# CÁLCULO DIFERENCIAL GEOMÉTRICO NO $\mathbb{R}^n$

**Élvia Mureb Sallum**
**Lucia Satie Ikemoto Murakami**
**Juaci Picanço da Silva**

**INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA**
**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

REITORA: Profa. Dra. Suely Vilela

**INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA**

DIRETOR: Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro

VICE-DIRETOR: Prof. Dr. Flavio Ulhoa Coelho

**COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO**

PRESIDENTE: Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos

ENDEREÇO PARA CORRESPONDÊNCIA:
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
Rua do Matão, 1010
Cidade Universitária, São Paulo, SP
05508-090

# Cálculo Diferencial Geométrico no $\mathbb{R}^n$

**Élvia Mureb Sallum**
**Lucia Satie Ikemoto Murakami**
**Juaci Picanço da Silva**

**IME-USP**
**2009**

# Introdução

O conteúdo desta apostila corresponde às notas de aula de parte do curso de "Cálculo Avançado", pertencente ao programa de pós-graduação do IME-USP, ministrado pela primeira autora em 1993. Este material foi usado pela primeira vez no "XVII Cursos de Verão", em 1998, na disciplina "Cálculo Diferencial Geométrico no $\mathbb{R}^n$". A primeira versão desta apostila também foi utilizada no verão seguinte pelo professor Luiz Augusto Fernandes de Oliveira, a quem agradecemos pelas sugestões que resultaram na versão atual. O objetivo destas notas é servir como um roteiro para o estudo do Cálculo Diferencial e apresentar diversas aplicações, sobretudo nos exercícios propostos ao final do texto.

Este trabalho foi parcialmente financiado pela FAPESP e CAPES.

São Paulo, dezembro de 1999.

As observações de alunos e monitores da disciplina correspondente, em vários Cursos de Verão do IME-USP, e do professor Fabiano Gustavo Braga Brito permitiram que editássemos esta segunda versão com algumas melhorias e várias correções. A eles, o nosso agradecimento.

São Paulo, fevereiro de 2009.

# Sumário

CAPíTULO 1

# Topologia do $\mathbb{R}^n$

Consideraremos o espaço $\mathbb{R}^n$ com a métrica induzida pelo produto interno $x.y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, onde $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Assim,

$$\|x\| = \sqrt{x.x} = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \;\text{ e }\; \mathrm{d}(x,y) = \|x-y\|.$$

A *bola aberta* de centro $p$ e raio $r > 0$ é o conjunto

$$B_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \mathrm{d}(x,p) < r\}$$

e a *bola fechada* de centro $p$ e raio $r > 0$ é

$$\overline{B}_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \mathrm{d}(x,p) \leq r\}.$$

Temos as seguintes definições:

DEFINIÇÃO. Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é *aberto* se, para todo $p \in A$, existir $r > 0$ tal que $B_r(p) \subset A$. Um subconjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é *fechado* se seu complementar, $F^c$, for aberto.

DEFINIÇÃO. Dado $D \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ é

1. um *ponto interior* a $D$ se $p \in D$ e existir $r > 0$ de modo que $B_r(p) \subset D$;
2. um *ponto de fronteira* de $D$ se, para todo $r > 0$, $B_r(p) \cap D \neq \emptyset$ e $B_r(p) \cap D^c \neq \emptyset$;
3. um *ponto de acumulação* de $D$ se, para todo $r > 0$, existir $x \in D \cap B_r(p)$, com $x \neq p$;
4. um *ponto de aderência* de $D$ se, para todo $r > 0$, existir $x \in D \cap B_r(p)$.

Denotamos os conjuntos dos pontos interiores, de fronteira, de acumulação e de aderência de $D$, respectivamente por $\overset{\circ}{D}$, $\partial D$, $D'$ e $\overline{D}$.

EXEMPLO 1.1. Somente usando as definições de aberto e fechado, podemos garantir que

1. o conjunto vazio e $\mathbb{R}^n$ são abertos e fechados;
2. o intervalo $[0,1[ \subset \mathbb{R}$ não é aberto nem fechado;
3. o intervalo $[0,\infty[ \subset \mathbb{R}$ é fechado;

4. o conjunto $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\} \subset \mathbb{R}^n$ é fechado;
5. para todo $r > 0$, $B_r(p)$ é aberto e $\overline{B}_r(p)$ é fechado;
6. para todo subconjunto $D \subset \mathbb{R}^n$, $\overset{\circ}{D}$ é aberto e $\partial D$, $D'$ e $\overline{D}$ são fechados;
7. o conjunto $\{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R}$ não é aberto nem fechado;
8. o conjunto $\{0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ é fechado;
9. se $\mathbb{Q}$ denota o conjunto dos números racionais então $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ não é aberto nem fechado;
10. se $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ é aberto então $\pi_m(A) \subset \mathbb{R}^m$ é aberto, onde $\pi_m$ é a projeção $\pi_m(x,y) = y$, de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^m$;
11. se $A \subset \mathbb{R}^m$ e $B \subset \mathbb{R}^n$ são abertos então $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ é aberto.

PROPOSIÇÃO 1.2. *Temos:*

*(a) Se $(A_i)_{i\in I}$ são abertos de $\mathbb{R}^n$ então os conjuntos $\bigcup_{i\in I} A_i$ e $\bigcap_{\text{finita}} A_i$ são abertos de $\mathbb{R}^n$.*

*(b) Se $(F_i)_{i\in I}$ são fechados de $\mathbb{R}^n$ então os conjuntos $\bigcap_{i\in I} F_i$ e $\bigcup_{\text{finita}} F_i$ são fechados de $\mathbb{R}^n$.*

DEMONSTRAÇÃO. (a) A demonstração é feita usando somente a definição de aberto.

(b) Usa o fato que $(\bigcap F_i)^c = \bigcup F_i^c$ e $(\bigcup F_i)^c = \bigcap F_i^c$. □

EXEMPLO 1.3. Observe que interseção infinita de abertos não é necessariamente um aberto, nem união inifinita de fechados é necessariamente um fechado, já que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[ = \{0\}$ não é aberto e $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] = ]-1,1[$ não é fechado.

Algumas caracterizações de ponto de acumulação são dadas pela

PROPOSIÇÃO 1.4. *Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ e $p \in \mathbb{R}^n$. São equivalentes:*

*(a) $p$ é ponto de acumulação de $D$;*

*(b) para todo $r > 0$, $B_r(p)$ contém uma infinidade de pontos de $D$;*

*(c) Existe uma seqüência $x_n$ de elementos de $D$, todos distintos de $p$, que converge para $p$.*

DEMONSTRAÇÃO. Exercício. □

O seguinte resultado caracteriza os conjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$.

PROPOSIÇÃO 1.5. *Seja $F \subset \mathbb{R}^n$. São equivalentes:*

*(a) $F$ é fechado;*

(b) *$F$ contém todos os seus pontos de acumulação;*
(c) *$F$ contém todos os seus pontos de fronteira;*
(d) *se $x_n$ é uma seqüência em $F$ que converge para $p$ então $p \in F$.*

DEMONSTRAÇÃO. Exercício. □

DEFINIÇÃO. Um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é *compacto* se qualquer cobertura de $K$ por abertos admitir uma subcobertura finita, isto é, para toda família $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in I}$ de abertos de $\mathbb{R}^n$ com $K \subset \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$, existirem $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ tais que $K$ está contido em $\mathcal{A}_{\alpha_1} \cup \ldots \cup \mathcal{A}_{\alpha_s}$.

EXEMPLO 1.6. Usando apenas a definição, podemos concluir que

1. o intervalo $[0,1[ \subset \mathbb{R}$ não é compacto;
2. o intervalo $[0,\infty[$ não é compacto;
3. o conjunto $\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ não é compacto;
4. o conjunto $\{0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ é compacto;
5. qualquer conjunto finito $\{p_1, p_2, \ldots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$ é compacto;
6. se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto e $p \in \mathbb{R}^m$, então $\{p\} \times K \subset \mathbb{R}^{n+m}$ é compacto.

TEOREMA 1.7 (Heine Borel). *Dados $a$ e $b$ números reais, com $a < b$, o intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ é compacto.*

DEMONSTRAÇÃO. Dada uma cobertura $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in I}$ por abertos de $[a,b]$, seja

$$S = \{x \in [a,b] \colon [a,x] \text{ é coberto por um número finito de abertos } \mathcal{A}_\alpha\}.$$

Temos que $S$ é não vazio, já que $a \in S$, e $S$ é limitado superiormente por $b$. Assim, existe o supremo de $S$, $\sup S$, e $a \leq \sup S \leq b$. Mostremos que $\sup S = b$. Seja $\alpha$ tal que $\sup S \in \mathcal{A}_\alpha$. Consideremos $x \in \mathcal{A}_\alpha \cap S$ e $y \in \mathcal{A}_\alpha$ tal que $\sup S < y$. Sejam $\alpha_1 \ldots, \alpha_n$ tais que $[a,x] \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{A}_{\alpha_i}$. Como $[a,y] \subset \mathcal{A}_{\alpha_1} \cup \ldots \cup \mathcal{A}_{\alpha_n} \cup \mathcal{A}_\alpha$ e $y > \sup S$, devemos ter $\sup S = b$ e, mais ainda, $b \in S$. Portanto, $[a,b]$ é compacto. □

LEMA 1.8. *Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, $p \in \mathbb{R}^m$ e $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma cobertura de $\{p\} \times K$ por abertos de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Então existe um aberto $A(p) \subset \mathbb{R}^m$, com $p \in A(p)$, tal que $A(p) \times K$ é coberto por um número finito dos $\mathcal{A}_\alpha$.*

DEMONSTRAÇÃO. Podemos supor $(\mathcal{A}_\alpha)$ cobertura finita de $\{p\} \times K$. Para todo ponto $(p,x)$ em $\{p\} \times K$, existe $\alpha$ tal que $(p,x) \in \mathcal{A}_\alpha$. Consideramos, agora, abertos $C_x \times D_x$ tais que $p \in C_x \subset \mathbb{R}^m$, $x \in D_x \subset \mathbb{R}^n$ e $C_x \times D_x \subset \mathcal{A}_\alpha$. Como $(C_x \times D_x)_{x \in K}$ é cobertura por abertos de $\{p\} \times K$, existem $x_1, \ldots, x_s \in K$ tais que $\{p\} \times K \subset C_{x_1} \times D_{x_1} \cup \ldots \cup C_{x_s} \times D_{x_s}$. Basta tomar $A(p) = \bigcap_{i=1}^{s} C_{x_i}$. □

PROPOSIÇÃO 1.9. *Temos as seguintes propriedades:*

1. *Se* $K_1 \subset \mathbb{R}^n$ *e* $K_2 \subset \mathbb{R}^m$ *são compactos então o conjunto* $K_1 \times K_2 \subset \mathbb{R}^{n+m}$ *é compacto.*
2. *Se* $K_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ *são compactos, para* $i = 1, \ldots, l$*, então* $\prod_{i=1}^{l} K_i \subset \mathbb{R}^{n_1+\cdots+n_l}$ *é compacto.*
3. *O conjunto* $\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n$ *é compacto.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta demonstrar a parte 1. Dada uma cobertura $(\mathcal{A}_\alpha)$, por abertos, de $K_1 \times K_2$, para cada $p \in K_1$, existe um aberto $A(p) \subset \mathbb{R}^n$, $p \in A(p)$ tal que $A(p) \times K_2$ é coberto por um número finito de $\mathcal{A}_\alpha$. Temos $K_1 \subset \bigcup_{p \in K_1} A(p)$; como $K_1$ é compacto, existem $A(p_1), \ldots, A(p_s)$ tais que $K_1$ está contido em $A(p_1) \cup \ldots \cup A(p_s)$. Dessa maneira, obtemos

$$K_1 \times K_2 \subset \bigcup_{i=1}^{s} (A(p_i) \times K_2) \subset \bigcup_{\text{finita}} \mathcal{A}_\alpha.$$

Portanto, $K_1 \times K_2$ é compacto. □

LEMA 1.10. *Todo fechado contido em um compacto é compacto.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $F$ fechado e $K$ compacto, com $F \subset K$. Seja $(\mathcal{A}_\alpha)$ uma cobertura por abertos de $F$. Então $K \subset (\bigcup_\alpha \mathcal{A}_\alpha) \cup F^c$ e, portanto, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ tais que $K \subset \mathcal{A}_{\alpha_1} \cup \ldots \cup \mathcal{A}_{\alpha_s} \cup F^c$. Assim, $F \subset \mathcal{A}_{\alpha_1} \cup \ldots \cup \mathcal{A}_{\alpha_s}$. □

PROPOSIÇÃO 1.11. *Se* $D \subset \mathbb{R}^n$ *é um conjunto fechado e limitado então* $D$ *é compacto.*

DEMONSTRAÇÃO. Temos $D \subset \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, pois $D$ é limitado. O resultado segue do lema anterior e da parte (3) da Proposição 1.9. □

OBSERVAÇÃO 1.12. Nem sempre fechado e limitado é compacto. Por exemplo, $\mathbb{R}^n$ com a métrica

$$\mathrm{d}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq y; \\ 0, & \text{se } x = y. \end{cases}$$

De fato, $\mathbb{R}^n = B_2(0)$ é limitado e é fechado. Além disso, observemos que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} \{p\} = \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} B_1(p)$ não admite subcobertura finita.

PROPOSIÇÃO 1.13. *Se* $K \subset \mathbb{R}^n$ *é compacto então* $K$ *é fechado e limitado.*

DEMONSTRAÇÃO. Temos que $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(0) = \mathbb{R}^n$. Como $K$ é compacto, existem $n_1, \ldots, n_s$ tais que $K \subset B_{n_1}(0) \cup \ldots \cup B_{n_s}(0) \subset B_{\max\{n_1,\ldots,n_s\}}(0)$. Assim, $K$ é limitado. Mostremos que $K$ é fechado. Dado $p \in K^c$, para cada $x \in K$, seja $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x) \cap B_{r_x}(p) = \emptyset$. Portanto, $K \subset \bigcup_{x \in K} B_{r_x}(x)$. Logo, existem $x_1, \ldots, x_s \in K$ tais que $K \subset B_{r_{x_1}} \cup \ldots \cup B_{r_{x_s}}$, de onde segue que $B_{\min\{r_{x_1},\ldots,r_{x_s}\}}(p) \subset K^c$. □

COROLÁRIO 1.14. *Se* $K \subset \mathbb{R}$ *é um conjunto compacto e não vazio então* $\sup K$ *e* $\inf K$ *pertencem a* $K$.

OBSERVAÇÃO 1.15. Em $\mathbb{R}^n$ (com a métrica usual) são equivalentes:

(i) $K$ é fechado e limitado;
(ii) $K$ é compacto;
(iii) Todo subconjunto infinito em $K$ tem ponto de acumulação em $K$;
(iv) Toda seqüência em $K$ admite subseqüência convergente em $K$.

Para completar a demonstração, veja [**3**].

DEFINIÇÃO. Dado $E \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que $A \subset E$ é *aberto de E* se $A = \mathcal{A} \cap E$, onde $\mathcal{A}$ é aberto de $\mathbb{R}^n$ e $F \subset E$ é *fechado de E* se $F = \mathcal{F} \cap E$, onde $\mathcal{F}$ é fechado de $\mathbb{R}^n$.

DEFINIÇÃO. $E \subset \mathbb{R}^n$ é *conexo* se não existirem abertos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ tais que $\mathcal{A} \cap E$ e $\mathcal{B} \cap E$ sejam disjuntos, não vazios e $E \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ ou, equivalentemente, se não existirem abertos $A$ e $B$ de $E$ tais que $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset \neq B$ e $E = A \cup B$.

TEOREMA 1.16. *Os conexos da reta são os intervalos.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $E$ um subconjunto de $\mathbb{R}$. Se $E$ não é um intervalo então existem pontos $x, y \in E$ e $c \notin E$ tais que $x < c < y$. Os conjuntos abertos $\mathcal{A} = ]-\infty, c[$ e $\mathcal{B} = ]c, +\infty[$ mostram que $E$ não é conexo. Portanto, todo conexo é um intervalo. Mostremos agora que todo intervalo é conexo. Seja $I$ um intervalo. Se $I = \{p\}$ então segue da definição que $I$ é conexo. Suponha que $I$ não seja conexo. Então existem abertos $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ tais que $\mathcal{A} \cap I$ e $\mathcal{B} \cap I$ são disjuntos, não vazios e $I \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Sejam $x \in \mathcal{A} \cap I$ e $y \in \mathcal{B} \cap I$. Podemos considerar que $x < y$. Então $S = [x, y] \cap \mathcal{A}$ é não vazio e limitado superiormente por $y$. Seja $c = \sup S \in [x, y] \subset I$. Se $c \in \mathcal{A}$ então $c < y$ e existiria $\varepsilon > 0$ tal que $(c, c+\varepsilon) \subset \mathcal{A} \cap [x, y] = S$, logo, $c$ não seria limitante superior de $S$. Logo, $c \notin A$. De modo análogo, prova-se que $c \notin \mathcal{B}$. Assim, $c \in I$ e $c \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, o que é uma contradição. Portanto, $I$ é conexo. □

CAPíTULO 2

# Funções contínuas

Consideraremos funções $f$ definidas em $D \subset \mathbb{R}^n$ com valores em $\mathbb{R}^k$.

DEFINIÇÃO. Dado $p \in \mathbb{R}^n$, ponto de acumulação de $D$, escrevemos

$$\lim_{x \to p} f(x) = c \in \mathbb{R}^k$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D \cap (B_\delta(p) - \{p\})$, tivermos $f(x) \in B_\varepsilon(c)$; ou ainda se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D$, $0 < \|x - p\| < \delta$ implicar $\|f(x) - c\| < \varepsilon$.

DEFINIÇÃO. Dizemos que $f$ *é contínua em* $p \in D$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in B_\delta(p) \cap D$, tivermos $f(x) \in B_\varepsilon(f(p))$.

OBSERVAÇÃO 2.1.

1. Se $p$ é ponto isolado de $D$ (isto é, $p \in D$ mas não é ponto de acumulação de $D$), então $f$ é contínua em $p$;
2. Quando $p \in D$ é ponto de acumulação de $D$, então

$$f \text{ é contínua em } p \text{ se, e somente se, } \lim_{x \to p} f(x) = f(p).$$

EXEMPLO 2.2.

1. A projeção $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\pi(x) = x_i$, onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, é contínua, pois

$$\|\pi(x) - \pi(p)\| = |x_i - p_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - p_i)^2} = \|x - p\|.$$

   Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \varepsilon$. Assim, se $\|x - p\| < \delta$ então $\|\pi(x) - \pi(p)\| < \varepsilon$.
2. Toda função $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lipschitziana (isto é, existe uma constante $M$ tal que, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n, \|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$) é contínua.
3. A função $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|x\|$ é contínua, pois vale a desigualdade $\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x - y\|$ (Exercício 1 da lista).
4. Toda função linear $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é contínua: de fato, seja $A = (a_{ij})$ a matriz de $L$ em relação a base canônica e sejam $\vec{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$, para

$i = 1, \ldots, k$.

$$L(x) = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_k \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \vec{a}_1.x \\ \vdots \\ \vec{a}_k.x \end{pmatrix}.$$

Portanto, segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz (Exercício 1 da lista) que

$$\|L(x)\| = \sqrt{\sum_{i_1}^{k} (\vec{a}_i.x)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \|\vec{a}_i\|^2 \|x\|^2} = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}\|x\|.$$

Escrevendo $\|L\| = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$, temos

$$\|L(x)\| \leq \|L\| \|x\|. \tag{1}$$

Assim, $\|L(x) - L(p)\| = \|L(x-p)\| \leq \|L\| \|x-p\|$e, portanto, $L$ é lipschitziana. Observe que também temos o seguinte fato:

$$\|L(x)\| \leq \|L\|_1 \|x\|, \tag{2}$$

onde $\|L\|_1 = \sup\{\|L(x)\| : \|x\| \leq 1\} < \infty$. De fato, segue de (1) que o conjunto $\{\|L(x)\| : \|x\| \leq 1\}$ é limitado superiormente e, para $x = 0$, (2) é verdadeira. Se $x \neq 0$ então $\left\| L\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \|L\|_1$. Logo resulta que $\|L(x)\| \leq \|L\|_1 \|x\|$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

PROPOSIÇÃO 2.3. *Dadas $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ e $p \in D$, temos*

1. *A função $f = (f_1, \ldots, f_k)$ é contínua em $p$ se e somente se, para todo $i$, $f_i$ é contínua em $p$.*
2. *Se $f$ é contínua em $p$ então, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, a função de uma variável $f(p_1, \ldots, p_{i-1}, t, p_{i+1}, \ldots, p_n)$ é contínua em $t = p_i$ (porém a recíproca não é verdadeira).*
3. *Se $p \in D$ é ponto de acumulação de $D$ então $f$ é contínua em $p$ se, e somente se, para toda seqüência $x_n$ de elementos de $D$ que converge para $p$, tivermos que $f(x_n)$ converge para $f(p)$.*
4. *Se $f$ é contínua em $p$, então $f$ é localmente limitada nesse ponto.*
5. *Se $f$ é contínua em $p$ e $f(p) \neq 0$, então, localmente em $p$, $f$ tem o mesmo sinal de $f(p)$, se $k = 1$.*
6. *Se $f, g\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ são contínuas em $p \in D$ então $f + g$ e $\lambda f$ são contínuas em $p$; se $k = 1$ então $fg$ é contínua em $p$ e se $k = 1$ e $g(p) \neq 0$ então $\frac{f}{g}$ é contínua em $p$.*

7. *Se* $D \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} B \subset \mathbb{R}^k \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m$, *com* $f$ *contínua em* $p \in D$ *e* $g$ *contínua em* $f(p) \in B$ *então* $g \circ f$ *é contínua em* $p$.

DEMONSTRAÇÃO. Faça como exercício. □

EXERCÍCIO. Enuncie e demonstre propriedades análogas para limites, observando que para a correspondente a 7. é necessário colocar como hopótese, além da existência dos limites $\lim_{x\to p} f(x) = c$ e $\lim_{y\to c} g(y)$, que $g$ não seja constante em $B_r(c) \cap B$, para algum $r > 0$.

EXEMPLO 2.4.
1. Contra-exemplo para a recíproca da propriedade 2:
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$
Temos que $f(x,0) \equiv 0$ é contínua em $x = 0$ e $f(0,y) \equiv 0$ é contínua em $y = 0$. Porém $f$ não é contínua em $(0,0)$, pois $f(y^2,y) \overset{(y\neq 0)}{=} 1$. Observemos que $f$ é contínua em $(0,0)$, quando restrita a qualquer reta passando por esse ponto, pois se $\gamma(t) = tv$, onde $v = (v_1,v_2) \neq (0,0)$, então
$$f(\gamma(t)) = \frac{2tv_1v_2^2}{v_1^2+t^2v_2^4};$$
logo,
$$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = 0 = f(0,0).$$
2. A função $f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y = x^2 \neq 0; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ não é contínua em $(0,0)$ (e em nenhum ponto da curva $\gamma(t) = (t,t^2)$), mas, restrita a qualquer reta que passa por $(0,0)$, é contínua nesse ponto.
3. Toda função linear $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é contínua (outra demonstração):
Temos que $L(x) = (L_1(x),\ldots,L_k(x))$, onde cada $L_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é linear.
$$L_i(x) = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = \begin{pmatrix} a_{i1} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
é contínua, pois projeção é contínua, soma e produto de funções contínuas é contínua.
4. A função $f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{-1+x^2+y^2}}, & x^2+y^2 < 1; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ é contínua. Em particular, nos pontos $(x,y)$ com $x^2+y^2 = 1$.

De fato, sejam $\varphi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $r\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definidas por

$$\varphi(r) = \begin{cases} e^{\frac{1}{r^2-1}}, & \text{se } 0\le r<1;\\ 0, & \text{se } r\ge 1,\end{cases}$$

$$r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Temos que $\varphi$ é contínua em $r=1$, $r$ é contínua e $f=\varphi\circ r$.

5. A curva $\gamma\colon [0,2\pi[\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t)$ é contínua, injetora, mas sua inversa $\gamma^{-1}$ não é contínua em $(1,0)$, pois, para a seqüência $t_{2n}=\dfrac{1}{2n}$, $t_{2n+1}=2\pi-\dfrac{1}{2n+1}$, temos que $(\cos t_n,\operatorname{sen} t_n)$ converge para $(1,0)$, mas $\gamma^{-1}(\cos t_n,\operatorname{sen} t_n)=t_n$ não converge para $0$.
6. A função dada por $f(x,y)=(x^2-y^2,2xy)$ é injetora e contínua no conjunto $\{(x,y)\colon y\ge 0\}\setminus\{(x,0)\colon x\le 0\}$, mas $f^{-1}$ não é contínua em $(p,0)$, com $p>0$.

