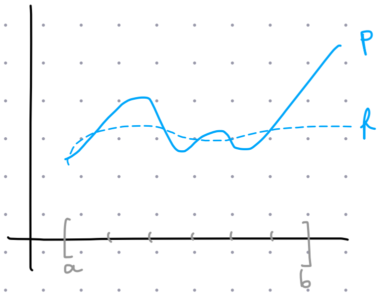
19 de abril
10.4 (cont.) p. 312

Divided differences and derivatives



$e(x) = f(x) - p(x)$

$|e(x)| \le C$

$\forall x \in [a,b]$

Teorema. seja f com k derivadas limitadas no intervalo $[a,b]$ e sejam $z_0,\dots,z_k$ $k+1$ pontos diferentes em $[a,b]$. Logo, existe $\xi \in [a,b]$ tal que

$$\boxed{f[z_0 \dots z_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}}$$

Prova. O exercício 13 mostra que

$$\boxed{f[\hat{z}_0 \dots \hat{z}_{k+1}] = f[z_0 \dots z_{k+1}]}$$

se $\hat{z}_0 \dots \hat{z}_{k+1}$ é uma permutação de $z_0 \dots z_{k+1}$

podemos supor então que $\underset{a}{\underset{\shortparallel}{z_0}} < z_1 < z_2 < \dots < \underset{b}{\underset{\vee}{z_k}}$

seja p_k o polinômio que satisfaz $p_k(z_i) = f(z_i)$ para $i = 0 \dots k$ e definamos a função

$$\boxed{e(x) = f(x) - p_k(x)}$$

Logo, $e(z_i) = 0$, $i = 0 \dots k$, quer dizer e tem $k+1$ raízes no intervalo $[a,b]$. Isso quer dizer, pelo Teorema de Rolle (p. 10) que $e^{(1)}$ tem k no intervalo $[a,b]$. Logo, $e^{(k)}$ tem uma raiz em $[a,b]$.

$$e^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - p_k^{(k)}(x)$$

existe $\xi \in [a,b]$ tal que $e^{(k)}(\xi) = 0$ $\qquad$ $f[z_0 \dots z_k]k!$

$$0 = e^{(k)}(\xi) = f^{(k)}(\xi) - f[z_0 \dots z_k]k!$$

quer dizer $f[z_0 \dots z_k] = \dfrac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$ para um $\xi \in [a,b]$.

Erro em interpolação polinomial

Ideia. suponhamos que temos $x_0 \dots x_n$ diferentes e o polinômio de grau máximo n, p_n, tal que $p_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0 \dots n$.

Definamos $e_n(x) = f(x) - p_n(x)$ e consideremos $\bar{x} \neq x_i$, $i = 0 \dots n$. quanto vale $e_n(\bar{x})$?

consideramos $p_{n+1}(x) = p_n(x) + f[x_0 \dots x_n, \bar{x}]\, \psi_n(x)$ $\psi_n(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$

$$p_{n+1}(\bar{x}) = p_n(\bar{x}) + f[x_0 \dots x_n, \bar{x}]\, \psi_n(\bar{x}) = f(\bar{x})$$

logo, $\boxed{e_n(\bar{x}) = f(\bar{x}) - p_n(\bar{x}) = f[x_0 \dots x_n, \bar{x}]\, \psi_n(\bar{x})}$

se pegarmos $\bar{x} \in [a,b]$, então é para qualquer $\bar{x}$ igual a $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

logo, mostramos que, dado $x \in [a,b]$, $x \neq x_i$, $i = 0 \dots n$

$$\boxed{e_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)}$$ para algum $\xi(x) \in [a,b]$

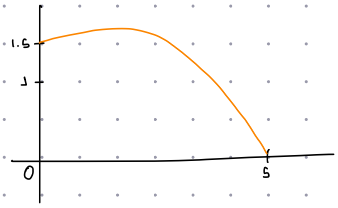
logo, $$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{a \leq t \leq b} |f^{(n+1)}(t)| \cdot \max_{a \leq s \leq b} \prod_{i=0}^{n} |s - x_i|$$

26 de abril. capítulo 10.7 **interpolando valores de derivadas**

exemplo: $f(0) = 1.5$

$f(0) = 1$

$f(5) = 0$



$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$

$p(0) = f(0) \Rightarrow c_0 = 1.5$

$p'(x) = c_1 + 2c_2 x$

$p'(0) = c_1 = f'(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1$

$p(5) = 1.5 + 5 + c_2 25 = 0 \Rightarrow \boxed{c_2 = -6.5 / 25 = -0.26}$

abscissas — interpolação até $f^{(m_i)}$

$$q+1 \begin{cases} t_0 & m_0 \geq 0 \\ t_1 & m_1 \\ \vdots & \vdots \\ t_q & m_q \end{cases}$$

condições de interpolação: $\left(p^{(k)}(t_i) = f^{(k)}(t_i),\ k = 0 \dots m_i\right),\ i = 0 \dots q$

quantidade de condições:

$$\sum_{i=0}^{q} (m_i + 1) = \left(\sum_{i=0}^{q} m_i\right) + q + 1$$

Com esses dados, podemos construir um polinômio interpolador com grau $n = \left(\sum_{i=0}^{q} m_i\right) + q$

casos "famosos":

