# Análise de Algoritmos

CLRS 2.3, 4.1 e 4.2

Essas transparências foram adaptadas das transparências do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.

# Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

# Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

# Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

# Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

Combinação: combinar as soluções das instâncias menores para gerar uma solução da instância original.

# Mergesort

Rearranja $A[p \mathinner{.\,.} r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

Método: Divisão e conquista.

```
MERGESORT (A, p, r)
   se p < r
      então q ← ⌊(p + r)/2⌋
            MERGESORT (A, p, q)
            MERGESORT (A, q + 1, r)
            INTERCALA (A, p, q, r)
```

# Intercalação

Problema: Dados $A[p\,..\,q]$ e $A[q{+}1\,..\,r]$ crescentes, rearranjar $A[p\,..\,r]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Para que valores de $q$ o problema faz sentido? $p \le q \le r - 1$

Entra:

| | $p$ | | | | $q$ | | | | $r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 22 | 33 | 55 | 77 | 99 | 11 | 44 | 66 | 88 |

# Intercalação

Problema: Dados $A[p \mathinner{..} q]$ e $A[q{+}1 \mathinner{..} r]$ crescentes, rearranjar $A[p \mathinner{..} r]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Para que valores de $q$ o problema faz sentido?

Entra:

| | $p$ | | | | $q$ | | | | $r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 22 | 33 | 55 | 77 | 99 | 11 | 44 | 66 | 88 |

Sai:

| | $p$ | | | | $q$ | | | | $r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 11 | 22 | 33 | 44 | 55 | 66 | 77 | 88 | 99 |

vetor auxiliar

# Intercalação

```
INTERCALA (A, p, q, r)
  ▷ B[p . . r] é um vetor auxiliar
  para i ← p até q faça
      B[i] ← A[i]
  para j ← q + 1 até r faça
      B[r + q + 1 − j] ← A[j]   inverte de q+1 até r
  i ← p
  j ← r
  para k ← p até r faça
      se B[i] ≤ B[j]
          então A[k] ← B[i]
                i ← i + 1
          senão A[k] ← B[j]
                j ← j − 1
```

# Intercalação

```
INTERCALA (A, p, q, r)
   ▷ B[p . . r] é um vetor auxiliar
   para i ← p até q faça
       B[i] ← A[i]
   para j ← q + 1 até r faça
       B[r + q + 1 − j] ← A[j]
   i ← p
   j ← r
   para k ← p até r faça
       se B[i] ≤ B[j]
           então A[k] ← B[i]
                 i ← i + 1
           senão A[k] ← B[j]
                 j ← j − 1
```

Essa versão do intercala não é estável. Por que?

# Intercalação

```
INTERCALA (A, p, q, r)
▷ B[p . . r] é um vetor auxiliar
para i ← p até q faça
    B[i] ← A[i]
para j ← q + 1 até r faça
    B[r + q + 1 − j] ← A[j]
i ← p
j ← r
para k ← p até r faça
    se B[i] ≤ B[j] e i ≤ q          ▷ alteração
        então A[k] ← B[i]
              i ← i + 1
        senão A[k] ← B[j]
              j ← j − 1
```

Essa versão do intercala é estável.

# Simulação

| | $p$ | | | | $q$ | | | | $r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 22 | 33 | 55 | 77 | 99 | 11 | 44 | 66 | 88 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B$ | | | | | | | | | |

# Simulação

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $k$ | | | | | | | | |
| $A$ | | | | | | | | | |
| | $i$ | | | | | | | | $j$ |
| $B$ | 22 | 33 | 55 | 77 | 99 | 88 | 66 | 44 | 11 |

# Simulação

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $k$ | | | | | | | |
| $A$ | 11 | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $i$ | | | | | | | $j$ | |
| $B$ | 22 | 33 | 55 | 77 | 99 | 88 | 66 | 44 | 11 |

# Simulação

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $k$ | | | | | | |
| $A$ | 11 | 22 | | | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $i$ | | | | | | $j$ | |
| $B$ | 22 | 33 | 55 | 77 | 99 | 88 | 66 | 44 | 11 |

