MAC0338 - ANÁLISE DE ALGORITMOS

LISTA 2

CHECKLIST

entregue ☐ fiz ☐ incompleto ☐ não entendi ☐

questão 1

a) ☐ b) ☐ c) ☐ d) ☐ e) ☐

questão 2 ☐

questão 3 ☐

questão 4 ☐

Nome: Sabrina Araujo da Silva nºUSP: 12566182

MAC0338 - ANÁLISE DE ALGORITMOS

LISTA 2

exercícios 1(a), 1(d), 3 e 4

1. Resolva as recorrências abaixo.

(a) $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n^2)$

$T(1) = 1$ e $T(n) = 2T(n/2) + n^2$ para $n \geq 2$ potência de 2

por expansão

$$T(n) = 2T(n/2) + n^2$$

$$= 2\left(2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{n^2}{2^2}\right) + n^2 = 2^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2\frac{n^2}{2^2} + n^2 = 2^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{3n^2}{2}$$

$$= 2^2\left(2T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{n^2}{2^4}\right) + \frac{3n^2}{2} = 2^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 2^2\frac{n^2}{2^4} + \frac{3n^2}{2} = 2^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{7n^2}{2^2}$$

$$= 2^3\left(2T\left(\frac{n}{2^4}\right) + \frac{n^2}{2^6}\right) + \frac{7n^2}{2^2} = 2^4 T\left(\frac{n}{2^4}\right) + 2^3\frac{n^2}{2^6} + \frac{7n^2}{2^2} = 2^4 T\left(\frac{n}{2^4}\right) + \frac{15n^2}{2^3}$$

$$= 2^4\left(2T\left(\frac{n}{2^5}\right) + \frac{n^2}{2^8}\right) + \frac{15n^2}{2^3} = 2^5 T\left(\frac{n}{2^5}\right) + 2^4\frac{n^2}{2^8} + \frac{15n^2}{2^3} = 2^5 T\left(\frac{n}{2^5}\right) + \frac{31n^2}{2^4}$$

$$= \dots = 2^k T\left(\frac{n}{2^k}\right) + (2^k - 1)\frac{n^2}{2^{k-1}} \quad \text{para } k = \lg n$$

$$= 2^{\lg n} T\left(\frac{n}{2^{\lg n}}\right) + (2^{\lg n} - 1)\frac{n^2}{2^{\lg n - 1}}$$

$$= n\,T\left(\frac{n}{n}\right) + (n-1)\frac{n^2}{\frac{1}{2}n} = n + (n-1)\frac{2}{n}n^2$$

$$= n + (n-1)2n = n + 2n^2 - 2n$$

$$= 2n^2 - n$$

$$= \Theta(n^2)$$

verificação

$$T(n) = 2T(n/2) + n^2 = n + n^2$$

por hipótese de indução

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$

$$= 2\left(2\frac{n^2}{2^2} - \frac{n}{2}\right) + n^2 = n^2 - n + n^2$$

$$= 2n^2 - n$$

logo, $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 = n + n^2 = \Theta(n^2)$

(b) $T(n) = 8T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n^2)$

$T(1) = 1$ e $T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$ para $n \geq 2$ potência de 2

por expansão

$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$

$$= 8\left(8T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{n^2}{2^2}\right) + n^2 = 8^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2^3 \frac{n^2}{2^2} + n^2 = 8^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2n^2 + n^2 = 3n^2$$

$$= 8^2\left(8T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{n^2}{2^4}\right) + 2n^2 + n^2 = 8^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 2^6 \frac{n^2}{2^4} + 2n^2 + n^2 = 8^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 4n^2 + 2n^2 + n^2 = 7n^2$$

$$= 8^3\left(8T\left(\frac{n}{2^4}\right) + \frac{n^2}{2^6}\right) + 4n^2 + 2n^2 + n^2 = 8^4 T\left(\frac{n}{2^4}\right) + 2^9 \frac{n^2}{2^6} + 4n^2 + 2n^2 + n^2$$

$$= 8^4 T\left(\frac{n}{2^4}\right) + 8n^2 + 4n^2 + 2n^2 + n^2 = 15n^2$$

$$= \dots = 8^k T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i n^2 \quad \text{para } k = \lg n$$

$$= 8^{\lg n} T\left(\frac{n}{2^{\lg n}}\right) + \left(\sum_{i=0}^{\lg n} 2i\right) n^2 = (2^3)^{\lg n} T\left(\frac{n}{n}\right) + \left(\frac{1 \cdot (2^{\lg n} - 1)}{2 - 1}\right) n^2$$

$$= n^3 + (n-1)n^2 = n^3 + n^3 - n^2 = 2n^3 - n^2$$

$$= \Theta(n^3)$$

verificação

por hipótese de indução

- verificação:
  - pegar o $T(n)$ original e depois colocar o $T(n)$ encontrado no original
  - tem que resultar no $T(n)$ encontrado