1. $m_i = 0\ \forall i$. nesse caso temos $q+1$ abscissas e desejamos um polinômio de grau $n = q$ que interpole os valores dados.
2. $q = 0$. nesse caso temos um único ponto t_0 e desejamos $p^{(k)}(t_0) = f^{(k)}(t_0)$, $k = 0 \dots m_0$. isso é o polinômio de Taylor.
3. $m_i = 1\ \forall i \Rightarrow 2(q+1)$ dados $\Rightarrow n = 2q+1$. Polinômio de Hermite.

extensão da forma de newton ou diferenças divididas para o caso de abscissas repetidas:

$$(x_0 \dots x_n) = (\underbrace{t_0 \dots t_0}_{m_0+1}\ \underbrace{t_1 \dots t_1}_{m_1+1} \dots \underbrace{t_q \dots t_q}_{m_q+1})$$

$$(y_0 \dots y_n) = (f(t_0), f'(t)), f^{(m_0)}(t_0), f(t_1), f'(t_1) \dots f^{(m_1)}(t_1) \dots)$$

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f[x_0 \dots x_j] \prod_{i=0}^{j} (x - x_j)$$

$$f[x_k \dots x_j] = \begin{cases} \dfrac{f[x_{k+1} \dots x_j] - f[x_k \dots x_{j-1}]}{x_j - x_k}, & x_j \neq x_k \\ \dfrac{f^{(j-k)}(x_k)}{(j-k)!}, & x_j = x_k \end{cases} \quad \text{para } 0 \leq k < j \leq n$$

para que essa definição valha, as abscissas repetidas devem estar consecutivas.

05 de maio

Interpolação polinomial por partes

capítulo 11

Queremos aproximar $f(x)$, desconhecida, que vale $f(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$ no intervalo $[a, b]$.

Problemas

1. $f(x) - P(x) = \left(\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$

queremos diminuir o erro diminuindo o intervalo $[a, b]$

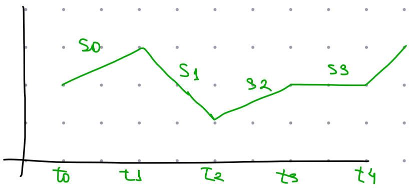
$a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1$

BREAK POINTS

$s_0(x) = t_0 < x \leq t$

$s_i(x), \quad t \leq x \leq t_{i+1}$

$v(x) = s_i, \quad t_i \leq x \leq t_{i+1}$



linear

$h = \text{MAX}(t_{i+1} - t_i) \qquad t_i = x_i, \forall i = 0, \dots, n$

$$f(x) - v(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_i)(x - x_{i+1}) \leq \frac{f''(\xi)}{2!}\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right)^2 \leq \frac{h^2}{2^3} \text{MAX} |f''(\xi)| \quad x_i \leq \xi \leq x_{i+1}$$

fórmula do erro

$\text{MAX} |(x - x_i)(x - x_{i+1})| = (x - x_i)(x_{i+1} - x_i) \Rightarrow x^* = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$

$$\left| \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} - x_i \right) \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} - x_{i+1} \right) \right|$$

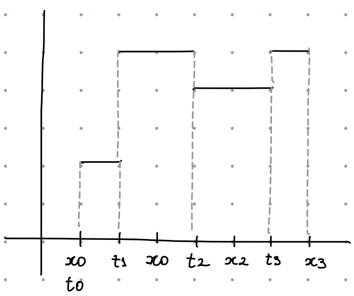
$$= \left| \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right) \left(\frac{x_i - x_{i+1}}{2} \right) \right| = \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)^2$$

constante

$t_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$

$t_0 = x_0$

$t_r = x_n$



cubico

05 de maio
capítulo 11

$t_i = x_i, \; i = 0, \dots, n$

$u_i(x) = a_i + b_i(x - t_i) + c_i(x - t_i)^2 + d_i(x - t_i)^3$

$(t_0, t_0, t_1, t_1, \dots, t_r, t_r) = (x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n)$

$n + 1 = 2(r + 1)$

$$u_i(x) = f_i + (h_i f'_i)\tau + (3(f_{i+1} - f_i) - h_i(f'_{i+1} - f_i))\tau^2 + (h_i(f'_{i+1} - f'_i) - 2(f_{i+1} - f_i))\tau^3$$

$h_i = t_{i+1} - t_i$

$\tau = \dfrac{x - t_i}{h_i}$

$f_i = f(t_i)$

$f'_i = f'(t_i)$

$h = \max\limits_{i=0,\dots,r} (t_{i+1} - t_i)$

erro

$$f(x) - v(x) = \frac{f''''(\xi)}{4!}(x - t_i)^2 (x - t_{i+1})^2 \leq \frac{b''''(\xi)}{4!}\left(\frac{t_{i+1} - t_i}{2}\right)^2 \left(\frac{t_i - t_{i+1}}{2}\right)^2 = \frac{b''''(\xi)}{4!}\left(\frac{t_{i+1} - t_i}{2}\right)$$

$\max (x - t_i)^2 (x - t_{i+1})^2 \Rightarrow x^* = \dfrac{t_i + t_{i+1}}{2}$

ponto máximo é o ponto médio

$$\leq \frac{h^4}{4!\,2^4} \max_{t_i \leq \xi \leq t_{i+1}} |f''''(\xi)|$$

teorema (página 336)

Seja $v(x)$ o interpolante de $f(x)$ nos $n+1$ pontos $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

Defina $h = \max\limits_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i+1})$ e assuma que $f(x)$ tenha quantas derivadas forem necessárias no intervalo $[a,b]$ que contém $x_i, \; i = 0, \dots, n$.