# Simulação

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $k$ | | | | | |
| $A$ | 11 | 22 | 33 | | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $i$ | | | | | $j$ | |
| $B$ | 22 | 33 | 55 | 77 | 99 | 88 | 66 | 44 | 11 |

# Simulação

| | | | | | $k$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 11 | 22 | 33 | 44 | | | | | |

| | | | $i$ | | | | $j$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B$ | 22 | 33 | 55 | 77 | 99 | 88 | 66 | 44 | 11 |

# Simulação

| | | | | | | $k$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 11 | 22 | 33 | 44 | 55 | | | | |

| | | | | $i$ | | | $j$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B$ | 22 | 33 | 55 | 77 | 99 | 88 | 66 | 44 | 11 |

# Simulação

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | $k$ | | |
| $A$ | 11 | 22 | 33 | 44 | 55 | 66 | | | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $i$ | | $j$ | | | |
| $B$ | 22 | 33 | 55 | 77 | 99 | 88 | 66 | 44 | 11 |

# Simulação

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | $k$ | |
| $A$ | 11 | 22 | 33 | 44 | 55 | 66 | 77 | | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $i$ | $j$ | | | |
| $B$ | 22 | 33 | 55 | 77 | 99 | 88 | 66 | 44 | 11 |

# Simulação

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | $k$ |
| $A$ | 11 | 22 | 33 | 44 | 55 | 66 | 77 | 88 | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $i{=}j$ | | | | |
| $B$ | 22 | 33 | 55 | 77 | 99 | 88 | 66 | 44 | 11 |

# Simulação

| $A$ | 11 | 22 | 33 | 44 | 55 | 66 | 77 | 88 | 99 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $j$ | $i$ | | | |
| $B$ | 22 | 33 | 55 | 77 | 99 | 88 | 66 | 44 | 11 |

# Consumo de tempo

Quanto tempo consome em função de $n := r - p + 1$?

| linha | consumo de todas as execuções da linha |
|---|---|
| 1 | $\Theta(n)$ |
| 2 | $\Theta(n)$ |
| 3 | $\Theta(n)$ |
| 4 | $\Theta(n)$ |
| 5–6 | $\Theta(1)$ |
| 7 | $\Theta(n)$ |
| 8 | $\Theta(n)$ |
| 9–12 | $\Theta(n)$ |
| total | $\Theta(7n + 1) = \Theta(n)$ |

# Conclusão

O algoritmo INTERCALA consome
$\Theta(n)$ unidades de tempo.

Também escreve-se

O algoritmo INTERCALA consome
tempo $\Theta(n)$.

# Mergesort

MERGESORT $(A, p, r)$
1 se $p < r$
2 então $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
3 MERGESORT $(A, p, q)$
4 MERGESORT $(A, q + 1, r)$
5 INTERCALA $(A, p, q, r)$

| linha | consumo máximo na linha |
|---|---|
| 1 | $\Theta(1)$ |
| 2 | $\Theta(1)$ |
| 3 | $T(\lceil n/2 \rceil)$ |
| 4 | $T(\lfloor n/2 \rfloor)$ |
| 5 | $\Theta(n)$ |

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

# Mergesort

$T(n) :=$ consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

$$T(n) \;=\; T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Solução: $T(n)$ é $\Theta(???)$.

Receita:

- Substitua a notação assintótica por função da classe.
- Restrinja-se a $n$ potência de 2.
- Estipule que na base o valor é 1.
- Use expansão ou árvore de recorrência
  para determinar um "chute" de solução.
- Confira se o chute está correto.

