Equações não lineares em uma variável

- Erro de aproximação versus erro de arredondamento
- Bissecção
- Iteração de ponto fixo
- Método de Newton
- Método secante
- Interpolação polinomial

Interpolação polinomial

- Interpolação de Lagrange
- Forma de Newton e diferenças divididas
- Diferenças divididas e derivadas (*)
- O erro na interpolação polinomial

Erro de aproximação versus erro de arredondamento

(capítulo 1)

- Erros de aproximação: aproximação da solução exata, existem dois tipos:
  - erros de discretização: processos contínuos; diferença entre as soluções analítica e numérica de um problema.
  - erros de convergência: métodos iterativos; aproximação do limite.

- Erros de arredondamento: diferença entre a aproximação calculada de um número e o seu valor exato.

Teorema de Taylor (com resíduo de lagrange)

seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $K+1$ derivadas contínuas num intervalo que contém os pontos de x_0 e $x_0 + h$, logo

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) \dots \frac{h^K}{K!}f^{(K)}(x_0) + \frac{h^{K+1}}{(K+1)!}f^{(K+1)}(\xi)$$

com ξ sendo um ponto desconhecido entre x_0 e x_0+h

explicando: $f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x_0+h-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_0+h-x_0)^2 \dots$

exemplo: $f(x) = \sin(x)$

queremos aproximar $\sin'(1.2)$. $1.2 = x_0$

temos a expressão que surgiu de Taylor:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) \dots$$

$$f'(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

assim, temos

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right| = \left| \cos(1.2) - \frac{\sin(1.2+h) - \sin(1.2)}{h} \right|$$

$\leq 10^{-10}$

Bissecção

(seções 3.1 e 3.2 do capítulo 3)

O método de Bissecção é inteiramente baseado no

Teorema do Valor Intermediário

ele garante a existência de uma solução para $f(x) = 0$ no intervalo (a, b) desde que $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ seja contínua e satisfaz $f(a)f(b) < 0$.

Nas condições do teorema do valor intermediário, o método da bissecção consiste em dividir o intervalo $[a,b]$ ao meio, obtendo os intervalos $[a,m]$ e $[m,b]$, e considerar como intervalo de busca o subintervalo em que f tem sinais opostos nos extremos.

Consideremos $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(a)f(b) < 0$. Seja m o ponto médio de $[a,b]$. Note que se $f(a)f(m) < 0$, então o teorema do valor intermediário garante que a raiz se encontra no intervalo $[a,m]$.

Se $f(a)(m) > 0$, então temos que

$f(a)f(m)f(a)f(b) = [f(a)]^2 f(m)f(b) < 0$, pois $[f(a)]^2 > 0$.

Segue que $f(m)f(b) < 0$ e portanto, pelo teorema do valor intermediário, a raiz se encontra no intervalo $[m,b]$.

Em seguida, repete-se o procedimento com o subintervalo de interesse. Após um número finito de subdivisões ou encontramos uma solução ou sabemos que a raiz encontra-se em algum subintervalo $[a_k, b_k]$.

Chamando $a_0 = a$ e $b_0 = b$ e efetuando sucessivas bissecções, obtemos intervalos $[a_k, b_k]$ e pontos médios m_k.

Note que $|b_k - a_k| = b_k - a_k = \boxed{\dfrac{b-a}{2^k}}$

número de iterações $= \boxed{n = \log\left(\frac{b-a}{2 \cdot tol}\right)}$

existe uma raiz x^* tal que $a \leq x^* \leq b$ e um $p = x_n$ que satisfaz $\boxed{|x^* - p| \leq atol}$

exemplo:

Determinar uma aproximação para uma raiz positiva da função $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin(x)$ no intervalo $[1.5, 2]$, x em radianos. Note que $f(x) = 0$ se, e somente se, $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \sin(x)$. Veja a tabela 1

Tabela 1: Tabela para bissecção

k	a_k	b_k	m_k	$f(a_k)f(m_k)$
0	1.5	2.0	1.75	> 0 o intervalo escolhido é $[m_k, b_k]$
1	1.75	2.0	1.875	> 0
2	1.875	2.0	1.9375	< 0 o intervalo escolhido é $[a_k, m_k]$
3	1.875	1.9375	1.90625	> 0 o intervalo escolhido é $[m_k, b_k]$
4	1.90625	1.9375	1.921875	> 0

Assim, uma aproximação para a raiz procurada é $m_5 = 1.921875$.