Então, para $x \in [a,b]$ o erro bound é:

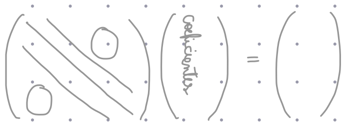
- $|f(x) - v(x)| \leq \dfrac{h^2}{2^3} \max\limits_{a \leq \xi \leq b} |f''(\xi)|$ (linear)
- $|f(x) - v(x)| \leq \dfrac{h}{2} \max\limits_{a \leq \xi \leq b} |f'(\xi)|$ (constante)
- $|f(x) - v(x)| \leq \dfrac{h^4}{384} \max\limits_{a \leq \xi \leq b} |f''''(\xi)|$ (hermite cubico)

12 de maio

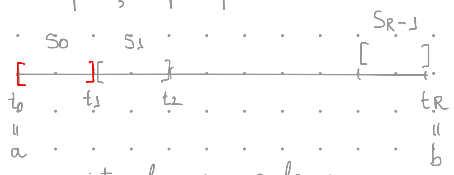
spline cúbica

11.3 p. 337

matriz tri-diagonal



interpolação por partes



$t = R+1$

interpola em cada um dos intervalos

função interpolante

$v(x) = S_i(x)$, $t_i \leq x \leq t_{i+1}$, $i = 0, \dots, r-1$

temos os pares (x_i, y_i), $i = 0, \dots, n$ tais que $x_0 < x_1 < \dots < x_n$

significa que caso os pares estejam desordenados eles são ordenados e renomeados

e $y_i = f(x_i)$ definimos $a = x_0$ e $b = x_n$

estamos construindo os intervalos para formar $v(x)$

definimos ainda $R = n$ e $t_i = x_i$, $i = 0, \dots, r$.

nossa v deve ser (porque isso desejamos) uma função interpolante, quer dizer $v(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$

S_0 deve ser igual a $y_0, \dots$

Logo, deve valer

2n condições
$$\begin{cases} S_0(x_0) = y_0 \\ S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) = y_{i+1}, \ i = 0, \dots, n-2 \\ \text{um } S \text{ avaliado em um ponto da direita é igual ao } S \text{ da direita nesse ponto} \\ S_{n-1}(x_n) = y_n \end{cases}$$

2 condições para interpolação

$$\begin{cases} S_i(x_i) = y_i, \ i = 0, \dots, n-1 \\ S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \ i = 0, \dots, n-1 \end{cases}$$

4 parametros, pois é um polinomio de grau 3

Até aqui temos 2n condições e como estamos interessados em S_i cúbicas, quer dizer, cada S_i com 4 parâmetros, precisamos ao todo 4n condições.

Em spline cúbicas o que se faz é impor

$$\left.\begin{array}{l} S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}), \quad i = 0, \dots, n-2 \\ S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1}), \quad i = 0, \dots, n-2 \end{array}\right\} 2n-2$$

temos até aqui $4n-2$ condições ... faltam 2

duas condições adicionais

- opção 1: $S_0''(x_0) = S_{n-1}''(x_n) = 0$ — resolver um sistema linear

  (spline natural ou "free boundary")

- opção 2: se $f'(x_0)$ e $f'(x_n)$ são conhecidas, podemos impor:

  se tiver um dado a mais

  $S_0'(x_0) = f'(x_0)$ (clamped boundary)

  $S_{n-1}'(x_n) = f'(x_n)$

- opção 3: not-a-knot

  $S_0'''(x_1) = S_1'''(x_1)$

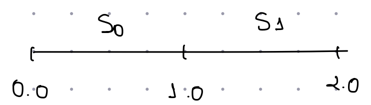
  $S_{n-2}'''(x_{n-1}) = S_{n-1}'''(x_{n-1})$

$$S_i(x) = a_i + b_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3$$
$$S_i'(x) = b_i + 2c_i(x-x_i) + 3d_i(x-x_i)^2$$
$$S_i''(x) = 2c_i + 6d_i(x-x_i)$$

exemplo:

i	0	1	2
x_i	0.0	1.0	2.0
$f(x_i)$	1.1	0.9	2.0

$$v(x) = \begin{cases} S_0(x) \text{ se } x_0 \le x \le x_1 \\ S_1(x) \text{ se } x_1 \le x \le x_2 \end{cases}$$



$$S_0(x) = a_0 + b_0(x-x_0) + c_0(x-x_0)^2 + d_0(x-x_0)^3$$
$$S_1(x) = a_1 + b_1(x-x_1) + c_1(x-x_1)^2 + d_1(x-x_1)^3$$

