceito de probabilidade condicional (propriedade 'sem memória') advém a expressão

$$P(Y \leq r) = \frac{P(t \leq Y \leq t + r)}{P(Y \geq t)} \rightarrow F_Y(r) = \frac{F_Y(t + r) - F_Y(t)}{1 - F_Y(t)}.$$

Se dividirmos ambos os membros da expressão anterior por r e tomarmos o limite para $r \rightarrow 0$ teremos a equação diferencial seguinte (lembremos do quociente de Newton do Cálculo Diferencial e Integral):

$$F_Y^{'}(0) = \frac{F_Y^{'}(t)}{1 - F_Y(t)},$$

cuja solução é a função exponencial

$$F_Y(t) = 1 - e^{-F_Y^{'}(0)t} \rightarrow F_Y(t) = 1 - e^{-\beta t}.$$

Portanto, a função densidade de probabilidade para a variável aleatória tempo gasto num dado estado das cadeias de Markov do tipo tempo-homogêneas é a exponencial com taxa β.

Nas análises de cadeias de Markov de tempo contínuo necessitamos da definição de taxa de transição entre dois estados (TRIVEDI, 2002).

Definição 5.14: (Taxa de transição) À função contínua não negativa $q_{ij}(t)$ definida por

$$q_{ij}(t) = \left. \frac{\partial p_{ij}(t,u)}{\partial t} \right|_{t=u}$$

damos o nome de taxa de transição do processo do estado i para o estado j.

Para uma cadeia de Markov de tempo contínuo, as taxas de transição e as probabilidades dos estados são relacionadas por meio da equação de Kolmogorov mostrada em (5.22) (TRIVEDI, 2002).

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = -q_j(t)\,p_j(t) + \sum_{i \neq j} q_{ij}(t)\,p_i(t)\,. \tag{5.22}$$

Na equação (5.22), $q_{ij}(t)$ é a taxa de transição estabelecida na Definição 5.14 e q_j é o somatório das taxas de transição do estado j aos estados adjacentes.

Vamos ilustrar a aplicação da equação (5.22) para uma cadeia de dois estados que está ilustrada na Figura 5.9 com suas taxas de transição.

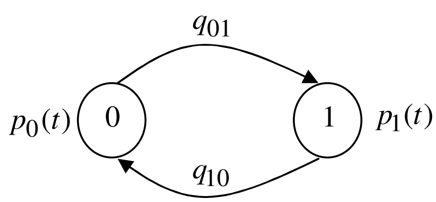

Figura 5.9: Diagrama de transição de uma cadeia de Markov de tempo contínuo com dois estados.

Observando o diagrama da Figura 5.9, tem-se que:

$$q_0 = q_{01} \text{ e } q_1 = q_{10}\,.$$

Escreveremos em seguida, para cada estado, a equação (5.22):

$$\frac{dp_0}{dt} = -q_0 p_0 + q_{10} p_1\,,$$
$$\frac{dp_1}{dt} = -q_1 p_1 + q_{01} p_0\,.$$

Para efeito de simplificação admitiremos as taxas de transição constantes e a seguinte notação: $q_{01} = \lambda$ e $q_{10} = \mu$. Em regime estacionário, as equações diferenciais reduzem-se a equações algébricas linearmente dependentes.

$$-\lambda p_0(\infty) + \mu p_1(\infty) = 0\,,$$
$$-\mu p_1(\infty) + \lambda p_0(\infty) = 0\,.$$

Negligenciamos uma das equações e utilizamos o fato de que $p_0(\infty) + p_1(\infty) = 1$ para obter as probabilidades dos estados em regime estacionário.

$$p_0(\infty) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}\,,$$
$$p_1(\infty) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\,.$$

É interessante neste ponto do texto estabelecer a notação correta para probabilidades dos estados em regime estacionário, que é basicamente a mesma utilizada na seção que tratou de processos de Markov de tempo discreto, de acordo com a Definição 5.8.

A probabilidade limite ou probabilidade estacionária para o estado j é dada pelo limite $v_j = \lim_{t \to \infty} p_j(t)$. Para tornar mais clara a análise da cadeia de dois estados feita anteriormente considere o exemplo apresentado a seguir.

Exemplo 5.10: Calcular as probabilidades instantâneas dos estados 0 e 1 que constam do diagrama de transição da Figura 5.9. Uma vez calculadas as funções $p_0(t)$ e $p_1(t)$, determine pela aplicação de limite para $t \to \infty$ as probabilidades estacionárias.