$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$

$$= 8\left(2\frac{n^3}{2^3} - \frac{n^2}{2^2}\right) + n^2$$

$$= 2^4 \frac{n^3}{2^3} - 2^3 \frac{n^2}{2^2} + n^2$$

$$= 2n^3 - 2n^2 + n^2$$

$$= 2n^3 + n^2$$

logo, $T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 = 2n^3 + n^2 = \Theta(n^3)$

(c) $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n^3)$

$T(1) = 1$ e $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$ para $n \geq 2$ potência de 2

por expansão

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$$

$$= 2\left(2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{n^3}{2^3}\right) + n^3 = 2^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{n^3}{2^3} + n^3$$

$$= 2^2\left(2T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{n^3}{2^6}\right) + \frac{n^3}{2^3} + n^3 = 2^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{n^3}{2^6} + \frac{n^3}{2^3} + n^3$$

$$= 2^3\left(2T\left(\frac{n}{2^4}\right) + \frac{n^3}{2^9}\right) + \frac{n^3}{2^6} + \frac{n^3}{2^3} + n^3 = 2^4 T\left(\frac{n}{2^4}\right) + \frac{n^3}{2^9} + \frac{n^3}{2^6} + \frac{n^3}{2^3} + n^3$$

$$= \dots = 2^K T\left(\frac{n}{2^K}\right) + \left(\sum_{i=0}^{K-1} \frac{1}{2^i}\right) n^3 \quad \text{para } K = \lg n$$

$$= 2^{\lg n} T\left(\frac{n}{2^{\lg n}}\right) + \left(\sum_{i=0}^{\lg n} \frac{1}{2^{3i}}\right) n^3 = n + 1\left(\frac{\left(\frac{1}{2^3}\right)^{\lg n} - 1}{\frac{1}{2^3} - 1}\right) n^3$$

$$= n + \frac{\frac{1}{n^3} - 1}{\frac{1}{2^3} - 1} n^3 = n + \left(\frac{1}{n^3} - 1\right)\left(-\frac{8}{7}\right) n^3 = n - \frac{8}{7} + \frac{8}{7} n^3 = \Theta(n^3)$$

verificação

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$$

(d) $T(n) = 7T(\lfloor n/3 \rfloor) + \Theta(n^2)$

$T(1) = 1$ e $T(n) = 7T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$ para $n \geq 3$ potência de 3

por expansão

$$T(n) = 7T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$$

$$= 7\left(7T\left(\frac{n}{3^2}\right) + \frac{n^2}{3^2}\right) + n^2 = 7^2T\left(\frac{n}{3^2}\right) + 7\frac{n^2}{3^2} + n^2$$

$$= 7^2\left(7T\left(\frac{n}{3^3}\right) + \frac{n^2}{3^4}\right) + 7\frac{n^2}{3^2} + n^2 = 7^3T\left(\frac{n}{3^3}\right) + 7^2\frac{n^2}{3^4} + 7\frac{n^2}{3^2} + n^2$$

$$= 7^3\left(7T\left(\frac{n}{3^4}\right) + \frac{n^2}{3^6}\right) + 7^2\frac{n^2}{3^4} + 7\frac{n^2}{3^2} + n^2 = 7^4T\left(\frac{n}{3^4}\right) + 7^3\frac{n^2}{3^6} + 7^2\frac{n^2}{3^4} + 7\frac{n^2}{3^2} + n^2$$

$$= 7^4\left(7T\left(\frac{n}{3^5}\right) + \frac{n^2}{3^8}\right) + 7^3\frac{n^2}{3^6} + 7^2\frac{n^2}{3^4} + 7\frac{n^2}{3^2} + n^2 = 7^5T\left(\frac{n}{3^5}\right) + 7^4\frac{n^2}{3^8} + 7^3\frac{n^2}{3^6} + 7^2\frac{n^2}{3^4} + 7\frac{n^2}{3^2} + n^2$$