$S_0(x_0) = y_0 \Rightarrow a_0 = y_0$ — $a_0 = 1.1$

$S_1(x_1) = y_1 \Rightarrow a_1 = y_1$ — $a_1 = 0.9$

$S_0(x_1) = y_1 \rightarrow 1.1 + b_0 + c_0 + d_0 = 0.9$

$S_1(x_2) = y_2 \rightarrow 0.9 + b_1 + c_1 + d_1 = 2.0$

$S_0'(x_1) = S_1'(x_1) \longrightarrow b_0 + 2c_0 + 3d_0 = b_1$

$S_0''(x_1) = S_1''(x_1) \longrightarrow 2c_0 + 6d_0 = 2c_0$

escolhendo a opção 1 (spline natural) adicionamos as condições:

$S_0''(x_0) = 0 \longrightarrow 2c_0 = 0 \Rightarrow c_0 = 0$

$S_1''(x_2) = 0 \longrightarrow 2c_1 + 6d_1 = 0$

tentar resolver o sistema 5x5

$S_i(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (11.a)$

$S_i(x_{i+1}) = f(x_i) \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (11.b)$

$S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}) \quad i = 0, \dots, n-2 \quad (11.c)$

$S_i''(x_{i+n}) = S_{i+1}''(x_{i+1}) \quad i = 0, \dots, n-2 \quad (11.d)$

construção geral

$(11.a) \Rightarrow a_i = f(x_i), \; i = 0, \dots, n-1 \quad (11.3a)$

denotamos $h_i = x_{i+1} - x_i, \; i = 0, \dots, n-1$

$(11.b) \Rightarrow a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = f(x_{i+1})$

substituindo $a_i = f(x_i)$ e dividindo por h_i fica

$b_i + h_i c_i + h_i^2 d_i = f[x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (11.3b)$

$(11.c) \Rightarrow b_i + 2h_i c_i + 3h_i^2 d_i = b_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (11.3c)$

$(11.d) \Rightarrow c_i + 3h_i d_i = c_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-2 \quad (11.3d)$

24 de maio

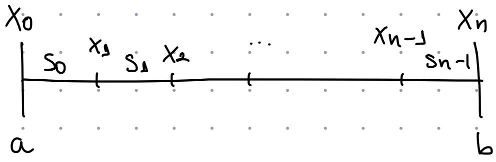
EXERCÍCIO 11.3

a) $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots n$ $\quad (b = a + nh)$

queremos construir

$v(x) = S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$ se $x_i \leq x \leq x_{i+1}$

para todo $x \in [a, b]$



$$\begin{cases} S_i(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n-1 \quad \longrightarrow \quad a_i = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n-1 \\ S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), \quad i = 0, \dots, n-1 \\ S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}), \quad i = 0, \dots, n-2 \\ S_0'(x_0) = f'(x_0) \end{cases}$$

reduzir o sistema ...

b) aula do Diaulas

24 de maio

14.1 continuação

APROXIMAÇÃO DA DERIVADA SEGUNDA (usando Taylor)

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 f'(x_0) + \frac{1}{6}h^3 f'''(x_0) + \frac{1}{24}h^4 f^{iv}(\xi_1)$$ com ξ_1 entre x_0 e x_0+h

$$f(x_0-h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 f(x_0) - \frac{1}{6}h^3 f'''(x_0) + \frac{1}{24}h^4 f^{iv}(\xi_2)$$ com ξ_2 entre x_0-h e x_0

$$f(x_0+h) + f(x_0-h) = 2f(x_0) + h^2 f''(x_0) + \frac{h^4}{12}\left[\frac{1}{2}\left(f^{iv}(\xi_1) + f^{iv}(\xi_2)\right)\right]$$ com ξ_1 e ξ_2 entre x_0-h e x_0+h

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}f^{iv}(\xi)$$ com ξ entre x_0-h e x_0+h

EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON 14.2

★ com ξ_1 entre x_0 e x_0+h ♡ com ξ_2 entre x_0-h e x_0

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \frac{h^4}{24}f^{iv}(x_0) + \frac{h^5}{120}f^{v}(x_0) + \frac{h^6}{770}f^{vi}(\xi_1) \bigstar$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) - \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \frac{h^4}{24}f^{iv}(x_0) - \frac{h^5}{120}f^{v}(x_0) + \frac{h^6}{770}f^{vi}(\xi_2) \heartsuit$$

$$f(x_0-h) + f(x_0+h) = 2f(x_0) + h^2 f''(x_0) + \frac{h^3}{12}f'''(x_0) + \frac{h^6}{360}\left[\frac{1}{2}\left(f^{vi}(\xi_1) + f^{vi}(\xi_2)\right)\right]$$ com ξ_1 e ξ_2 entre x_0-h e x_0+h

$$\circledast_2 \quad f''(x_0) = \frac{f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}f^{iv}(x_0) - \frac{h^4}{360}f^{vi}(\xi)$$ com ξ entre x_0-h e x_0+h

usando $x_0 \pm 2h$, temos:

$$\circledast_1 \quad f''(x_0) = \frac{f(x_0-2h) - 2f(x_0) + f(x_0+2h)}{4h^2} - \frac{4h^2}{12}f^{iv}(x_0) - \frac{16}{360}h^4 f^{vi}(\bar{\xi})$$ com $\bar{\xi}$ entre x_0-2h e x_0+2h

$$\circledast_1 - \frac{1}{4}\circledast_2$$

$$\frac{3}{4}f''(x_0) = \frac{4}{3}\left[\frac{f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)}{h^2} - \frac{f(x_0-2h) - 2f(x_0) + f(x_0+2h)}{16h^2}\right]$$