Dos cálculos efetuados anteriormente, tem-se:

$$\frac{dp_0}{dt} = -\lambda p_0 + \mu p_1\,,$$
$$\frac{dp_1}{dt} = -\mu p_1 + \lambda p_0\,.$$

Para qualquer instante t, a soma $p_0(t) + p_1(t) = 1$ deve se verificar. Depois de realizadas substituições, chegamos às equações diferenciais de primeira ordem seguintes:

$$\frac{dp_0}{dt} + (\lambda + \mu)\,p_0 = \mu\,,$$
$$\frac{dp_1}{dt} + (\lambda + \mu)\,p_1 = \lambda\,.$$

Ao resolvermos estas equações, supondo que o processo tenha partido do estado 0, isto é, $p_0(0)=1$ e $p_1(0)=0$, obtemos as soluções que são as probabilidades instantâneas dos estados.

$$p_0(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t},$$
$$p_1(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Para concluir o exemplo, supondo $\lambda+\mu>0$ calculamos os limites das funções $p_0(t)$ e $p_1(t)$ para $t\to\infty$ para obter as probabilidades estacionárias, v_0 e v_1.

$$\lim_{t\to\infty}p_0(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\to v_0=\frac{\mu}{\lambda+\mu},$$
$$\lim_{t\to\infty}p_1(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{\lambda}{\lambda+\mu}-\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\to v_1=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

Ficam, dessa forma, estabelecidos os elementos fundamentais que permitirão a análise de cadeias de Markov de tempo contínuo em regime estacionário.

5.4.1 Análise de cadeias de Markov de tempo contínuo para o regime estacionário

O nosso interesse resume-se aos processos de Markov que tenham alcançado o regime estacionário. Isto quer dizer que pretendemos aplicar a teoria para análises de problemas a longo prazo. Do ponto de vista das equações, os modelos serão independentes da variável tempo e, conseqüentemente, não trataremos com equações diferenciais, embora os modelos tenham origem na equação de Kolmogorov dada em (5.22).

Nas condições descritas, a equação de Kolmogorov para o $j-$ésimo estado é conforme mostrada por (5.23).

$$0=-q_j(t)v_j+\sum_{i\neq j}q_{ij}v_i \quad \text{para } j=0,1,2,\cdots,M. \tag{5.23}$$

Para permitir a análise em regime estacionário, o elemento chave é a matriz de transição a exemplo do que foi feito para cadeias de tempo discreto. O primeiro passo naturalmente consistirá em estabelecer procedimentos sistemáticos para obter tal matriz.

5.4.1.1 Obtenção da matriz de transição

Consideremos dois pontos de partida possíveis:

- obtenção de P a partir do diagrama de transição; e
- obtenção de P a partir da equação de Kolmogorov.

No primeiro caso, o índice de cada estado é associado a uma única linha e a uma única coluna da matriz, caracterizando genericamente um elemento de fora da diagonal da matriz P pelo par ordenado (i, j), com $i \neq j$. O elemento da posição (i, j), com $i \neq j$, associa-se univocamente com o arco orientado do diagrama de transição da cadeia de Markov que parte do estado i e vai até o estado j. Assim, tem-se a seguinte lei de formação da matriz de transição obtida a partir de um dado diagrama de transição,

$$\begin{aligned} &\text{elemento da posição } \underset{i\neq j}{(i, j)} = \text{taxa } q_{ij} \text{ (arco orientado de } i \text{ para } j\text{)}, \\ &\text{elemento da posição } (j, j) = 1 - q_j . \end{aligned} \tag{5.24}$$

Para exemplificar este procedimento de obtenção da matriz P, tomaremos como exemplo uma cadeia com quatro estados (BILLINTON, 1970).

Exemplo 5.11: Dado o diagrama da cadeia de Markov ilustrado na Figura 5.10, obtenha a matriz de transição correspondente. Observe que nem todos os nós estão interligados.

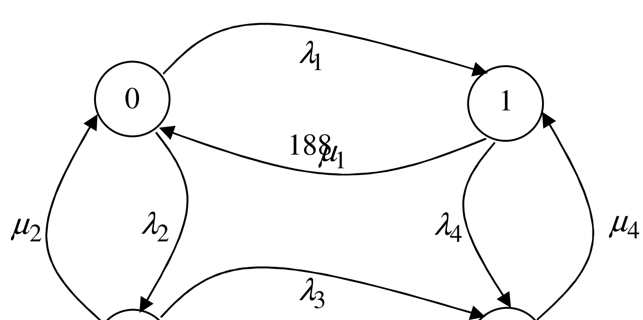

Figura 5.10: Diagrama de transição de uma cadeia de Markov de tempo contínuo com quatro estados.