$$= \cdots = 7^K T\left(\frac{n}{3^K}\right) + \left(\sum_{i=0}^{K} \frac{7^i}{3^{2i}}\right)n^2 \quad \text{para } K = \log_3 n$$

$$= 7^{\log_3 n} T\left(\frac{n}{n}\right) + \left(\sum_{i=0}^{\log_3 n} \frac{7^i}{3^{2i}}\right)n^2$$

$$= 7^{\log_3 n} + \left(\frac{\left(\frac{7}{3^2}\right)^{\log_3 n} - 1}{\frac{7}{3^2} - 1}\right)n^2 = 7^{\log_3 n} + \left(\frac{7^{\log_3 n}}{n^2} - 1\right)\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)n^2$$

$$= 7^{\log_3 n} + \left(7^{\log_3 n} - n^2\right)\cdot\left(-\frac{3^2}{2}\right)$$

$$= \Theta(n^2)$$

verificação

$$T(n) = 7T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$$

por hipótese de indução

$$T(n) = 7T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$$

$$= 7\left(7^{\log_3 n} + \left(7^{\log_3 \frac{n}{3}} - \frac{n^2}{3^2}\right)\left(-\frac{3^2}{2}\right)\right) + n^2$$

$$= 7\left(7^{\log_3 n} + -\frac{3^2}{2}7^{\log_3 \frac{n}{3}} + \frac{3^2}{2}\frac{n^2}{3^2}\right) + n^2$$

$$= 7\left(7^{\log_3 n} - \frac{3^2}{2}7^{\log_3 \frac{n}{3}} + \frac{n^2}{2}\right) + n^2$$

$$= 7 \cdot 7^{\log_3 n} - 7 \cdot \frac{3^2}{2} 7^{\log_3 \frac{n}{3}} + \frac{3^2}{2}n^2$$

$$= 7^{1 + \log_3 n - 1} - \frac{3^2}{2} \cdot 7^{1 + \log_3 n - 1} + \frac{3^2}{2}n^2$$

$$= 7^{\log_3 n} - \frac{3^2}{2}7^{\log_3 n} + \frac{3^2}{2}n^2 = 7^{\log_3 n} + \left(7^{\log_3 n} - n^2\right)\left(-\frac{3^2}{2}\right)$$

logo, $T(n) = 7T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2 = 7^{\log_3 n} + \left(7^{\log_3 n} - n^2\right)\left(-\frac{3^2}{2}\right) = \Theta(n^2)$

(e) $T(n) = T(\lfloor 9n/10 \rfloor) + \Theta(n)$

$T(1) = 1$ e $T(n) = T\left(\frac{9n}{10}\right) + n$ para $n \geq 10$ potência de $\frac{10}{9}$

$$T(n) = T\left(\frac{9n}{10}\right) + n$$

$$= \left(T\left(\frac{9^2 n}{10^2}\right) + \frac{9n}{10}\right) + n$$

$$= T\left(\frac{9^3}{10^3} n\right) + \frac{9^2}{10^2} n + \frac{9}{10} n + n$$

$$= T\left(\frac{9^4}{10^4} n\right) + \frac{9^3}{10^3} n + \frac{9^2}{10^2} n + \frac{9}{10} n + n$$

$$= \dots = T\left(\frac{9^k}{10^k} n\right) + \left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{9^i}{10^i}\right) n$$

como queremos o caso base

$T\left(\left(\frac{9}{10}\right)^k n\right) = T(1) \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^k n = 1 \Rightarrow n = \left(\frac{10}{9}\right)^k$

logo, $k = \log_{\frac{10}{9}} n$

$$= 1 + \frac{n\left(\frac{9}{10}^{\log_{\frac{10}{9}} n} - 1\right)}{\frac{9}{10} - 1} = 1 + (-10)(n^{-1} - 1)n$$

$$= 1 + (-10n^{-1} + 10)n = 1 - 10 + 10n = 10n - 9 = O(n)$$

verificação por indução

$$T(n) = T\left(\frac{9}{10} n\right) + n$$

$$= T\left(\frac{9}{10} \cdot 10n - 9\right) + n$$

$$= 9n - 9 + n = 10n - 9$$

logo, $T(n) = T\left(\frac{9}{10} n\right) + n = 10n - 9 = O(n)$

2. Escreva um algoritmo que ordena uma lista de n itens dividindo-a em três sublistas de aproximadamente $n/3$ itens, ordenando cada sublista recursivamente e intercalando as três sublistas ordenadas. Analise seu algoritmo concluindo qual é o seu consumo de tempo.

```
ORDENA (A, p, r)
1    se p < r e r ≥ 3
2        então ORDENA (A, p, ⌈r/3⌉
3              ORDENA (A, ⌈r/3⌉ + 1, 2·⌈r/3⌉)
4              ORDENA (A, 2·⌈r/3⌉ + 1, r)
5              q ← (⌊(p + (2·⌈r/3⌉))/2⌋)
6              INTERCALA (A, p, q, (2·⌈r/3⌉))
7              q ← (⌊(p + r)/2⌋)
8              INTERCALA (A, p, q, r)
```

