

MAC0338 - ANÁLISE DE ALGORITMOS

LISTA 03

exercícios 1, 6 e 8

1. Considere o seguinte algoritmo que determina o segundo maior elemento de um vetor $v[1..n]$ com $n \geq 2$ números positivos distintos.

Algoritmo Máximo (v, n)

1. $maior \leftarrow 0$
2. $segundo_maior \leftarrow 0$
3. **para** $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
4. **se** $v[i] > maior$
5. **então** $segundo_maior \leftarrow maior$
6. $maior \leftarrow v[i]$
7. **senão se** $v[i] > segundo_maior$
8. **então** $segundo_maior \leftarrow v[i]$
9. **devolva** $segundo_maior$

Suponha que v é uma permutação de 1 a n escolhida ao acaso dentre todas as permutações de 1 a n , de acordo com a distribuição uniforme de probabilidade. Seja X o número de vezes que a variável $segundo_maior$ é alterada (ou seja, o número de execuções das linhas 5 e 8 do algoritmo) numa chamada de Máximo(v, n). Note que X é uma variável aleatória. Calcule o valor esperado de X .

cada permutação de v tem probabilidade $\frac{1}{n!}$

$$X = \text{número total de execuções da linha 5 e 8} = Y + W$$

$Y = \text{número total de execuções da linha 5}$

$W = \text{número total de execuções da linha 8}$

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{se "segundo_maior} \leftarrow maior" \text{ é executado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$Y = Y_1 + \dots + Y_n$$

$$\begin{aligned} E[Y_i] &= \text{probabilidade de que } v[i] \text{ seja máximo em } v[1..i] \\ &= \frac{1}{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[Y_1 + \dots + Y_n] = E[Y_1] + \dots + E[Y_n] \\ &= \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n \end{aligned}$$

$$W_i = \begin{cases} 1, & \text{se "segundo_maior} \leftarrow v[i]" \text{ é executado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$E[W_i] =$ probabilidade de que $v[i]$ seja o segundo máximo em $v[1 \dots i]$

$$= \left(1 - \frac{1}{i}\right) \cdot \frac{1}{i-1} = \frac{1}{i}$$

↑ prob. de não executar a linha 5

$$E[W] = E[W_1 + \dots + W_n] = E[W_1] + \dots + E[W_n]$$

$$= \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n$$

$$E[X] = E[Y] + E[W] < 1 + \ln n + 1 + \ln n = 2(1 + \ln n)$$

6. Escreva uma função que recebe um vetor com n letras A's e B's e, por meio de trocas, move todos os A's para o início do vetor. Sua função deve consumir tempo $O(n)$.

seja $v[1 \dots n]$ o vetor com n letras A's e B's

TROCA(v, n)

```

1  j ← n
2  PARA i ← 1 ENQUANTO i < j FAÇA
3      SE v[i] == "B" E v[j] == "A"
4          v[i] = "A"
5          v[j] = "B"
6          j = j - 1
7      SENÃO SE v[i] = "A" E v[j] == "B"
8          j = j - 1
9      SENÃO SE v[i] = "B" E v[j] == "B"
10         j = j - 1
11         i = i + 1
12     i = i + 1
13  DEVOLVA v

```

8. Sejam $X[1..n]$ e $Y[1..n]$ dois vetores, cada um contendo n números ordenados. Escreva um algoritmo $O(\lg n)$ para encontrar uma das medianas de todos os $2n$ elementos nos vetores X e Y .

seja $X[ix \dots fx]$ e $Y[iy \dots fy]$

MEDIANA(X, Y, ix, fx, iy, fy)

1 SE ix É IGUAL A iy

2 DEVOLVA O MÍNIMO ENTRE ix E iy

3 // MEDIANAS DE X E Y

4 $mx = (ix + fx) / 2$

5 $my = (iy + fy) / 2$

6 $x = X[i]$

7 $y = Y[j]$

8 SE $x == y$

9 DEVOLVA x

10 SE $x < y$

11 DEVOLVA MEDIANA(X, Y, mx, fx, iy, my)

12 SE $y < x$

13 DEVOLVA MEDIANA(X, Y, ix, mx, my, fy)