Aplicamos então a regra estabelecida pela expressão (5.24) para os elementos de fora da diagonal, donde obtemos a Tabela 5.5.

Tabela 5.5: Elementos de fora da diagonal obtidos a partir do diagrama de transição.

Arco	Posição e elemento	Arco	Posição e elemento
De 0 a 1	$(0,1) \rightarrow \lambda_1$	De 2 a 0	$(2,0) \rightarrow \mu_2$
De 0 a 2	$(0,2) \rightarrow \lambda_2$	De 2 a 1	$(2,1) \rightarrow 0$
De 0 a 3	$(0,3) \rightarrow 0$	De 2 a 3	$(2,3) \rightarrow \lambda_3$
De 1 a 0	$(1,0) \rightarrow \mu_1$	De 3 a 0	$(3,0) \rightarrow 0$
De 1 a 2	$(1,2) \rightarrow 0$	De 3 a 1	$(3,1) \rightarrow \mu_4$
De 1 a 3	$(1,3) \rightarrow \lambda_4$	De 3 a 2	$(3,2) \rightarrow \mu_3$

O elemento da diagonal da matriz é obtido subtraindo da unidade a soma das taxas cujos arcos deixam o nó considerado. Portanto, os elementos da diagonal são:

$$
\begin{array}{lcl}
\text{Posição } (0,0) & \rightarrow & 1-(\lambda_1+\lambda_2) \\
\text{Posição } (1,1) & \rightarrow & 1-(\mu_1+\lambda_4) \\
\text{Posição } (2,2) & \rightarrow & 1-(\mu_2+\lambda_3) \\
\text{Posição } (3,3) & \rightarrow & 1-(\mu_3+\mu_4)\,.
\end{array}
$$

Conseqüentemente, a matriz de transição para este exemplo fica conforme indicada a seguir.

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-(\lambda_1+\lambda_2) & \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ \mu_1 & 1-(\mu_1+\lambda_4) & 0 & \lambda_4 \\ \mu_2 & 0 & 1-(\mu_2+\lambda_3) & \lambda_3 \\ 0 & \mu_4 & \mu_3 & 1-(\mu_3+\mu_4) \end{bmatrix} \end{array}.$$

Por outro lado, se for conhecido o sistema de equações que decorre da aplicação de (5.23) a todos os estados, a obtenção da matriz de transição obedece ao seguinte procedimento genérico.

Para a equação do estado j adicionamos a variável v_j ao primeiro e ao segundo membros simultaneamente e, em seguida, agrupamos os termos semelhantes deixando a probabilidade estacionária v_j explícita no primeiro membro. Repetimos este procedimento para todos as $M+1$ equações do sistema. A idéia é reescrever o sistema sob a forma conhecida $v = vP$, onde P é a matriz que se deseja obter.

Exemplificaremos este procedimento através do Exemplo 5.12.

Exemplo 5.12: Dado o sistema de equações de uma cadeia de Markov de três estados, obtenha a matriz de transição correspondente.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & = & -3v_0 & + & v_1 & + & 2v_2 \\ 0 & = & -4v_1 & + & v_0 & + & v_2 \\ 0 & = & -3v_2 & + & 3v_1 & + & 2v_0 \end{array}.$$

Adicionamos v_0, v_1 e v_2 a ambos os membros das equações dos estados 0, 1 e 2, respectivamente,

$$\begin{array}{ccccccccc} v_0 & = & v_0 & - & 3v_0 & + & v_1 & + & 2v_2 \\ v_1 & = & v_1 & - & 4v_1 & + & v_0 & + & v_2 \\ v_2 & = & v_2 & - & 3v_2 & + & 3v_1 & + & 2v_0 \end{array}.$$