DEFINIÇÃO. A *imagem inversa* do conjunto $A$ pela função $f$, denotada por $f^{-1}(A)$, é o conjunto $\{x\in D:\ f(x)\in A\}$.

PROPOSIÇÃO 2.5. *Uma função $f\colon D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ é contínua em $D$ se, e somente se, para todo $A\subset\mathbb{R}^k$ aberto, o conjunto $f^{-1}(A)$ for aberto de $D$, isto é, se existir $\mathcal{A}\subset\mathbb{R}^n$ aberto tal que $f^{-1}(A)=\mathcal{A}\cap D$.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que $f$ seja contínua. Se $A\cap f(D)=\emptyset$, então $f^{-1}(A)=\emptyset$ é aberto. Caso contrário, dado $p\in f^{-1}(A)$ seja $B_\varepsilon(f(p))\subset A$ e, pela continuidade de $f$ em $p$, existe $\delta>0$ tal que

$$f(D\cap B_\delta(p))\subset B_\varepsilon(f(p))\subset A.$$

Basta considerar $\mathcal{A}=\displaystyle\bigcup_{p\in f^{-1}(A)} B_\delta(p)$ (verifique). Reciprocamente, seja $p\in D$. Dado $\varepsilon>0$, seja $\mathcal{A}$ aberto do $\mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(B_\varepsilon(f(p))=\mathcal{A}\cap D$. Dessa maneira, existe $\delta>0$ de modo que $B_\delta(p)\subset\mathcal{A}$ e $f(B_\delta(p)\cap D)\subset B_\varepsilon(f(p))$. Assim, $f$ é contínua. $\square$

COROLÁRIO 2.6. *Uma função $f\colon D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ é contínua em $D$ se, e somente se, para todo $F\subset\mathbb{R}^k$ fechado, $f^{-1}(F)=\mathcal{F}\cap D$, onde $\mathcal{F}$ é fechado de $\mathbb{R}^n$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $f$ é contínua, pela proposição anterior, imagem inversa de qualquer aberto de $\mathbb{R}^k$ é aberto de $D$. Dado $F\subset\mathbb{R}^k$ fechado, temos que $F=A^c$ com $A\subset\mathbb{R}^k$ aberto. Assim, existe $\mathcal{A}$ aberto de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$f^{-1}(F)=f^{-1}(A^c)=D\setminus f^{-1}(A)=D\setminus(\mathcal{A}\cap D)=D\cap\mathcal{A}^c=D\cap\mathcal{F}\,.$$

Reciprocamente, se imagem inversa de fechado de $\mathbb{R}^k$ é fechado de $D$, dado $A \subset \mathbb{R}^k$ aberto, $A = F^c$ com $F \subset \mathbb{R}^k$ fechado, existe $\mathcal{F}$ fechado de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(F^c) = D \setminus f^{-1}(F) = D \setminus (\mathcal{F} \cap D) = D \setminus \mathcal{F}^c = D \cap \mathcal{A}.$$

Pela proposição anterior, $f$ é contínua. □

PROPOSIÇÃO 2.7 (Teorema do Valor Intermediário). *Se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto conexo e $f\colon E \to \mathbb{R}^k$ é contínua então $f(E)$ é conexo.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que $f(E)$ não seja conexo. Logo, existem abertos $A$ e $B$ de $\mathbb{R}^k$ tais que $A \cap f(E)$, $B \cap f(E)$ são não vazios, disjuntos e $f(E) \subset A \cup B$. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ abertos de $\mathbb{R}^n$ tais que $f^{-1}(A) = \mathcal{A} \cap E$ e $f^{-1}(B) = \mathcal{B} \cap E$. Temos que $\mathcal{A} \cap E$ e $\mathcal{B} \cap E$ são não vazios, disjuntos e $E \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, o que contradiz a hipótese de que $E$ é conexo. Portanto, $f(E)$ é conexo. □

COROLÁRIO 2.8. *Se $f\colon E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua em $E$ conexo e $f(x_1) < y < f(x_2)$ então existe $\overline{x} \in E$ tal que $f(\overline{x}) = y$.*

EXEMPLO 2.9.
1. Dados $p, q \in \mathbb{R}^n$, o segmento de reta $\overline{pq} \subset \mathbb{R}^n$ é conexo. De fato, temos que a função $\gamma(t) = p + t(q-p)$ é contínua, o intervalo $[0,1]$ é conexo e $\overline{pq} = \gamma([0,1])$.
2. $\mathbb{R}^n$ é conexo. De fato, suponha que $\mathbb{R}^n$ não seja conexo. Então existem abertos $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ não vazios, disjuntos tais que $\mathbb{R}^n = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Sejam $p \in \mathcal{A}$, $q \in \mathcal{B}$ e $\gamma(t) = p + t(q-p)$, $t \in \mathbb{R}$. Temos que $A = \{t \in \mathbb{R} \colon \gamma(t) \in \mathcal{A}\}$ e $B = \{t \in \mathbb{R} \colon \gamma(t) \in \mathcal{B}\}$ são abertos disjuntos não vazios e $\mathbb{R} = A \cup B$, o que é uma contradição, pois $\mathbb{R}$ é conexo.
3. Se $E \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e fechado então $E = \emptyset$ ou $E = \mathbb{R}^n$. De fato, seja $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}^n$ aberto e fechado. Vamos mostrar que $E = \mathbb{R}^n$. Temos $\mathbb{R}^n = E \cup (\mathbb{R}^n \setminus E)$ união de abertos disjuntos. Como $\mathbb{R}^n$ é conexo e $E \neq \emptyset$, resulta que $\mathbb{R}^n \setminus E = \emptyset$, ou seja, $E = \mathbb{R}^n$.
4. Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ é contínua então $\operatorname{Im}\gamma$ é conexo.
5. Consideremos $\gamma\colon\, ]0,\infty[ \to \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(x) = \left(x, \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)$. Sejam $E_1 = \{(0,y) \colon -1 < y < 1\}$ e $E_2 = \operatorname{Im}\gamma$. O conjunto $E = E_1 \cup E_2$ é conexo. De fato, suponhamos que existam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ abertos disjuntos de $E$ tais que $E = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Como $E_1$ é conexo, $E_1$ está contido em um dos abertos, por exemplo $E_1 \subset \mathcal{A}$. Como $E_2 \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ e $E_2$ é conexo, temos $E_2 \subset \mathcal{A}$. Logo, $E \subset \mathcal{A}$.
6. Sejam $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ contínuas e $y$ entre $f(\gamma(a))$ e $f(\gamma(b))$. Então existe $\bar{t}$ entre $a$ e $b$ tal que $y = f(\gamma(\bar{t}))$.

7. Se $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e injetora num intervalo $I$ então $f$ é estritamente monótona e $f^{-1}$ é contínua no intervalo $J = f(I)$.
8. Dada $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínua, temos:
   (i) $\{x \in D: f(x) = c\} = f^{-1}(\{c\})$ é fechado em $D$;
   (ii) $\{x \in D: f(x) \leq c\} = f^{-1}(]-\infty, c])$ é fechado em $D$;
   (iii) $\{x \in D: f(x) \neq c\} = f^{-1}(]-\infty, c[\cup]c, \infty[)$ é aberto em $D$.
9. O conjunto $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ é fechado de $\mathbb{R}^n$.
10. O conjunto $\{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$ é aberto de $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ e o conjunto $\{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A = 0\}$ é fechado de $M_n(\mathbb{R})$.
11. Se $F_i \subset \mathbb{R}$ são fechados então $\prod_{i=1}^{n} F_i$ é fechado de $\mathbb{R}^n$. De fato, consideremos as projeções $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Temos que $\prod_{i=1}^{n} F_i = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(F_i)$.
12. Se $f: [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua então o gráfico de $f$ é fechado de $\mathbb{R}^2$. De fato, a função $H: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $H(x,y) = y - f(x)$ é contínua e, além disso, graf $f = \{(x, f(x)) : x \in [a,b]\} = H^{-1}(0)$ é fechado de $[a,b] \times \mathbb{R}$. Como $[a,b] \times \mathbb{R}$ é fechado de $\mathbb{R}^2$, segue que o gráfico de $f$ é fechado de $\mathbb{R}^2$.

DEFINIÇÃO. Um conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ é *conexo por caminhos* se, para quaisquer $p, q \in E$, existir $\gamma: [a,b] \to E$ contínua tal que $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$.

TEOREMA 2.10. *Seja $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}^n$.*

1. *Se $E$ é conexo por caminhos então $E$ é conexo;*
2. *Se $E$ é aberto conexo então $E$ é conexo por caminhos.*

DEMONSTRAÇÃO. 1. Suponhamos que existam abertos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tais que $\mathcal{A} \cap E$ e $\mathcal{B} \cap E$ são não vazios, disjuntos e $E \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Sejam $p \in \mathcal{A} \cap E$ e $q \in \mathcal{A} \cap E$. Existe uma função contínua $\gamma: [a,b] \to E$ tal que $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$. Portanto, $\mathcal{A} \cap \gamma([a,b])$ e $\mathcal{B} \cap \gamma([a,b])$ são não vazios, disjuntos e $\gamma([a,b]) \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, o que é uma contradição, pois $\gamma([a,b])$ é conexo.

2. Fixemos $x_0 \in E$ e seja $S$ o conjunto de todos os pontos $x \in E$ tal que existe um caminho contínuo $\gamma: [a,b] \to E$ com $\gamma(a) = x_0$ e $\gamma(b) = x$. Temos que $S \neq \emptyset$, pois $x_0 \in S$. Mostremos que $S$ e $E \setminus S$ são abertos. Como $E$ é conexo e $S \neq \emptyset$, isto implicará que $E \setminus S = \emptyset$ e, portanto, $S = E$. Dado $x \in S$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset E$. Para todo $y \in B_\delta(x)$, $\overline{yx} \cup \gamma([a,b]) \subset E$. Assim $S$ é aberto. Dado $x \in E \setminus S$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset E$. Nenhum ponto de $B_\delta(x)$ pode ser ligado a $x_0$ por um caminho contínuo contido em $E$,

caso contrário, $x$ também poderia. Logo $B_\delta(x) \subset E \setminus S$. Portanto, $E \setminus S$ é aberto. $\square$

OBSERVAÇÃO 2.11.
1. Contra-exemplo para a recíproca de (1): O conjunto $E$ do Exemplo 5 acima é conexo, mas não é conexo por caminhos.
2. Quando $E$ é aberto vale também: $E$ é conexo se, e somente se, $E$ for conexo por poligonais.

PROPOSIÇÃO 2.12. *Se $f\colon K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é contínua em $K$ compacto então $f(K)$ compacto.*

DEMONSTRAÇÃO. Dada uma cobertura $(\mathcal{A}_\alpha)$ de $f(K)$ por abertos, existem abertos $A_\alpha$ de $\mathbb{R}^n$ tais que $f^{-1}(\mathcal{A}_\alpha) = A_\alpha \cap K$. Portanto, $(A_\alpha)$ é uma cobertura de $K$ por abertos. Logo, $K \subset A_{\alpha_1} \cup \ldots \cup A_{\alpha_s}$ e $f(K) \subset \mathcal{A}_{\alpha_1} \cup \ldots \cup \mathcal{A}_{\alpha_s}$. $\square$

PROPOSIÇÃO 2.13 (Teorema de Weierstrass). *Se $f\colon K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua e $K$ é um compacto não vazio então $f$ assume máximo e mínimo.*

DEMONSTRAÇÃO. Temos que $f(K)$ é fechado e limitado, logo, é limitado inferiormente e superiormente. Portanto, existem $\sup f(K)$ e $\inf f(K)$ e, como $f(K)$ é fechado, $\sup f(K)$ e $\inf f(K)$ pertencem a $f(K)$. $\square$

EXEMPLO 2.14.
1. A função $f\colon ]0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ não assume máximo.
2. A função $f\colon [1,\infty[ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ não assume mínimo.
3. Se $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é linear e injetora, então existe $c > 0$ tal que $\|L(x)\| \geq c\|x\|$. Você pode justificar usando que na esfera $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| = 1\}$ $\|L(x)\|$ assume valor mínimo $\|L(x_0)\| = c$ e que $c > 0$ pois $L$ é injetora.

PROPOSIÇÃO 2.15. *Se $f\colon K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é contínua e injetora em $K$ compacto então a inversa $f^{-1}\colon f(K) \to \mathbb{R}^n$ é contínua.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta mostrar que, para todo conjunto fechado $F$ de $\mathbb{R}^n$, $(f^{-1})^{-1}(F)$ é fechado de $f(K)$. Temos que $(f^{-1})^{-1}(F) = f(K \cap F)$ é compacto, pois $K \cap F$ é compacto. Logo, $(f^{-1})^{-1}(F)$ é fechado. $\square$

DEFINIÇÃO. $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é *uniformemente contínua* se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que, para todo $x, y \in D$, $\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

DEFINIÇÃO. Dados um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ e um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$, a *distância* de $p$ a $D$, denotada por $\mathrm{d}(p, D)$, é o ínfimo do conjunto $\{\mathrm{d}(p, x) : x \in D\}$.

OBSERVAÇÃO 2.16.
1. Se $D \subset \mathbb{R}^n$ e $p \in D$ então $\mathrm{d}(p, D) = 0$.

2. Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado e $\mathrm{d}(p,F) = 0$ então $p \in F$.
3. Se $D \subset \mathbb{R}^n$ então $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \mathrm{d}(x,D)$ é uniformemente contínua. De fato, quaisquer que sejam $x,y \in \mathbb{R}^n$, temos $\mathrm{d}(x,z) \le \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z)$, para todo $z \in D$, de onde segue que $\mathrm{d}(x,D) \le \mathrm{d}(x,z) \le \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z)$. Logo, $\mathrm{d}(x,D) - \mathrm{d}(x,y) \le \mathrm{d}(y,z)$. Portanto, $\mathrm{d}(x,D) - \mathrm{d}(x,y) \le \mathrm{d}(y,D)$ e, assim, $-\mathrm{d}(x,y) \le \mathrm{d}(y,D) - \mathrm{d}(x,D)$. Trocando $x$ por $y$ temos $\mathrm{d}(y,D) - \mathrm{d}(x,D) \le d(x,y)$.

LEMA 2.17. *Dados $K$ compacto e $A$ aberto com $K \subset A \subset \mathbb{R}^n$, existe $\varepsilon > 0$ de modo que $K \subset \bigcup_{x\in K} B_\varepsilon(x) \subset A$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $f\colon K \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = d(x,A^c)$. Temos que $f$ é contínua em $K$. Portanto, $f$ assume mínimo em um ponto $p$ de $K$ e, além disso, $f(p) > 0$, pois $A^c$ é fechado e $p \notin A^c$. Tomando $\varepsilon = \dfrac{f(p)}{2}$, obtemos $K \subset \bigcup_{x\in K} B_\varepsilon(x) \subset A$. □

OBSERVAÇÃO 2.18. No lema anterior, se $K$ não for compacto, o resultado não vale. Por exemplo: $\{(x,0) : \ -1 < x < 1\} \subset B_1((0,0)) \subset \mathbb{R}^2$ e $\{(x,\frac{1}{x}) : x > 0\} \subset A = \{(x,y) : x,y > 0\}$.

PROPOSIÇÃO 2.19. *Se $f\colon K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é contínua e $K$ é compacto então $f$ é uniformemente contínua em $K$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $H\colon K \times K \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$H(x,y) = \|f(x) - f(y)\|$$

e seja $S = \{(x,y) \in K \times K : \ H(x,y) < \varepsilon\}$. Temos que $H$ é contínua e $S$ é aberto de $K \times K$, pois $S = H^{-1}(]-\infty,\varepsilon[)$. Assim, existe um aberto $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tal que $S = \mathcal{A} \cap (K \times K)$. O conjunto $\Delta = \{(x,x) : \ x \in K\} \subset \mathcal{A} \cap (K \times K)$ é compacto. Pelo Lema 2.17, existe $\delta > 0$ tal que $\Delta \subset \bigcup_{x\in K} B_\delta((x,x)) \subset \mathcal{A}$. Dados $x,y \in K$ com $\|x-y\| < \delta$, temos $\|(x,x) - (y,x)\| < \delta$. Dessa maneira, obtemos $(y,x) \in B_\delta(x,x) \subset \mathcal{A}$ e, portanto, $H(y,x) = \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon$. □

EXEMPLO 2.20.

1. Se $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é lipschitziana então $f$ é uniformemente contínua.
2. A função $f(x) = \sqrt{x}$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}_+$. De fato,
   (a) temos que $f$ é lipschitziana em $[1,\infty[$, pois

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \left|\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right| \le \frac{1}{2}|x-y|;$$

(b) não é lipschitziana em $[0,1]$, pois não existe $M > 0$ tal que

$$|\sqrt{x} - \sqrt{0}| = \sqrt{x} \leq M|x - 0|,$$

uma vez que $\lim_{x \to 0_+} \frac{\sqrt{x}}{|x|} = \infty$. Mas $f$ é contínua no compacto $[0,1]$; logo, é uniformemente contínua em $[0,1]$;

(c) como $f$ é uniformemente contínua em $[1,\infty[$ e em $[0,1]$, temos que $f$ é uniformemente contínua em $[0,\infty[$. De fato, para $0 < x < 1 < y$ temos

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(1)| + |f(1) - f(y)|.$$

3. A função $f(x) = x^2$ é uniformemente contínua em $[0,a]$.
4. A função $f(x) = x^2$ não é uniformemente contínua em $[0,\infty[$. De fato, mostraremos que existem $\varepsilon_0 > 0$ e seqüências $x_n, y_n \in [0,\infty]$ tais que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, mas $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$. De fato, tomando $x_n = n$ e $y_n = n + \frac{1}{2n}$, temos $|x_n - y_n| = \frac{1}{2n} \to 0$ e

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left| n^2 - \left( n^2 + 1 + \frac{1}{4n^2} \right) \right| = \left| -1 - \frac{1}{4n^2} \right| > 1.$$

5. A função $f(x) = \frac{1}{x}$ não é uniformemente contínua em $]0,1]$: basta tomar $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = \frac{1}{2n}$. Temos, $|x_n - y_n| = \frac{1}{2n}$ e

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |n - 2n| = n \geq 1.$$

6. A função $f(x) = \frac{1}{x}$ é uniformemente contínua em $[1,\infty[$, pois é lipschitziana. De fato,

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x-y|}{|x||y|} \leq |x - y|.$$

DEFINIÇÃO. Dados $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ localmente limitada em $p \in D$ e $\delta > 0$ suficientemente pequeno, sejam

$$M(f,p,\delta) = \sup\{f(x) : x \in D \cap B_\delta(p)\}$$

$$m(f,p,\delta) = \inf\{f(x) : x \in D \cap B_\delta(p)\}$$

Como $0 \leq M(f,p,\delta) - m(f,p,\delta)$ decresce quando $\delta$ diminui, definimos

$$o(f,p) = \lim_{\delta \to 0}\{M(f,p,\delta) - m(f,p,\delta)\} = \inf_{\delta > 0}\{M(f,p,\delta) - m(f,p,\delta)\},$$

a *oscilação* de $f$ em $p$.

PROPOSIÇÃO 2.21. *Seja* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *localmente limitada em* $p \in D$. *Então* $f$ *é contínua em* $p$ *se, e somente se,* $o(f,p) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que $f$ seja contínua em $p$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D \cap B_\delta(p)$, tem-se $f(p) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(p) + \frac{\varepsilon}{2}$. Logo, $f(p) - \frac{\varepsilon}{2} < M(f,p,\delta) \leq f(p) + \frac{\varepsilon}{2}$ e $f(p) - \frac{\varepsilon}{2} \leq m(f,p,\delta) < f(p) + \frac{\varepsilon}{2}$. Isto implica que $-\varepsilon < M(f,p,\delta) - m(f,p,\delta) < \varepsilon$ e, conseqüentemente, temos $0 < M(f,p,\delta) - m(f,p,\delta) < \varepsilon$. Como $M(f,p,\delta) - m(f,p,\delta)$ decresce quando $\delta$ diminui, então $0 \leq o(f,p) < \varepsilon$. Reciprocamente, se $o(f,p) = 0$ então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que $x \in B_\delta(p) \cap D$ implica

$$-\varepsilon < m(f,p,\delta) - M(f,p,\delta) \leq f(x) - f(p) \leq M(f,p,\delta) - m(f,p,\delta) < \varepsilon.$$

□

PROPOSIÇÃO 2.22. *Sejam* $F \subset \mathbb{R}^n$ *um fechado e* $f : F \to \mathbb{R}$ *limitada. Então, para cada* $\varepsilon > 0$, *o conjunto* $S = \{x \in F : o(f,x) \geq \varepsilon\}$ *é fechado.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja a seqüência $x_n \to p$ com $x_n \in S$. Queremos mostrar que $p \in S$. Temos que $p \in F$, pois $F$ é fechado e $x_n \in F$. Dado $\delta > 0$, existem $x_{n_0}$ em $B_\delta(p)$ e $B_{\delta'}(x_{n_0}) \subset B_\delta(p)$. Temos $M(f,p,\delta) \geq M(f,x_{n_0},\delta')$, $m(f,p,\delta) \leq m(f,x_{n_0},\delta')$ e

$$M(f,p,\delta) - m(f,p,\delta) \geq M(f,x_{n_0},\delta') - m(f,x_{n_0},\delta') \geq o(f,x_{n_0}) \geq \varepsilon.$$

Logo, $o(f,p) \geq \varepsilon$. □

CAPíTULO 3

# Funções diferenciáveis

Como se estuda no primeiro curso de cálculo diferencial, uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *derivável* ou *diferenciável* em $p \in \mathbb{R}$ se existir $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = a,$$

ou, equivalentemente, se existir $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p) - a(x-p)}{|x - p|} = 0,$$

ou, ainda, se existir $L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linear tal que

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p) - L(x-p)}{|x - p|} = 0.$$

Além disso, $f$ é contínua em $p$ se $f$ for derivável nesse ponto.

Ao tentar uma definição de diferenciabilidade para $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ em um ponto $p \in \mathbb{R}^n$, espera-se que, quando restrita às retas passando por $p$, a função seja derivável. Verifica-se, porém, que essa condição não garante a continuidade da função. (Veja a definição de derivada direcional e os exemplos dados nas páginas 21 e 22.)

A boa definição de diferenciabilidade será obtida generalizando a terceira caracterização de derivabilidade dada acima. Com ela, teremos garantidas a continuidade e a existência das derivadas direcionais.

DEFINIÇÃO. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f\colon A \to \mathbb{R}^k$. Dizemos que $f$ é *diferenciável* em $p \in A$ se existir $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ tal que

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p) - L(x-p)}{\|x - p\|} = 0, \text{ ou } \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p) - L(h)}{\|h\|} = 0,$$

ou $f(x) = f(p) + L(x-p) + r(x)$, para $x$ suficientemente próximo de $p$, com

$$\lim_{x \to p} \frac{r(x)}{\|x - p\|} = 0.$$

Quando $f\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é derivável em $p \in A$, existe um plano dado por $z = f(p) + L(x-p)$, tal que

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - z(x)}{|x-p|} = 0,$$

isto é, $z = z(x)$ é uma aproximação de ordem 1 de $f$, localmente em $p$.

PROPOSIÇÃO 3.1. *Se $f$ é diferenciável em $p$ então existe uma única aplicação linear $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ que verifica a definição de diferenciabilidade em $p$.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que existam $L_1, L_2 \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ tais que

$$\frac{f(p+h) - f(p) - L_i(h)}{\|h\|} \to 0, \text{ quando } h \to 0.$$

Assim, $\dfrac{L_1(h) - L_2(h)}{\|h\|} \to 0$, quando $h \to 0$, ou seja, $(L_1 - L_2)\left(\dfrac{h}{\|h\|}\right) \to 0$, quando $h \to 0$.

Seja $h = te_i$, onde $t > 0$ e $e_i$ é um vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$ ($1 \leq i \leq n$). Dessa maneira,

$$(L_1 - L_2)\left(\frac{te_i}{\|te_i\|}\right) = (L_1 - L_2)\left(\frac{e_i}{\|e_i\|}\right) = (L_1 - L_2)(e_i) \to 0,$$

quando $t \to 0_+$. Como $(L_1 - L_2)(e_i)$ é uma constante, $(L_1 - L_2)(e_i) = 0$, para todo $i$. Mas $L_1 - L_2$ é linear. Portanto, $L_1 = L_2$. □

NOTAÇÃO: $L = df(p) = Df(p) = f'(p)$. Em geral, indicaremos por $f'(p)$ a matriz de $L$ na base canônica.

Quando $f$ é derivável em $p$, fica bem definido o *plano tangente* ao gráfico de $f$ em $p$, dado por $z(x) = f(p) + df(p)(x-p)$.

EXEMPLO 3.2.