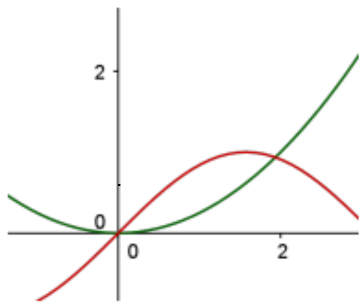


Figura 1: Gráfico de $\left(\frac{x}{2}\right)^2$ e $\sin(x)$ se cruzam na solução.

Iteração de ponto fixo

Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$, intervalo que contém uma raiz da equação $f(x) = 0$.

O método do ponto fixo consiste em transformar esta equação em uma equação equivalente $g(x) = x$ e a partir de uma aproximação inicial gerar a sequência $\{x_k\}$ de aproximações para a raiz R pela relação $g(x_k) = x_{k+1}$, pois a função $g(x)$ é tal que $f(R) = 0$ se e somente se $g(R) = R$.

Assim, transforma-se o problema de encontrar um zero de $f(x)$ no problema de encontrar um ponto fixo de $g(x)$.

Uma função que satisfaz essa condição é chamada função de iteração para a equação $f(x) = 0$.

Ou seja, se existir um α no intervalo $[a, b]$ tal que $g(\alpha) = \alpha$, este número é dito ponto fixo de g e pode ser calculado pelo seguinte algoritmo, que é chamado de iterações de ponto fixo:

$$\boxed{g(x_k) = x_{k+1}, \quad k \geq 0}$$

no qual x_0 é a aproximação inicial.

Porém, nem sempre a função $g(x)$ irá convergir para a raiz. Assim sendo, existem 3 condições para que a função possa ser utilizada no método do ponto fixo.

i) $g(x)$ e $g'(x)$ são contínuas em I

ii) $|g'(x)| \leq K < 1$, para todo x no intervalo

iii) $x_0 \in I$

critérios de parada:

- $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon_1$
- $|f(x_{k+1})| < \varepsilon_2$

método de Newton

Seja $f \in C^2[a,b]$ derivada segunda é contínua (C^2)

estamos em x_k, como definir x_{k+1} ?

O método de Newton consiste em definir x_{k+1} de forma tal que

$f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x) = 0$, quer dizer

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

Método das secantes

O método das secantes é uma variação do método de Newton, evitando a necessidade de conhecer-se a derivada analítica de $f(x)$.

Dada uma função $f(x)$, a ideia é aproximar sua derivada pela razão fundamental:

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \approx x_0$$

A iteração do método das secantes é dada por:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k \geq 2}$$

Interpolação polinomial

tabeladas ou equações

A interpolação polinomial tem por objetivo aproximar funções por polinômios de grau até n. Isso tem como intuito facilitar o cálculo das funções em pontos que não são dados. (Interpolar significa calcular pontos internos não dados).

Se definirmos o polinômio aproximador $p(x)$ como sendo:

$$p(x) = a_0 + a_1(x) + a_2(x^2) + \dots a_n(x^n)$$

precisaremos apenas encontrar os coeficientes a_i do polinômio

É possível encontrar os a_i por meio de um sistema linear usando a matriz de Vandermore, porém não é viável e utilizamos outros métodos.