Após agrupar os termos semelhantes obtemos:

$$\begin{array}{lllllllll} v_0 & = & (1-3)v_0 & + & v_1 & + & 2v_2 & & \\ v_1 & = & (1-4)v_1 & + & v_0 & + & v_2 & \rightarrow & \\ v_2 & = & (1-3)v_2 & + & 3v_1 & + & 2v_0 & & \end{array} \begin{array}{lllllll} v_0 & = & -2v_0 & + & v_1 & + & 2v_2 \\ v_1 & = & -3v_1 & + & v_0 & + & v_2 \, , \\ v_2 & = & -2v_2 & + & 3v_1 & + & 2v_0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll} v_0 & = & -2v_0 & + & v_1 & + & 2v_2 \\ v_1 & = & v_0 & - & 3v_1 & + & v_2 \, . \\ v_2 & = & 2v_0 & + & 3v_1 & - & 2v_2 \end{array}$$

Por fim, resulta o sistema na forma matricial, onde a matriz de transição está explícita.

$$\begin{bmatrix} v_0 & v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 & v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Quanto à classificação das cadeias, a mesma classificação apresentada nas seções que trataram de processos discretos no tempo é válida, exceto o conceito de periodicidade que está atrelado ao conceito de passos. Assim, teremos, como antes, cadeias com estados recorrentes e cadeias com estados transitórios. A classe das cadeias recorrentes compreende também as cadeias absorventes. Um estado i é dito ser absorvente se $q_{ij} = 0$ para $i \neq j$, de modo que, uma vez que se o processo entra neste estado, o mesmo é destinado a permanecer nele. Como definido anteriormente, em uma cadeia irredutível todo estado pode ser alcançado de qualquer outro estado.

Os processos de Markov de tempo contínuo encontram aplicações em diversas áreas, dentro as quais destacamos sistemas de filas de espera (processo conhecido como nascimento e morte) e confiabilidade de sistemas físicos em geral.

Vamos ilustrar a análise de cadeias de Markov de tempo contínuo através da solução de dois exemplos. O primeiro exemplo é transcrito do livro (HILLIER e LIEBERMAN, 1995).

Exemplo 5.13: Um *shopping* tem duas máquinas idênticas que são operadas continuamente exceto quando estão quebradas. Assim que uma máquina se quebra, ela é reparada imediatamente por um técnico que fica de plantão para atender a emergência. O tempo requerido para reparar uma máquina tem distribuição exponencial com média de 0,5 dia. Uma vez que a operação de reparo é concluída, o tempo até a próxima falha é também uma variável aleatória exponencial com média de 1 dia, sendo estas distribuições independentes. Defina a variável aleatória $X(t)$ como

$$X(t) = \text{número de máquinas quebradas no tempo } t,$$

então os possíveis valores de $X(t)$ são 0, 1 e 2. Portanto, sendo o tempo t uma variável contínua que se inicia em $t = 0$, o processo estocástico de tempo contínuo $\{X(t)\,;\, t \geq 0\}$ dá a evolução do número de máquinas quebradas.

Dadas às características do problema, este pode ser modelado como um processo de Markov de tempo contínuo com estados 0, 1 e 2. Conseqüentemente, podemos utilizar as equações de regime estacionário apresentadas anteriormente para calcular a distribuição de probabilidades do número de máquinas quebradas a longo prazo. Para proceder à análise, inicialmente, precisamos determinar as taxas de transição, que comporão a matriz de transição.

Determine:

(a) as taxas de transição do processo;

(b) o diagrama de transição;

(c) a matriz de transição P ; e

(d) o percentual do tempo que ambas as máquinas estarão quebradas.

A solução é como segue. O estado 'número de máquinas quebradas' aumenta de 1 quando uma falha ocorre e decresce de 1 quando um reparo ocorre. Considerando que as máquinas não se estragam ao mesmo tempo e que ambas não são consertadas simultaneamente, as taxas q_{02} e q_{20} são iguais a zero. Se o tempo médio de reparo é 0,5 dia, a taxa de reparo de qualquer uma das máquinas é 2. Então, $q_{21} = 2$ e

$q_{10} = 2$ reparos por dia. O tempo esperado até que uma máquina que está em operação se estrague é de 1 dia, então $q_{12} = 1$. Se ambas as máquinas estiverem operacionais, falhas ocorrem a uma taxa de $1+1=2$ por dia. Isto significa que $q_{01} = 2$.

O diagrama de transição do processo descrito é ilustrado na Figura 5.11.