linha	consumo de todas as execuções da linha
1	$O(1)$
2	$T(\lceil n/2 \rceil)$
3	$T(\lceil n/2 \rceil)$
4	$T(\lceil n/2 \rceil)$
5	$O(1)$
6	$O(n)$
7	$O(1)$
8	$O(n)$

$$T(n) = 3T(\lceil n/2 \rceil) + 2\,O(n)$$

análise de recorrência por expansão

$$T(n) = 3T(n/2) + 2n$$

$$= 3\left(3T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2n\right) + 2n = 3^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 6n + 2n$$

$$= 3^2\left(3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 2n\right) + 6n + 2n = 3^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 18n + 6n + 2n$$

$$= 3^3\left(3T\left(\frac{n}{2^4}\right) + 2n\right) + 18n + 6n + 2n = 3^4 T\left(\frac{n}{2^4}\right) + 54n + 18n + 6n + 2n$$

$$= \dots = 3^K T\left(\frac{n}{2^K}\right) + \left(\sum_{i=0}^{K} 3^i\right) 2n \quad \text{para } K = \lg n$$

$$= 3^{\lg n} T\left(\frac{n}{2^{\lg n}}\right) + \left(\sum_{i=0}^{\lg n} 3^i\right) 2n = 3^{\lg n} + \left(\frac{1(3^{\lg n} - 1)}{3-1}\right) 2n$$

$$= 3^{\lg n} + (3^{\lg n} - 1)\, n = 3^{\lg n} + 3n^{\lg n} - n = \Theta(n\, 3^{\lg n})$$

verificação

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + 2n$$

$$= 3T\left(3^{\lg \frac{n}{2}} + \frac{3}{2} n^{\lg \frac{n}{2}} - \frac{n}{2}\right)$$

3. Seja $X[1\,..\,n]$ um vetor de inteiros e i e j dois índices distintos de X, ou seja, i e j são inteiros entre 1 e n. Dizemos que o par (i, j) é uma *inversão* de X se $i < j$ e $X[i] > X[j]$. Escreva um algoritmo $O(n \lg n)$ que devolva o número de inversões em um vetor X, onde n é o número de elementos em X.

Podemos construir o algoritmo adaptando o algoritmo de ordenação mergesort

seja um vetor X[a...b]

```
INVERSOES (X, a, b)

    se a < b
        então q ← ⌊(a+b)/2⌋      q é o pivô
            c ← INVERSOES (X, a, q) +
                INVERSOES (X, q+1, b) +
                INTERCALA (X, a, q, b)
            retorna c
    senão retorna 0
```

```
INTERCALA (X, a, q, b)

B[a...b] é um vetor auxiliar
para i ← a até q faça
    B[i] ← X[i]
para j ← q+1 até b faça
    B[b+q+1-j] ← X[j]
i ← a
j ← b
contador ← 0
para K ← a até b faça
    se B[i] ≤ B[j]
        então X[K] ← B[i]
            i ← i + 1
        senão X[K] ← B[j]
            j ← j - 1
            contador ← contador + (q - i + 1)
retorna contador
```

4. Descreva um algoritmo que, dados inteiros n e k, juntamente com k listas ordenadas que em conjunto tenham n registros, produza uma única lista ordenada contendo todos os registros dessas listas (isto é, faça uma *intercalação*). O seu algoritmo deve ter complexidade $O(n \lg k)$. Note que isto se transforma em $O(n \lg n)$ no caso de n listas de 1 elemento, e em $O(n)$ se só houver duas listas (no total com n elementos).