# Expansão

Para $n$ potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

# Expansão

Para $n$ potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

# Expansão

Para $n$ potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + n \\ &= 2\big(2T(n/2^2) + n/2\big) + n \;=\; 2^2 T(n/2^2) + 2n \end{aligned}$$

# Expansão

Para $n$ potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n \\
&= 2\big(2T(n/2^2) + n/2\big) + n \;=\; 2^2 T(n/2^2) + 2n \\
&= 2^2\big(2T(n/2^3) + n/2^2\big) + 2n \;=\; 2^3 T(n/2^3) + 3n
\end{aligned}
$$

# Expansão

Para $n$ potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n \\
&= 2\big(2T(n/2^2) + n/2\big) + n \;=\; 2^2 T(n/2^2) + 2n \\
&= 2^2\big(2T(n/2^3) + n/2^2\big) + 2n \;=\; 2^3 T(n/2^3) + 3n \\
&= 2^3\big(2T(n/2^4) + n/2^3\big) + 3n \;=\; 2^4 T(n/2^4) + 4n
\end{aligned}
$$

# Expansão

Para $n$ potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n \\
&= 2\big(2T(n/2^2) + n/2\big) + n \;=\; 2^2 T(n/2^2) + 2n \\
&= 2^2\big(2T(n/2^3) + n/2^2\big) + 2n \;=\; 2^3 T(n/2^3) + 3n \\
&= 2^3\big(2T(n/2^4) + n/2^3\big) + 3n \;=\; 2^4 T(n/2^4) + 4n \\
&= \ldots \;=\; 2^k T(n/2^k) + kn
\end{aligned}
$$

# Expansão

Para $n$ potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n \\
&= 2\big(2T(n/2^2) + n/2\big) + n \;=\; 2^2T(n/2^2) + 2n \\
&= 2^2\big(2T(n/2^3) + n/2^2\big) + 2n \;=\; 2^3T(n/2^3) + 3n \\
&= 2^3\big(2T(n/2^4) + n/2^3\big) + 3n \;=\; 2^4T(n/2^4) + 4n \\
&= \ldots \;=\; 2^kT(n/2^k) + kn \\
&= n + n\lg n \;=\; \Theta(n\lg n).
\end{aligned}
$$

Conclusão:

O MERGESORT consome $\Theta(n \lg n)$ unidades de tempo.

# Conferência

Para $n$ potência de 2 e $k = \lg n$,

$$T(n) \;=\; 2\,T(n/2) + n \qquad \text{(e, deixamos implícito, } T(1) = 1\text{)}$$

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

# Conferência

Para $n$ potência de 2 e $k = \lg n$,

$T(n) \;=\; 2\,T(n/2) + n \quad$ (e, deixamos implícito, $T(1) = 1$)

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Prova por indução em $k$, onde $k = \lg n$.

## Conferência

Para $n$ potência de 2 e $k = \lg n$,

$$T(n) \;=\; 2\,T(n/2) + n \qquad \text{(e, deixamos implícito, } T(1) = 1\text{)}$$

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Prova por indução em $k$, onde $k = \lg n$.

Afirmação reescrita em termos de $k$: $T(2^k) = 2^k + k\,2^k$.

# Conferência

Para $n$ potência de 2 e $k = \lg n$,

$T(n) \;=\; 2\,T(n/2) + n \quad$ (e, deixamos implícito, $T(1) = 1$)

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Prova por indução em $k$, onde $k = \lg n$.

Afirmação reescrita em termos de $k$: $T(2^k) = 2^k + k\,2^k$.

Para $k = 0$, temos que $T(2^0) = T(1) = 1 = 2^0 + 0 \cdot 2^0$.

# Conferência

Para $n$ potência de 2 e $k = \lg n$,

$$T(n) \;=\; 2\,T(n/2) + n \qquad \text{(e, deixamos implícito, } T(1) = 1\text{)}$$

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Prova por indução em $k$, onde $k = \lg n$.

Afirmação reescrita em termos de $k$: $T(2^k) = 2^k + k\,2^k$.

Para $k = 0$, temos que $T(2^0) = T(1) = 1 = 2^0 + 0 \cdot 2^0$.

Para $k \geq 1$, suponha que $T(2^{k-1}) = 2^{k-1} + (k-1)2^{k-1}$.