Interpolação de Lagrange

O método de Lagrange define polinômios multiplicadores dos valores tabelados de y_0 que tem a propriedade particular de serem iguais a 1 quando são avaliados no ponto que devem aproximar, e 0 em qualquer outro ponto tabelado da função.

Sendo assim, definimos:

$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x)$$

pela propriedade citada:

$$\begin{aligned} p(x_0) &= y_0 L_0(x_0) + y_1 L_1(x_0) + \dots + y_n L_n(x) \\ &= y_0(1) + y_1(0) + \dots + y_n(0) \\ &= y_0 \end{aligned}$$

O polinômio de Lagrange é definido por:

$$\boxed{L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}}$$

observe que pulamos o monômio $(x-x_i)$ para que não haja raiz em x_i, analogamente, não dividimos pelo número real (x_i-x_i) pois ele é igual a zero.

Exemplo:

dada a função tabelada abaixo, encontrar o polinômio interpolador:

x	f(x)=y
-1	3
0	-1
1	2

como a tabela dada tem 3 pontos, devemos encontrar um polinômio de grau até 3.

não há como saber, a princípio, qual será o grau do polinômio resultante, e isso não está relacionado ao número de pontos dados. Se os pontos forem colineares, por exemplo, o polinômio aproximador será uma reta.

encontrando os polinômios de Lagrange:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{1}{2}x(x-1)$$

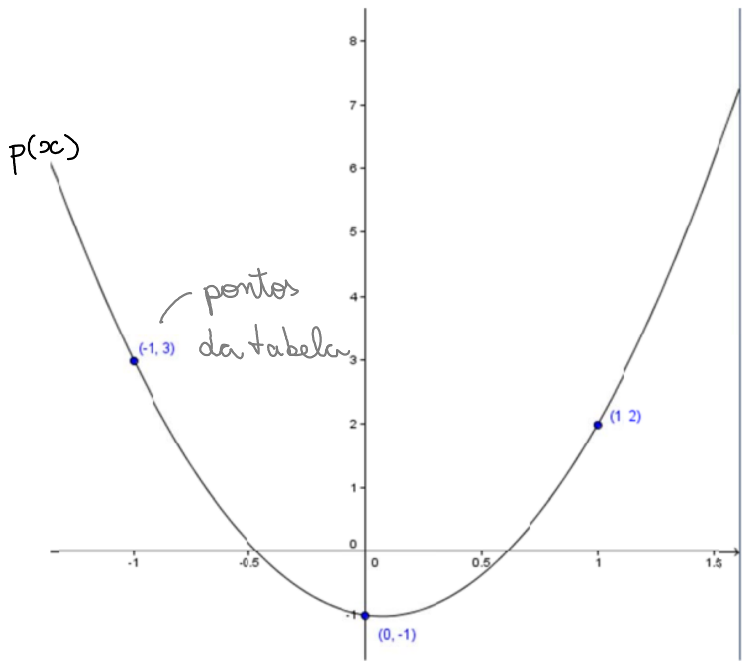
$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = (1-x^2)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{1}{2}x(x+2)$$

fazendo o polinômio aproximador:

$$p(x) = L_0y_0 + L_1y_1 + L_2y_2 = 3.\left(\frac{1}{2}x(x-1)\right) - 1.(1-x^2) + 2\left(\frac{1}{2}x(x+2)\right)$$

$$p(x) = \frac{1}{2}(7x^2 - x - 2)$$



Forma de Newton e diferenças divididas

Suponha que $P_n(x)$ seja o n-ésimo polinômio interpolador de Lagrange que coincide com uma função f nos pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Embora este polinômio seja único, há diversas formas diferentes de representá-lo.