1. A função $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ dada por $f(x) = L(x) + c$, onde $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ e $c \in \mathbb{R}^k$ é uma constante, é diferenciável.
   A candidata natural à $df(p)$ é a própria $L$.
   Verificação:
   $$\frac{f(x) - f(p) - L(x-p)}{\|x-p\|} = \frac{L(x) + c - L(p) - c - L(x) + L(p)}{\|x-p\|} = 0$$
   tende a zero, quando $x \to p$. Portanto, $df(p) = L$, para todo $p \in \mathbb{R}^n$.
2. A projeção $\pi\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ definida por $\pi(x,y) = x$ é linear. Portanto, é diferenciável e
   $$d\pi(x_0, y_0) = \pi, \text{ para todo } (x_0, y_0).$$

3. A função $f\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ dada por $f(x,y) = x+y$ é linear. Portanto, é diferenciável e $df(x_0,y_0) = f$. Observe que $df(x_0,y_0)\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é dada por
$$df(x_0,y_0)(h,k) = f(h,k) = h+k.$$
4. Se $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ satisfaz $\|f(x)\| \leq \|x\|^2$ então $f$ é diferenciável em 0:
A candidata à $df(0)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é $L(x) = 0$.
Verificação:
$$0 \leq \left\| \frac{f(x) - f(0) - L(x-0)}{\|x-0\|} \right\| = \left\| \frac{f(x)}{\|x\|} \right\| = \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq \frac{\|x\|^2}{\|x\|} = \|x\| \to 0.$$
Logo, $f$ é diferenciável em 0 e $df(0) = 0$.
5. A função $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ é diferenciável em $(0,0)$?
Solução: Temos que $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Vamos procurar $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, da forma $L(x,y) = ax+by$, tal que
$$\frac{f(h,k) - f(0,0) - ah - bk}{\|(h,k)\|} \to 0, \text{ quando } (h,k) \to (0,0).$$
$$\frac{\sqrt{|hk|} - ah - bk}{\sqrt{h^2+k^2}} = \begin{cases} -\frac{bk}{|k|} & \text{se } h = 0 \quad \Rightarrow b = 0 \\ -\frac{ah}{|h|} & \text{se } k = 0 \quad \Rightarrow a = 0 \end{cases}$$
Assim, a candidata à $df(0,0)(h,k) = 0h + 0k = 0$.
Verificação:
$$\frac{f(h,k) - f(0,0) - 0h - 0k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\sqrt{|hk|}}{\sqrt{h^2+k^2}} \overset{h=k}{=} \frac{|h|}{|h|\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \not\to 0.$$
Portanto, $f$ não é diferenciável em $(0,0)$.
6. A função $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ é diferenciável em $(0,0)$?
Vejamos se existem $a,b$ constantes reais tais que
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt{h^2+k^2} - ah - bk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$
Fazendo $k = 0$ e $h \to 0^+$,
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h| - ah}{|h|} = \lim_{h\to 0^+} 1 - \frac{ah}{|h|} = 1 - a.$$
Assim, deveríamos ter $a = 1$. Por outro lado, fazendo $k = 0$ e $h \to 0^-$,
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h| - ah}{|h|} = \lim_{h\to 0^-} 1 - \frac{ah}{|h|} = 1 + a,$$
o que implica que $a = -1$. Logo, $f$ não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

7. Se $f(x,y) = g(x)$, com $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável em $x_0$ então $f$ é diferenciável em $(x_0,y)$.
   Solução: Devemos procurar $L = df(x_0,y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $L(h,k) = ah+bk$, tal que
$$\frac{f(x_0+h,y+k)-f(x_0,y)-ah-bk}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{g(x_0+h)-g(x_0)-ah-bk}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0,$$
   quando $(h,k) \to (0,0)$.
   Existe $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = g'(x_0)$. Assim, temos
$$\frac{g(x_0+h)-g(x_0)-ah-bk}{\sqrt{h^2+k^2}} = \begin{cases} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)-ah}{|h|} & (k=0) \\ \frac{-bk}{|k|} & (h=0) \end{cases}$$
   Portanto, concluímos que $a = g'(x_0)$ e $b = 0$.
   Logo, a candidata à $df(x_0,y)(h,k)$ é $g'(x_0)h + 0k = g'(x_0)h$. Verificação: exercício.

PROPOSIÇÃO 3.3. *Se $f$ é diferenciável em $p$ então $f$ é contínua em $p$.*

DEMONSTRAÇÃO. Existe $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ linear tal que
$$f(x) = f(p) + L(x-p) + r(x), \text{ onde } \lim_{x\to p} \frac{r(x)}{\|x-p\|} = 0.$$
Assim, $f(x) - f(p) = L(x-p) + \dfrac{r(x)}{\|x-p\|}\|x-p\| \to 0$, quando $x \to p$. □

CONTRA-EXEMPLO PARA A RECÍPROCA. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ é contínua em $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ e não é diferenciável nesse ponto.

APLICAÇÃO.
A função $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & \text{se } x \neq 0; \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ não é diferenciável em $x = 0 \in \mathbb{R}$, pois não é contínua em $x = 0 \in \mathbb{R}$.

PROPOSIÇÃO 3.4. *Uma função $f = (f_1,\ldots,f_k)$ é diferenciável em $p$ se, e somente se, para todo $i$, $f_i$ for diferenciável em $p$. Neste caso,*
$$df(p) = (df_1(p), df_2(p), \ldots, df_k(p)).$$

DEMONSTRAÇÃO. Temos que $f$ é diferenciável em $p$ se, e somente se, existir $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ linear, $L = (L_1,\ldots,L_k)$, tal que $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{f(x)-f(p)-L(x-p)}{\|x-p\|} = 0$. Isto, por sua vez, é equivalente a $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{f_i(x)-f_i(p)-L_i(x-p)}{\|x-p\|} = 0$, para todo $i = 1,\ldots k$.

Assim, $f$ é diferenciável em $p$ se, e somente se, $f_i$ for diferenciável em $p$, com $df_i(p) = L_i$, para todo $i = 1, \dots k$. $\square$

APLICAÇÃO. Sejam $F(x) = (f(x), g(x))$, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ e $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciáveis em $p$. Então $F$ é diferenciável em $p$.

De fato, temos que $F(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x), g_1(x), \dots, g_m(x))$ é diferenciável em $p$, pois suas componentes são diferenciáveis em $p$. Além disso,

$$dF(p) = (df_1(p), \dots, df_k(p), dg_1(p), \dots, dg_m(p)),$$

isto é, $dF(p) = (df(p), dg(p))$. Matricialmente,

$$F'(p) = \begin{pmatrix} f_1'(p) \\ f_2'(p) \\ \vdots \\ g_1'(p) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(p) \\ \cdots\cdots\cdots \\ g'(p) \end{pmatrix}.$$

DEFINIÇÃO. Dado $v \in \mathbb{R}^n$, a *derivada direcional de $f$ na direção de $v$* é

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}, \text{ se este existir.}$$

A *derivada parcial* de $f$ na direção de $e_i$ é

$$D_{x_i} f(p) = D_i f(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(p).$$

OBSERVAÇÃO 3.5. 1. Pode existir $\dfrac{\partial f}{\partial v}(p)$, para todo $v$, e $f$ não ser diferenciável em $p$ (e nem mesmo contínua em $p$). Por exemplo,

(a) A função $f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y = x^2 \neq 0; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ não é contínua em $(0,0)$ mas existe $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$, para todo $v$.

(b) Se $v = 0$ então existe $\dfrac{\partial f}{\partial v}(p) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(p) - f(p)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} 0 = 0$.

(c) A função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ não é contínua em $(0,0)$, mas, para qualquer $v = (h,k)$, tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{2t^3hk^2}{t^3(h^2 + t^2k^4)} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{2hk^2}{h^2 + t^2 k^4} = \begin{cases} \frac{2k^2}{h}, & \text{se } h \neq 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

2. Existe $\dfrac{\partial f}{\partial v}(p)$ se, e somente se, existe $\dfrac{\partial f}{\partial(-v)}(p)$. Neste caso, temos

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = -\frac{\partial f}{\partial(-v)}(p).$$

De fato,

$$\frac{\partial f}{\partial(-v)}(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p - tv) - f(p)}{t} = -\lim_{t \to 0} \frac{f(p + (-tv)) - f(p)}{-t} \overset{(s=-t)}{=}$$

$$= -\lim_{s \to 0} \frac{f(p + sv) - f(p)}{s} = -\frac{\partial f}{\partial v}(p).$$

3. Em geral, para $\lambda \neq 0$, existe $\dfrac{\partial f}{\partial v}(p)$ se, e somente se, existir $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda v}(p)$ e, nesse caso, $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda v}(p) = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial v}(p)$.

PROPOSIÇÃO 3.6. *Se $f$ é diferenciável em $p \in A$ então, para todo $v \in \mathbb{R}^n$, existe*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = df(p)(v).$$

DEMONSTRAÇÃO. Se $f$ é diferenciável em $p$, temos

$$\frac{f(p + tv) - f(p)}{t} = \frac{df(p)(tv) + r(tv)}{t}, \text{ onde } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

Assim, se $v \neq 0$,

$$\frac{f(p + tv) - f(p)}{t} = df(p)(v) + \frac{r(tv)}{t} = df(p)(v) + \frac{r(tv)}{\|tv\|} \frac{\|tv\|}{t}.$$

Como $\dfrac{r(tv)}{\|tv\|} \to 0$, quando $t \to 0$ e $\dfrac{\|tv\|}{t}$ é limitado, resulta que

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} = df(p)(v).$$

E se $v = 0$? □

OBSERVAÇÃO 3.7. 1. Se $f \colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $p \in A$ então

$$f'(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial v}(p) = \nabla f(p).v,$$

onde $\nabla f(p) = \left( \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(p), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)$.

2. Se $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é diferenciável em $p \in A$ então
$$f'(p) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(p) \\ \vdots \\ \nabla f_k(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$
e $\dfrac{\partial f}{\partial v}(p) = (\nabla f_1(p).v, \dots, \nabla f_k(p).v)$.
3. Se $\gamma$: $]a,b[\to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $t_0 \in ]a,b[$ então
$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t_0) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t_0) \end{pmatrix}.$$

APLICAÇÕES.

1. A função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ não é diferenciável em $(0,0)$, pois não é contínua em $(0,0)$.
2. A função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ não é diferenciável em $(0,0)$, pois não existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.
3. A função $f(x,y) = |x| + |y|$ não é diferenciável em $(0,0)$, pois não existe
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}.$$
4. A função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ é diferenciável em $(0,0)$?

   Solução: Temos que $f$ é contínua em $(0,0)$, pois $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ coincide com $f(0,0)$, já que $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ é limitada e $y \to 0$. Através da continuidade, não podemos decidir sobre a diferenciabilidade. Vejamos as derivadas parciais:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$
   Assim, a candidata à $f'(0,0)$ é: $f'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, ou seja, devemos ter $df(0,0)(h,k) = 0$.

Verificação:

$$\frac{f(h,k)-f(0,0)-0h-0k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{hk}{h^2+k^2}\overset{(h=k)}{=}\frac{1}{2}\not\to 0.$$

Portanto, $f$ não é diferenciável.

5. A função $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}$ não é diferenciável em $(0,0)$ pois, para $v=(h,k)\neq(0,0)$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(th,tk)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^3hk^2}{t^3\sqrt{h^4+k^4}}=\frac{hk^2}{\sqrt{h^4+k^4}},$$

que não é linear em $v=(h,k)$. Logo, $f$ não é diferenciável em $(0,0)$.

6. A função $f\colon\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=x.y$ é diferenciável?

Solução: Procuremos a candidata à $df(x_0,y_0)$, determinando as derivadas direcionais de $f$.

$$\frac{f((x_0,y_0)+t(h,k))-f(x_0,y_0)}{t}=\frac{f(x_0+th,y_0+tk)-f(x_0,y_0)}{t}=$$

$$=\frac{th.y_0+tx_0.k+t^2h.k}{t}=h.y_0+x_0.k+th.k\to h.y_0+x_0.k,$$

quando $t\to 0$. Assim, existe $\dfrac{\partial f}{\partial(h,k)}(x_0,y_0)=x_0.k+h.y_0$. Portanto, a candidata à $df(x_0,y_0)\colon\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ é

$$df(x_0,y_0)(h,k)=x_0.k+h.y_0.$$

Verificação: Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$0\leq\left|\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-x_0.k-h.y_0}{\|(h,k)\|}\right|=$$

$$=\frac{|h.k|}{\sqrt{|h|^2+|k|^2}}\leq\frac{\|h\|\|k\|}{\sqrt{|h|^2+|k|^2}}\to 0,\text{ quando }(h,k)\to 0,$$

pois $\dfrac{\|h\|}{\sqrt{|h|^2+|k|^2}}\leq 1$ e $|k|\to 0$. Portanto, $f$ é diferenciável.

7. A função $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}; & \text{se } (x,y)\neq(0,0);\\ 0 & \text{caso contrário}\end{cases}$ é diferenciável em $(0,0)$, pois $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ e $\dfrac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\dfrac{h^2k}{h^2+k^2}\to 0$, quando $(h,k)\to(0,0)$. Neste caso,

$$df(0,0)(h,k)=0h+0k\text{ e }f'(0,0)=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}.$$

8. Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, se $f\colon A \to \mathbb{R}$ tem derivadas parciais em $p \in A$ extremo local de $f$ então $\nabla f(p) = 0$. De fato, para $t$ real suficientemente pequeno, considere $\varphi(t) = f(p + te_i)$. Temos que $\varphi'(0) = \dfrac{\partial f}{\partial e_i}(p) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p)$. Como $\varphi$ assume extremo local em $t = 0$, resulta que $0 = \varphi'(0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p)$, para todo $i$, ou seja, $\nabla f(p) = 0$.
9. Sejam $f, g\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ diferenciáveis no aberto $A$. Então a função $F(x,y) = (f(x), g(y))$ é diferenciável em $A \times A \subset \mathbb{R}^{2n}$.

$$\text{candidata à } F'(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f'(x_0) & \vdots & 0 \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ 0 & \vdots & g'(y_0) \end{pmatrix}.$$

Verificação:

$$\frac{(f(x_0+h), g(y_0+k)) - (f(x_0), g(y_0)) - (f'(x_0)h, g'(y_0)k)}{\|(h,k)\|} =$$

$$= \left( \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{\|(h,k)\|}, \frac{g(y_0+k) - g(y_0) - g'(y_0)k}{\|(h,k)\|} \right).$$

Temos

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{\|(h,k)\|} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{\|h\|} \dfrac{\|h\|}{\|(h,k)\|}, & \text{se } h \neq 0; \\ 0, & \text{se } h = 0 \end{cases}$$

que tende a $0 \in \mathbb{R}^k$ quando $(h,k) \to 0$. Analogamente,

$$\frac{g(y_0+k) - g(y_0) - g'(y_0)k}{\|(h,k)\|} \to 0, \text{ quando } (h,k) \to (0,0).$$

PROPOSIÇÃO 3.8 (Regra da Cadeia). *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^k$ abertos, $f\colon A \to B$ diferenciável em $p \in A$ e $g\colon B \to \mathbb{R}^m$ diferenciável em $f(p) \in B$. Então $g \circ f$ é diferenciável em $p \in A$ e $d(g \circ f)(p) = dg(f(p)) \circ df(p)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\Delta f = f(p+h) - f(p)$. como $g$ é diferenciável em $f(p)$ e $f$ é diferenciável em $p$, temos

$$(g \circ f)(p+h) - (g \circ f)(p) = dg(f(p))(\Delta f) + r(\Delta f) \left( \text{com } \lim_{k \to 0} \frac{r(k)}{\|k\|} = 0 \right) =$$

$$= dg(f(p))(df(p)(h) + s(h)) + r(\Delta f) \left( \text{onde } \lim_{h \to 0} \frac{s(h)}{\|h\|} = 0 \right) =$$

$$= dg(f(p))df(p))h + dg(f(p))(s(h)) + r(\Delta f).$$

Assim, basta mostrar que

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{dg(f(p))(s(h))+r(\Delta f)}{\|h\|}=\lim_{h\to 0}\left(dg(f(p))\left(\frac{s(h)}{\|h\|}\right)+\frac{r(\Delta f)}{\|h\|}\right).$$

Como $\dfrac{s(h)}{\|h\|}\to 0$, basta provar que $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{r(\Delta f)}{\|h\|}=0$, isto é, para todo $\varepsilon>0$, $|r(\Delta f)|<\varepsilon\|h\|$, para $h\neq 0$ suficientemente pequeno. Sejam $M,\delta_1>0$ tais que

$$\left|df(p)\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\right|\leq M \text{ e } \left|\frac{s(h)}{\|h\|}\right|\leq 1, \text{ para } 0<\|h\|<\delta_1.$$

Dado $\varepsilon>0$, existe $\delta_2>0$ tal que $\|r(k)\|<\dfrac{\varepsilon}{M+1}\|k\|$, para $\|k\|<\delta_2$. Assim, existe $0<\delta_3<\delta_1$ tal que

$$\Big\|r(f(p+h)-f(p))\Big\|<\frac{\varepsilon}{M+1}\|f(p+h)-f(p)\|, \text{ para } \|h\|<\delta_3,$$

pois $f$ é contínua em $p$. Dessa maneira, temos

$$\|r(\Delta f)\|<\frac{\varepsilon}{M+1}\|df(p)(h)+s(h)\|=\frac{\varepsilon}{M+1}\|h\|\left\|\left(df(p)\Big(\frac{h}{\|h\|}\Big)+\frac{s(h)}{\|h\|}\right)\right\|\leq$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{M+1}\|h\|\left(\left\|df(p)\Big(\frac{h}{\|h\|}\Big)\right\|+\left\|\frac{s(h)}{\|h\|}\right\|\right)\leq\varepsilon\|h\|.$$

□

APLICAÇÕES.

1. Temos que $\dfrac{d}{dt}f(x(t),y(t))=\dfrac{\partial f}{\partial x}x'+\dfrac{\partial f}{\partial y}y'=\nabla f(\gamma(t)).\gamma'(t)$, desde que as funções $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ e $\gamma\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ sejam diferenciáveis.

   De fato, temos

   $$\begin{array}{ccccc} t & \overset{\gamma}{\longmapsto} & (x(t),y(t)) & & \\ & & (x,y) & \overset{f}{\longmapsto} & f(x,y)\end{array}$$

   Pela Regra da Cadeia, $d(f\circ\gamma)(t)=df(\gamma(t))d\gamma(t)$, ou seja,

   $$(f\circ\gamma)'(t)=f'(\gamma(t))\gamma'(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}_{\gamma(t)}\begin{pmatrix}x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}=\nabla f(\gamma(t)).\gamma'(t).$$

2. Temos que

   $$\frac{d}{dt}f(x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t))=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))x_i'(t)=\nabla f(\gamma(t)).\gamma'(t)$$

   se as funções $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ e $\gamma\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, $\gamma(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t))$, forem diferenciáveis.

3. Se $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\sigma(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ são diferenciáveis então
$$\frac{\partial}{\partial u} f(x(u,v), y(u,v)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \text{ e}$$
$$\frac{\partial}{\partial v} f(x(u,v), y(u,v)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$
De fato,
$$\begin{array}{ccccc} (u,v) & \overset{\sigma}{\longmapsto} & (x(u,v), y(u,v)) & & \\ & & (x,y) & \overset{f}{\longmapsto} & f(x,y) \end{array}$$
Pela Regra da Cadeia,
$$(f\circ\sigma)'(u,v) = f'(\sigma(u,v))\sigma'(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}_{\sigma(u,v)} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}_{(u,v)} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}_{(u,v)} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x(u,v), y(u,v))}{\partial u} & \frac{\partial f(x(u,v), y(u,v))}{\partial v} \end{pmatrix}.$$
4. Se $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ são diferenciáveis então
$$D_i(f\circ g)(p) = \sum_j D_j f(g(p)) D_i g_j(p).$$
5. Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, se $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $p$ e $\gamma\colon\, ]-\delta,\delta[ \to \mathbb{R}^n$ é derivável em 0, com $\gamma'(0) = v$ e $\gamma(0) = p$, então
$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t)\Big|_{t=0}.$$
Prova: $\displaystyle \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t)\Big|_{t=0} \overset{\text{RC}}{=} df(\gamma(0))(\gamma'(0)) = df(p)(v) \overset{\text{(Prop 3.6)}}{=} \frac{\partial f}{\partial v}(p)$.
Observe que, quando $f$ não é diferenciável em $p$,
   (a) podem existir $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$, $\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t)\Big|_{t=0}$ e serem diferentes; por exemplo, para
$$f(x,y) = \begin{cases} (x,y), & \text{se } y = x^2; \\ (0,0) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$
   temos $\frac{\partial f}{\partial e_1}(0,0) = (0,0)$; tomando a curva $\gamma(t) = (t,t^2)$, temos $\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)\Big|_{t=0} = (1,0)$;

(b) pode existir $\dfrac{\partial f}{\partial v}(p)$ e não existir $\left.\dfrac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t)\right|_{t=0}$. Por exemplo, para

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

se $p=0$, $v=e_2$ e $\gamma(t)=(t,\sqrt{t})$.

6. Seja $u=u(x,t)$ tal que $u=f(x,y,z)$, $y=h(x,t)$, $z=g(x,y,t)$ são diferenciáveis. Temos que $u(x,t)$ é diferenciável. De fato, como

$$u(x,t)=f(x,h(x,t),g(x,h(x,t),t)),$$

temos que $u(x,t)=f\circ G\circ F(x,t)$, onde

$$\begin{array}{lllll} (x,t) & \overset{F}{\longmapsto} & (x,h(x,t),t) & & \\ & & (x,y,t) & \overset{G}{\longmapsto} & (x,y,g(x,y,t)) \\ & & & & (x,y,z) \overset{f}{\longmapsto} f(x,y,z) \end{array}$$

Pela Regra da Cadeia, temos que $u$ é diferenciável, pois $F,G$ e $f$ são diferenciáveis. Temos $u'(x,t)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial t}\end{pmatrix}$, onde

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right) \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial g}{\partial t}\right).$$

7. Temos que a função $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x.x=\|x\|^2$ é diferenciável e $df(x_0)(h)=2x_0.h$ De fato,

$$\begin{array}{lllll} x\in\mathbb{R}^n & \overset{G}{\longmapsto} & (x,x)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n & & \\ & & (x,y) & \overset{F}{\longmapsto} & x.y \end{array}$$

$G$ é linear, portanto, diferenciável e $F$ é diferenciável. Então, pela Regra da Cadeia, $f=F\circ G$ é diferenciável e $df(x_0)=dF(G(x_0))dG(x_0)$. Assim,

$$df(x_0)(h)=dF(x_0,x_0)(h,k)=x_0.h+x_0.h=2x_0.h.$$

PROPOSIÇÃO 3.9. *Sejam $A\subset\mathbb{R}^n$ aberto, $\lambda\in\mathbb{R}$ e $f,g\colon A\to\mathbb{R}^k$ diferenciáveis. Então:*

1. *A função $f+g$ é diferenciável e $d(f+g)(x)=df(x)+dg(x)$;*
2. *A função $\lambda f$ é diferenciável e $d(\lambda f)(x)=\lambda df(x)$;*
3. *A função $f.g$ é diferenciável e $d(f.g)(x)=f(x).dg(x)+g(x).df(x)$;*

*4. Se* $k=1$ *e* $f(x)\neq 0$ *então* $\dfrac{1}{f}$ *é diferenciável em* $x$ *e*

$$d\left(\frac{1}{f}\right)(x) = -\frac{1}{f(x)^2}df(x).$$

DEMONSTRAÇÃO. 1. $x \overset{F}{\longmapsto} (f(x),g(x))$

$$(u,v) \overset{G}{\longmapsto} u+v$$

Como $F$ e $G$ são diferenciáveis, então $G\circ F(x) = f(x)+g(x)$ é diferenciável e

$$d(G\circ F)(x) = dG(F(x))\circ dF(x)) = G\circ(df(x),dg(x)) = df(x)+dg(x).$$

2. $x \overset{f}{\longmapsto} f(x)$

$$u \overset{G}{\longmapsto} \lambda u$$

Como $G$ e $f$ são diferenciáveis, então $G\circ f(x) = \lambda f(x)$ é diferenciável em $x$ e $d(G\circ f)(x) = G\circ df(x) = \lambda df(x)$.