# Conferência

Para $n$ potência de 2 e $k = \lg n$,

$$T(n) \;=\; 2\,T(n/2) + n \qquad \text{(e, deixamos implícito, } T(1) = 1\text{)}$$

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Prova por indução em $k$, onde $k = \lg n$.

Afirmação reescrita em termos de $k$: $T(2^k) = 2^k + k\,2^k$.

Para $k = 0$, temos que $T(2^0) = T(1) = 1 = 2^0 + 0 \cdot 2^0$.

Para $k \geq 1$, suponha que $T(2^{k-1}) = 2^{k-1} + (k-1)2^{k-1}$.

Então $T(2^k) = 2\,T(2^{k-1}) + 2^k$ pela recorrência.

# Conferência

Para $n$ potência de 2 e $k = \lg n$,

$$T(n) \;=\; 2\,T(n/2) + n \qquad \text{(e, deixamos implícito, } T(1) = 1\text{)}$$

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Prova por indução em $k$, onde $k = \lg n$.

Afirmação reescrita em termos de $k$: $T(2^k) = 2^k + k\,2^k$.

Para $k = 0$, temos que $T(2^0) = T(1) = 1 = 2^0 + 0 \cdot 2^0$.

Para $k \geq 1$, suponha que $T(2^{k-1}) = 2^{k-1} + (k-1)2^{k-1}$.

Então $T(2^k) = 2\,T(2^{k-1}) + 2^k$ pela recorrência.

Logo $$\begin{aligned} T(2^k) &= 2\,(2^{k-1} + (k-1)2^{k-1}) + 2^k \\ &= 2^k + (k-1)\,2^k + 2^k = 2^k + k\,2^k. \end{aligned}$$ $\square$

# Resolução de recorrências

- Substitua a notação assintótica por função da classe.
- Restrinja-se a $n$ potência de algo, se necessário.
- Estipule que na base o valor é 1.
- Use expansão ou árvore de recorrência
  para determinar um "chute" de solução.
- Confira se o chute está correto.

# Resolução de recorrências

- Substitua a notação assintótica por função da classe.
- Restrinja-se a $n$ potência de algo, se necessário.
- Estipule que na base o valor é 1.
- Use expansão ou árvore de recorrência
  para determinar um "chute" de solução.
- Confira se o chute está correto.

Exemplos:

- $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$
- $T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$
- $T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$
- $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n^2)$

# Resolução de recorrências

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$$

# Resolução de recorrências

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$T(1) = 1$ e $T(n) = T(n/2) + 1$ para $n \geq 2$ potência de 2.

# Resolução de recorrências

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$T(1) = 1$ e $T(n) = T(n/2) + 1$ para $n \geq 2$ potência de 2.

Por expansão:

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(n/2) + 1 \\
&= \big(T(n/2^2) + 1\big) + 1 \;=\; T(n/2^2) + 2 \\
&= \big(T(n/2^3) + 1\big) + 2 \;=\; T(n/2^3) + 3 \\
&= \big(T(n/2^4) + 1\big) + 3 \;=\; T(n/2^4) + 4 \\
&= \ldots \;=\; T(n/2^k) + k \quad \text{para } k = \lg n \\
&= T(1) + \lg n \;=\; 1 + \lg n \;=\; \Theta(\lg n).
\end{aligned}$$

# Resolução de recorrências

$$T(n) \;=\; T(n-1) + \Theta(n)$$

# Resolução de recorrências

$$T(n) \;=\; T(n-1) + \Theta(n)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$T(1) = 1$ e $T(n) \;=\; T(n-1) + n$ para $n \geq 2$.

# Resolução de recorrências

$$T(n) \;=\; T(n-1) + \Theta(n)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$T(1) = 1$ e $T(n) \;=\; T(n-1) + n$ para $n \geq 2$.

