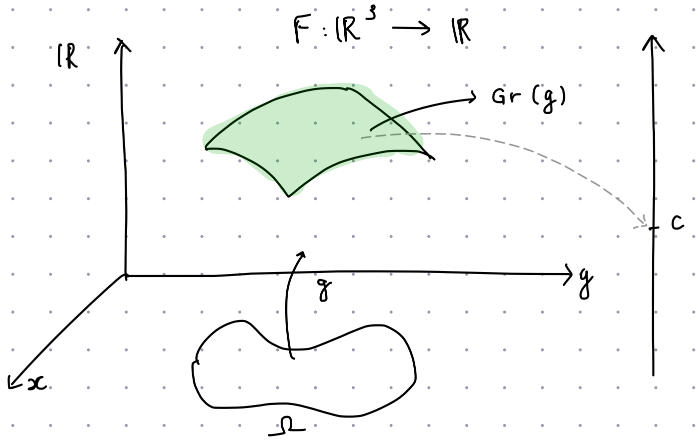
1. Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^2$, $g = g(u,v) : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em todo ponto de Ω e $F = F(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em todo ponto de $\mathbb{R}^3$. Suponhamos o gráfico de g contido numa superfície de nível de F.

   Mostre que se $P_0 \in \mathrm{Gr}(g)$ (o gráfico de g) e $\vec{\nabla} f(P_0) \neq \vec{0}$ então:

$$\vec{\nabla} f(P_0) \text{ é ortogonal ao plano tangente ao gráfico de } g \text{ no ponto } P_0.$$



$$F(x, y, g(x,y)) = c, \ \forall (x,y) \in \Omega$$

$P_0 = (x_0, y_0, g(x_0, y_0))$

$$\begin{cases} \gamma_1(x) = (x, y, g(x,y)) \\ \gamma_2(y) = (x, y, g(x,y)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = \gamma_1'(x_0) = \left(1, 0, \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)\right) \\ v_2 = \gamma_2'(y_0) = \left(0, 1, \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \end{cases}$$

o plano tangente ao grafico de g no ponto P_0 é o plano π, também indicado T_{P_0} ou $T_{P_0}(Gr(g))$

afirmação: para toda curva contida no gráfico de g e passando pelo ponto P_0, o vetor $\vec{\nabla} F(P_0)$ é ortogonal ao vetor tangente a esta curva Γ

verificação

escrevemos $\Gamma(t) = (x(t), y(t), g(x(t), y(t)))$

logo $F(\Gamma(t)) = c$, $\forall t$ no domínio de Γ

derivando temos

$$\frac{d(F \circ \Gamma(t))}{dt} = \langle \vec{\nabla} F(\Gamma(t)), \Gamma'(t) \rangle = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\nabla} F(\Gamma(t_0)) \perp \Gamma'(t_0) \Rightarrow \vec{\nabla} F(P_0) \perp \Gamma'(t_0)$$

$\forall \Gamma$ contida no grafico de g que passa por P_0.

Isto significa que $\vec{\nabla} F(P_0)$ é ortogonal ao plano tangente ao gráfico de g, no ponto P_0

2. A função diferenciável $z = f(x, y)$ é dada implicitamente por $x^3 + y^3 + z^3 = 10$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1, f(1, 1))$.

- para acharmos a equação do plano tangente precisamos encontrar o vetor normal ao plano
- temos então a função $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 10$
- o gráfico de f está contido em uma superfície de nível da função F.
- o gradiente de F será ortogonal às superfícies de nível
- então, o gradiente de F no ponto $(1, 1, f(1,1))$ será o vetor normal do plano
- calculando o gradiente:

$$\nabla F(x, y, z) = (3x^2, 3y^2, 3z^2)$$

temos que

$$z = f(x, y) = \sqrt[3]{-x^3 - y^3 + 10}$$

$$z = f(1, 1) = \sqrt[3]{-1 - 1 + 10}$$

$$= \sqrt[3]{8} = 2$$

então, o ponto é $(1, 1, f(1,1)) = (1, 1, 2)$

- $\nabla F(1, 1, 2)$ é normal ao gráfico de f no ponto $(1, 1, f(1,1))$

$$\nabla F(x, y, z) = (3x^2, 3y^2, 3z^2) \Rightarrow \nabla F(1,1,2) = (3, 3, 12)$$

$$(3, 3, 12) \cdot [(x, y, z) - (1, 1, 2)] = 3(x-1) + 3(y-1) + 12(z-2) = 0$$

$$\Rightarrow 3x - 3 + 3y - 3 \cdot 12y - 24 = 0$$

$$\Rightarrow 3x + 3y + 12y - 30 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x + y + 4y = 10}$$

3. a) Use a regra da cadeia para determinar $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$, onde $\begin{cases} z = z(x,y) = e^x \cos y \\ x = x(t,s) = ts \\ y = y(t,s) = \sqrt{t^2+s^2} \end{cases}$.

b) Verifique, para o item a), a fórmula abaixo (uma Regra da Cadeia).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{bmatrix}_{1\times 2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix}_{1\times 2} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

a) $\begin{cases} z = z(x,y) = e^x \cos y \\ x = x(t,s) = ts \\ y = y(t,s) = \sqrt{t^2+s^2} \end{cases}$ $\qquad \frac{\partial z}{\partial s} = ? \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = ?$

solução (a) $\quad \overset{z(t,s)}{z} = e^{ts} \cos\sqrt{t^2+s^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = t e^{ts} \cos\sqrt{t^2+s^2} - e^{ts} \cdot \left(\operatorname{sen}\sqrt{t^2+s^2}\right) \cdot \overbrace{\frac{1}{2}\left(t^2+s^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2s}^{\frac{s}{\sqrt{t^2+s^2}}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = s e^{ts} \cos\sqrt{t^2+s^2} - e^{ts}\left(\operatorname{sen}\sqrt{t^2+s^2}\right) \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2+s^2}}$$

4. (Coordenadas polares) Seja $z = f(x, y)$, onde $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$.

   (a) Determine $\frac{\partial z}{\partial r}$ e $\frac{\partial z}{\partial \theta}$.

   (b) Mostre que $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$.

   (c) Analogamente ao exercício imediatamente anterior, escreva para este exercício a fórmula matricial relacionando as derivadas.