3. $x \overset{F}{\longmapsto} (f(x),g(x))$

$$(u,v) \overset{G}{\longmapsto} u.v$$

Como $G$ e $F$ são diferenciáveis, então $(G\circ F)(x) = f(x).g(x)$ é diferenciável em $x$ e

$$d(G\circ F)(x) = dG(F(x))\circ dF(x) = DG(F(x))\circ(df(x),dg(x)).$$

Logo,

$$d(G\circ F)(x)(h) = dG(f(x))(df(x)(h),dg(x)(h)) =$$

$$= f(x).dg(x)(h)+g(x).df(x)(h).$$

4. $x \overset{f}{\longmapsto} f(x)\in\mathbb{R}^*$

$$t\in\mathbb{R}^* \overset{h}{\longmapsto} \frac{1}{t}$$

Como $h$ e $f$ são diferenciáveis, então $(h\circ f)(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ é diferenciável e

$$d(h\circ f)(x) = dh(f(x))\circ df(x) = -\frac{1}{f(x)^2}df(x).$$

$\square$

DEFINIÇÃO. Uma função $f\colon D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ é de *classe* $C^1$ em $p\in D$ se, numa vizinhança aberta $V(p)$ de $p$ contida em $D$, existirem todas as $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ e forem contínuas em $p$.

OBSERVAÇÃO 3.10. Considerando o espaço $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ com qualquer uma das normas $\|A\| = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ou $\|A\|_1 = \sup\{\|A(x)\| : \|x\| \leq 1\}$, temos que $f \in C^1$ em $p$ se, e somente se, $x \in V(p) \mapsto \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ for contínua em $p$.

TVM DA RETA. Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua e derivável em $]a,b[$ então existe $\bar{x} \in ]a,b[$ tal que $f'(\bar{x}) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

PROPOSIÇÃO 3.11. *Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, se $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ é de classe $C^1$ em $p$ então $f$ é diferenciável em $p$.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta provar para $m = 1$. Indicaremos a demonstração para $n = 2$. Temos

$$\frac{f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \frac{f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0+k) + f(x_0,y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\overset{\text{(TVM)}}{=} \frac{f_x(\bar{x},y_0+k)h + f_y(x_0,\bar{y})k - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \Big(f_x(\bar{x},y_0+k) - f_x(x_0,y_0)\Big)\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} + \Big(f_y(x_0,\bar{y}) - f_y(x_0,y_0)\Big)\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0,$$

quando $(h,k) \to (0,0)$. □

EXEMPLO 3.12.

1. Contra-exemplo para a recíproca da Proposição 3.11:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Temos $f'(0) = \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x} = 0 = f(0)$ e $f'(x) = 2x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$, se $x \neq 0$. Observemos que $f'$ não é contínua no ponto $x = 0$, já que não existe $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}\right)$. Observe que $\lim\limits_{x\to 0} 2x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0$, mas não existe $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ $\left(\text{basta tomar as seqüências } x_k = \dfrac{1}{2k\pi} \text{ e } y_k = \dfrac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}}.\right)$. Assim, $f$ é diferenciável em 0, mas não é de classe $C^1$ em 0.

2. Consideremos $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se } x = y = 0. \end{cases}$

Vejamos que $f$ é diferenciável em $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{|x|}}{x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Candidata à $df(0,0)(h,k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = 0h + 0k.$

Verificação:

$$\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{(h^2+k^2)}{\sqrt{h^2+k^2}} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{h^2+k^2} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0,$$

quando $(h,k) \to (0,0)$. Porém, $f$ não é de classe $C^1$ em $p=0$; de fato, temos que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Assim, $\frac{\partial f}{\partial x}$ não é contínua em $(0,0)$ pois

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{|x|} - \frac{x}{|x|} \cos \frac{1}{|x|} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2k\pi}, 0\right)_{k\in\mathbb{N}} = -1 \not\to 0,$$

quando $k \to \infty$.

3. A função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se } x = y = 0 \end{cases}$ não é diferenciável em $(0,0)$. E nos outros pontos? Nos outros pontos, $f \in C^1$, pois temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(x^2+y^4)2y^2 - 4x^2y^2}{(x^2+y^4)^2} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^2+y^4)4xy - 8xy^5}{(x^2+y^4)^2}$$

são contínuas em $(x,y) \neq (0,0)$.

DEFINIÇÃO. $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é *de classe $C^2$* em $p \in D$ se, numa vizinhança aberta de $p$, $V(p)$, contida em $D$, existem $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}$ e são contínuas em $p$, para todo $i, j, k$.

EXEMPLO 3.13. 1. $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}$ é de classe $C^1$ em $\mathbb{R}^2$ e o maior aberto onde $f$ é de classe $C^2$ é $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Verifique.

2. $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se } x = 0 = y. \end{cases}$

Verifique que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$ e conclua, pelo teorema abaixo, que $f$ não é de classe $C^2$ em $(0,0)$.

TEOREMA 3.14 (Teorema de Schwarz). *Seja $f\colon A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ em $A$ aberto. Se, para algum $(i,j)$ existem $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ e são contínuas em $A$ então $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ em $A$.*

DEMONSTRAÇÃO. Indicaremos para $n=2$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{k}$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)}{h}-\dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}}{k}=$$

$$=\lim_{k\to 0}\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)+f(x_0,y_0)}{hk}\right)=$$

$$=\lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(y_0+k)-\varphi(y_0)}{hk}\ (\text{onde } \varphi(t)=f(x_0+h,t)-f(x_0,t))=$$

$$\overset{\text{TVM}}{=}\lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{\varphi'(\bar t)}{h}\ (\bar t \text{ entre } y_0 \text{ e } y_0+k)\ =$$

$$=\lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h,\bar t)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\bar t)}{h}=$$

$$=\lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\bar x,\bar t)\ (\bar x \text{ entre } x_0 \text{ e } x_0+h)=$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,\bar t)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0).$$

□

PROPOSIÇÃO 3.15 (Teorema do Valor Médio). *Sejam $A\subset\mathbb{R}^n$ aberto, $f\colon A\to\mathbb{R}^m$ diferenciável e $\overline{pq}\subset A$. Então existem $c_i\in\overline{pq}$ tais que*

$$f(q)-f(p)=\begin{pmatrix}\nabla f_1(c_1)\\ \vdots\\ \nabla f_m(c_m)\end{pmatrix}(q-p).$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\gamma\colon[0,1]\to\mathbb{R}^n$ dada por

$$\gamma(t)=p+t(q-p)=tq+(1-t)p.$$

Temos $f(\gamma(t))=(f_1(\gamma(t)),\dots,f_m(\gamma(t)))$. Consideremos $\varphi_i=f_i\circ\gamma\colon[0,1]\to\mathbb{R}$. Pelo Teorema do Valor Médio da reta, existe um ponto $t_i\in]0,1[$ de modo que $\varphi_i(1)-\varphi_i(0)=\varphi_i'(t_i)(1-0)$, isto é,

$$f_i(q)-f_i(p)=\nabla f_i(\gamma(t_i))\gamma'(t_i)=\nabla f_i(\gamma(t_i))(q-p).$$

Seja $c_i = \gamma(t_i)$; assim,

$$f(q) - f(p) = \Big(\nabla f_1(c_1)(q-p), \dots, \nabla f_m(c_m)(q-p)\Big) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(c_1) \\ \vdots \\ \nabla f_m(c_m) \end{pmatrix} (q-p).$$

$\square$

OBSERVAÇÃO 3.16. Não se pode garantir que $c_1 = c_2 = \cdots = c_m$, como mostra o exemplo $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$, para $q = 0$ e $p = 2\pi$.

COROLÁRIO 3.17. *Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto convexo, se $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável e, para todo $i$, $j$ e $x \in A$ vale $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right| \le M$, então $\|f(x) - f(y)\| \le M\sqrt{mn}\,\|x-y\|$, para todo $x, y \in A$.*

DEMONSTRAÇÃO. Como $A$ é convexo, dados $x, y \in A$, temos que $\overline{xy} \subset A$. Assim,

$$\|f(x) - f(y)\| \overset{\text{(TVM)}}{=} \left\| \begin{pmatrix} \nabla f_1(c_1) \\ \vdots \\ \nabla f_m(c_m) \end{pmatrix} (x-y) \right\| \le$$

$$\le \sqrt{\sum_{i,j} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c_i)\right)^2}\,\|x-y\| \le \sqrt{M^2 mn}\|x-y\|.$$

$\square$

COROLÁRIO 3.18. *Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, se $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ é de classe $C^1$ então $f$ é localmente lipschitziana.*

DEMONSTRAÇÃO. Dado $p \in A$, existe $\overline{B}_r(p) \subset A$. Como $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ são contínuas em $\overline{B}_r(p)$, existe $M > 0$ tal que $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right| \le M$, para todo $x \in \overline{B}_r(p)$ e para todo $i, j$. Logo, pelo corolário anterior, como $\overline{B}_r(p)$ é convexo (verifique), temos

$$\|f(x) - f(y)\| \le M\sqrt{mn}\|x-y\|, \ \text{ para todo } x, y \in \overline{B}_r(p).$$

$\square$

COROLÁRIO 3.19. *Dados $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ de classe $C^1$, se $K \subset A$ é compacto convexo então $f$ é lipschitziana em $K$.*

DEMONSTRAÇÃO. exercício. $\square$

COROLÁRIO 3.20. *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto conexo e $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ é uma função diferenciável com $df(x) = L$ constante então $f(x) = L(x) + c$, onde $c \in \mathbb{R}^m$ é uma constante.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $A$ é aberto conexo então $A$ é conexo por poligonais. Fixamos $x_0 \in A$. Para todo $x \in A$, considere uma poligonal $x_0, \widehat{x_1, \dots}, x_k = x$ contida em $A$. Como $df(x) = L$, temos, pelo TVM,

$$\begin{aligned}
f(x_1) - f(x_0) &= \begin{pmatrix} \nabla f_1(c_1) \\ \vdots \\ \nabla f_m(c_m) \end{pmatrix} (x_1 - x_0) &&= L(x_1 - x_0) \\
f(x_2) - f(x_1) &= \cdots &&= L(x_2 - x_1) \\
&\vdots \\
f(x_k) - f(x_{k-1}) &= \cdots &&= L(x_k - x_{k-1})
\end{aligned}$$

Somando essas expressões, obtemos $f(x) - f(x_0) = L(x) - L(x_0)$, ou seja, $f(x) = L(x) + c$, onde $c = f(x_0) - L(x_0)$. □

OBSERVAÇÃO 3.21.

1. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto conexo, $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ diferenciável e $df(x) = 0$, para todo $x$, então $f$ é constante.
2. Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo, se $f, g\colon A \to \mathbb{R}^m$ são funções diferenciáveis e $df(x) = dg(x)$, para todo $x$, então $f - g$ é constante.

COROLÁRIO 3.22. *Dados $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $K \subset A$ compacto, se $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ é de classe $C^1$ então $f$ é lipschitziana em $K$.*

DEMONSTRAÇÃO. Para cada $x \in K$, considere $\overline{B}_\delta(x) \subset A$, onde $f\big|_{\overline{B}_\delta(x)}$ é lipschitziana. Temos $K \subset \bigcup_{x \in K} B_\delta(x)$, portanto, existem $\delta_1, \dots, \delta_s$, tais que $K$ está contido em $B_{\delta_1} \cup \dots \cup B_{\delta_s}$. Seja $M = \max\{M_1, \dots, M_s\} > 0$, onde $M_i > 0$ é uma constante de Lipschitz de $f\big|_{\overline{B}_{\delta_i}}$. Assim, para todo $(x,y) \in K \times K$, temos

(i) se $x, y \in \overline{B}_{\delta_i}$ então $\|f(x) - f(y)\| \leq M_i \|x - y\| \leq M \|x - y\|$.

(ii) se $(x,y) \in F = (K \times K) \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{s} B_{\delta_i} \times B_{\delta_i} \right)$:

a função $(x,y) \in F \mapsto \dfrac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|}$ é contínua, portanto, assume máximo no compacto $F$. Logo, existe $N > 0$ tal que, para todo elemento $(x,y) \in F$, $\|f(x) - f(y)\| \leq N \|x - y\|$. Escolhendo $\lambda = \max\{M, N\}$, resulta que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|, \text{ para todo } x, y \in K.$$

□

OBSERVAÇÃO 3.23. Se $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é contínua então
$$\left\| \int_a^b \alpha(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|\alpha(t)\| dt.$$
De fato, temos: $\displaystyle\int_a^b \alpha(t)dt = \lim_{|P|\to 0} \sum_P \alpha(c_i)\Delta t_i$ e $\displaystyle\int_a^b \|\alpha(t)\|dt = \lim_{|P|\to 0} \sum_P \|\alpha(c_i)\|\Delta t_i$, onde $P\colon a = t_0 < t_1 \cdots < t_n = b$ é uma partição do intervalo $[a,b]$, $|P|$ é o máximo do conjunto $\{\Delta t_i\colon 1 \leq i \leq n\}$ e $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Como $\displaystyle\left\| \sum_P \alpha(c_i)\Delta t_i \right\| \leq \sum_P \|\alpha(c_i)\|\Delta t_i$, passando ao limite, temos
$$\left\| \int_a^b \alpha(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|\alpha(t)\| dt.$$

PROPOSIÇÃO 3.24. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto convexo, $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ de classe $C^1$ que verifica $\|f'(x)\|_1 \leq M$, para todo $x \in A$. Então $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$, para todo $x, y \in A$.*

$(\|L\|_1 = \sup\{\|L(x)\|\colon \|x\| \leq 1\})$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\gamma(t) = x + t(y - x)$. Assim,
$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\gamma(t))dt = \int_0^1 df(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$
Portanto,
$$\|f(x) - f(y)\| = \left\| \int_0^1 df(\gamma(t))\gamma'(t)dt \right\| \leq \int_0^1 \|df(\gamma(t))\gamma'(t)\|dt \leq$$
$$\leq \int_0^1 \|df(\gamma(t)\|_1 \|\gamma'(t)\|dt \leq \int_0^1 M\|\gamma'(t)\|dt = M\|y - x\|.$$

□

## 3.1. O Teorema da Função Inversa

Na reta, temos:

TEOREMA 3.25. *Dado $I \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto, se a função $f\colon I \to \mathbb{R}$ é derivável com $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in I$, então $f$ é bijetora de $I$ sobre o intervalo aberto $f(I) = J$, $f^{-1}\colon J \to I$ é derivável e $f$ é aberta em $I$.*

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Teorema do Valor Intermediário, $f(I) = J$ é intervalo. E, pelo Teorema do Valor Intermediário para derivadas, $f'(x)$ não muda de sinal. Assumindo que $f'(x) > 0$, para todo $x \in I$, $f$ é estritamente crescente em $I$ (e, portanto, injetora), pois dado $x < x'$ em $I$, existe $\bar{x}$ entre $x$ e $x'$ tal que $f(x) - f(x') =$

$f'(\bar{x})(x-x') < 0$. Logo, $f\colon I \to J = f(I)$ é inversível sobre o intervalo $J$. Para ver que $f$ é aberta em $I$ (isto é, para todo $A \subset I$ aberto, $f(A)$ é aberto), basta mostrar que se $I_1 \subset I$ é intervalo aberto então o intervalo $f(I_1)$ é aberto. De fato, para todo $c \in f(I_1)$, $c = f(x_1)$ com $x_1 \in I_1$, sejam $x_2$ e $x_3$ em $I$ tais que $x_2 < x_1 < x_3$. Temos $f(x_2) < f(x_1) < f(x_3)$, de onde segue que $c \in \widehat{f(I_1)}^{\circ}$. Assim, $f\colon I \to f(I)$ é bijetora e aberta; logo, $f^{-1}\colon f(I) \to I$ é contínua, pois, para todo $A$ aberto de $\mathbb{R}$, $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A \cap I)$ é aberto, já que $A \cap I$ é aberto. Ver também Exemplo 7 após a Proposição 2.7. Vejamos que $f^{-1}$ é derivável em $y_0 \in J$:

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Para aplicações lineares, temos:

TEOREMA 3.26. *Uma aplicação linear $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é bijetora se, e somente se,* $\det L$ *for diferente de zero. Neste caso, $L$ é aberta.*

Seja $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ dada por $\begin{cases} u(x,y) = e^x \cos y; \\ v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y. \end{cases}$

Temos $JF = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0$, para todo $(x,y)$, porém $f$ não é injetora em $\mathbb{R}^2$: $f(x, y+2\pi) = f(x,y)$.

TEOREMA 3.27 (Teorema da Função Inversa). *Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, se a função $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ é de classe $C^1$, com $Jf(x_0) = \det f'(x_0) \neq 0$, então $f$ é um difeomorfismo $C^1$ local em $x_0$, isto é, existem abertos $U, V \subset \mathbb{R}^n$ com $x_0 \in U$ e $f(x_0) \in V$ tais que $f\colon U \to V$ é bijetora com inversa $f^{-1}\colon V \to U$ de classe $C^1$.*

Neste caso,

1. $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ é *aberta* (isto é, para todo aberto $\mathcal{A} \subset U$, $f(\mathcal{A})$ é aberto). De fato, se $B \subset U$ é aberto então $f(B) = (f^{-1})^{-1}(B)$ é aberto de $V$, logo, de $\mathbb{R}^n$.
2. $(f \circ f^{-1})(y) = y$ implica $Df(f^{-1}(y))Df^{-1}(y) = I$, ou seja,
$$Df^{-1}(y) = [Df(f^{-1}(y))]^{-1},$$
para todo $y \in V$. Além disso, $f^{-1} \in C^k$, $(k \geq 1)$, desde que $f \in C^k$.

Antes da demonstração do Teorema, vejamos algumas aplicações:

EXEMPLO 3.28. 1. Se $f\colon A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ é de classe $C^1$ no aberto $A$ e $Jf(x)\neq 0$, para todo $x\in A$, então $f$ é aberta (isto é, para todo aberto $B\subset A$, $f(B)$ é aberto).

De fato, dado $\mathcal{A}\subset A$ aberto e $p\in\mathcal{A}$, existem abertos $U_p\subset\mathcal{A}$ e $V_p$ tais que $f(U_p)=V_p$ (por quê?), logo,

$$f(\mathcal{A})=f\left(\bigcup_{p\in\mathcal{A}}U_p\right)=\bigcup_{p\in\mathcal{A}}f(U_p)=\bigcup_{p\in\mathcal{A}}V_p \text{ é aberto.}$$

2. Diremos que $\varphi\colon A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo (de classe $C^k$, $k\geq 1$) no aberto $A$ se $\varphi$ é diferenciável (de classe $C^k$, $k\geq 1$), é injetora sobre um aberto $\varphi(A)$ com inversa $\varphi^{-1}\colon\varphi(A)\to A$ diferenciável (de classe $C^k$, $k\geq 1$).

   Seja $\varphi\colon A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ de classe $C^{k\geq 1}$ no aberto $A$. Tem-se que $\varphi$ é um difeomorfismo se, e somente se, $\varphi$ for injetora com $\det\varphi'(x)\neq 0$, para todo $x\in A$.
3. A função $f(x)=\begin{cases} x+x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}, & \text{se } x\neq 0;\\ 0, & \text{se } x=0\end{cases}$ é derivável em $\mathbb{R}$, $f'(0)=1$, mas $f$ não é localmente injetora em $x=0$. Como você explica?
4. A função derivável $f(x)=x^3$ tem inversa $g(x)=\sqrt[3]{x}$ que não é derivável em 0. Como você explica?
5. Se $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ é uma função de classe $C^1$ com inversa $f^{-1}\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ e $\det f'(p_0)=0$, mostre que $f^{-1}$ não é diferenciável em $f(p_0)$.
6. A função $f(x,y)=(x^3,y^3)$ é injetora mas $\det f'(0,0)=0$.
7. Estude a injetividade local de $f(x,y)=(x^2+2xy+y^2,x+y)$ em cada ponto de $\mathbb{R}^2$.
8. Seja $f\colon M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R})$, $f(X)=X^2$. Mostre que, para todo $Y\in M_n(\mathbb{R})$ suficiente próximo de $I$, existe um único $X(=\sqrt{Y})$ próximo de $I$ tal que $X^2=Y$ e $X=X(Y)$ é de classe $C^\infty$.
9. Seja $p_0(x)=a_0x^3-b_0x^2+c_0x-d_0$ um polinômio com coeficientes reais e três raízes reais distintas. Então qualquer polinômio da forma $p(x)=ax^3-bx^2+cx-d$ que tem coeficientes reais $(a,b,c,d)$ suficientemente próximo de $(a_0,b_0,c_0,d_0)$ também tem 3 raízes reais distintas e que variam em classe $C^\infty$ com os coeficientes do polinômio.

   Solução: Sejam $x_0,y_0,z_0$ as raízes de $p_0(x)$ e

$$F(x,y,z)=(x+y+z,xy+xz+yz,xyz)\in C^\infty.$$

Temos $F(x_0,y_0,z_0) = \left(\dfrac{b_0}{a_0}, \dfrac{c_0}{a_0}, \dfrac{d_0}{a_0}\right)$ e

$$JF(x_0,y_0,z_0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_0+z_0 & x_0+z_0 & x_0+y_0 \\ y_0z_0 & x_0z_0 & x_0y_0 \end{vmatrix}.$$

Para mostrar que $JF(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, façamos $x+y=u$, $xy=v$.

$$\begin{array}{llll} (x,y,z) & \overset{H}{\longmapsto} & (x+y,xy,z) & \\ & & (u,v,z) & \overset{G}{\longmapsto} \quad (u+z,v+uz,vz) \end{array}$$

Assim, $F = G \circ H$ e $dF(x_0,y_0,z_0) = dG(x_0+y_0,x_0y_0,z_0)dH(x_0,y_0,z_0)$.

$$F'(p_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ z_0 & 1 & u_0 \\ 0 & z_0 & v_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ y_0 & x_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $u_0 = x_0+y_0$ e $v_0 = x_0y_0$ e

$$JF(p_0) = \det F'(p_0) = (v_0+z_0^2-z_0u_0)(x_0-y_0) =$$

$$= (z_0-x_0)(z_0-y_0)(x_0-y_0) \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Inversa, existem abertos $U$ e $V$ de $\mathbb{R}^3$, com $(x_0,y_0,z_0) \in U$ e $\left(\dfrac{b_0}{a_0}, \dfrac{c_0}{a_0}, \dfrac{d_0}{a_0}\right) \in V$ tais que $F\colon U \to V$ é difeomorfismo de classe $C^\infty$. Logo, para todo ponto $(b',c',d') \in V$, o polinômio $p'(x) = x^3 - b'x^2 + c'x - d'$ admite 3 raízes reais dadas por $F^{-1}(b',c',d')$. Diminuindo $U$, obtemos as raízes distintas entre si. Como a aplicação

$$(a,b,c,d) \overset{\varphi}{\longmapsto} \left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a}\right), \quad (a \neq 0)$$

é de classe $C^\infty$ em $(a_0,b_0,c_0,d_0)$, existe $W$ vizinhança de $(a_0,b_0,c_0,d_0)$ tal que, para todo $(a,b,c,d) \in W$, o polinômio $ax^3 - bx^2 + cx - d = 0$ tem 3 raízes distintas em $U$, que variam em classe $C^\infty$ com os coeficientes $(a,b,c,d)$.

10. Enunciar e demonstrar o análogo do Exemplo 9. para polinômios da forma $p(x) = x^4 - a_0x^3 + b_0x^2 - c_0x + d_0$.

TEOREMA 3.29 (do Ponto Fixo de Banach). *Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado e $f\colon F \to F$ é uma contração então existe um único $p \in F$ tal que $f(p) = p$.*

( $f$ é *contração* se existe $0 \leq \lambda < 1$ de modo que $\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda\|x-y\|$, para todo $x,y$.)

DEMONSTRAÇÃO. Fixemos $x_0 \in F$ e consideremos a seqüência

$$x_{n+1} = f(x_n) = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n+1}(x_0) = f^{n+1}(x_0).$$

Provaremos que a seqüência $(x_n)$ é de Cauchy em $F \subset \mathbb{R}^n$. Assim, existirá $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_n \to p$ (justifique) e, como $F$ é fechado, $p \in F$. De $f(x_n) = x_{n+1}$, resultará $f(p) = p$ (pela continuidade de $f$, aplicando limite em ambos os lados).

Unicidade: Supondo $f(p_1) = p_1$, $f(p_2) = p_2$ e $p_1 \neq p_2$, temos

$$\|f(p_1) - f(p_2)\| = \|p_1 - p_2\| \leq \lambda \|p_1 - p_2\| < \|p_1 - p_2\|,$$

o que é absurdo. Portanto, $p_1 = p_2$.