Por expansão:

$$\begin{aligned}
T(n) = \;& T(n-1) + n \\
= \;& T(n-2) + (n-1) + n \\
= \;& T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\
= \;& T(n-4) + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\
= \;& \ldots \;=\; T(1) + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\
= \;& 1 + 2 + \cdots + (n-1) + (n-2) + n \;=\; \frac{(n+1)n}{2} = \Theta(n^2).
\end{aligned}$$

# Resolução de recorrências

Por expansão:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + n \\
&= T(n-2) + (n-1) + n \\
&= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\
&= \ldots \;=\; T(1) + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\
&= 1 + 2 + \cdots + (n-1) + (n-2) + n \;=\; \frac{(n+1)n}{2} = \Theta(n^2).
\end{aligned}
$$

# Resolução de recorrências

Por expansão:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + n \\
&= T(n-2) + (n-1) + n \\
&= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\
&= \ldots \; = \; T(1) + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\
&= 1 + 2 + \cdots + (n-1) + (n-2) + n \; = \; \frac{(n+1)n}{2} = \Theta(n^2).
\end{aligned}
$$

Note que não temos restrição no $n$ neste caso.

Só faça a conta quando
os termos que saem da recorrência são o mesmo
(como o $n$ na recorrência do Mergesort, e o 1 na anterior).

$$T(n) \;=\; 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$T(1) = 1$
$T(n) = 3\,T(n/2) + n$ para $n \geq 2$ potência de 2.

$$T(n) \;=\; 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$T(1) = 1$
$T(n) = 3\,T(n/2) + n$ para $n \geq 2$ potência de 2.

Por expansão:

$$\begin{aligned}
T(n) &= \; 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n \\
&= \; 3\left(3T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{n}{2}\right) + n \;=\; 3^2\,T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= \; 3^2\left(3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}\,n + n \;=\; 3^3\,T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 n + \frac{3}{2}\,n + n
\end{aligned}$$

$$T(n) \;=\; 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$T(1) = 1$
$T(n) = 3\,T(n/2) + n$ para $n \geq 2$ potência de 2.

Por expansão:

$$\begin{aligned}
T(n) &= \; 3T(\tfrac{n}{2}) + n \\
&= \; 3(3T(\tfrac{n}{2^2}) + \tfrac{n}{2}) + n \;=\; 3^2 T(\tfrac{n}{2^2}) + \tfrac{3}{2}\,n + n \\
&= \; 3^2(3T(\tfrac{n}{2^3}) + \tfrac{n}{2^2}) + \tfrac{3}{2}\,n + n \;=\; 3^3 T(\tfrac{n}{2^3}) + (\tfrac{3}{2})^2 n + \tfrac{3}{2}\,n + n \\
&= \; 3^3(3T(\tfrac{n}{2^4}) + \tfrac{n}{2^3}) + (\tfrac{3}{2})^2 n + \tfrac{3}{2}\,n + n \\
&= \; 3^4 T(\tfrac{n}{2^4}) + (\tfrac{3}{2})^3 n + (\tfrac{3}{2})^2 n + \tfrac{3}{2}\,n + n
\end{aligned}$$

$$T(n) = 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Por expansão:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3\,T(\tfrac{n}{2}) + n \;=\; 3^2\,T(\tfrac{n}{2^2}) + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= 3^3\,T(\tfrac{n}{2^3}) + (\tfrac{3}{2})^2 n + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= 3^4\,T(\tfrac{n}{2^4}) + (\tfrac{3}{2})^3 n + (\tfrac{3}{2})^2 n + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= \;\ldots\; = \; 3^k\,T(\tfrac{n}{2^k}) + (\tfrac{3}{2})^{k-1} n + \cdots + \frac{3}{2}\,n + n \quad \text{para } k = \lg n
\end{aligned}
$$