$$+ \frac{h^4}{90}\left(\frac{4}{3}f^{vi}(\bar{\xi}) - \frac{1}{3}f^{vi}(\xi)\right)$$ com ξ entre x_0-h e x_0+h e $\bar{\xi}$ entre x_0-2h e x_0+2h

$$\downarrow$$

$$f^{iv}(x_0) + O(h^5)$$

24 de maio

ou então, subtraímos $\circledast_2$ de $\circledast_1$ e obtemos:

$$0 = \left[\frac{f(x_0-h) - 2f x_0 + f(x_0+h)}{h^2}\right] - \left[\frac{f(x_0-2h) - 2f(x_0) + f(x_0+2h)}{4h^2}\right]$$

$$+ \frac{3}{12} h^2 f^{IV}(x_0) + O(h^4)$$

isolando $f^{IV}(x_0)$

$$-\frac{1}{12} h^2 f^{IV}(x_0) = \frac{1}{3}\left[\frac{f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)}{h^2}\right] - \left[\frac{f(x_0-2h) - 2f(x_0) + f(x_0+2h)}{4h^2}\right] + O(h^4)$$

APROXIMANDO DERIVADAS COM DERIVADAS DE UM POLINÔMIO INTERPOLADOR

EXEMPLO: dados $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$

$$p_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0)$$

escolhemos aproximar $f'(x_0)$ com $p_1'(x_0)$, quer dizer

$$p_1'(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f(x) = p_1(x) + f[x_0, x_1, x] \prod_{i=0}^{1} (x - x_i)$$

$$f(x) - p_1(x) = f[x_0, x_1, x] \prod_{i=0}^{1} (x - x_i)$$

$$f'(x_0) - p_1'(x_0) = f[x_0, x_1, x_0] \left((x_0 - x_0) + (x_0 - x_1)\right)$$

26 de maio

seção 14.3 (continuação)

Deriving formulas using Lagrange polynomial interpolation

$x_{-l} \quad x_{-l+1} \dots \quad x_0 \quad x_1 \dots \quad x_u$, com $l+u=n$

$$p_n(x) = \sum_{j=-l}^{u} f(x_j) L_j(x), \quad \text{com } L_j(x) = \frac{\prod_{\substack{i=-l \\ i \neq j}}^{u} (x - x_i)}{\prod_{\substack{i=-l \\ i \neq j}}^{u} (x_j - x_i)}, \quad j = -l \dots u$$

aproximamos $f'(x_0)$ por $p_n'(x_0)$

$$p_n'(x_0) = \sum_{j=-l}^{u} f(x_j) \boxed{L_j'(x_0)} \longrightarrow \text{queremos calcular isso!}$$

Vamos supor que os pontos $x_{-l} \dots x_u$ são equidistantes. Especificamente, vamos supor que os pontos são da forma

$x_0 - lh,\ x_0 - (l-1)h, \dots\ x_0,\ x_0 + h,\ x_0 + 2h, \dots\ x_0 + uh$

com $l + u = n$

com isso, temos que

$$L_0'(x_0) = \sum_{\substack{k=-l \\ k \neq 0}}^{u} \frac{1}{x_0 - x_k} = \frac{1}{h} \sum_{\substack{k=l \\ k \neq 0}}^{u} \left(\frac{1}{-k}\right)$$

$$j \neq 0, \quad L_j'(x_0) = \frac{1}{x_j - x_0} \prod_{\substack{k=-l \\ k \neq 0 \\ k \neq j}}^{u} \frac{x_0 - x_k}{x_j - x_k} = \frac{1}{jh} \prod_{\substack{k=-l \\ k \neq 0 \\ k \neq j}}^{u} \frac{-k}{j-k}$$

$$L_j'(x) = \sum_{\substack{k=-l \\ k \neq j}}^{u} \frac{\prod_{\substack{i=-l \\ i \neq j \\ i \neq k}}^{u} (x - x_i)}{\prod_{\substack{i=-l \\ i \neq j}}^{u} (x_j - x_i)}$$

$$L_0'(x_0) = \sum_{\substack{k=-l \\ k \neq 0}}^{u} \frac{1}{x_0 - x_k} = \frac{1}{h} \sum_{\substack{k=-l \\ k \neq 0}}^{u} \frac{1}{-k}$$

$x_{-l} = x_0 - lh$

$x_0 - x_{-l} = x_0 - x_0 \dots$
(não consegui copiar)

$x_0 - x_k = -kh$ (pela definição de x_k)

$$L_j'(x_0) = \frac{\prod_{\substack{k=-l \\ k \neq j \\ k \neq 0}}^{u} (x_0 - x_k)}{(x_j - x_0) \prod_{\substack{k=-l \\ k \neq j \\ k \neq 0}}^{u} (x_j - x_k)} = \frac{1}{x_j - x_0} \prod_{\substack{k=-l \\ k \neq j \\ k \neq 0}}^{u} \frac{(x_0 - x_k)}{(x_j - x_k)}$$

26 de maio

Qual é o **erro** dessa aproximação?

sabemos que $f(x) - p_n(x) = f[x_{-l} \dots x_u, x] \prod_{k=-l}^{u} (x - x_u)$

logo, $f'(x) - p_n'(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(f[x_{-l} \dots x_u, x] \right) \prod_{k=-l}^{u} (x - x_n) +$