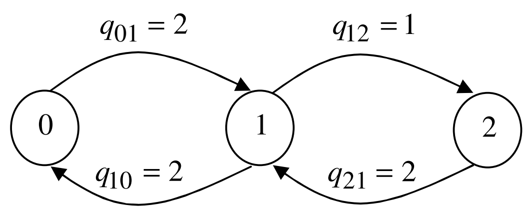

Figura 5.11: Diagrama de transição do sistema de duas máquinas.

Para obter a matriz de transição utilizamos o primeiro procedimento descrito na seção 5.4.1.1.

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Para calcular as probabilidades estacionárias v_j, para $j = 0, 1, 2$, utilizamos as relações $v = vP$ e $\sum_{j=0}^{M} v_j = 1$, que é resolvida tal com se fez no Exemplo 5.6.

$$\begin{cases} v_0 = 0{,}4 \\ v_1 = 0{,}4 \\ v_2 = 0{,}2 \end{cases}.$$

Assim, a longo prazo, ambas as máquinas estarão quebradas por 20% do tempo, e uma máquina estará quebrada em 40% do tempo.

Estudaremos a seguir um exemplo de aplicação à confiabilidade.

Exemplo 5.14: É usual em subestações de energia elétrica utilizar dois transformadores idênticos em paralelo, de modo que a potência de cada um dos equipamentos é suficiente para atender a instalação. A motivação para isto é aumentar a confiabilidade da subestação relativamente à alternativa de usar um único transformador. A Figura 5.12 ilustra o esquema elétrico simplificado para a análise de falha. A seta da figura indica o sentido do fluxo da energia.

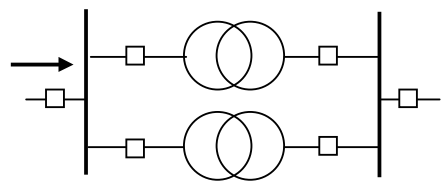

Figura 5.12: Dois transformadores idênticos em paralelo.

No esquema com dois transformadores em paralelo, a indisponibilidade do sistema ocorrerá apenas se ambas as máquinas estiverem fora de operação, porque implicará na interrupção do fluxo de energia. Os estados possíveis para os transformadores são: ambos em operação (0 em falha), um em operação e o outro em falha (1 em falha) e os dois fora de operação (2 em falha). A taxa de falhas é λ e a taxa de reparo é μ, ambas associadas à distribuições exponenciais independentes. Suponhamos também que se os dois transformadores estiverem em operação não é possível que os dois falhem simultaneamente, e nem é possível consertar dois transformadores ao mesmo tempo. O diagrama de transição do processo está representado na Figura 5.13.

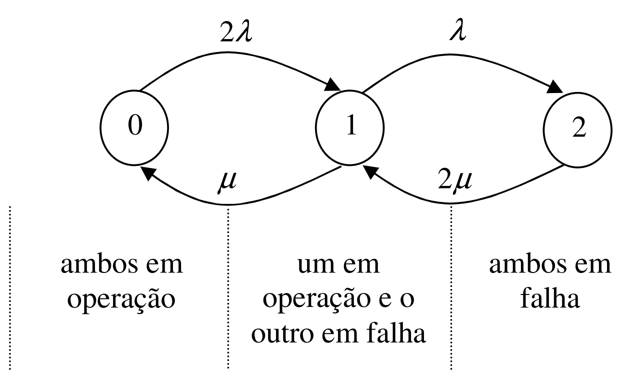

Figura 5.13: Diagrama de transição da cadeia de Markov de dois transformadores em paralelo.

Supondo que as condições de regime estacionário sejam verificadas, isto é, $t \to \infty$, determine as seguintes informações:

(a) a probabilidade de falha do sistema;

(b) a disponibilidade do sistema; e

(c) o tempo médio para o sistema falhar dado que se encontra em plena operação.

Para solucionar o exemplo montamos a matriz de transição a partir do diagrama da Figura 5.13.

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & 1-(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 2\mu & 1-2\mu \end{bmatrix} \end{array}$$

Para obter as respostas às duas primeiras questões, precisamos calcular as probabilidades estacionárias dos estados. Para tal utilizamos as relações $v = vP$ e $\sum_{j=0}^{M} v_j = 1$, que são solucionadas pelo método analítico.

$$v_0 = \frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2},$$
$$v_1 = \frac{2\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2},$$
$$v_2 = \frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2}.$$

Dado que cada unidade é capaz de suprir a instalação, a probabilidade de falha do sistema corresponde a um ou dois equipamentos em falha, que é $v_1 + v_2$,

$$v_1 + v_2 = \frac{\lambda^2 + 2\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}.$$

A disponibilidade do sistema, no caso do sistema em paralelo, é a probabilidade de que ao menos uma unidade esteja em operação (ou seja, disponível),

$$v_0 + v_1 = \frac{\mu^2 + 2\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}.$$

A resposta ao item (b) está intimamente relacionada à natureza do problema sob análise; neste caso, depende essencialmente da forma como são ligados os transformadores. Por exemplo, se os transformadores estivessem em série, a disponibilidade implicaria necessariamente na operação de ambos.

