

## LISTA 1

## CHECKLIST

entregue ☒ fiz ☒ incompleto ☐ não entendi ☐

## questão 1

a) ☒ b) ☒ c) ☒

## questão 2

a) ☐ b) ☐ c) ☐ d) ☐ e) ☐ f) ☐

## questão 3

a) ☒ b) ☒ c) ☐ d) ☐ e) ☒

## questão 4

a) ☐ b) ☒

Nome: Sabrina Araújo da Silva n°USP: 12566182

## MAC0338 - ANÁLISE DE ALGORITMOS

### LISTA 1

exercícios 1, 3(a), 3(b), 3(c) e 4(b)

1. Lembre-se que  $\lg n$  denota o logaritmo na base 2 de  $n$ . Usando a definição de notação  $O$ , prove que

(a)  $3^n$  não é  $O(2^n)$

para  $n_0 = 1$  e  $c = 1$  temos que

$$3^n \geq 1 \cdot 2^n \geq 0$$

ou seja, para  $T(n) = 3^n$  e  $O(f(n)) = O(2^n)$  não temos que  $T(n) \leq c f(n)$

para todo  $n \geq n_0$ .

(b)  $\log_{10} n$  é  $O(\lg n)$

para  $n_0 = 1$ ,  $c = 1$  e  $n \geq n_0$  temos que

$$0 \leq \log_{10} n \leq 1 \cdot \lg n$$

(c)  $\lg n$  é  $O(\log_{10} n)$

para  $n_0 = 1$ ,  $c = 4$  e  $n \geq n_0$  temos que

$$0 \leq \lg n \leq 4 \cdot \log_{10} n$$

2. Usando a definição de notação  $O$ , prove que

(c)  $\lg n = O(\log_{10} n)$

3. Prove ou dê um contra-exemplo para as afirmações abaixo:

(a)  $\lg \sqrt{n} = O(\lg n)$  ( $\lg \sqrt{n} \in O(\lg n)$ )

para  $n_0 = 1$ ,  $c = 1$  e  $n \geq n_0$  temos que

$$0 \leq \lg \sqrt{n} \leq 1 \cdot \lg n$$

(b) Se  $f(n) = O(g(n))$  e  $g(n) = O(h(n))$  então  $f(n) = O(h(n))$ .

Sabemos que funções que são  $O(g(n))$  são funções que não crescem mais rápido que  $g(n)$ , assim como  $f(n)$ . E, assim, temos que  $g(n)$  é uma função que não cresce mais rápido que  $h(n)$ , pois  $g(n) = O(h(n))$ . Portanto, se  $f(n)$  cresce mais lentamente que  $g(n)$  e  $g(n)$  cresce mais lentamente que  $h(n)$ ,  $f(n)$  também não cresce mais rápido que  $h(n)$ , logo  $f(n) = O(h(n))$ .

(e) Se  $f(n) = O(g(n))$  então  $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$ .

Sabemos que  $f(n)$  é uma função que não cresce mais rápido que  $g(n)$ . E  $2^x$  é uma função crescente para  $x \geq 0$ . Portanto, temos que  $0 \leq 2^{f(n)} \leq 2^{g(n)}$  e, assim,  $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$ .

4. Prove que

(b)  $\sum_{i=1}^n \frac{i}{2^i} \leq 2$ .

Para  $\sum_{i=1}^n \frac{i}{2^i}$  temos

$$\sum_{i=1}^n \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \frac{6}{2^6} + \dots + \frac{n}{2^n}$$

podemos escrever o somatório separando-o em várias PGs para cada valor de  $i$

• para  $i=1 \Rightarrow \frac{1}{2}$

• para  $i=2 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

• para  $i=3 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$

portanto para  $i=n \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n}$   
 $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n}$   
 $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n}$   
 $\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n}$   
 $+ \frac{1}{2^n}$

como o somatório foi dividido em PGs temos que a razão de cada uma é  $\frac{1}{2}$ .

Cada PG é uma série geométrica de razão  $r = \frac{1}{2}$ , se  $r < 1$ , então a série

converge para  $\frac{a_1}{1-r}$ .

• para a linha 1 temos  $a_1 = \frac{1}{2}$ , então

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

• para a linha 2 temos  $a_2 = \frac{1}{4}$ , então

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

- para a linha 3 temos  $a_3 = \frac{1}{8}$ , então

$$\sum_{i=3}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

- para a linha  $n$  temos  $a_n = \frac{1}{2^n}$ , então

$$\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Assim, podemos perceber que surge uma série do tipo:  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}}$  a partir das somas das PGs.

$$\text{Seja a série } \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \dots$$

da álgebra elementar temos a seguinte propriedade

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

para  $a = 1$  e  $b = \frac{1}{2}$ :

$$\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$\text{seja } s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{i-1}}$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)s_n \Rightarrow s_n = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

calculando o limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2$$

Portanto, a série  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{i-1}}$  converge e a soma é igual a 2.

Assim, podemos concluir que  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} \leq 2$