$f[x_{-l} \dots x_u, x] \sum_{j=-l}^{u} \prod_{\substack{k=-l \\ k \neq j}}^{u} (x - x_u)$

pag 321

logo, $f'(x_0) - p_n'(x_0) = \boxed{\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}} \; \boxed{l!\,u!\,h^n}$

14.4

Roundoff and data errors in numerical differentiation

seja $\bar{f}(x) = fl(f(x))$ (avaliação de $f(x)$ no computador (não exata))

vamos supor que $\bar{f}(x) = f(x) + e(x)$ e que $|e(x)| \leq \varepsilon$

$$\bar{D}h = \frac{\bar{f}(x_0+h) - \bar{f}(x_0-h)}{2h}$$

$$|\bar{D}h - Dh| = \left| \frac{\bar{f}(x_0+h) - \bar{f}(x_0-h)}{2h} - \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \right|$$

$$= \left| \frac{\bar{f}(x_0+h) - f(x_0+h)}{2h} + \frac{f(x_0-h) - \bar{f}(x_0-h)}{2h} \right|$$

$$\leq \left| \frac{e(x_0+h)}{2h} \right| + \left| \frac{e(x_0-h)}{2h} \right| \leq \frac{\epsilon}{h}$$

por outro lado

$$|f'(x_0) - \bar{D}h| = |f'(x_0) - Dh + Dh - \bar{D}h| \leq \underbrace{|f'(x_0) - Dh|}_{\frac{Mh^2}{6}} + \underbrace{|Dh - \bar{D}h|}_{\frac{\epsilon}{h}}$$

$$\leq \frac{Mh^2}{6} + \frac{\epsilon}{h}$$

seja $q(h) = \frac{M}{6}h^2 + \frac{\epsilon}{h}$ $q'(h) = \frac{Mh}{3} - \frac{\epsilon}{h^2} = 0$ $q''(\bar{h}) = \frac{M}{3} + \frac{2\cancel{\epsilon}\,M}{3\cancel{\epsilon}} = M > 0$

se e somente se $\frac{Mh}{3} = \frac{\epsilon}{h^2}$ sse $h^3 = \frac{3\epsilon}{M}$

sse $h = \sqrt[3]{\frac{3\epsilon}{M}}$

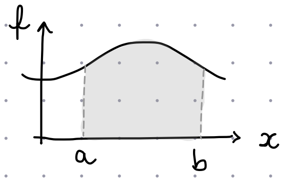
como não conhecemos M, descartamos o M e o 3 e consideramos $h = \sqrt[3]{\epsilon}$

31 de maio

Integração numérica (cáp. 15)

consideremos integrais definidas

$$I_f = \int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{j=0}^{n} a_j f(x_j)$$



REGRAS BÁSICAS DE QUADRATURA

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\,L_j(x)$$ ← polinômio interpolador de Lagrange

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_n(x)\,dx$$ ← usaremos essa aproximação

aj chamamos de peso

$$\int_a^b p_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\,L_j(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \int_a^b L_j(x)\,dx$$

agora queremos calcular a_j, $j = 0, \dots, n$

EXEMPLO consideremos $n = 1$, $x_0 = a$ e $x_1 = b$

$$L_0(x) = \frac{(x-b)}{(a-b)}, \quad L_1(x) = \frac{(x-a)}{b-a}$$

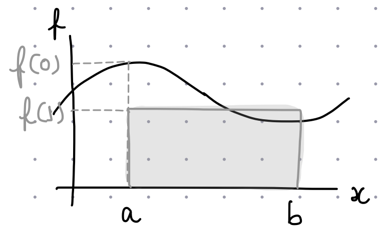
$$a_0 = \int_a^b L_0(x)\,dx = \int_a^b \frac{x-b}{a-b}\,dx = \frac{1}{a-b}\left[\frac{x^2}{2} - xb\right]\Bigg|_a^b =$$

$$= \frac{1}{a-b}\left(-\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} + ab\right) = -\frac{1}{2}\frac{(a-b)^2}{a-b} = -\frac{1}{2}\frac{(a-b)\cancel{(a-b)}}{\cancel{(a-b)}} = \frac{b-a}{2}$$

$$a_1 = \int_a^b L_1(x)\,dx = \int_a^b \frac{x-a}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2} - ax\right]\Bigg|_a^b =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(-\frac{b^2}{2} - ab + \frac{a^2}{2}\right) = \frac{1}{b-a}\,\frac{1}{2}(b-a)^2 = \frac{b-a}{2}$$

$$I_f \approx \frac{b-a}{\cancel{2}}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$$ ← Regra do trapézio



31 de maio

EXEMPLO. consideremos $n=2$, $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, \quad L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}, \quad L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$a_0 = \int_a^b L_0(x)\,dx = \frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \int_a^b x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2 \, dx =$$