Para responder à última questão formulada, lançamos mão de um artifício: supomos que o estado 2 é absorvente e calculamos a partir da matriz de transição modificada o tempo para alcançar a absorção partindo do estado 0 (ambos em operação). No contexto do estudo da confiabilidade o tempo para alcançar a falha total do sistema é designado por MTTF, que é a sigla para *Mean Time to Failure* (cuja tradução é tempo médio para a falha) (BILLINTON, 1970).

Supondo o estado 2 um estado absorvente, a matriz de transição, P, é como segue:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & 1-(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

A exemplo dos estudos feitos anteriormente na seção 5.3.5, identificamos na matriz P a sub-matriz Q.

$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-2\lambda & 2\lambda \\ \mu & 1-(\lambda+\mu) \end{bmatrix} \end{array}.$$

Calculamos a matriz fundamental $(I-Q)^{-1}$.

$$(I-Q)^{-1} = \frac{1}{2\lambda^2}\begin{bmatrix} \lambda+\mu & 2\lambda \\ \mu & 2\lambda \end{bmatrix}$$

Partindo do estado 0 (que é o sistema em plena operação), o MTTF (isto é, o tempo antes do estado absorvente) é

$$\text{MTTF} = \frac{1}{2\lambda^2}(\lambda + \mu + 2\lambda) \rightarrow \text{MTTF} = \frac{(3\lambda + \mu)}{2\lambda^2}.$$

Para concluir o estudo deste tema fascinante sugerimos a solução dos exercícios propostos.

5.5 Exercícios propostos

1. (BRONSON, 1985) Um recenseamento econômico revelou que, numa dada população, as famílias são divididas em dois grupos: (1) as economicamente estáveis; e (2) aquelas em depressão. Depois de um período de 10 anos, a probabilidade de que uma família estável assim permaneça é de 0,92, enquanto a probabilidade dela entrar em depressão é de 0,08. A probabilidade de que uma família em depressão se torne estável é 0,03, enquanto a probabilidade de que ela assim permaneça é de 0,97. Calcule a probabilidade de uma família estável estar em depressão a longo prazo. Obtenha também o tempo médio que uma família estável permanece nesta condição.

2. Um representante comercial visita seus clientes cada mês. A experiência passada mostra que, se um cliente fez um pedido no último mês, a probabilidade de um novo pedido no mês corrente é 0,3, e se não foi efetuado pedido algum no mês passado, a probabilidade é 0,6. Assim, em cada um dos meses subseqüentes ao primeiro, cada cliente deve encontrar-se em um dos dois estados:
- estado 0: nenhum pedido no mês passado; e
- estado 1: um pedido no mês passado.
Dessa forma, com base nas probabilidades de transição podemos predizer o comportamento no futuro. Para um cliente do universo dos que não fizeram pedidos no mês anterior, determine a probabilidade que o tempo transcorrido para efetuar um novo pedido seja de 3 meses.

3. (SHAMBLIN, 1989) Suponhamos que três fabricantes de automóvel colheram os seguintes dados sobre as compras de clientes. A Tabela 5.6 representa a probabilidade de um cliente que

agora possui Ford (estado s_1), $n = 0$, comprar um Ford, Chevrolet (estado s_2) ou Plymouth (estado s_3) na próxima vez, isto é, no próximo passo, $n = 1$. Informação semelhante é fornecida para todos os proprietários dos outros modelos.

Tabela 5.6: Probabilidade (%) de compras em função do estado atual.

Compra presente ($n = 0$)	Próxima compra ($n = 1$)		
	% compra Ford	% compra Chevrolet	% compra Plymouth
Ford	40	30	30
Chevrolet	20	50	30
Plymouth	25	25	50

Modele o problema como uma cadeia de Markov de tempo discreto com passo igual a um ano.

