MAC0420 - COMPUTAÇÃO GRÁFICA

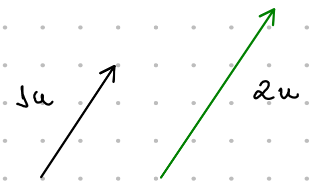
provinha 17.04

9.1 GEOMETRIA AFIM

- ESCALARES: números reais
- PONTOS: posições no espaço
- VETORES LIVRES: vetor sem posição no espaço

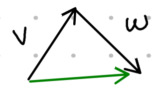
9.1.1. OPERAÇÕES AFINS

OPERAÇÃO	RESULTADO	EXEMPLO
MULTIPLICAÇÃO VETOR COM ESCALAR	VETOR	αv



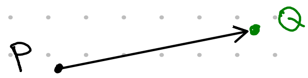
$v = (5,4,3)$; $\alpha = 2$ => $\alpha v = 2 * (5,4,3) = (10,8,6)$

SOMA DE VETORES	VETOR	$v + w$



$v = (5,4,3)$; $w = (1,2,3)$ => $v+w = (5+1, 4+2, 3+3) = (6,6,6)$

SOMA DE PONTO COM VETOR	PONTO	$P + v$

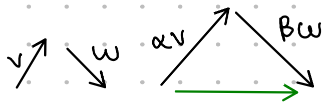


$P = (1,1,1)$; $v = (5,4,3)$ => $P + V = (1+5, 1+4, 1+3) = (6,5,4)$

SUBTRAÇÃO DE PONTOS	VETOR	$P - Q$

$P = (1,1,1)$; $Q = (2,2,2)$ => $P - Q = (1-2, 1-2, 1-2) = (-1,-1,-1)$

COMBINAÇÃO LINEAR DE VETORES	VETOR	$\alpha v + \beta w$

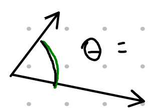


$v = (5,4,3)$ $w = (1,2,3)$ $\alpha = 2$ $\beta = 3$

$\alpha v + \beta w = 2 * (5,4,3) + 3 * (1,2,3) = (13,14,15)$

geometria euclidiana

PRODUTO INTERNO (OU ESCALAR)	ESCALAR	$v \cdot w$



$\theta = (v \cdot w) / |v| |w|$

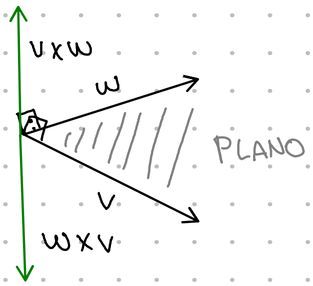
$v = (5,4,3)$ $w = (1,2,3)$ => $v \cdot w = 5*1 + 4*2 + 3*3 = 22$

PRODUTO VETORIAL	VETOR	$v \times w$

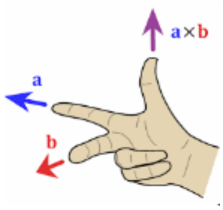
$v = (5,4,3)$ $w = (1,2,3)$ =>

$v \times w = (6, -12, 6)$ determinante

regra da mão direita



$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} i & j \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{matrix} \quad \begin{aligned} &= 12i + 3j + 10k \\ &- 15j - 6i - 4k \\ &= (6, -12, 6) \end{aligned}$$



NÃO É POSSÍVEL:

- soma de pontos
- multiplicação de pontos
- multiplicação de ponto por escalar
- divisão de vetores / pontos

9.1.2. COMBINAÇÕES AFINS

- interpolar pontos
- exemplo: achar o ponto médio de $\overline{PQ}$

  - vetor $Q - P$

    $Q \bullet \xrightarrow{\quad R \quad} \bullet P$ $\qquad R = P + \alpha(Q - P)$

  - $R = (1-\alpha)P + \alpha Q$

$\alpha = \frac{1}{3}$ $\qquad P \bullet \xrightarrow{\quad 2/3 \quad R \quad 1/3 \quad} Q$

- **COMBINAÇÃO AFIM**

  $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_n P_n$

- **COMBINAÇÃO CONVEXA**

  $\alpha_i \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$

9.2. GEOMETRIA EUCLIDIANA

- ângulos e distâncias
- produto interno

9.2.1 PRODUTO INTERNO

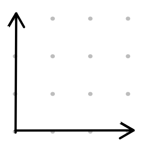
- comprimento de um vetor: $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$
- normalização: vetor unitário: $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$
- distância entre dois pontos: $dist(P, Q) = \|P - Q\|$
- ângulo entre dois vetores: $ang(\vec{u}, \vec{v}) = \cos^{-1}(\vec{u} \cdot \vec{v} / \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|)$
  $= \cos^{-1}(\hat{u} \cdot \hat{v})$
- ortogonalidade: use: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

10.1 BASES, VETORES E COORDENADAS

- vetores independentes $\vec{u}_0$ e $\vec{u}_1$ então

$$\vec{v} = \alpha_0 \vec{u}_0 + \alpha_1 \vec{u}_1$$

- d vetores linearmente independentes ⇒ base
- base 2D
  - vetores unitarios e ortogonais entre si
  - ortonormal