As diferenças divididas de f em relação a $x_0, x_1, \dots, x_n$ são usadas para representar $P_n(x)$ na forma:

$$\boxed{\begin{gathered} P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + \\ a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \end{gathered}}$$

para constantes adequadas $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Para determinar o valor de a_0, note que, quando calculamos $P_n(x_0)$, temos

$$\boxed{a_0 = P_n(x_0) = f(x_0)}$$

da mesma forma, calculando $P_n(x_1)$, temos:

$$\boxed{P_n(x_1) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1)}$$

daí, podemos calcular o valor de a_1:

$$\boxed{a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}$$

Apresentamos, agora, a noção de diferença dividida.

A diferença dividida de ordem zero da função f em relação a x_i, denotada $f[x_i]$, é o valor de f em x_i:

$$\boxed{f[x_i] = f(x_i)}$$

A primeira diferença dividida da função f em relação a x_i e x_{i+1}, denotada $f[x_i, x_{i+1}]$, é definida como:

$$\boxed{f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}}$$

A segunda diferença dividida da função f em relação a x_i, x_{i+1} e x_{i+2}, denotada $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$, é definida como

$$\boxed{f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}}$$

Analogamente, depois das $K-1$-ésimas diferenças divididas

$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+K-1}]$ e $f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+K}]$

serem calculadas, a K-ésima diferença dividida com relação a $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+K}$ é dada por

$$\boxed{f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+K-1}, x_{i+K}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+K}] - f[x_i, \dots, x_{i+K-1}]}{x_{i+K} - x_i}}$$

Usando esta notação, podemos escrever o polinômio interpolador como

$$\boxed{P_n(x) = f[x_0] + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)\dots(x - x_{n-1})}$$

com $a_K = f[x_0, x_1, \dots, x_K]$, para $0 \leq K \leq n$.

Portanto, o polinômio interpolador pode ser escrito como:

$$\boxed{P_n(x) = f[x_0] + \sum_{K=1}^{n} f[x_0, x_1, \dots x_K](x - x_0)\dots(x - x_{K-1})}$$

note que o valor de $f[x_0, x_1, \dots, x_K]$ não depende da ordem dos números $x_0, x_1, \dots, x_K$.

Algoritmo:

Diferenças divididas de Newton: dados os números distintos $x_0, x_1, \dots, x_n$, os valores $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ como a primeira coluna $F_{0,0}, F_{1,0}, \dots, F_{n,0}$ de F, calcula a tabela F tal que $F_{i,i} = f[x_0, x_1, \dots, x_i]$ e $P(x)$, polinômio interpolador de f nos pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$, dado por $P(x) = \sum_{i=0}^{n} F_{i,i} \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)$.

Passo 1: Para $i = 1, \dots, n$, execute o passo 2:

Passo 2: Para $j = 1, \dots, i$, faça

$$F_{i,j} \leftarrow \frac{F_{i,j-1} - F_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}.$$

Passo 3: Devolva F e pare.

Diferenças divididas e derivadas

Se aplicarmos o Teorema do Valor Médio à equação

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \qquad \text{para } i = 0$$

temos que, se f' existe, então $f[x_0, x_1] = f'(\xi)$ para algum número ξ entre x_0 e x_1.

Teorema 1.

Suponha que $f \in C^n[a,b]$ e $x_0, x_1, \dots, x_n$ sejam números distintos em $[a,b]$. Então, existe um número ξ (geralmente desconhecido) em (a,b) tal que

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

O erro na interpolação polinomial

O erro na interpolação, num certo ponto x, é:

$$e_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

temos $f(x)$:

$$f(x) = p_n(x) + f[x_0, \dots, x_n, x](x - x_0) \dots (x - x_n)$$

ou seja, temos a fórmula do erro:

$$e_n(x) = f[x_0, \dots, x_n, x](x - x_0) \dots (x - x_n)$$

Seja V um intervalo que contenha os nós $x_0, \dots, x_n$ e ainda o ponto x. Se a função f for de classe $C^{n+1}(V)$ então temos a seguinte fórmula para o erro de interpolação:

$$\boxed{\exists\, \xi \text{ em } V: \quad e_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)}$$