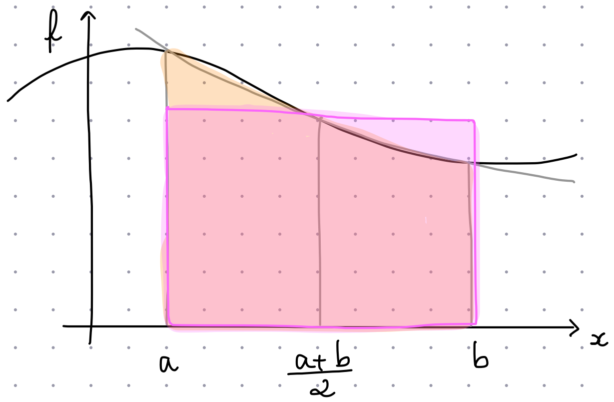
$$= \frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \left(\frac{x^3}{3} - (x_1+x_2)\frac{x^3}{2} + x_1x_2x \right)\Bigg|_a^b =$$

$$= \frac{2}{(a-b)^2} \left| \frac{b^3-a^3}{3} - (x_1+x_2)\left(\frac{b^3-a^2}{2}\right) + x_1x_2(b-a) \right. = \boxed{\frac{b-a}{6}}$$

$$a_1 = \frac{4}{6}(b-a)$$

$$a_2 = \frac{b-a}{6}$$

$$\boxed{I_f \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]}$$ ← Regra de Simpson



EXEMPLO. $n=0$, $x_0 = \frac{a+b}{2}$

$$p_0(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$I_f \approx \int_a^b p_0(x)\,dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b dx = \boxed{f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)}$$

Regra do ponto médio

31 de maio

QUE ERRO COMETEMOS AO USAR ESSAS APROXIMAÇÕES ?

$$f(x) - p_n(x) = f[x_0, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$ ← erro da interpolação

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p_n(x)\,dx}_{E_x} = \int_a^b f[x_0, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)\,dx$$

REGRA DO TRAPÉZIO

temos $n = 1$.

$$E_f = \int_a^b f[a, b, x]\,(x-a)(x-b)\,dx$$

$\psi(x) \leq 0$
$\forall x \in [a,b]$

contínua em $[a,b]$ e portanto atinge um valor máximo e um valor mínimo. Sejam X_{MAX} e X_{MIN} os pontos onde isso ocorre:

terminar!

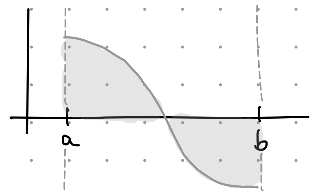
02 de maio

(provavelmente a matéria da prova acaba aqui ou um pouco depois)

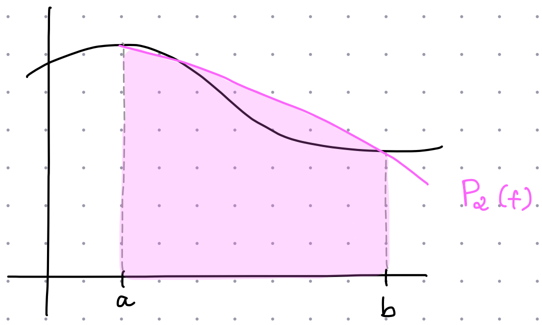
INTEGRAÇÃO NUMÉRICA (continuação)

para o método do **trapézio**: $Ef = \frac{-f''(\xi)}{12}(b-a)^3$

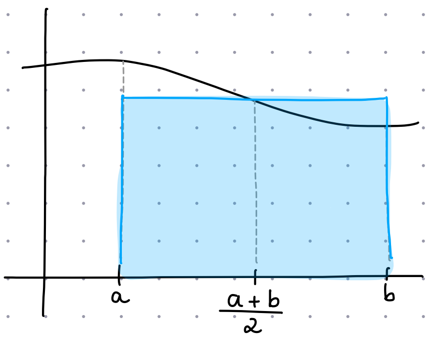
para o método de **Simpson**: $Ef = \int_a^b f\left[a, \frac{a+b}{2}, b, x\right] \underbrace{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}_{\text{função simétrica}}\, dx$



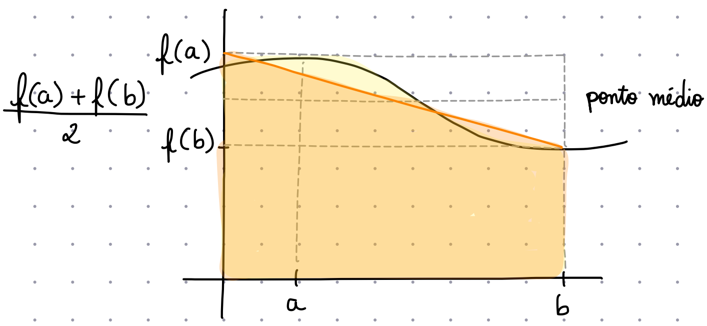
15.2 REGRAS DE INTEGRAÇÃO COMPOSTA



Simpson $If \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$



ponto médio $If\ (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$



Trap $If \approx b-a\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$

07 de junho

EX 4 (cap. 14)

(exercício sobre Richardson)

$$g = \frac{1}{h^2} f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)$$

$$\hat{g} = \frac{1}{4h^2} [f(x_0 - 2h) - 2f(x_0) + f(x_0 + 2h)]$$

queremos estimar

$e = \frac{g - \hat{g}}{3}$ é uma estimativa com precisão $O(h)$ para $\boxed{f''(x_0)} - g$.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(x_0) + \frac{h^4}{24} f^{IV}(\xi),$$ com ξ entre x_0 e $x_0 + h$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) - \frac{h^3}{6} f'''(x_0) + \frac{h^4}{24} f^{IV}(\xi),$$ com ξ entre $x_0 - h$ e x_0.