Vejamos que $(x_n)$ é de Cauchy:

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leq \lambda \|x_n - x_{n-1}\| \leq$$

$$\leq \lambda^2 \|x_{n-1} - x_{n-2}\| \leq \cdots \leq \lambda^n \|x_1 - x_0\|.$$

Assim,

$$\|x_{n+p} - x_n\| = \|x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - x_{n+p-2} + \cdots + x_{n+1} - x_n\| \leq$$

$$\leq \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \|x_{n+p-1} - x_{n+p-2}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\| \leq$$

$$\leq (\lambda^{n+p-1} + \lambda^{n+p-2} + \cdots + \lambda^n)\|x_1 - x_0\| = \lambda^n(1 + \lambda + \cdots + \lambda^{p-1})\|x_1 - x_0\|.$$

Como $0 \leq \lambda < 1$, temos que a seqüência $1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^n$ é crescente e convergente, portanto, $1 + \lambda + \cdots + \lambda^n \leq \frac{1}{1-\lambda}$. Dessa maneira,

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\|x_1 - x_0\|.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lambda^n \|x_1 - x_0\|}{1-\lambda} = 0$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in N$ tal que, para todo $n \geq n_0$ temos $0 \leq \dfrac{\lambda^n \|x_1 - x_0\|}{1-\lambda} < \varepsilon$. Logo, para todo $n \geq n_0$ e $m \in \mathbb{N}$, $\|x_{n+m} - x_n\| < \varepsilon$. □

EXERCÍCIO. Verifique que o Teorema do Ponto Fixo não vale se temos apenas a condição $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$, para quaisquer $x, y$ com $x \neq y$, usando $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{1 + x^2}}{2}$.

TEOREMA 3.30 (Teorema da Perturbação da Identidade). *Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, se $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ é contração então $g = I + f$ é um homeomorfismo do aberto $A$ sobre o aberto $g(A)$ (isto é, $g$ é contínua e injetora em $A$ com inversa $g^{-1}$ contínua em $g(A)$).*

DEMONSTRAÇÃO. Observe que

$$\|g(x)-g(y)\| = \|x-y+f(x)-f(y)\| \geq \|x-y\| - \|f(x)-f(y)\|.$$

Além disso, existe $0 \leq \lambda < 1$ tal que $\|f(x)-f(y)\| \leq \lambda\|x-y\|$, para todo $x, y \in A$, pois $f$ é contração. Assim,

$$\|g(x)-g(y)\| \geq \|x-y\| - \|f(x)-f(y)\| \geq \|x-y\| - \lambda\|x-y\| = (1-\lambda)\|x-y\|.$$

Dessa maneira, temos

1. $g$ é injetora: $g(x) = g(y)$ implica $\|g(x)-g(y)\| = 0 \geq (1-\lambda)\|x-y\|$. Como $1-\lambda > 0$, temos que $x = y$.
2. $g^{-1}$ é contínua:
$$\|g^{-1}(u)-g^{-1}(v)\| = \|x-y\| \leq \frac{1}{1-\lambda}\|u-v\|.$$
3. $g(A)$ é aberto: dado $y_0 \in g(A)$, queremos encontrar $r > 0$ de maneira que $B_r(y_0) \subset g(A)$, ou seja, tal que, dado $y \in B_r(y_0)$, existe $x \in A$ que satisfaz $y = g(x) = x + f(x)$, isto é, $\varphi_y(x) = y - f(x)$ tem ponto fixo. Seja $x_0 \in A$ tal que $g(x_0) = y_0$. Escolhendo $\overline{B}_\delta(x_0) \subset A$, consideremos $\varphi_y \colon \overline{B}_\delta(x_0) \to \mathbb{R}^n$. Temos que $\varphi_y$ é contração, pois
$$\|\varphi_y(x)-\varphi_y(x')\| = \|y-f(x)-y+f(x')\| \leq \lambda\|x-x'\|.$$
Vejamos quando $\varphi_y(\overline{B}_\delta(x_0)) \subset \overline{B}_\delta(x_0)$. Para $x \in \overline{B}_\delta(x_0)$,
$$\|\varphi_y(x)-x_0\| = \|y-f(x)-x_0\| = \|y-f(x_0)-x_0+f(x_0)-f(x)\| \leq$$
$$\leq \|y-g(x_0)\| + \|f(x)-f(x_0)\| \leq r + \lambda\|x-x_0\| \leq r + \lambda\delta.$$
Logo, tomando $r$ com $0 < r < (1-\lambda)\delta$, teremos $\varphi_y(\overline{B}_\delta(x_0)) \subset \overline{B}_\delta(x_0)$. □

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA: Como

$$\begin{array}{ccccc} x & \overset{C^0}{\longmapsto} & f'(x) \in L(\mathbb{R}^n) & & \\ & & L & \overset{C^0}{\longmapsto} & \det L \end{array}$$

existe vizinhança de $x_0$ onde $Jf(x) \neq 0$. Vamos supor que essa vizinhança de $x_0$ seja $A$ e que, para todo $x$ em $A$, $f(x) = f(x_0) + \underbrace{df(x_0)}_{L}(x-x_0) + r(x)$, com $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{r(x)}{\|x-x_0\|} = 0$. Assim,

$$f(x) = f(x_0) - L(x_0) + L(x + L^{-1}r(x)). \tag{3}$$

Mostraremos inicialmente que $L^{-1} \circ r$ é uma contração numa vizinhança aberta $U$ de $x_0$ e concluiremos, por meio do Teorema da Perturbação da Identidade, que $f$ é um homeomorfismo dessa vizinhança aberta $U$ sobre o aberto $f(U) = V$.

Como a aplicação $x \in A \mapsto (L^{-1}r)'(x) \in (L(\mathbb{R}^n), \| \ \|_1)$ é contínua e $(L^{-1}r)'(x_0) = L^{-1}r'(x_0) = 0$, dado $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existe $B_\delta(x_0) \subset A$, onde os pontos verificam

$$\|(L^{-1}r)'(x)\|_1 < \frac{1}{2}.$$

Pela Proposição 3.24,

$$\|L^{-1}r(x) - L^{-1}r(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\|, \ \forall x, x' \in B_\delta(x_0).$$

Logo, pelo Teorema da Perturbação da Identidade, $x + L^{-1}r(x)$ é um homeomorfismo do aberto $B_\delta(x_0)$ sobre o aberto $(I + L^{-1}r)(B_\delta(x_0))$ e, portanto, $f$ é homeomorfismo do aberto $U = B_\delta(x_0)$ sobre o aberto $f(B_\delta(x_0)) = V$.

Temos que $f^{-1}$ é diferenciável em $y = f(x) \in f(B_\delta)$ pois

$$\frac{f^{-1}(y+\Delta y) - f^{-1}(y) - [df(f^{-1}(y))]^{-1}(\Delta y)}{\|\Delta y\|} =$$

$$= \frac{f^{-1}(f(x+\Delta x)) - f^{-1}(f(x)) - [df(x)]^{-1}(f(x+\Delta x) - f(x))}{\|f(x+\Delta x) - f(x)\|} =$$

$$= \frac{\Delta x - [df(x)]^{-1}(df(x)(\Delta x) + R(x))}{\|f(x+\Delta x) - f(x)\|} = -(df(x))^{-1}\left(\frac{R(x)}{\|df(x)(\Delta x) + R(x)\|}\right),$$

com

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{R(x)}{\|\Delta x\|} = 0. \tag{4}$$

Quando $\Delta y \to 0$, como $f^{-1}$ é contínua em $y$, temos $\Delta x \to 0$. Da injetividade de $df(x)$, segue que existe $c > 0$ tal que $\left\| df(x)\left(\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|}\right)\right\| \geq c > 0$. De (4), existe $0 < \delta'$, tal que $\|\Delta x\| < \delta' \Rightarrow \left\|\frac{R(x)}{\|\Delta x\|}\right\| < \frac{c}{2}$. Logo, para $\|\Delta x\| < \delta'$, temos

$$\left\|\frac{R(x)}{\|df(x)(\Delta x) + R(x)\|}\right\| = \frac{\|R(x)\|}{\|\Delta x\|} \frac{1}{\left\|df(x)\left(\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|}\right) + \frac{R(x)}{\|\Delta x\|}\right\|} \leq$$

$$\leq \frac{\|R(x)\|}{\|\Delta(x)\|} \frac{1}{\left\|df(x)\left(\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|}\right)\right\| - \frac{\|R(x)\|}{\|\Delta x\|}} \leq \frac{\|R(x)\|}{\|\Delta x\|} \frac{1}{c - \frac{c}{2}}.$$

Logo, $-df(x))^{-1}\left(\frac{R(x)}{\|df(x)(\Delta x) + R(x)\|}\right) \to 0$, quando $\Delta x \to 0$. Assim, mostramos que

$$\frac{f^{-1}(y+\Delta y) - f^{-1}(\Delta y) - [df(f^{-1}(y))]^{-1}(\Delta y)}{\|\Delta y\|} \to 0, \text{ quando } \Delta y \to 0,$$

isto é, $f^{-1}$ é diferenciável em todo $y \in f(B_\delta(x_0))$. Para mostrar que $f^{-1} \in C^1$ em $V$, basta olhar para

$$y \xmapsto{C^0} f^{-1}(y)$$
$$x \xmapsto{C^0} f'(x) \in \{L \in L(\mathbb{R}^n) : L \text{ é inversível}\} \text{ (aberto)}$$
$$L \in \{L \in L(\mathbb{R}^n) : L \text{ é inversível}\} \xmapsto{C^0} L^{-1}$$

□

Se $f \in C^k$, $k \geq 1$, tem-se $f^{-1} \in C^k$. Por exemplo, se $f \in C^2$,

$$y \in V \xmapsto{C^1} f^{-1}(y) \in U$$
$$x \in U \xmapsto{C^1} f'(x) \in \{L \in L(\mathbb{R}^n) : L \text{ é inversível}\}$$
$$L \in \{L \in L(\mathbb{R}^n) : L \text{ é inversível}\} \xmapsto{C^\infty} L^{-1}$$

tem-se $y \in V \xmapsto{C^1} [df(f^{-1}(y))]^{-1} = df^{-1}(y)$ e, conseqüentemente, $f^{-1} \in C^2$ em $V$.

## 3.2. O Teorema da Função Implícita

MOTIVAÇÃO. Se $ax + by = c$, com $b \neq 0$, então $y = \dfrac{c - ax}{b}$.

TEOREMA 3.31. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $f : A \to \mathbb{R}$ de classe $C^k$,com $k \geq 1$. Se $f(x_0, y_0) = c$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ então existem abertos $U$ e $V$, $x_0 \in U$, $y_0 \in V$ tais que $U \times V \subset A$ e, para todo $x \in U$, existe um único $y = y(x) \in V$ tal que $f(x, y(x)) = c$, sendo $y = y(x)$ de classe $C^k$.*

Neste caso,

$$f(x, y(x)) = c \overset{\text{R.C.}}{\Rightarrow} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))y'(x) = 0 \Rightarrow y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Observe que a segunda frase das implicações acima diz que

$$\nabla f(x_0, y(x_0)).(1, y'(x_0)) = 0,$$

ou seja, o gradiente é perpendicular ao vetor tangente ao gráfico de $y$.

Reta tangente à curva $f(x, y) = c$ em $(x_0, y_0)$:

$$\nabla f(p_0).[(x, y) - (x_0, y_0)] = 0,$$

$$\text{ou } (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda \left( 1, \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(p_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(p_0)} \right), \text{ para } \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\text{ou } y = y_0 + \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(p_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(p_0)}.(x - x_0).$$

OBSERVAÇÃO 3.32. 1. Quando $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \neq 0$ então $f(x,y) = c$ é resolvida localmente em $(x_0,y_0)$ por $x = x(y)$.

2. Quando $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, o teorema nada afirma. Por exemplo,
   (a) $f(x,y) = x^2 - y^2 = 0$ localmente em $(0,0)$ não é gráfico de $y = y(x)$ nem de $x = x(y)$.
   (b) $f(x,y) = x^3 - y^6 = 0$ localmente em $(0,0)$ é o gráfico de $x = y^2$.

APLICAÇÃO 1. Pode $x^2 + y + \operatorname{sen} xy = 0$ ser dado localmente em $(0,0)$ como gráfico de $y = y(x)$? E de $x = x(y)$? Qual a reta tangente nesse ponto?

Solução: $f(x,y) = x^2 + y + \operatorname{sen} xy \in C^\infty$. Temos $f(0,0) = 0$ e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 + x\cos xy\Big|_{(0,0)} = 1 \neq 0.$$

Assim, a equação pode ser dada por $y \overset{C^\infty}{=} y(x)$ localmente em $(0,0)$. A reta tangente à curva em $(0,0)$ é dada por: $\nabla f(0,0)((x,y) - (0,0)) = 0$, isto é, $(0,1).(x,y) = 0$, ou ainda, $y = 0$.

Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2xy + \cos xy\Big|_{(0,0)} = 0$, o Teorema nada afirma. Para decidir se $x = x(y)$:

$$x^2 + y + \operatorname{sen} xy = 0 \Rightarrow 2x + y' + (xy' + y)\cos xy = 0 \Rightarrow$$
$$2 + y'' + (xy'' + y')\cos xy - (xy' + y)^2 \operatorname{sen} xy = 0.$$

Fazendo $x = 0$, obtemos $y'(0) = 0$ e $y''(0) = -2$, o que mostra que $y = y(x)$ tem ponto de máximo em $x = 0$. Assim, a equação não pode ser dada localmente em $(0,0)$ por $x = x(y)$.

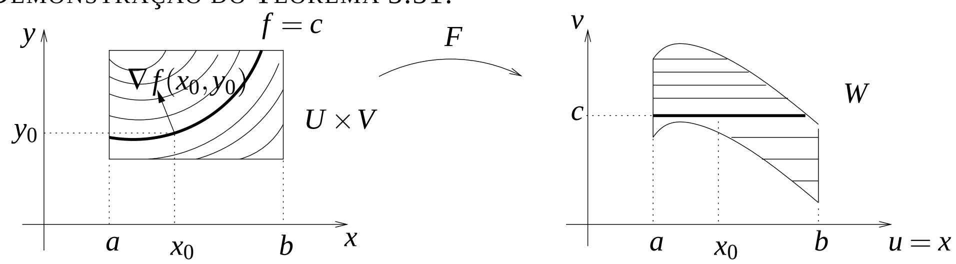
APLICAÇÃO 2. Dada $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g$ de classe $C^\infty$, mostre que, para cada $x \in \mathbb{R}$, existe um único $y = f(x) \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \displaystyle\int_0^{f(x)} (1 + t^2)dt$ e mostre que $f$ é de classe $C^\infty$.

Solução: Considere, para cada $x \in \mathbb{R}$, o polinômio $p(y) = y + \frac{y^3}{3} - g(x)$, que é estritamente crescente, $\lim_{y\to\infty} p(y) = \infty$, $\lim_{y\to-\infty} p(y) = -\infty$ e, portanto, tem uma única raiz $y = f(x)$. Seja $F(x,y) = g(x) - \displaystyle\int_0^y (1 + t^2)dt$ que é de classe $C^\infty$, $F(x_0, f(x_0)) = 0$ e

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, f(x_0)) = -1 - f(x_0)^2 \neq 0,$$

para cada $x_0 \in \mathbb{R}$. Assim, pelo Teorema da Função Implícita, para cada $x_0$, $F(x,y) = 0$ é dada localmente em $(x_0, f(x_0))$ por $y = y(x) \in C^\infty$. Como $y = f(x)$ obedece $F(x, f(x)) = 0$, então, pela unicidade, $f(x) = y(x) \in C^\infty$.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 3.31:




Seja $F(x,y) = (x, f(x,y)) \in C^1$. Temos

$$JF(x_0,y_0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}_{p_0} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0.$$

Logo, pelo Teorema da Função Inversa, existem abertos $U$ e $V$ de $\mathbb{R}$ com $(x_0,y_0)$ em $U \times V \subset A$ e aberto $W$ de $\mathbb{R}^2$ com $(x_0,c) \in W$ tais que $F: U \times V \to W$ bijetora com $F^{-1} \in C^k$, onde $F^{-1}: \begin{cases} x = u \\ y = y(u,v) \end{cases}$. Temos então

$$\{(x,y) \in U \times V : f(x,y) = c\} =$$
$$= F^{-1}(\{(x,c) \in W\}) = \{(x,y) \in U \times V, y = y(x,c)\}.$$

Se necessário, diminuímos $U$ para obter a tese. □

MOTIVAÇÃO. Se $ax + by + cz = 0$, com $c \neq 0$, então $z = \dfrac{-ax - by}{c}$.

TEOREMA 3.33. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^3$ aberto e $f : A \to \mathbb{R}$ de classe $C^k$, com $k \geq 1$. Dado $p_0 = (x_0,y_0,z_0)$, se $f(p_0) = c$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}(p_0) \neq 0$ então existem abertos $U$ e $V$, $(x_0,y_0) \in U$, $z_0 \in V$, tais que $U \times V \subset A$ e, para todo $(x,y) \in U$, existe um único $z = z(x,y) \in V$ tal que $f(x,y,z(x,y)) = c$, sendo $z = z(x,y) \in C^k$.*

Neste caso, aplicando a Regra da Cadeia a $f(x,y,z(x,y)) = c$ temos

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(p_0)\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(p_0)\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \nabla f(p_0).\left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\right) = 0 \\ \nabla f(p_0).\left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\right) = 0 \end{cases}$$

Assim, $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}(x_0,y_0),\ \dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0) = \dfrac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}(x_0,y_0).$

Neste caso, o *plano tangente* à superfície $f(x,y,z) = c$ em $p_0 = (x_0,y_0,z_0)$ é dado por

$z = z_0 + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$

ou $(x,y,z) = p_0 + \lambda\left(1,0,\dfrac{\partial z}{\partial x}(p_0)\right) + \mu\left(0,1,\dfrac{\partial z}{\partial y}(p_0)\right)$, para todo $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$,

ou $\nabla f(p_0).(x-x_0,y-y_0,z-z_0) = 0$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

OBSERVAÇÃO 3.34. Nas hipóteses do teorema acima,

1. $\nabla f(p_0) /\!/ \left(1,0,\dfrac{\partial z}{\partial x}(p_0)\right) \wedge \left(0,1,\dfrac{\partial z}{\partial y}(p_0)\right)$.
2. Dada uma curva $\gamma(t) \in A$, $t \in ]-\delta,\delta[$, derivável em $t=0$, com $\gamma(0) = p_0$ e $f(\gamma(t)) = c$, podemos garantir que $\gamma'(0)$ é combinação linear dos vetores $\left(1,0,\dfrac{\partial z}{\partial x}(p_0)\right)$ e $\left(0,1,\dfrac{\partial z}{\partial y}(p_0)\right)$. De fato, se $f(\gamma(t)) = c$ então, pela Regra da Cadeia, $\nabla f(p_0).\gamma'(0) = 0$.

   De outro modo, de $\gamma(t) = (x(t),y(t),z(x(t),y(t)))$ tem-se

$$\gamma'(0) = \left(x'(0),y'(0),\frac{\partial z}{\partial x}(p_0)x'(0) + \frac{\partial z}{\partial y}(p_0)y'(0)\right) =$$

$$= x'(0)\left(1,0,\frac{\partial z}{\partial x}(p_0)\right) + y'(0)\left(0,1,\frac{\partial z}{\partial y}(p_0)\right).$$

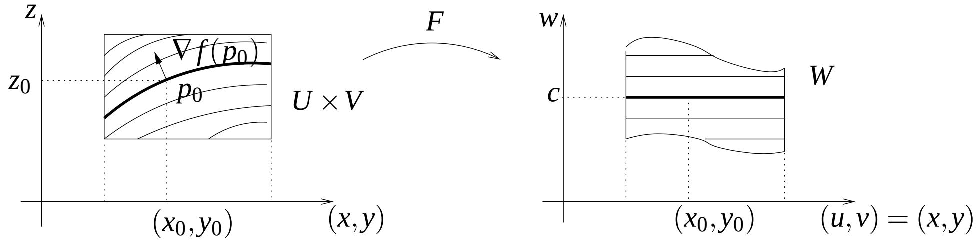
3. Dado um vetor $w$ que é combinação linear dos vetores $\left(1,0,\dfrac{\partial z}{\partial x}(p_0)\right)$ e $\left(0,1,\dfrac{\partial z}{\partial y}(p_0)\right)$, afirmamos que existe uma curva $\gamma(t)$, $t \in ]-r,r[$, onde $\gamma(0) = p_0$, $f(\gamma(t)) = c$ e tal que $\gamma'(0) = w$. De fato, sendo

$$w = \alpha\left(1,0,\frac{\partial z}{\partial x}(p_0)\right) + \beta\left(0,1,\frac{\partial z}{\partial y}(p_0)\right) = \left(\alpha,\beta,\alpha\frac{\partial z}{\partial x}(p_0) + \beta\frac{\partial z}{\partial y}(p_0)\right),$$

   consideramos a reta $r : (x,y) = (x_0,y_0) + t(\alpha,\beta)$, $\forall t$. A curva que procuramos é $\gamma(t) = (x_0+t\alpha, y_0+t\beta, z(x_0+t\alpha, y_0+t\beta))$, pois Im$\gamma$ está contida na superfície $f(x,y,z) = 0$ e $\gamma'(0) = w$.
4. Em vista das duas observações anteriores, o plano tangente à superfície $f(x,y,z) = c$ em $p_0 = (x_0,y_0,z_0)$ coincide com o plano que passa por $p_0$, gerado por todos os vetores velocidade das curvas deriváveis contidas em $f = c$, no ponto $p_0$.

APLICAÇÃO. A superfície $S: xy - z\ln y + e^{xz} = 1$ pode ser dada localmente em $(0,1,0)$ como gráfico de $x = x(y,z)$, pois $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1,0) = 1 \neq 0$, onde $f$ é a função dada por $f(x,y,z) = xy - z\ln y + e^{xz}$. Como $\nabla f(0,1,0) = (1,0,0)$, o plano tangente à $S$ em $(0,1,0)$ é dado por $x = 0$. Pode $S$ ser dada localmente em $(0,1,0)$ como gráfico de $z = z(x,y)$ e $y = y(x,z)$? Observe que $f(0,1,z) = 1$.

INDICAÇÃO DA PROVA DO TEOREMA 3.33: Seja $F(x,y,z) = (x,y,f(x,y,z))$. Temos $JF(p_0) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(p_0) \neq 0$. Pelo Teorema da Função Inversa, existem abertos $U \subset \mathbb{R}^2$ contendo $(x_0,y_0)$, $V \subset \mathbb{R}$ contendo $z_0$ e $W \subset \mathbb{R}^3$ contendo $F(x_0,y_0,z_0)$ tais que $F: U \times V \to W$ é difeomorfismo de classe $C^k$




$$F: \begin{cases} u = x \\ v = y \\ w = f(x,y,z) \end{cases} ; \quad F^{-1}: \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = g(u,v,w) \end{cases} ;$$

e $\{(x,y,z) \in U \times V : f(x,y,z) = c\} = F^{-1}\{(u,v,c) \in W\} = \{(x,y,z) \in U \times V : z = g(x,y,c)\}$.

MOTIVAÇÃO. Se $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$, com $\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \neq 0$ então temos que $y = y(x)$ e $z = z(x)$.

TEOREMA 3.35. *Sejam $f,g: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funções de classe $C^{k\geq 1}$ no aberto $A$, $p_0 = (x_0,y_0,z_0) \in A$, $f(p_0) = c_1$, $g(p_0) = c_2$. Se $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}(p_0) \neq 0$ então existem abertos $U$ e $V$ tais que $(x_0,y_0,z_0) \in U \times V \subset A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ e tais que, para todo $x \in U$, existe um único $(y,z) = (y(x),z(x)) \in V$ tal que $\begin{cases} f(x,y(x),z(x)) = c_1 \\ g(x,y(x),z(x)) = c_2 \end{cases}$ e $y = y(x)$, $z = z(x)$ são de classe $C^k$.*

Neste caso, temos, pela Regra da Cadeia,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}y' + \dfrac{\partial f}{\partial z}z' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla f.(1,y',z') = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y}y' + \dfrac{\partial g}{\partial z}z' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla g.(1,y',z') = 0 \end{cases}$$

$$\text{portanto, } y'(x_0) = \frac{-\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)}(p_0)}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}(p_0)}, \quad z'(x_0) = \frac{-\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,x)}(p_0)}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}(p_0)}$$

e a *reta tangente* à curva $\begin{cases} f(x,y,z) = c_1 \\ f(x,y,z) = c_2 \end{cases}$ em $p_0$ pode ser dada por

a. $(x,y,z) = p_0 + \lambda(1, y'(x_0), z'(x_0))$, para todo $\lambda$, ou

b. $\begin{cases} \nabla f(p_0).(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0 \\ \nabla g(p_0).(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0 \end{cases}$, ou

c. $(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + \lambda \nabla f(p_0) \wedge \nabla g(p_0)$.

NOTAÇÃO. No Teorema 3.35, $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}$ indica o jacobiano de

$$F(y,z) = (f(x_0,y,z), g(x_0,y,z))$$

no ponto $(y_0,z_0)$, ou seja, o determinante de $F'(y_0,z_0)$.

PROVA DO TEOREMA 3.35: Faça como exercício.

APLICAÇÃO.

1. Verificar se a curva $\begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y^2 + x^2 = 1 \end{cases}$ pode ser resolvida localmente em $(0,1,1)$ por $y = y(x)$ e $z = z(x)$.
2. Idem em $(1,0,0)$.