$$T(n) \;=\; 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Por expansão:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3T(\tfrac{n}{2}) + n \;=\; 3^2 T(\tfrac{n}{2^2}) + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= 3^3 T(\tfrac{n}{2^3}) + (\tfrac{3}{2})^2 n + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= 3^4 T(\tfrac{n}{2^4}) + (\tfrac{3}{2})^3 n + (\tfrac{3}{2})^2 n + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= \ldots \;=\; 3^k T(\tfrac{n}{2^k}) + (\tfrac{3}{2})^{k-1} n + \cdots + \frac{3}{2}\,n + n \quad \text{para } k = \lg n \\
&= 3^{\lg n}\, T(1) + \Big(\sum_{i=0}^{\lg n - 1} \frac{3}{2}\Big) n \\
&= 3^{\lg n} + \Big(\frac{(\frac{3}{2})^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\Big) n \;=\; 3^{\lg n} + 2\,\Big(\big(\frac{3}{2}\big)^{\lg n} - 1\Big) n
\end{aligned}$$

$$T(n) = 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3T(\tfrac{n}{2}) + n \;=\; 3^2 T(\tfrac{n}{2^2}) + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= \;\ldots\; = \; 3^k\,T(\frac{n}{2^k}) + (\frac{3}{2})^{k-1} n + \cdots + \frac{3}{2}\,n + n \qquad \text{para } k = \lg n \\
&= 3^{\lg n}\,T(1) + \Big(\sum_{i=0}^{\lg n - 1} \frac{3}{2}\Big) n \;=\; 3^{\lg n} + \Big(\frac{(\frac{3}{2})^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\Big) n \\
&= 3^{\lg n} + 2\,\big((\frac{3}{2})^{\lg n} - 1\big)\,n \\
&= 3^{\lg n} + 2\,\big(\frac{3^{\lg n}}{n} - 1\big)\,n \\
&= 3^{\lg n} + 2\,(3^{\lg n} - n)
\end{aligned}
$$

$$T(n) \;=\; 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$$\begin{aligned}
T(n) &= \; 3T(\tfrac{n}{2}) + n \;=\; 3^2\,T(\tfrac{n}{2^2}) + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= \; \ldots \;=\; 3^k\,T(\tfrac{n}{2^k}) + (\tfrac{3}{2})^{k-1} n + \cdots + \frac{3}{2}\,n + n \quad \text{para } k = \lg n \\
&= \; 3^{\lg n}\,T(1) + \Big(\sum_{i=0}^{\lg n - 1} \frac{3}{2}\Big) n \;=\; 3^{\lg n} + \Big(\frac{(\frac{3}{2})^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\Big) n \\
&= \; 3^{\lg n} + 2\,\big((\tfrac{3}{2})^{\lg n} - 1\big)\,n \\
&= \; 3^{\lg n} + 2\,\Big(\frac{3^{\lg n}}{n} - 1\Big)\,n \\
&= \; 3^{\lg n} + 2\,\big(3^{\lg n} - n\big) \\
&= \; 3^{\lg n} + 2\,3^{\lg n} - 2n
\end{aligned}$$

$$T(n) = 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3T(\tfrac{n}{2}) + n \;=\; 3^2\,T(\tfrac{n}{2^2}) + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= \;\ldots\; = \; 3^k\,T(\tfrac{n}{2^k}) + (\tfrac{3}{2})^{k-1} n + \cdots + \frac{3}{2}\,n + n \quad \text{para } k = \lg n \\
&= 3^{\lg n}\,T(1) + \Big(\sum_{i=0}^{\lg n - 1} \frac{3}{2}\Big) n \;=\; 3^{\lg n} + \Big(\frac{(\frac{3}{2})^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\Big) n \\
&= 3^{\lg n} + 2\,\big((\tfrac{3}{2})^{\lg n} - 1\big)\,n \;=\; 3^{\lg n} + 2\,\Big(\frac{3^{\lg n}}{n} - 1\Big)\,n \\
&= 3^{\lg n} + 2\,\big(3^{\lg n} - n\big) \\
&= 3^{\lg n} + 2\,3^{\lg n} - 2n \\
&= 3\,3^{\lg n} - 2n
\end{aligned}
$$