Determine:

(a) a matriz de probabilidades de transição para este processo;

(b) a classificação desta cadeia;

(c) as probabilidades estacionárias;

(d) o tempo médio que o comprador de um Ford permanece com esta marca; e

(e) o número esperado de anos que o cliente que atualmente possui um Ford compre um Plymouth.

Como sugestão para resolver a questão (e) faça artificialmente o estado s_3 um estado absorvente e calcule o tempo esperado para a absorção.

4. Dadas as matrizes de transição para um passo, classifique cada uma das cadeias.

$$\text{(a) } P = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{bmatrix}; \text{ (b) } P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

5. Em 1993, a utilização do solo em uma cidade de 130 quilômetros quadrados de área ocupada apresentava os seguintes índices:

uso residencial 30% $\to$ estado s_1;

uso comercial 20% $\to$ estado s_2;

uso industrial 50% $\to$ estado s_3.

(a) Calcule os percentuais de ocupação do solo nesta cidade em 2003, assumindo que as probabilidades de transição para intervalos de 5 anos são dados pela seguinte matriz:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{bmatrix} \end{array}.$$

(b) Encontre as probabilidades limites dos estados de utilização do solo nesta cidade.

6. Em relação exercício anterior sobre ocupação do solo da cidade, suponha que se uma área é destinada à indústria esta fica imprestável para uso residencial ou comercial. Imaginando o estado s_3 como estado absorvente, determine o número esperado de passos (em anos) até que uma região que é residencial se torne industrial.

7. As sociedades ocidentais são estratificadas em função do poder aquisitivo de bens das famílias. Supondo que as classes sociais sejam: (a) classe A – ricos; (b) classe B – classe média; (c) classe C – pobres; e (d) classes D, E, etc. – miseráveis. No Brasil, o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, IBGE, realiza periodicamente um censo econômico, que, com base em amostragem, traça um perfil razoavelmente preciso da população com o foco na sua condição sócio-econômica. A cada censo são observadas as mudanças das famílias entre as classes. Modele o processo como uma cadeia de Markov de tempo discreto, onde os estados são as classes indicadas anteriormente e o estado do item (d) é um estado absorvente. Para análise, considere os dados que constam da matriz de probabilidades de transição. Se o passo é o intervalo de tempo igual a 10 anos, calcule o número de passos antes da absorção se o processo partiu do estado 'rico'. Ao usar a matriz, considere as seguintes associações:

pobre $\to 0$
miserável $\to 1$
médio $\to 2$
rico $\to 3$

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}6 & 0{,}3 \end{bmatrix} \end{array}.$$

8. Elabore um programa de computador para calcular $f_{ij}(k)$, sendo $i = 1$ e $j = 4, 5$, de modo que a partir dos dados do Exemplo 5.9 sejam reproduzidos os resultados que constam da Tabela 5.4.

9. (BILLINTON, 1970) Dois equipamentos idênticos são instalados e operam em série. Suponha três estados para modelar o processo como uma cadeia de Markov de tempo contínuo com taxas λ e μ , respectivamente, para falha e reparo. Mostre que a disponibilidade do sistema vale $\dfrac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}$ e que a MTTF é igual a $1/2\lambda$. (MTTF é o tempo médio para a falha).

10. Um sistema com um único servidor aberto ao público tem seus tempos de atendimentos distribuídos exponencialmente com taxa igual a μ. Os tempos entre chegadas dos usuários que demandam pelo serviço desses guichês também exibem a distribuição exponencial com taxas iguais a λ. Os usuários que acessam o sistema surgem segundo o modelo de Poisson. O estado é caracterizado pelo número de usuários presentes, $0, 1, 2, \cdots, \infty$. Nessas condições, o sistema se enquadra como um processo de nascimento e morte, podendo ser descrito como uma cadeia de Markov infinita de tempo contínuo. Desenhe o diagrama de transição dessa cadeia e escreva as equações de Kolmogorov para o regime estacionário. Supondo que $\lambda < \mu$, com base em séries convergentes, prove que a expressão para a probabilidade estacionária v_0 em função do quociente $\rho = \lambda/\mu$ é

$$v_0 = 1 - \rho,$$

onde, v_0 é a probabilidade de encontrar o sistema vazio, ou seja, livre de usuários. Neste exercício você precisará usar o resultado da série:

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = x^0 + x^1 + x^2 + \cdots + x^{\infty} = \frac{1}{1-x}, \text{ se } 0 < x < 1.$$