$$\circledast_1 \quad f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h) = h^2 f''(x_0) + \frac{h^4}{12} f^{IV}(x_0) + \frac{h^6}{360} f^{VI}(\bar{\bar{\xi}})$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} [f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)] - \frac{h^2}{12} f^{IV}(\bar{\bar{\xi}}),$$ com $\bar{\bar{\xi}}$ entre $x_0 - h$ e $x_0 + h$

concluimos que

$$f''(x_0) - g = -\frac{h^2}{12} f^{IV}(\bar{\bar{\xi}}),$$ com $\bar{\bar{\xi}}$ entre $x_0 - h$ e $x_0 + h$

$$= -\frac{h^2}{12} f^{IV}(x_0) - \frac{h^4}{360} f^{VI}(\bar{\bar{\xi}})$$

expandindo $f(x_0 - 2h)$ e $f(x_0 + 2h)$ e somando, temos:

$$\circledast_2 \quad f(x_0 - 2h) - 2f(x_0) + f(x_0 + 2h) = 4h^2 f''(x_0) + \frac{4h^4}{3} f^{IV}(x_0) + \frac{8h^6}{45} f^{V}(\bar{\bar{\bar{\xi}}})$$

com $\bar{\bar{\bar{\xi}}}$ entre $x_0 - 2h$ e $x_0 + 2h$

$$\circledast_1 - \frac{1}{4} \circledast_2$$

$$h^2 [g - \hat{g}] = -\frac{h^4}{4} f^{IV}(x_0) + \frac{h^6}{360} f^{VI}(\bar{\bar{\xi}}) - \frac{2h^6}{45} f^{VI}(\bar{\bar{\bar{\xi}}})$$

$$\frac{g - \hat{g}}{3} = -\frac{h^2}{12} f^{IV}(x_0) + \frac{h^4}{3 \cdot 360} f^{VI}(\bar{\bar{\xi}}) - \frac{2h^4}{3 \cdot 45} f^{VI}(\bar{\bar{\bar{\xi}}})$$

mostramos portanto que

$$f''(x_0) - g = -\frac{h^2}{12} f^{IV}(x_0) + O(h^4) = \frac{g - \hat{g}}{3}$$

7 de junho

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA COMPOSTA (sec. 15.2, p 496)

Dividimos o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos de tamanho $h = \frac{b-a}{n}$.

Logo,
$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{a+(i-1)h}^{a+ih} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)\,dx$$

definindo $t_i = a+ih$

Suponhamos que usamos regra de integração que, se aplicada no intervalo $[a,b]$ tem erro da forma $K(b-a)^{q+1}$.

Isso aplicado ao intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, que tem tamanho h, tem erro $K_i h^{q+1}$.

Logo, o erro total é dado por
$$\sum_{i=1}^{n} K_i h^{q+1} = K(b-a)h^q$$

com o "valor certo de K"

$$h^q \sum_{i=1}^{n} K_i h = h^q nh \frac{\sum_{i=1}^{n} K_i}{n} = \underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_i\right)}_{K} (b-a)h^q = K(b-a)h^q$$

REGRA DO TRAPÉZIO COMPOSTA

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(t_{i-1}) + f(t_i)\right]$$

logo
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}\left[f(t_{i-1}) + f(t_i)\right] = \frac{h}{2}\left[f(\overset{a}{t_0}) + 2f(t_1) + 2f(t_2) + \ldots + 2f(t_{n-1}) + f(\overset{b}{t_n})\right]$$

e
$$E_f = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{-f''(\eta)h^3}{12}\right) = \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{12}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\eta)\right](b-a)h^2 =$$
$$= \frac{-f''(\eta)}{12}(b-a)h^2$$

$\eta^{MIN} = \underset{i}{\mathrm{ARGMIN}}\{f''(\eta_i)\}$

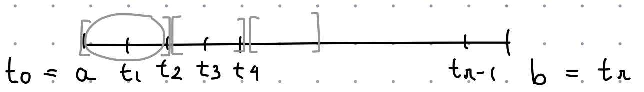
$\eta^{MAX} = \underset{i}{\mathrm{ARGMAX}}\{f''(\eta_i)\}$

$$f''(\eta^{MIN}) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i) \le f''(\eta^{MAX})$$

pelo teorema do valor intermediário existe η entre η^{MIN} e η^{MAX} logo $\eta \in [a,b]$, tal que $f''(\eta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i)$

07 de junho

REGRA DE SIMPSON COMPOSTA



$$\int_{t_{2k-2}}^{t_{2k}} f(x)\,dx \approx \frac{2h}{6}\left[f(t_{2k-2}) + 4f(t_{2k-1}) + f(t_2) \right]$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n/2} \left(\frac{2h}{6}\left[f(t_{2k-2}) + 4f(t_{2k-1}) + f(t_{2k}) \right] \right.$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(a) + \sum_{k=1}^{n/2-1} f(t_{2k}) + \sum_{k=1}^{n/2} f(t_{2k-1}) + f(b) \right.$$

$$Ef = -\frac{f^{iv}(\xi)}{180}(b-a)h^4$$