Mais geralmente, consideremos o sistema

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_k) = c_1 \\ \qquad\vdots \\ f_k(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_k) = c_k \end{cases}$$

podemos escrever $f(x,y) = c$, onde

$$x = (x_1,\ldots,x_n),\ y = (y_1,\ldots,y_k), c = (c_1,\ldots,c_k) \text{ e } f = (f_1,\ldots,f_k).$$

TEOREMA 3.36 (Teorema da Função Implícita). *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ um aberto, $p \geq 1$, $f\colon A \to \mathbb{R}^k$ de classe $C^p$, $f(x_0,y_0) = c$ e $\dfrac{\partial(f_1,\ldots,f_k)}{\partial(y_1,\ldots,y_k)}(x_0,y_0) \neq 0$. Então existem abertos $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^k$ com $(x_0,y_0) \in U \times V \subset A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, tais que, para todo $x \in U$, existe um único $y = y(x) \in V$ tal que $f(x,y(x)) = c$ e $y = y(x) \in C^p$.*

Neste caso, aplicando a Regra da Cadeia a $f(x,y(x)) = c$, temos

$$f'(x,y(x)) \begin{pmatrix} I \\ y'(x) \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} f'_x(x,y) & f'_y(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ y'(x) \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'_x(x,y) + f'_y(x,y)y'(x) = 0 \Rightarrow D_x f(x,y) + D_y f(x,y) Dy(x) = 0.$$

Portanto,

$$Dy(x_0) = -[D_y f(x_0,y_0)]^{-1} D_x f(x_0,y_0).$$

Com outra notação, de

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n,y_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,y_k(x_1,\ldots,x_n)) = c_1 \\ \vdots \\ f_k(x_1,\ldots,x_n,y_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,y_k(x_1,\ldots,x_n)) = c_k \end{cases}$$

temos, para todo $i = 1,\ldots,k$:

$$\begin{cases} \nabla f_i(x,y(x)).v_1 = 0 \\ \vdots \\ \nabla f_i(x,y(x)).v_n) = 0 \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} v_1 = \left(1,0,\ldots,0,\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}(x_0),\ldots,\dfrac{\partial y_k}{\partial x_1}(x_0)\right) \\ v_2 = \left(0,1,\ldots,0,\dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}(x_0),\ldots,\dfrac{\partial y_k}{\partial x_2}(x_0)\right) \\ \vdots \\ v_n = \left(0,0,\ldots,1,\dfrac{\partial y_1}{\partial x_n}(x_0),\ldots,\dfrac{\partial y_k}{\partial x_n}(x_0)\right), \end{cases}$$

O plano tangente a $S = \{(x,y)\colon\ f(x,y) = c\}$ no ponto $p_0 = (x_0,y_0)$ é o plano dado por

1. $(x,y) = (x_0,y_0) + \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$, para todo $\lambda_i \in \mathbb{R}$, ou
2. $\begin{cases} [(x,y)-(x_0,y_0)].\nabla f_1(x_0,y_0) = 0 \\ \vdots \\ [(x,y)-(x_0,y_0)].\nabla f_k(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$, ou
3. $\{p_0 + \gamma'(0)$, para toda curva $\gamma$ definida numa vizinhança de $t = 0$, com $\gamma(0) = p_0$ e derivável em 0 com $f(\gamma(t)) = c\}$.

IDÉIA DA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 3.36:

Seja $F(x,y) = (x, f(x,y))$. Temos $F(x_0,y_0) = (x_0,c)$ e

$$JF(x_0,y_0) = \det \begin{pmatrix} I & 0 \\ D_x f & D_y f \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)} = \det D_y f(x_0,y_0) \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Inversa, existem abertos $U \times V \subset A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, $(x_0,y_0) \in U \times V$ e $W \subset \mathbb{R}^{n+k}$ com $(x_0,c) \in W$ tais que $F\colon U \times V \to W$ é difeomorfismo de classe $C^p$, $p \geq 1$.

$$F : \begin{cases} u = x \\ v = f(x,y) \end{cases} \qquad F^{-1} : \begin{cases} x = u \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

Além disso,

$$\{(x,y) \in U \times V : \ f(x,y) = c\} = F^{-1}\{(u,c) \in W\} = \{(x,y) \in U \times V : y = y(x,c)\}.$$

Diminuindo $U$, se necessário, obtemos a tese. □

APLICAÇÕES.

1. Seja $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ um polinômio de grau $n$ e coeficientes reais com uma raiz real simples $x_0$. Então todo polinômio de grau $n$ com coeficientes reais suficientemente próximo de $p(x)$ tem uma raiz real simples próxima de $x_0$ que varia em classe $C^\infty$ com os coeficientes do polinômio.

   Solução: Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \overset{C^\infty}{\longmapsto} \mathbb{R}$ dada por

   $$F(x, b_0, b_1, \ldots, b_n) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n.$$

   Considerando $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ temos $F(x_0, a) = 0$. Além disso, temos que $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, a) = p'(x_0) \neq 0$, pois $x_0$ é raiz simples de $p$. Pelo Teorema da Função Implícita, existem abertos $V \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com $x_0 \in V$, $a \in U$, tais que, para todo $b \in U$, existe um único $x = x(b) \in V$ verificando $F(x(b), b) = b_0 + b_1 x(b) + \cdots + b_n (x(b))^n = 0$ e $x = x(b) \in C^\infty$. Temos $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, a) \neq 0$; assim, podemos diminuir eventualmente $U \times V$ para ter $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x(b), b) \neq 0$ e concluir que $x = x(b)$ é simples.

2. Seja $f(\lambda, x)$ uma família de funções $f_\lambda \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a um parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$, isto é, $f_\lambda(x) = f(\lambda, x)$, $f \in C^1$. Supondo que $f_{\lambda_0}$ tenha um ponto fixo $x_0$, enuncie e prove um resultado que garanta a existência e unicidade de ponto fixo, próximo de $x_0$, para toda $f_\lambda$ com $\lambda$ próximo de $\lambda_0$.

   Indicação: Considerar $F(\lambda, x) = f(\lambda, x) - x$. Assim,

   $$F(\lambda_0, x_0) = 0 \text{ e } \frac{\partial F}{\partial x}(\lambda_0, x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda_0, x_0) - 1.$$

   Supor $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\lambda_0, x_0) \neq 1$ e aplicar o Teorema da Função Implícita.

DEFINIÇÃO. Um número real $c$ é *valor regular* de $f \colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $C^k$, $k \geq 1$, no aberto $A$ se $f^{-1}(c) \neq \emptyset$ e, para todo $x \in f^{-1}(c)$, $df(x)$ é sobrejetora (isto é, $\nabla f(x) \neq 0$).

Neste caso, segue do Teorema da Função Implícita que, localmente em cada ponto, $f^{-1}(c)$ é o gráfico de uma função real de classe $C^k$ de $n-1$ variáveis. Diremos que $f^{-1}(c)$ é uma superfície de classe $C^k$ e dimensão $n-1$ ou codimensão 1. O plano tangente em $p \in f^{-1}(c)$ é dado por

$$\nabla f(p).(x-p) = 0.$$

EXEMPLO 3.37.

1. $x^2+y^2 = 1$ em $\mathbb{R}^2$.
2. $x^2+y^2 = 1$ em $\mathbb{R}^3$.
3. $x^2+y^2+z^2 = 1$ em $\mathbb{R}^3$.
4. A curva "$\vee$" não é imagem inversa de valor regular.
5. O gráfico de $g\colon A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ no aberto $A$ é imagem inversa de valor regular. Indicação: $F(x,y) = y - g(x) = 0$.
6. A superfície de $\mathbb{R}^3$ obtida pela rotação do gráfico de $z = z(x) \in C^1$, onde $x \in ]a,b[$, $0 < a$, em torno do eixo $z$ é imagem inversa de valor regular.
7. Dar a equação do toro obtido pela rotação da circunferência dada por $(x-2)^2+z^2 = 1$ em torno do eixo $z$ e verificar que é uma superfície de codimensão 1, dando sua classe.
8. Verificar se o cone $z^2 = x^2+y^2$ é imagem inversa de valor regular.

DEFINIÇÃO. Diremos que $c \in \mathbb{R}^k$ é *valor regular* de $f\colon A \subset \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ de classe $C^p$, $p \geq 1$, no aberto $A$ se $f^{-1}(c) \neq \emptyset$ e, para todo $x \in f^{-1}(c)$, $df(x)$ é sobrejetora (isto é, se os vetores $\nabla f_1(x), \ldots, \nabla f_k(x)$ são linearmente independentes).

Neste caso, segue do Teorema da Função Implícita que, localmente em cada ponto, $f^{-1}(c)$ é o gráfico de uma função de classe $C^p$ de $n$ variáveis com $k$ coordenadas. Diremos que $f^{-1}(c)$ é uma superfície de classe $C^p$ e dimensão $n$ em $\mathbb{R}^{n+k}$ ou de codimensão $k$. O plano tangente em $p \in f^{-1}(c)$ é dado por

$$\begin{cases} \nabla f_1(p).(x-p) = 0 \\ \nabla f_2(p).(x-p) = 0 \\ \qquad\vdots \\ \nabla f_k(p).(x-p) = 0 \end{cases}$$

EXEMPLO 3.38.

1. A curva $\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x^2+z^2 = 1 \end{cases}$ não é imagem inversa de valor regular.
2. O gráfico de $g\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ de classe $C^1$ no aberto $A$ é imagem inversa de valor regular: é uma superfície de dimensão $n$ em $\mathbb{R}^{n+k}$ e seu plano tangente em $(x_0, g(x_0))$ é dado por $y = g(x_0) + dg(x_0)(x-x_0)$.

## 3.3. Multiplicadores de Lagrange

Nesta seção mostraremos que os extremos locais de funções reais $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ quando restritas a superfícies $f^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^m$, de codimensão $k$, podem ser encontrados entre as soluções do sistema de $m+k$ equações com $m+k$ incógnitas

$$\begin{cases} \nabla g = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i \\ f(x) = c \end{cases}$$

em que $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ são incógnitas adicionais, chamadas de *multiplicadores de Lagrange*.

TEOREMA 3.39. *Sejam $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável e $S = f^{-1}(c)$, onde $c$ é valor regular de $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$ de classe $C^1$ no aberto $A$. Se $p \in S$ é extremo local de $g$ condicionada a $S$ então $\nabla g(p) = \lambda \nabla f(p)$.*

Nesse caso, os extremos locais de $g$ restrita a $S$ estão entre as soluções de

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) = c \\ \nabla g(x) = \lambda \nabla f(x) \end{cases}$$

INDICAÇÃO DA DEMONSTRAÇÃO:

(i) Supondo $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(p) \neq 0$, $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $x_{n-1} = y$, $S$ é dada localmente em $p$ por $y \overset{C^1}{=} y(x)$, $p = (x_0, y(x_0))$;

(ii) $x_0$ é extremo local de $\varphi(x) = g(x, y(x))$;

(iii) $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_0) = \nabla g(p).\left(0, \dots, \underbrace{1}_{i}, 0, \dots, 0, \dfrac{\partial y}{\partial x_i}(x_0)\right) = 0$, $\forall i = 1, \dots, n-1$;

(iv) $\nabla g(p)$ é perpendicular ao plano tangente a $S$ em $p_0$.

APLICAÇÃO. Determine os extremos absolutos de $g(x,y,z) = x+y+z$ condicionada à esfera $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solução: Como $g$ é contínua e $S$ é compacta, $g$ assume o máximo e mínimo absolutos em $S$, que são locais. Podemos procurá-los por intermédio do sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} = 1 = \lambda x \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = 1 = \lambda y \\ \dfrac{\partial g}{\partial z} = 1 = \lambda z \end{cases}$$

Logo,

$$\frac{3}{\lambda^2} = 1,\ \lambda = \pm\sqrt{3},\ (x,y,z) = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1).$$

Como $g(-\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)) = -\sqrt{3}$ então $\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$ é ponto de máximo absoluto e $-\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$ é ponto de mínimo absoluto.

TEOREMA 3.40 (Multiplicadores de Lagrange). *Sejam $A \subset \mathbb{R}^{n+k}$ um conjunto aberto, $f\colon A \to \mathbb{R}^k$ uma função de classe $C^1$ e $c \in \mathbb{R}^k$ valor regular de $f$. Supondo que $g\colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e assume extremo local num ponto $p_0 \in f^{-1}(c)$ quando condicionada à superfície $f^{-1}(c)$ então existem números reais $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tais que $\nabla g(p_0) = \lambda_1 \nabla f_1(p_0) + \cdots + \lambda_k \nabla f_k(p_0)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que, localmente em $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, a superfície $f(x,y) = c$ seja dada por $y = y(x) \in C^1$. A função definida por $\varphi(x) = g(x, y(x))$, ou seja, $\varphi(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n, y_1(x), \dots, y_k(x))$ assume extremo local em $x_0$. Logo, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x_0) = \nabla g(p_0).\left(0, \dots, 1, 0, \dots, \frac{\partial y_1}{\partial x_i}(x_0), \dots, \frac{\partial y_k}{\partial x_i}(x_0)\right) = 0,$$

isto é, $\nabla g(p_0)$ é ortogonal à superfície $f^{-1}(c)$ em $p_0$. Assim,

$$\nabla g(p_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla f_i(p_0).$$

□

APLICAÇÃO. Determine os extremos absolutos de $g(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$ restrita à curva

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Indicação:

(i) $g\big|_\gamma$ assume extremos absolutos, que são locais, pois $g$ é contínua e $\gamma$ é compacto;

(ii) $\gamma$ é imagem inversa de valor regular;

(iii) Entre as soluções do sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \\ 3x^2 = \lambda x + \mu \\ 3y^2 = \lambda y + \mu \\ 3z^2 = \lambda z + \mu \end{cases}$$

estão os extremos procurados. Temos

$$\begin{cases} 3(x^2-y^2)=\lambda(x-y) \\ 3(x^2-z^2)=\lambda(x-z) \\ 3(y^2-z^2)=\lambda(y-z) \end{cases} \tag{5}$$

Com $x=y$ ou $y=z$ ou $x=z$, obtemos os pontos $(0,0,1)$, $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$, $(0,1,0)$, $(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, $(1,0,0)$ e $(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$. O sistema não admite outras soluções, pois se $x,y,z$ forem distintos entre si, de (5), teríamos:

$$3(x+y)=3(x+z)=3(y+z)=\lambda.$$

Calculando $g$ nos seis pontos encontrados, obtemos que $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ são os pontos de máximo absoluto e os outros, pontos de mínimo absoluto.

## 3.4. Teorema da Imersão

Neste parágrafo, mostraremos que se $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ de classe $C^1$ tem $f'(x_0)$ de posto máximo, então, numa vizinhança $U$ de $x_0$, $f$ é injetora com inversa contínua. Além disso, veremos que, a menos de mudança de coordenadas, localmente em $x_0$, $f$ é uma inclusão.

DEFINIÇÃO. Dado $A\subset\mathbb{R}^n$ aberto, uma função $f\colon A\to\mathbb{R}^{n+k}$ de classe $C^1$ é denominada *imersão* em $x_0$ se $f'(x_0)$ é injetora.

OBSERVAÇÃO 3.41. Se $f$ é imersão em $x_0$ então existe vizinhança de $x_0$ onde $f$ é imersão.

De fato, basta supor $f(x)=(u(x),v(x))\in\mathbb{R}^{n+k}$ com $Ju(x_0)\neq 0$ e considerar que

$$\begin{array}{cccccc} x & \overset{C^0}{\longmapsto} & u'(x)\in L(\mathbb{R}^n) & & \\ & & L & \overset{C^0}{\longmapsto} & \det L \end{array}$$

calculada em $x_0$ é diferente de 0.

PROPOSIÇÃO 3.42. *Se $f\colon A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n+k}$ de classe $C^1$ no aberto $A$ é uma imersão em $x_0$ então $f$ é localmente injetora em $x_0$, isto é, existe vizinhança aberta $U$ de $x_0$ tal que $f\colon U\to f(U)$ é injetora. Além disso, $f^{-1}\colon f(U)\to U$ é contínua.*

DEMONSTRAÇÃO. Para $x,y$ numa vizinhança $V$ de $x_0$, temos:

$$f(x)-f(y)=f(x)-f(x_0)+f(x_0)-f(y)=$$

$$=f'(x_0)(x-x_0)+r(x)-f'(x_0)(y-x_0)-r(y),$$

onde $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{r(x)}{\|x-x_0\|} = 0$. Assim,

$$\|f(x)-f(y)\| = \|f'(x_0)(x-y)+r(x)-r(y)\| \geq \|f'(x_0)(x-y)\| - \|r(x)-r(y)\|.$$

Como $f'(x_0)$ é linear e injetora, existe $c>0$ tal que $\|L(x)\| \geq c\|x\|$. Dessa forma,

$$\|f(x)-f(y)\| \geq c\|x-y\| - \|r(x)-r(y)\|.$$

Observando que $r'$ é contínua em $x_0$ e $r'(x_0)=0$, existe $\delta>0$ tal que, para todo $x$ em $B_\delta(p_0)\subset V$, temos $\|r'(x)\|_1 < \frac{c}{2}$. Logo,

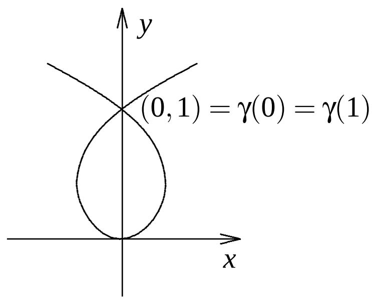
$$\|f(x)-f(y)\| \geq c\|x-y\| - \frac{c}{2}\|x-y\|, \text{ para } x,y\in B_\delta(p_0).$$

Portanto, $\|f(x)-f(y)\| \geq \dfrac{c}{2}\|x-y\|$, o que implica que $f$ é injetora no aberto $U = B_\delta(p_0)$ e a inversa é contínua. $\square$

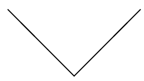
EXEMPLO 3.43.

1. Se $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ é linear injetora então é imersão. Observe que, neste caso, $L(\mathbb{R}^n)$ tem dimensão $n$.
2. Seja $\gamma\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ de classe $C^1$, $\gamma(t) = (x(t),y(t))$ imersão em $t_0$. Supondo $x'(t_0)\neq 0$, segue do Teorema da Função Inversa que $x(t)$ é um difeomorfismo local de classe $C^1$ em $t_0$, isto é, existem abertos $U$ contendo $t_0$ e $V$ contendo $x(t_0)$ tais que $x\colon U\to V$ é inversível com inversa $t=t(x)\in C^1$. Neste caso,
$$\gamma(U) = \{(x(t),y(t))\colon t\in U\} = \{(x,y(t(x)))\colon x\in V\},$$
isto é, $\gamma(U)$ é o gráfico de uma função de classe $C^1$.
3. Seja $\gamma\colon\ ]a,b[\to\mathbb{R}^2$, de classe $C^1$, imersão em $]a,b[$. Se $x'(t)\neq 0$, para todo $t$, então $x$ é um difeomorfismo de classe $C^1$ entre $]a,b[$ e um intervalo aberto $J$ com inversa $t=t(x)$. Neste caso,
$$\gamma(]a,b[) = \{(x(t),y(t))\colon t\in ]a,b[\} = \{(x,y(t(x)))\colon x\in J\},$$
isto é, $\gamma(]a,b[)$ é o gráfico de uma função de classe $C^1$.
4. A curva $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ é imersão em $\mathbb{R}$, não injetora.
5. A curva $\gamma(t) = (t^3-t,t^2)$ é imersão em $\mathbb{R}$, não injetora.

   Observando na figura a imagem de $\gamma$, você vê contradição com o exemplo 2 aplicado em $t_0=0$?




6. A figura abaixo não pode ser imagem de imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$. Justifique.



7. Considere $\sigma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ uma imersão de classe $C^1$. Supondo que $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0) \neq 0$, segue do Teorema da Função Inversa que $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ é um difeomorfismo de classe $C^1$ entre abertos $U$ contendo $(u_0,v_0)$ e $V$ contendo $(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0))$ com inversa $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$. Logo,
$$\sigma(U) = \{(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\colon (u,v) \in U\} =$$
$$= \{(x, y, z(u(x,y), v(x,y)))\colon (x,y) \in V\}$$
isto é, $\sigma(U)$ é o gráfico de uma função de classe $C^1$ de $U$ em $\mathbb{R}$.
8. O cilindro $x^2 + y^2 = 1$ de $\mathbb{R}^3$ é imagem da imersão $C^\infty$ $\sigma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, dada por $\sigma(\theta, z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z)$.
9. Verifique se $\sigma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(\theta,\varphi) = (\cos\theta \operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi)$ é uma imersão e determine $\operatorname{Im}\sigma$.
10. Idem para $\sigma\colon \begin{cases} x = (b + a\cos\varphi)\cos\theta \\ y = (b + a\cos\varphi)\operatorname{sen}\theta \\ z = a \operatorname{sen}\varphi \end{cases}$
11. Se $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é de classe $C^1$ no aberto $A$ então o gráfico de $f$ é imagem de imersão de classe $C^1$. Basta considerar $F(x) = (x, f(x))$.
12. A inclusão $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$, $f(x) = (x, 0)$ é imersão.

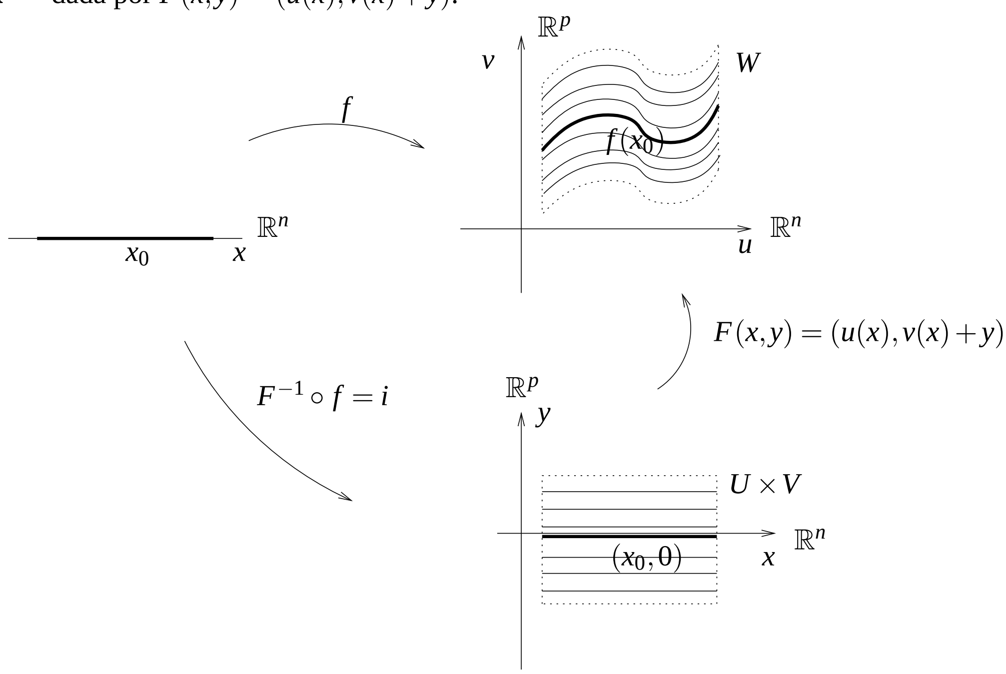
TEOREMA 3.44 (Teorema da Imersão). *Dados $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f\colon A \to \mathbb{R}^{n+p}$ de classe $C^1$, se $f'(x_0)$ é injetora então existe aberto $U$ com $x_0 \in U$ tal que $f(U)$ é o gráfico de uma função de classe $C^1$ definida num aberto de $\mathbb{R}^n$ com $p$ componentes.*

DEMONSTRAÇÃO. Podemos supor, eventualmente reordenando as coordenadas de $f$, que $f(x) = (u(x), v(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ com $u'(x_0)$ injetora. Assim, pelo Teorema da Função Inversa, existem abertos $U$ e $V$, $x_0 \in U$, $u(x_0) \in V$ tais que $u\colon U \to V$ é bijetora com inversa $x = x(u) \in C^1$. Logo,

$$f(U) = \{(u(x), v(x)) \colon x \in U\} = \{(u, v(x(u))) \colon u \in V\},$$

onde $\pi(u, v) = u$. $\square$

Para mostrar que uma imersão em $x_0$ é, a menos de mudança de coordenadas, uma inclusão, considere $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ de classe $C^1$ no aberto $A$, imersão em $x_0$, tal que $f(x) = (u(x), v(x))$ com $u'(x_0)$ injetora. Consideramos $F\colon A \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{n+p}$ dada por $F(x, y) = (u(x), v(x) + y)$.