10.2. SISTEMAS DE COORDENADAS

- origem O e conjunto d de vetores L.I
- qualquer ponto P pode ser definido como

$\vec{v} = P - O$

$P = \alpha_0 \vec{u}_0 + \alpha_1 \vec{u}_1 + O$

10.3 COORDENADAS HOMOGÊNEAS

$$\left.\begin{array}{lll} \bullet\ 0 \cdot P = \vec{0} & & \text{vetor} \\ \bullet\ 1 \cdot P = P & & \text{ponto} \end{array}\right\} \begin{array}{lll} 0 \Rightarrow \text{vetor} & (1, 2, 0) \\ 1 \Rightarrow \text{ponto} & (1, 2, 1) \end{array}$$

$P[F] = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ↳ ponto

$\vec{w}[F] = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ↳ vetor

10. 4. MÚLTIPLOS SISTEMAS DE COORDENADAS

- sistema de coordenadas mais universal
  - SISTEMA PADRÃO
  - referência ortonormal
    - vetores ortogonais e unitários
  - origem O
  - vetores base ei

$$\vec{e}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

10. 5. MUDANÇA DE SISTEMAS DE COORDENADAS

- encontrar um β que satisfaz

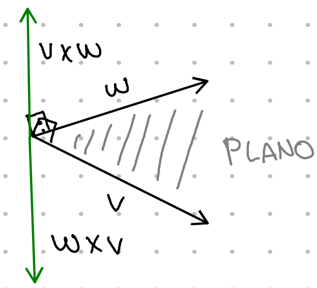
$$P[F] = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

10. 6 MUDANÇA DE COORDENADAS

- encontrar um α ou β também

10. 7. PRODUTO VETORIAL

PRODUTO VETORIAL VETOR $v \times w$

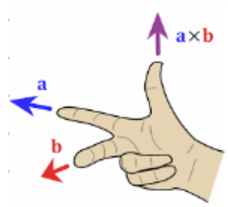


$v = (5, 4, 3)$ $w = (1, 2, 3)$ =>

regra da mão direita

$v \times w = (6, -12, 6)$ determinante

$$\begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ 5 & 4 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= 12i + 3j + 10k \\ &- 15j - 6i - 4k \\ &= (6, -12, 6) \end{aligned}$$



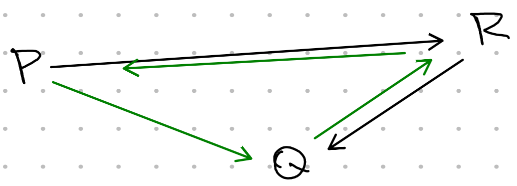
10.8 ORIENTAÇÃO

- dois números reais P e Q

  - P < Q
  - P = Q
  - P > Q

  $Or_1(p, Q) = sign(q - p)$

- espaço d precisa de d+1 pontos



11. TRANSFORMAÇÕES AFINS

- mapear ponto de um lugar para o outro

- translações
- rotações
- escalas uniformes e não uniformes
- reflexões
- cisalhamento

- Todas as transformações preservam combinações afins
  - exemplo ponto médio

$$R = (1-\alpha)P + \alpha Q \Rightarrow T(R) = (1-\alpha)T(P) + \alpha T(Q)$$

11.1 REPRESENTAÇÃO MATRICIAL

- 3D

$$R = \alpha_0 F.\vec{e}_0 + \alpha_1 F.\vec{e}_1 + \alpha_2 F.\vec{e}_2 + \alpha_3 O$$

então

$$T(R) = \alpha_0 T(F\vec{e}_0) + \alpha_1 T(F\vec{e}_1) + \alpha_2 T(F\vec{e}_2) + \alpha_3 T(O)$$

$\Downarrow$

0 vetor
1 ponto

- aplicar uma transformação
= multiplicar por uma matriz

$$\mathbf{T}(R)[F] = \left(\mathbf{T}(F.\vec{e}_0)[F] \;\middle|\; \mathbf{T}(F.\vec{e}_1)[F] \;\middle|\; \mathbf{T}(F.\vec{e}_2)[F] \;\middle|\; \mathbf{T}(F.\mathcal{O})[F]\right) \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

.

11.2. TRANSLAÇÃO

$$\mathbf{T}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha_x \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_y \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11.3. ESCALA

- transformação em relação a algum ponto fixo central
- origem não se move

$$S(\beta_x, \beta_y, \beta_z) = \begin{pmatrix} \beta_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11.4. REFLEXÃO

- reflete em torno de uma linha

$$F_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11.5. ROTAÇÃO

- em torno de um ponto fixo
- pontos e vetores são afetados

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que tanto pontos quanto vetores são
rotações aplicadas aos demais eixos temos:

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & 0 & sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin(\theta) & 0 & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• 11.6. CISALHAMENTO

- só uma face se move
- origem e vetores unitarios permanecem

$$H_{xy}(h_x, h_y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h_x & 0 \\ 0 & 1 & h_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Os cisalhamentos envolvendo outros pares de eixos são definidos de forma análoga:

$$H_{yz}(h_y, h_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_y & 1 & 0 & 0 \\ h_z & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, H_{xz}(h_x, h_y) = \begin{pmatrix} 1 & h_x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & h_z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$