## $T(n) = 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$

$$
\begin{aligned}
T(n) = \; & 3^{\lg n}\, T(1) + \Big(\sum_{i=0}^{\lg n - 1} \frac{3}{2}\Big) n \;=\; 3^{\lg n} + \Big(\frac{(\frac{3}{2})^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\Big) n \\
= \; & 3^{\lg n} + 2\,\Big(\big(\frac{3}{2}\big)^{\lg n} - 1\Big) n \;=\; 3^{\lg n} + 2\,\Big(\frac{3^{\lg n}}{n} - 1\Big) n \\
= \; & 3^{\lg n} + 2\,\big(3^{\lg n} - n\big) \\
= \; & 3^{\lg n} + 2\,3^{\lg n} - 2n \\
= \; & 3\,3^{\lg n} - 2n
\end{aligned}
$$

$T(n) \;=\; 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$

$$
\begin{aligned}
T(n) = \;& 3^{\lg n}\,T(1) + \Big(\sum_{i=0}^{\lg n - 1} \frac{3}{2}\Big) n \;=\; 3^{\lg n} + \Big(\frac{(\frac{3}{2})^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\Big) n \\
= \;& 3^{\lg n} + 2\,\Big(\big(\frac{3}{2}\big)^{\lg n} - 1\Big) n \;=\; 3^{\lg n} + 2\,\Big(\frac{3^{\lg n}}{n} - 1\Big) n \\
= \;& 3^{\lg n} + 2\,\big(3^{\lg n} - n\big) \\
= \;& 3^{\lg n} + 2\,3^{\lg n} - 2n \\
= \;& 3\,3^{\lg n} - 2n \\
= \;& 3\,\big(2^{\lg 3}\big)^{\lg n} - 2n
\end{aligned}
$$

## $T(n) \;=\; 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$

$$
\begin{aligned}
T(n) = \;& 3^{\lg n}\, T(1) + \Big(\sum_{i=0}^{\lg n - 1} \frac{3}{2}\Big)\, n \;=\; 3^{\lg n} + \Big(\frac{(\frac{3}{2})^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\Big)\, n \\
=\;& 3^{\lg n} + 2\,\Big(\big(\frac{3}{2}\big)^{\lg n} - 1\Big)\, n \;=\; 3^{\lg n} + 2\,\Big(\frac{3^{\lg n}}{n} - 1\Big)\, n \\
=\;& 3^{\lg n} + 2\,\big(3^{\lg n} - n\big) \\
=\;& 3^{\lg n} + 2\,3^{\lg n} - 2n \\
=\;& 3\,3^{\lg n} - 2n \\
=\;& 3\,\big(2^{\lg n}\big)^{\lg 3} - 2n \\
=\;& 3\,n^{\lg 3} - 2n
\end{aligned}
$$

$$T(n) \;=\; 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$$\begin{aligned}
T(n) = {} & 3^{\lg n}\,T(1) + \Big(\sum_{i=0}^{\lg n - 1} \frac{3}{2}\Big)n \;=\; 3^{\lg n} + \Big(\frac{(\frac{3}{2})^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\Big)n \\
= {} & 3^{\lg n} + 2\,\Big((\frac{3}{2})^{\lg n} - 1\Big)n \;=\; 3^{\lg n} + 2\,\Big(\frac{3^{\lg n}}{n} - 1\Big)n \\
= {} & 3^{\lg n} + 2\,\big(3^{\lg n} - n\big) \\
= {} & 3^{\lg n} + 2\,3^{\lg n} - 2n \\
= {} & 3\,3^{\lg n} - 2n \\
= {} & 3\,\big(2^{\lg n}\big)^{\lg 3} - 2n \\
= {} & 3\,n^{\lg 3} - 2n \\
= {} & \Theta(n^{\lg 3}).
\end{aligned}$$

# Resolução de recorrências

$$T(n) \;=\; 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n^2)$$

# Resolução de recorrências

$$T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n^2)$$

Você consegue resolver?

# Resolução de recorrências

$$T(n) \;=\; 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n^2)$$

Você consegue resolver?

Exercício!