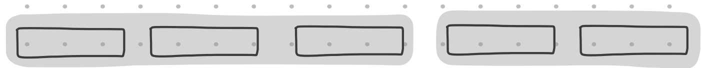
Esse algoritmo pode ser construído de forma que recursivamente o número de vetores é dividido por dois e em cada recursão dois vetores são intercalados. Como o número de vetores é dividido por dois serão $\Theta(\log k)$ iterações. É possível adaptar o algoritmo mergesort e utilizar a função intercala (mostrada em aula) também adaptada.

```
INTERCALA (A, p, q, r)
  ▷ B[p . . r] é um vetor auxiliar
  para i ← p até q faça
      B[i] ← A[i]
  para j ← q + 1 até r faça
      B[r + q + 1 − j] ← A[j]
  i ← p
  j ← r
  para k ← p até r faça
      se B[i] ≤ B[j] e i ≤ q            ▷ alteração
         então A[k] ← B[i]
                 i ← i + 1
         senão A[k] ← B[j]
                 j ← j − 1
```

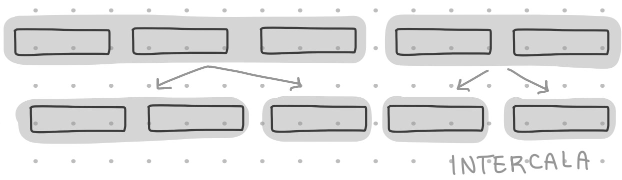
Assim, como a função intercala consome tempo $\Theta(n)$ e as recursões consomem $\Theta(\lg k)$, o algoritmo completo terá complexidade $O(n \lg k)$.

Simulação do algoritmo proposto para $k = 5$

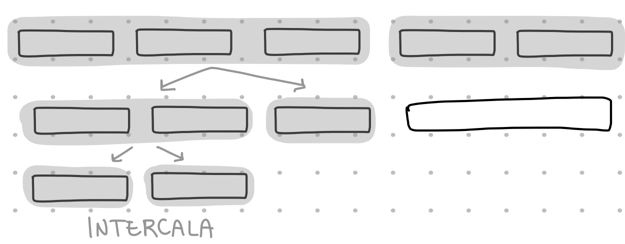
1. Inicialmente dividimos as 5 listas com o pivô sendo igual a $\lceil k/2 \rceil$



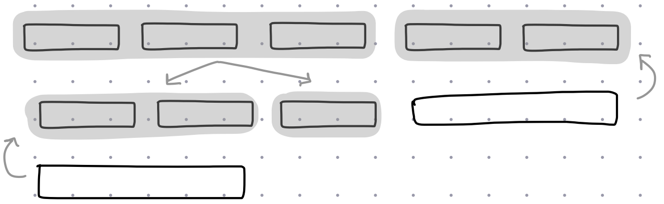
2. recursivamente temos



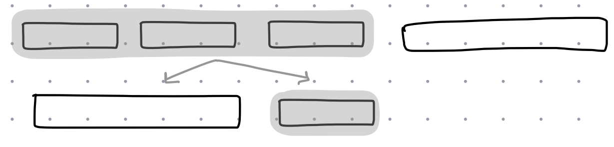
3. como na esquerda chegamos no momento da recursão no qual não há mais que 1 lista no grupo a função intercala é chamada, e na direita a recursão continua.



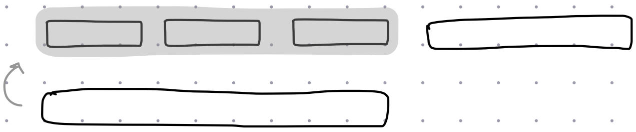
4. seguindo a lógica apresentada



5.



6.



7.

8. e recursivamente temos o vetor final

Pseudo código:

```
INTERCALACAO (n, K, L1,..., Li)   (lista Li com i sendo o nº de listas em cada recursão indo de 1 a K)
se o número de listas for maior que 1
      K ← nº de listas atual
      então pivô ← ⌈K/2⌉
         (divide-se a listas em dois grupos de acordo com um pivô arredondando para cima)
         A ← INTERCALACAO (n, K, L1, ..., Lpivô)
         B ← INTERCALACAO (n, Lpivô+1, ..., Li)
         D ← INTERCALA (n, A, B)
retorna D
```

```
INTERCALA (n, A, B)
    para i ← 0 até n-1 faça
        C[i] ← A[i]
        C[2n-1-i] ← B[i]        o vetor C é junção do A com o inverso do B
    i ← 0
    j ← 2n-1
    para K ← 0 até 2n-1 faça
        se C[i] ≤ C[j]
              D[0,...,2n-1] é um vetor auxiliar
            então D[K] ← C[i]
                  i ← i + 1
            senão D[K] ← C[j]
                  j ← j - 1
    retorna D
```