Como $dF(x_0,0) = \begin{pmatrix} du(x_0) & 0 \\ dv(x_0) & I \end{pmatrix}$ é isomorfismo, então, pelo Teorema da Função Inversa, existem abertos $U, V$ e $W$, com $(x_0,0) \in U \times V$ e $F(x_0,0) = f(x_0) \in W$ tais que a função $F: U \times V \to W$ é difeomorfismo de classe $C^1$ com inversa $F^{-1} = h$.

Temos $h \circ f(x) = (x,0)$ em $U$. Logo, $f$, a menos de um difeomorfismo $h$, é inclusão. Assim, obtivemos a seguinte versão do Teorema da Imersão:

TEOREMA 3.45. *Se $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+p}$, de classe $C^1$ no aberto A, é imersão em $x_0$, então existe um difeomorfismo de classe $C^1$: $h: W \to U \times V$ entre abertos $W$ contendo $f(x_0)$ e $U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ contendo $(x_0,0)$ tal que $h \circ f(x) = (x,0)$ em $U$.*

## 3.5. Teorema da Submersão

Veremos, nesta seção, que se $f: \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ de classe $C^1$ tem $f'(p_0)$ com posto máximo, então $f$, localmente em $p_0$, é aberta, não é injetora e, a menos de mudança de coordenadas, é uma projeção.

DEFINIÇÃO. Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, uma função $f: A \to \mathbb{R}^m$ de classe $C^1$ é dita uma *submersão* em $p_0$ se $f'(p_0)$ é sobrejetora (portanto, $n \geq m$).

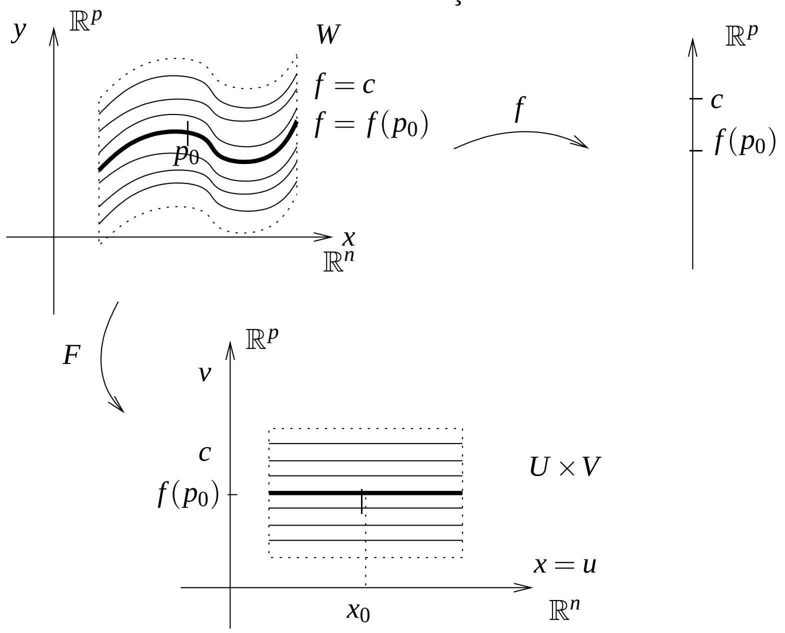
OBSERVAÇÃO 3.46. Se $f$ é submersão em $x_0$, então $f$ é submersão numa vizinhança de $x_0$.

EXEMPLO 3.47.

1. $\pi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, $\pi(x,y) = x$ é submersão.
2. $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ linear sobrejetora é uma submersão e Im$L$ é aberto de $\mathbb{R}^n$.
3. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ com $\nabla f(x) \neq 0$ é submersão.
4. $f(x,y) = x^2 + y^2$ é submersão em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

TEOREMA 3.48 (Teorema da submersão). *Seja $f: A \subset \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^p$ de classe $C^1$ no aberto $A$ com $f'(p_0)$ sobrejetora. Então existe um aberto $W$ contendo $p_0$ tal que $f(W)$ é aberto de $\mathbb{R}^p$.*

DEMONSTRAÇÃO.




Podemos supor que $f'(p_0) = \begin{pmatrix} f'_x(p_0) & f'_y(p_0) \end{pmatrix}$ com $f'_y(p_0)$ injetora (eventualmente reordenando as coordenadas). Se $F(x,y) = (x, f(x,y))$ então

$$JF(p_0) = \begin{vmatrix} I & 0 \\ f'_x(p_0) & f'_y(p_0) \end{vmatrix} = \det f'_y(p_0) \neq 0.$$

Logo, pelo Teorema da Função Inversa, existem abertos $W$ contendo o ponto $p_0 = (x_0, y_0)$ e $U \times V$ contendo $(x_0, f(p_0))$ tais que $F\colon W \to U \times V$ é difeomorfismo de classe $C^1$.
Como $f = \pi_2 \circ F$, então $f(W) = \pi_2(F(W)) = \pi_2(U \times V) = V$ é aberto. Observe também que, em $U \times V$, $f \circ F^{-1}(u,v) = \pi_2(u,v) = v$, isto é, a menos de um difeomorfismo, $f$ é uma projeção. □

COROLÁRIO 3.49. *Seja $f\colon A \subset \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^p$ submersão de classe $C^1$ no aberto $A$ e $n > 0$. Então $f$ é aberta e não é injetora.*

DEMONSTRAÇÃO.

a. Verifiquemos que $f$ é aberta: dado $B \subset A$ aberto, como $F|_B$ é submersão, para cada $x \in B$, existe $U_x \subset B$ aberto, $x \in U_x$, tal que $f(U_x)$ é aberto. Como $B = \bigcup_{x \in B} U_x$, então $f(B) = \bigcup_{x \in B} f(U_x)$ é aberto.
b. A função $f$ não é injetora, pois pelo Teorema da Função Implícita, o conjunto $f(x) = f(p_0)$, localmente em $p_0$ é um gráfico de uma função de $n$ variáveis com $p$ coordenadas. □

## 3.6. Teorema do Posto

Consideraremos, nesta parte, o caso em que o posto da derivada não é máximo, mas constante num aberto. Os exemplos seguintes sugerem um enunciado para o Teorema do Posto.

OBSERVAÇÕES E MOTIVAÇÃO.

1. Se $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é linear, com posto$L = k$ (portanto, $k \leq \min(m,n)$), então $L(\mathbb{R}^n)$ é subespaço de dimensão $k$.
2. Se $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é dada por $f\colon \begin{cases} u = \cos(x+y) \\ v = \operatorname{sen}(x+y) \end{cases}$, temos que o posto de $f'$ é 1 em $\mathbb{R}^2$ e que $\mathrm{I}m\, f = \{(u,v) : u^2+v^2 = 1\}$ é uma curva em $\mathbb{R}^2$, tem dimensão 1.
3. Se $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe $C^1$ tem posto $f' = 0$ em $\mathbb{R}^2$, então $f$ é constante e Im $f$ tem dimensão zero.
4. Se $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é dada por $f\colon \begin{cases} u = x-y+z \\ v = (x-y+z)^3 \\ w = 2(x-y+z) \end{cases}$, temos que o posto de $f'$ é 1 em $\mathbb{R}^3$. Observamos que Im $f = \{(u,u^3,2u)) : u \in \mathbb{R}\}$ é uma curva em $\mathbb{R}^3$, tem dimensão 1.
5. Se $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é dada por $f\colon \begin{cases} u = x+y \\ v = z^3 \\ w = x+y+z^3 \end{cases}$, temos que posto $f' = 2$, para $z \neq 0$, e Im $f = \{(u,v,u+v) : u,v \in \mathbb{R}\}$ é um plano em $\mathbb{R}^3$, tem dimensão 2.
6. Se $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é dada por $f\colon \begin{cases} u = x+y \\ v = 2(x+y) \\ w = 5 \end{cases}$, temos que o posto de $f'$ é 1 e $f(\mathbb{R}^2) = \{(u,2u,5) : u \in \mathbb{R}\}$ é uma reta de $\mathbb{R}^3$, tem dimensão 1.
7. Se $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é de classe $C^1$ e posto $f'(x_0) = k$ então existe uma vizinhança de $x_0$, onde posto $f' \geq k$.

Consideremos $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe $C^1$. Quando o posto de $f'(p_0)$ for máximo, os Teoremas da Função Inversa ($n = m$), da Imersão ($n < m$) e da Submersão ($m > n$) garantem que existe uma vizinhança $V(p_0)$ de $p_0$ tal que $f(V(p_0))$ tem dimensão igual ao posto de $f'(p_0)$. Quando o posto de $f'$ é zero numa vizinhança de $p_0$, então existe uma vizinhança $V(p_0)$ onde $f$ é constante. Quando posto $f'(p_0) \neq 0$ não é máximo mas é constante e igual a $p$ numa vizinhança de $p_0$ então o Teorema do Posto garantirá que existe uma vizinhaça $V(p_0)$ tal que $f(V(p_0))$

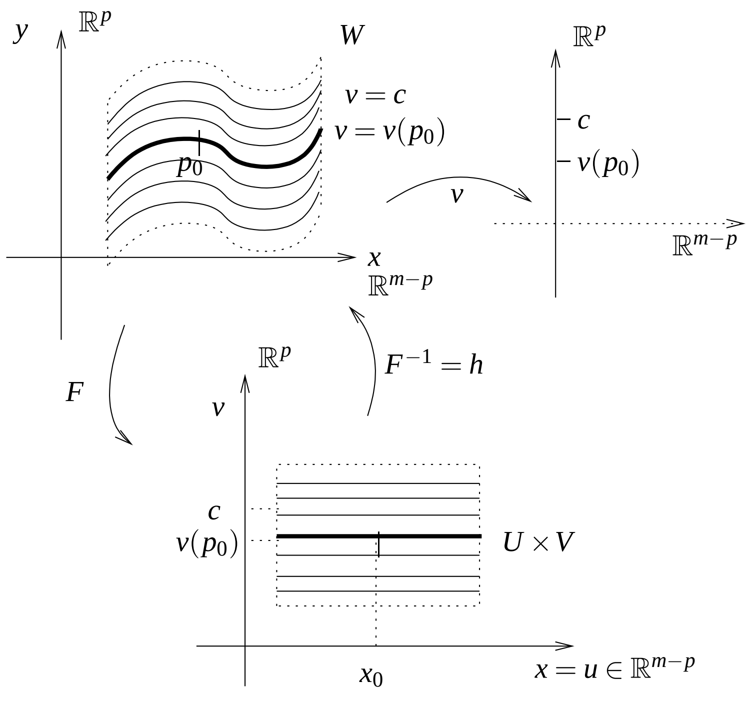
tem dimensão $p$, que $f$ não é injetora e que, a menos de mudanças de coordenadas, ela é, localmente em $p_0$, uma projeção.

TEOREMA 3.50 (Teorema do Posto). *Seja $f\colon A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^1$ no aberto $A$ com posto $f' = constante = p$, $0 < p < \min\{m,n\}$, numa vizinhança de $p_0 \in A$. Então existe um aberto $W \subset A$ contendo $p_0$ tal que $f(W)$ é o gráfico de uma função de classe $C^1$ definida num aberto de $\mathbb{R}^p$ com $n-p$ coordenadas.*

DEMONSTRAÇÃO. Podemos supor que, para $(x,y) \in A \subset \mathbb{R}^{m-p} \times \mathbb{R}^p$,

$$f(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) \in \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$$

e $D_y v(x,y)$ injetora, para cada ponto $(x,y)$ dessa vizinhança de $p_0 = (x_0,y_0)$. Neste caso, $\pi_2 \circ f = v$ é uma submersão na vizinhança de $p_0$. Considere o difeomorfismo de classe $C^1$ $F\colon W \to U \times V$, $F(x,y) = (x, v(x,y))$ entre abertos $W$ contendo $p_0$ e $U \times V \subset R^{m-p} \times R^p$ contendo $(x_0, v(x_0,y_0))$ com inversa $h$ tal que $v \circ h(u,v) = v$. Temos, então, que $v \circ h(U \times V) = v(W)$ é aberto.




Além disso,

$$f(W) = f(h(U \times V)) = \{ f \circ h(u,v) \colon (u,v) \in U \times V \} =$$

$$= \{ (\lambda(u,v), v) \colon (u,v) \in U \times V \}.$$

Observe que $\lambda$ é de classe $C^1$.

Agora mostraremos que $\lambda(u,v) = \lambda(v)$ em $U \times V$. Como

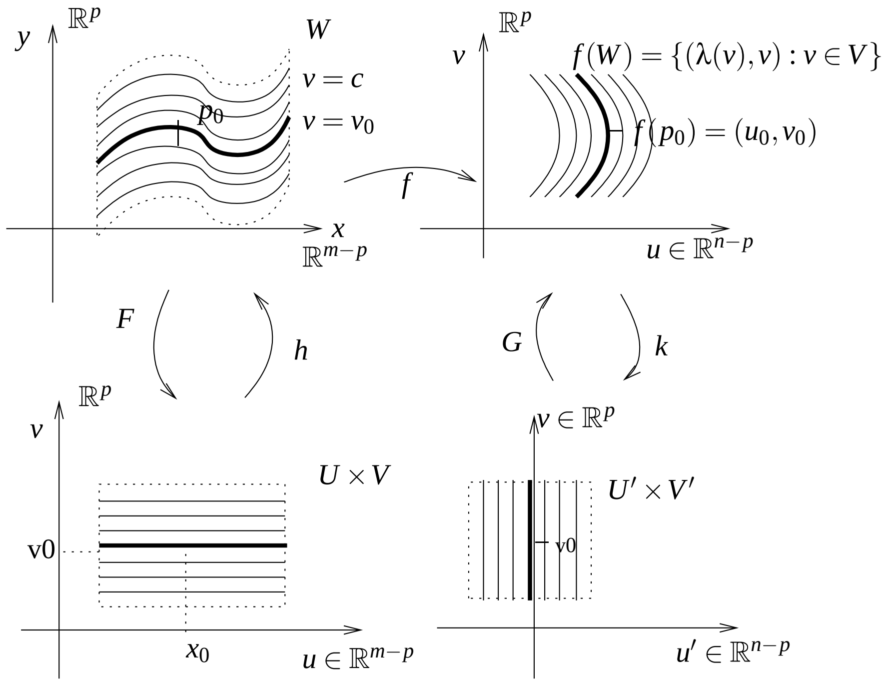
$$D(f \circ h)(u,v) = \begin{pmatrix} D_u\lambda & D_v\lambda \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$$

tem posto $p$, pois $Df(h(u,v))$ tem posto $p$ e $dh(u,v)$ é isomorfismo, então $D_u\lambda = 0$ em $U \times V$, onde $U$ pode ser tomado convexo. Dados $(u_1,v),(u_2,v) \in U \times V$, consideramos $\varphi(t) = \lambda((u_1,v)+t(u_2-u_1,v))$, para $t \in [0,1]$. Temos $\varphi'(t) = D\lambda(\varphi(t))(u_2-u_1,0) = 0$. Logo, $\varphi(t) =$ constante, isto é, $\lambda$ é constante, para cada $v$ fixado: $\lambda = \lambda(v)$. Portanto, concluímos que $f(W) = \{(\lambda(v),v) \colon v \in V\}$. □

OBSERVAÇÃO 3.51. Para obter outra versão do Teorema do Posto, consideremos a função dada por $G(u',v) = (\lambda(v)+u',v)$ definida numa vizinhança de $(0,v_0)$ em $\mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$ com valores em $\mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$. Temos $G(0,v_0) = (u_0,v_0) = f(p_0)$ e $JG(0,v_0) = \det \begin{pmatrix} I & D\lambda(v_0) \\ 0 & I \end{pmatrix} \neq 0$. Logo, $G$ é um difeomorfismo de classe $C^1$ entre abertos $U' \times V'$ contendo $(0,v_0)$ e $W'$ contendo $f(p_0)$ com inversa $G^{-1} = k$. Assim, concluímos que, diminuindo eventualmente $U$ e $V$, temos

$$(k \circ f \circ h)(u,v) = k(\lambda(v),v) = (0,v),$$

para $(u,v) \in U \times V$.




COROLÁRIO 3.52. *Se $f \colon A \subset \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^p$ é de classe $C^1$ no aberto $A$ e $n > 0$ então $f$ não é injetora.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $r = \max\{\text{posto } f'(x) \colon x \in A\} = $posto $f'(p_0)$. Existe uma vizinhança de $p_0$ onde posto $f'(x) = r$. Se $r = 0$ então $f$ é constante. Se $r = p$, segue do Teorema da Submersão. Se $0 < r < p$, segue do Teorema do Posto. $\square$

# Exercícios

1. Mostre que, em $\mathbb{R}^n$, vale:
   (a) $|x.y| \le \|x\|\|y\|$ (desigualdade de Cauchy Schwarz)
   (b) $|x.y| = \|x\|\|y\| \Leftrightarrow x$ e $y$ são linearmente dependentes.
   (c) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.
   (d) $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$ com $\lambda \ge 0$.
   (e) $\|x-y\| \le \|x\| + \|y\|$.
   (f) $\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \le \|x-y\|$.

2. Mostre que $\det \begin{pmatrix} A_{k\times k} & 0 \\ C_{n\times k} & D_{n\times n} \end{pmatrix} = \det A \det D$.
   $\left(\text{Sugestão: mostre } \begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ C_{n\times k} & D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}\right)$

3. Mostre que se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto então $\overset{\circ}{\widehat{\partial A}} = \emptyset$. Dê exemplo de $D \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\partial D$ é aberto não vazio.

4. (a) Mostre que $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ e $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$.
   (b) Dê exemplo onde $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \neq \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$.

5. Mostre que são falsas:
   (a) $A \subset B \Rightarrow \partial A \subset \partial B$;
   (b) $\partial S = \partial \overline{S}$;
   (c) $\partial S = \partial \overset{\circ}{S}$;
   (d) $\overset{\circ}{S} = \overline{\overset{\circ}{S}}$;
   (e) $(\partial S)^\circ = \emptyset$;
   (f) $\partial A \cap \partial B \subset \partial(A \cap B)$.

6. Sejam $D$ e $A_i$, $i \ge 1$, subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Mostre que
   (a) $\overline{D}$ e $\partial D$ são fechados;
   (b) se $D \subset F$ e $F$ é fechado de $\mathbb{R}^n$ então $\overline{D} \subset F$;

(c) $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ e $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$;

(d) dê exemplo em que $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \neq \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$.

7. Mostre que se $K \subset A \subset \mathbb{R}^n$, com $K$ compacto e $A$ aberto então existe $K_1$ compacto tal que $K \subset \overset{\circ}{K_1} \subset K_1 \subset A$.

8. Seja

$$D = \{x \in [0,1] : \text{ a representação decimal de } x \text{ só tem os dígitos 4 e 7}\}.$$

Este conjunto é aberto? É fechado? Determine $\overset{\circ}{D}$ e $\overline{D}$. O conjunto $D$ é enumerável?

9. Mostre que toda cobertura de $D \subset \mathbb{R}^n$ por abertos admite subcobertura finita ou enumerável.

10. Dados $E \subset A \subset \mathbb{R}^n$, $A$ aberto, mostre que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ com $\overline{E}_n$ compactos, $\overline{E}_n \subset A$.

11. Mostre:
    (a) $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, $S \subset K$ infinito $\Rightarrow S$ tem ponto de acumulação em $K$.
    (b) $x_n \in K$, $K$ compacto $\Rightarrow x_n$ admite subseqüência convergente em $K$.
    (c) $S \subset \mathbb{R}^n$ infinito não enumerável $\Rightarrow S$ tem ponto de acumulação.

12. Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $f$ nula em $A \subset \mathbb{R}^n$ e $p \in \mathbb{R}^n$ ponto de acumulação de $A$, tais que $\lim_{\substack{x \to p \\ x \notin A}} f(x) = 0$. Mostre que $\lim_{\substack{x \to p \\ x \in \mathbb{R}^n}} f(x) = 0$.

13. Construa $D \subset [0,1]^2$ tal que $\partial D = [0,1]^2$ e que contém no máximo um ponto em cada vertical e em cada horizontal.

14. Dê exemplos de abertos $A$ e $B$ de $\mathbb{R}^2$, disjuntos, não vazios, conexos e limitados com $\partial A = \partial B$.

15. Dada $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, defina $\|L\|_1 = \sup\{|Lx| : |x| \leq 1\}$ e $\|L\| = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$ onde $(a_{ij})$ é a matriz de $L$ na base canônica. Mostre que
    (a) $\|\ \|$ e $\|\ \|_1$ são normas em $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$.
    (b) $\|L\|_1 \leq \|L\| \leq \sqrt{n}\|L\|_1$.
    (c) $\|L \circ T\| \leq \|L\|\|T\|$ e $\|L \circ T\|_1 \leq \|L\|_1 \|T\|_1$, onde $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é linear.

16. Estude a continuidade, justificando:

(a) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x\,, & \text{se } x \in \mathbb{Q}; \\ 0\,, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \|x\|^2\,, & \text{se } x \in \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n; \\ 0\,, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \theta$, sendo $(x,y) = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi$.

(d) $f(x,y) = \dfrac{\rho}{\theta}$, sendo $(x,y) = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0,\ 0 < \theta \leq 2\pi$.

(e) $f(x,y) = x|y|$

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2(y-1)}{5x^4+(y-1)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,1); \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

(g) $\sup\{f,g\}$, com $f,g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas.

17. É possível definir cada função em $(0,0)$ de modo que fique contínua nesse ponto?

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2-y^2}$;

(b) $f(x,y) = \dfrac{xy^2+x^2\operatorname{sen}(xy)}{x^2+y^2} + \ln(x^2y^4+5)$;

(c) $f(x,y) = \dfrac{x^5y^{10}}{x^{15}-y^{15}}$;

(d) $f(x,y) = \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$;

(e) $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^4+y^2}$;

(f) $f(x,y) = \dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$.

18. Seja $f\colon\, ]a,b[ \to \mathbb{R}$ crescente. Mostre que existem $\lim\limits_{x\to p+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to p-} f(x)$ para $p \in ]a,b[$ e conclua que o conjunto das descontinuidades de $f$ é, no máximo, enumerável.

19. Mostre:

(a) $f\colon [a,b] \to [a,b]$ contínua $\Rightarrow$ $f$ tem ponto fixo.

(b) $f\colon [a,b[ \to [a,b[$ contínua e sobrejetora $\Rightarrow$ $f$ tem ponto fixo.

20. Mostre:

(a) A função $\det\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é contínua.

(b) $S = \{A \in M_n(\mathbb{R})\colon\ \det A \neq 0\}$ é aberto.

(c) A função que, a cada $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversível, associa a sua inversa $A^{-1}$ é contínua.

(d) $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ linear injetora $\Rightarrow$ existe $c > 0$ tal que $\|Lx\| \geq c\|x\|$, para todo $x$.

21. Mostre que $S = \{A \in M_n(\mathbb{R})\colon\ \det A \neq 0\}$ é denso em $M_n(\mathbb{R})$ e desconexo.

22. Dados $p \in D \subset \mathbb{R}^n$ e $q \in \mathbb{R}^n \setminus D$, mostre que $\overline{pq} \cap \partial D \neq \emptyset$.

23. Mostre que
    (a) $E \subset \mathbb{R}^n$ conexo (compacto) e $p \in \mathbb{R}^n \Rightarrow p + E$ conexo (compacto).
    (b) $E \subset \mathbb{R}^n$ aberto (fechado) e $p \in \mathbb{R}^n \Rightarrow p + E$ aberto (fechado).
    (c) Não existe $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua injetora.

24. Mostre que:
    (a) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ contínua, $E \subset \mathbb{R}^n$ conexo por caminhos $\Rightarrow f(E)$ é conexo por caminhos.
    (b) $E_1 \subset \mathbb{R}^n$, $E_2 \subset \mathbb{R}^k$ conexos por caminhos $\Rightarrow E_1 \times E_2$ é conexo por caminhos.
    (c) $E \subset \mathbb{R}^n$ conexo por caminhos $\not\Rightarrow \overline{E}$ conexo por caminhos.

25. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua com $f(x,0) = 0$, para todo $x$. Mostre que existe $r > 0$ tal que $|f(x,y)| < \frac{1}{4}$, para todo $(x,y) \in [0,1] \times [-r,r]$.

26. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua que se anula em $S^1$. Mostre que existe $0 < r < \frac{1}{4}$ tal que $1 - r < \|(x,y)\| < 1 + r \Rightarrow |f(x,y)| < \frac{1}{6}$.

27. Seja $f\colon K \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $K$ é compacto. Mostre que $f$ é contínua em $K$ se, e somente se, graf $f$ for compacto.

28. Sejam $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ uniformemente contínua e $p \in \mathbb{R}^n$ ponto de acumulação de $D$. Mostre que existe $\lim\limits_{x \to p} f(x)$ e conclua que $f$ pode ser estendida continuamente para a fronteira de $D$.

29. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que, para toda curva $\gamma\colon\ ]-\delta,\delta[ \to \mathbb{R}^2$ contínua com $\gamma(0) = (0,0)$, tem-se $(f \circ \gamma)(t)$ contínua em $t = 0$. Pergunta-se: $f$ é contínua em $(0,0)$?

30. Sejam $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente (estritamente) e $x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$. Mostre que $\sum\limits_{i=1}^{n} o(f, x_i) \leq f(b) - f(a)$ $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} o(f, x_i) < f(b) - f(a)\right)$.

31. Mostre que $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ é de classe $c^\infty$.

32. Dada $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pergunta-se (i) Para que $u \in \mathbb{R}^2$, existe $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0)$? Calcule. (ii) Existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ ? (iii) $f$ é diferenciável em $(0,0)$? (iv) $f$ é contínua em $(0,0)$?
   (a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$.
   (b) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(y-x)^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$.

33. Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ diferenciável em $p$. Existe $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(p+h)-f(p)}{\|h\|}$?

34. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$. Prove que a função

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}, & \text{se } x \neq y; \\ f'(x), & \text{se } x = y \end{cases}$$

é diferenciável se $x \neq y$ e, se existir $f''(x)$, então $F$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

35. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ usando a definição de derivada direcional e interprete geometricamente:
   (a) $f(x,y) = (x^2+y^2, -x^2-y^2)$;
   (b) $f(x,y) = (x+y, xy)$;
   (c) $f(x,y) = (x^2y^2, xy)$.

36. (a) Suponha que $v \neq 0$ e que exista $\dfrac{\partial f}{\partial v}(p)$. Mostre que também existe $\dfrac{\partial f}{\partial tv}(p)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial tv}(p) = t\dfrac{\partial f}{\partial v}(p)$;
   (b) Encontre exemplos em que existam $\dfrac{\partial f}{\partial (u+v)}(p)$, $\dfrac{\partial f}{\partial u}(p)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial v}(p)$ com $\dfrac{\partial f}{\partial (u+v)}(p) \neq \dfrac{\partial f}{\partial u}(p) + \dfrac{\partial f}{\partial v}(p)$.

37. Sejam $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ e $u = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

   Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0) \neq \nabla f(0,0).u$. Explique.

38. Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ diferenciável e $F(x,y) = f(3x-y)$.
   (a) Calcule $\dfrac{\partial F}{\partial (h,k)}(x_0,y_0)$ usando a definição de derivada direcional.
   (b) Mostre que $F$ é diferenciável em $(x_0,y_0)$ usando a parte anterior. Explicite $dF(x_0,y_0)$.

(c) Calcule $dF(x_0,y_0)\Big((1,1,1,1),(1,0,1,0)\Big)$ para $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4$.

(d) Calcule $dF(x_0,x_0)(x_0,5x_0)$, no caso em que $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 + 2x_3$ e $x_0 = (1,2,3)$.

39. Estude a diferenciabilidade explicitando $dF(p)$ e sua matriz:

(a) $F(x) = (x, f(x))$, sendo $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é diferenciável.

(b) $F(x,y) = (x, f(y))$, sendo $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é diferenciável e $x \in \mathbb{R}^m$.

(c) $F(x) = x.x_0$, com $x_0, x \in \mathbb{R}^n$.

(d) $F(x) = x.Lx$, com $x \in \mathbb{R}^n$ e $L \in L(\mathbb{R}^n)$.

(e) $F(x,y) = f(x) + g(y)$, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ são diferenciáveis.

40. Mostre que $f(X) = X^2 + X^3$, onde $X \in M_n(\mathbb{R})$, é diferenciável e explicite $df(X_0)(H)$.

41. Considere $A \in M_3(\mathbb{R})$ como elemento de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, onde cada linha $a_i \in \mathbb{R}^3$. Mostre que $\det\colon M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é diferenciável e explicite $(\det)'(A)(I)$.

42. Estude a diferenciabilidade de $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

(a) $f(x,y) = |x| + |y|$

(b) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$

(c) $f(x,y) = |xy|$

(d) $f(x,y) = \sup\{|x|, |y|\}$.

43. Dada $f(t) = \begin{cases} \left(t^2 \cos \dfrac{1}{t}, t^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{t}\right), & \text{se } t \neq 0; \\ (0,0), & \text{caso contrário} \end{cases}$

(a) Verifique que $f$ é diferenciável.

(b) Verifique que $f'(\mathbb{R})$ não é conexo.

(c) Conclua que não vale um Teorema do Valor Intermediário para derivadas de funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

44. Dê o maior subconjunto de $\mathbb{R}^2$ onde $f$ é de classe $C^1$ mas não é de classe $C^2$.

(a) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$;

(b) $f(x,y) = x\sqrt{x^2 + y^4}$.

45. Seja $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ de classe $C^1$ no aberto $A$. Mostre que o conjunto $\{x \in A\colon\ f'(x) \text{ é injetora}\}$ é um aberto.

46. Se $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é diferenciável e $f(tx) = t f(x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$, mostre que $f$ é linear.

47. Mostre que $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$ não é diferenciável em $(0,0)$, mas $f \circ \gamma$ é diferenciável em $t = 0$, qualquer que seja a curva $\gamma\colon ]-\delta,\delta[ \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(0) = 0$, derivável em $t = 0$.

48. Seja $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ bilinear. Mostre que
    (a) $\displaystyle\lim_{(h,k)\to 0} \frac{f(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$.
    (b) $f$ é diferenciável em $(x_0,y_0)$; explicite $df(x_0,y_0)(h,k)$.

49. Se $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável e $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x-y\|$, para todo $x,y$ e $M$ constante, mostre que $\left\|\dfrac{\partial f}{\partial v}(p)\right\| \leq M\|v\|$, para todo $p,v \in \mathbb{R}^m$.

50. Seja $F = (f,g)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe $C^2$. Mostre que a aplicação definida por $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto dF(x,y) \in L(\mathbb{R}^2)$ (onde $L(\mathbb{R}^2)$ é identificado com $M_2$ ou $\mathbb{R}^4$) é diferenciável e explicite $d(dF)(x_0,y_0) = d^2F(x_0,y_0)$.

51. Usando a Regra da Cadeia,
    (a) Mostre que $\omega(t)$ é diferenciável, explicitando $d\omega(t)$, no caso em que $\omega = F(x,y,t)$, com $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $F(x,y,z)$ reais e diferenciáveis.
    (b) Idem para a função $\omega = \omega(x,y,z)$, com $\omega = f(x,u,v)$, $u = u(x,y)$ e $v = v(y,z)$ reais e diferenciáveis.
    (c) Idem para a função $F(x,y,z) = f(g(x+y),h(y+z))$, onde $g,h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis.

52. Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferenciável. Mostre que
    (a) $F(x) = f(x).f(x)$ é diferenciável, explicitando $dF(x_0)(h)$;
    (b) $\|f(x)\| = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \det f'(x) = 0$. Interprete geometricamente.

53. Verifique se as funções dadas são lipschitzianas no domínio dado e, em caso afirmativo, dar uma constante de Lipschitz.
    (a) $f(x,y) = (3x^2y, x^2 - y^4)$ em $[2,5] \times [1,2]$ e em $\mathbb{R}^2$;
    (b) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ em $[0,1]$ e em $\mathbb{R}^+$;
    (c) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ em $[0,1]$.

54. Verifique se $M = \sqrt{100}$ pode ser constante de Lipschitz para $f(x,y) = (3x^2y^2, x^3 - y^3)$ em $[0,1]^2$.

55. Mostre que se $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma função tal que, para todo $x,y \in \mathbb{R}^m$, vale $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x-y\|^2$, então $f$ é constante.

56. (a) Seja $f\colon A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ com $A$ aberto convexo e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$, para todo $(x,y)\in A$. Mostre que $f(x,y)=g(x)$ em $A$.
    (b) Se $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ em $\mathbb{R}^2$, mostre que $f$ é constante.

57. Seja $A=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0):x\geq 0\}$.
    (a) Mostre que se $f\colon A\to\mathbb{R}$ tem $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ em $A$ então $f$ é constante.
    (b) Encontre $f\colon A\to\mathbb{R}$ com $\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ em $A$, mas $f$ não é independente de $y$.

58. Seja $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ de classe $C^1$ com $f(0)=0$. Mostre que existem funções contínuas $g_i\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ tais que $f(x)=\sum_{i=1}^{n}x_ig_i(x)$, $\forall x$.
    $\left(\text{Sugestão: } f(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{\partial f}{\partial t}(tx)dt\right)$

59. Estude a diferenciabilidade de $F(x,y)=A(x)y$ onde $A\colon\mathbb{R}^m\to L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)$ é diferenciável.

60. Seja $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais limitadas. Mostre que $f$ é contínua.

61. Seja $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ diferenciável com $\nabla f(u).u>0$, para todo $\|u\|=1$. Mostre que existe $p$, $\|p\|<1$ tal que $Df(p)=0$.

62. Seja $f\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ diferenciável em $0\in\mathbb{R}^m$ com $f(\frac{x}{2})=\frac{f(x)}{2}$, para todo $x$. Mostre que $f$ é linear.

63. Seja $f\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ diferenciável com $\lim\limits_{|x|\to\infty}f'(x).x=0$. Prove que a função $g(x)=f(2x)-f(x)$ é limitada.

64. Se $f\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ é diferenciável e $a$ é ponto de acumulação de $f^{-1}(b)$, mostre que $f'(a)$ não é injetora.

65. Se $f\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ é de classe $C^2$ e $f(tx)=t^2f(x)$, para todo $t\in\mathbb{R}$ e todo $x\in\mathbb{R}^m$, mostre que existe uma aplicação bilinear $B\colon\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ tal que $f(x)=B(x,x)$.

66. $\begin{cases} u=xy \\ v=x^2+y^2 \end{cases}$ é localmente injetora em $(1,1)$? e em $(0,0)$? Por quê?

67. $\begin{cases} u=\operatorname{sen}x\cos y-\operatorname{sen}y\cos x \\ v=\cos x\cos y+\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y \end{cases}$ é localmente injetora? Por quê?

68. Sejam $f,g,h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funções diferenciáveis com $h$ difeomorfismo tais que $f = h^{-1}gh$ e $f(p_0) = p_0$. Mostre que $h(p_0)$ é ponto fixo de $g$ e que $f'(p_0)$ e $g'(h(p_0))$ têm os mesmos autovalores.

69. (a) Mostre que $p$ é raiz isolada de $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$, se $df(p)$ não tem autovalor nulo.

    (b) Mostre que um ponto fixo $p$ de $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$, é isolado se $df(p)$ não tem autovalor $\lambda = 1$.

70. Mostre que

    (a) se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ é difeomorfismo local em cada ponto de $A$ então $f$ é aberta

    (b) se $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo local em cada ponto então $f^{-1}(0)$ é finito ou é enumerável ilimitado.

71. Sejam $g\colon [0,\infty[ \to \mathbb{R}^*_+$ contínua, $A = \{(x,y)\colon 0 < x < y\}$ e

$$f(x,y) = \left( \int_0^{x+y} g(t)dt,\ \int_0^{x^2+y^2} g(t)dt \right)$$

definida em $A$. Mostre que $f$ é um difeomorfismo de $A$ sobre um aberto de $\mathbb{R}^2$.

72. Dada uma função $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ contínua, suponha que existam $n$ funções de classe $C^1$, $g_1,\dots,g_n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tais que $g_1 \circ f,\dots,g_n \circ f$ sejam de classe $C^1$. Mostre que se $\nabla g_1(f(x)),\dots,\nabla g_n(f(x))$ são linearmente independentes, para todo $x \in \mathbb{R}^m$, então, $f$ é de classe $C^1$.

73. Se $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é de classe $C^1$, $\|f'(x)\|_1 \le c < 1$, para todo $x$, mostre que $g(x) = x + f(x)$ é sobrejetora.

74. Mostre que $\varphi(x,y) = (x + f(y), y + f(x))$ é um difeomorfismo sobre $\mathbb{R}^2$ se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é $C^1$ com $|f'(t)| \le \lambda < 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

75. Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe $C^1$ tal que $f'(f(x)) \circ f'(x) = I$, para todo $x$ e $f \circ f(x_0) = x_0$, para algum $x_0$. Mostre que $f$ tem inversa e que $f^{-1} = f$.

76. Para cada constante $c \in \mathbb{R}$, a reta $\begin{cases} z = y - x \\ y = (1-c)x + c \end{cases}$ e a superfície $z = x^2 - y^2$ interceptam-se em $p = (1,1,0)$. Mostre que $p$ é ponto isolado da intersecção da reta com a superfície, se $c \neq 0$, usando o Teorema da Função Inversa.

77. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f: A \to \mathbb{R}^n$ uma contração. Mostre que $I+f$ é uma aplicação aberta (i.e., para todo $B \subset A$ aberto, $(f+I)(B)$ é aberto).

78. A inversa local de $f(x,y) = (\operatorname{sen} x^3 \cosh y, \cos x^3 \operatorname{senh} y)$ em $(0,0)$ é diferenciável nesse ponto?

79. Mostre que $g(x,y) = \left( \int_0^{x-y} f(t)dt, \int_0^{x^2-y^2} f(t)dt \right)$ é um difeomorfismo do aberto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < y < x\}$ sobre um aberto de $\mathbb{R}^2$, sabendo-se que a função $f\colon [0,\infty[ \to \mathbb{R}^{++}$ é contínua.

80. Seja $F: \mathbb{R}^2 \overset{C^1}{\longmapsto} \mathbb{R}$ e $G(x,y) = (F(F(x,y),y), F(x,y))$. Dê condições sobre $F$ para que $G$ seja um difeomorfismo local e calcule $JG^{-1}$ nesse caso.

81. Seja $f\colon \overline{B}_r(0) \to \overline{B}_r(0) \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x-y\|$, com $\lambda$ constante, $0 \leq \lambda \leq 1$. Mostre:
   (a) $f_n = \frac{n-1}{n} f$ é contração, para todo $n \geq 1$.
   (b) $f$ tem ponto fixo? Único?

82. Verificar se $x^3 + xy^2 + y^3 = 1$ pode ser dada localmente no ponto $(1,0)$ por $x = x(y)$. E por $y = y(x)$? Determine a reta tangente em $(1,0)$.

83. Pode $xye^{xz} - z\ln y = 0$ ser resolvida localmente no ponto $(0,1,0)$ como $z = z(x,y)$? e $x = x(y,z)$? e $y = y(x,z)$? Determine o plano tangente em $(0,1,0)$.

84. Estude a existência e a unicidade de solução de classe $C^1$, $y = y(x)$, para a equação $f(x,y) = 0$, localmente em $(0,0)$, onde $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen} xy^2}{xy}$, se $xy \neq 0$, $f(x,0) = 0$, $f(0,y) = 0$.

85. Encontre os 4 pontos onde $\nabla f = 0$ sendo $f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$. Encontre os pontos da curva $f(x,y) = 0$ onde ela não pode ser resolvida unicamente por $y = y(x)$ nem por $x = x(y)$.

86. Dê condições sobre $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe $C^1$ e $f(2,-1) = -1$ para que a curva $\gamma$: $\begin{cases} f(x,y) + z^2 = 0 \\ xz + 3y^3 + z^3 = 0 \end{cases}$ possa ser resolvida por $x \overset{C^1}{=} x(y)$, $z \overset{C^1}{=} z(y)$ localmente em $(2,-1,1)$. Dê a reta tangente à $\gamma$ em $(2,-1,1)$ supondo $f'(2,-1) = (1 \;\; -3)$. Calcule $z'(-1)$ e $x'(-1)$.

87. Para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, considere $f(z) = ze^{xy} + z^3(x^2+y^2) - 1$. Mostre
   (a) $f$ é estritamente crescente e existe um único $z = z(x,y)$ tal que $f(z) = 0$;
   (b) $z(x,y)$ é de classe $C^\infty$.

88. Seja $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$, $F(0,0) = 0$, $F'(0,0) = (2\ 3)$. Mostre que a superfície $F(x+2y+3z-1, x^3+y^2-z^2) = 0$ pode ser dada localmente em $(-2,3,-1)$ como gráfico de $z \overset{c^2}{=} z(x,y)$. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial y}(-2,3)$ e, sabendo-se que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) = 3$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0,0) = -1$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(0,0) = 5$, calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(-2,3)$.

89. Seja $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, de classe $C^1$, $f_\lambda(x) = f(\lambda, x)$ tal que $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$. Enuncie e prove um resultado que garanta a existência e unicidade de ponto fixo próximo de $x_0$ para $f_\lambda$ com $\lambda \sim \lambda_0$.

90. Seja $f(x,y,z) = (x^2+y^2-z^2, x-y-a)$. Para que valores de $a$, $(0,0)$ é valor regular de $f$?

91. Seja $c$ um valor regular de $f: \mathbb{R}^{n>1} \to \mathbb{R}$, de classe $C^1$. Mostre que se $q$ é o ponto de $f^{-1}(c)$ mais próximo de um ponto fixado $p \notin f^{-1}(c)$, então, $p - q$ é ortogonal ao plano tangente a $f^{-1}(c)$ em $q$.

92. Se $M = \{(x, a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n+1}: x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0\}$, prove:
    (a) $M$ é superfície de dimensão $n$ de classe $C^\infty$ de $\mathbb{R}^{n+1}$;
    (b) a restrição a $M$ da projeção $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$\pi(x, a_0, \ldots, a_{n-1}) = (x, a_1, \ldots, a_{n-1})$$

    é um homeomorfismo sobre $\mathbb{R}^n$ cuja inversa é imersão de classe $C^\infty$.

93. Seja $f: [0,2] \to \mathbb{R}_+^*$, contínua, tal que $\displaystyle\int_0^1 f = \int_1^2 f = 1$. Para cada $x \in [0,1]$, considere $g(x)$ definida implicitamente por $\displaystyle\int_x^{g(x)} f(t)dt = 1$. Prove que $g$ está bem definida e é de classe $C^1$.

94. (a) Seja $S = \{A \in M_2(\mathbb{R}): \text{ posto } A = 1\}$. Mostre que, localmente em cada ponto, $S$ é o gráfico de uma funcão real de classe $C^1$. Determine o plano tangente em $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_0$.
    (b) Como é o análogo para $S = \{A \in M_3(\mathbb{R}): \text{ posto } A = 2\}$? e para $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

95. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$, $f^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \neq 0$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que cada subconjunto limitado de $\mathbb{R}^2$ encontra apenas um número finito de componentes conexas de $f^{-1}(0)$.

96. Seja $f\colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ de classe $C^1$, $k,n \geq 1$, com $f'(p_0)$ de posto máximo e $f(p_0) = c_0$. Prove que existem abertos $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ contendo $p_0$ e $V \subset \mathbb{R}^k$ contendo $c_0$ tais que, para todo $c \in V$, $f^{-1}(c) \cap V$ é gráfico de função de classe $C^1$ de $k$ variáveis e $n$ componentes com o mesmo domínio.

97. Determine o paralelepípedo de faces paralelas aos planos coordenados inscrito no elipsóide $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ de maior volume possível.

98. Determine os extremos absolutos de $g(x,y,z) = xyz$ condicionada à curva
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

99. Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável não constante. Dado $\varepsilon > 0$, mostre que existe $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $|p| = \varepsilon$ e $p \mathbin{/\!/} \nabla f(p)$.

100. (a) Seja $L \in L(\mathbb{R}^n)$ simétrica. Mostre que os extremos da função dada por $f(x) = L(x).x$ se condicionada à esfera $S^{n-1}$ são autovetores de $L$ e os valores extremos são os autovalores correspondentes.
   (b) Conclua que o valor máximo e o valor mínimo da função dada por $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ são os autovalores da matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

101. Seja $F\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, de classe $C^1$, $m \leq n$, tal que, para cada $t \in \mathbb{R}$, a função $F_t(x) = F(x,t)$ tem posto máximo (isto é, derivada de posto máximo), para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Mostre que a função $G(x,t) = (F(x,t),t)$ tem posto máximo, para todo ponto $(x,t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$.

102. Mostre que o gráfico de $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, de classe $C^1$ é imagem inversa de valor regular e é imagem de imersão de classe $C^1$.

103. Dada $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 - 4)^2 + z^2 - 1$, determine os valores de $c \in \mathbb{R}$ tais que $f^{-1}(c)$ é superfície de $\mathbb{R}^3$ e, nesses casos, descreva $f^{-1}(c)$ e determine sua dimensão.

104. Seja $SL(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R})\colon \det A = 1\}$.
   (a) Mostre que $SL(3)$ é superfície de $M_3(\mathbb{R})$, dando a dimensão.
   (b) Determine o plano tangente a $SL(3)$ na identidade $I$.

105. Dada $f(x,y,z,t) = (x^2+y^2-z^2+t^2, t^2)$,
   (a) determine os valores regulares $(a,b)$ de $f$ e descreva os conjuntos $f^{-1}(a,b)$;
   (b) para que $(a,b)$, $f^{-1}(a,b)$ é superfície em $\mathbb{R}^4$?

106. (a) Determine os extremos de $f(x,y) = x.y$, para todos $x,y \in \mathbb{R}^n$, em $\|x\|^2+\|y\|^2 = 1$.
   (b) Use (a) para provar a desigualdade de Cauchy Schwarz em $\mathbb{R}^n$.

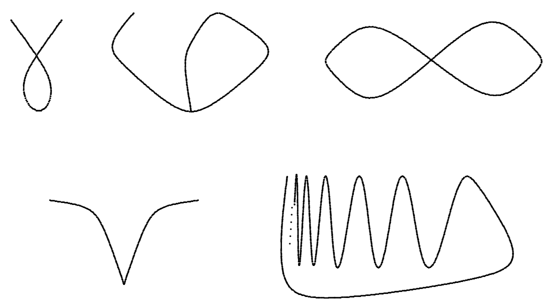
107. Mostre que a imagem inversa de um valor regular de $f \in C^1$, localmente em cada ponto, é a imagem de uma imersão de classe $C^1$. Reciprocamente, a imagem de uma imersão de classe $C^1$, localmente em cada ponto, é a imagem inversa de valor regular?

108. Seja $0 \in \mathbb{R}$ valor regular de $f\colon \mathbb{R}^3 \xmapsto{C^1} \mathbb{R}$, $f(a) = 0$, $\gamma\colon ]-1,1[\to \mathbb{R}^3$ derivável com $\gamma(0) = a$ e $\gamma'(0)$ não pertencente ao plano tangente à curva $f = 0$ em $a$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que $f(\gamma(t))$ não se anula e tem sinais distintos em $]-\delta,0[$ e em $]0,\delta[$, respectivamente. Interprete geometricamente.

109. Mostre que a superfície obtida pela rotação do gráfico de $z = \varphi(x)$ em torno do eixo $z$, onde $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, é de classe $C^1$, isto é, de classe $C^1$ em um aberto contendo $[a,b]$, e $0 < a < b$, é imagem de uma imersão de classe $C^1$ e imagem inversa de valor regular. Idem para a superfície de $\mathbb{R}^3$ dada por $z = \varphi(x)$, $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $C^1$.

110. Sejam $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ imersão de classe $C^1$ e $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ difeomorfismo de classe $C^1$. Mostre que $\sigma \circ F$ é imersão de classe $C^1$.

111. Podem



ser imagem de imersão injetora de classe $C^1$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$? E imagem inversa de valor regular?

112. Seja $f\colon \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^1$, $f(x_0) = 0$ e suponha que $f'(x_0)$ tenha posto máximo. Mostre que a equação $f(x) = c$ tem solução, para todo $c$ suficientemente próximo de 0.

113. Sejam $\varphi, \psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ imersões $C^1$. Mostre que

$$\varphi \times \psi(x,y) = (\varphi(x), \psi(y))$$

é imersão $C^1$. Conclua que o toro $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^4$ é imagem de imersão $C^1$ de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^4$.

114. Mostre que se $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é de classe $C^1$ com $m < n$, então $f$ não é injetora.

115. Mostre que se $f\colon \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^n$ é submersão de classe $C^1$, então $f$ é aberta.

116. Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1,\ldots,x_n) = (x_1^2 + \cdots + x_n^2, x_1^2 - (x_2^2 + \cdots + x_n^2))$. Determine os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ em que o posto de $f$ é constante.

117. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ de classe $C^1$ e

$$A_r = \operatorname{int}\{x \in A\colon \text{ posto } f'(x) = r\},$$

onde $r = 0, 1, \ldots, p = \min\{m,n\}$. Mostre que $A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_p$ é denso em $A$. Verifique no caso $f(x_1,\ldots,x_n) = (x_1^2 + \cdots + x_n^2, x_1^2 - (x_2^2 + \cdots + x_n^2))$.

118. Seja $f\colon \mathbb{R}^4 \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^3$ submersão com $f(x) \neq 0$, para todo $x$. Mostre que $\|f(x)\|$ não tem extremos.

119. Sejam $\sigma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ imersão $C^1$ injetora com inversa contínua e $\gamma\colon \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^3$ com $\gamma(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathbb{R}^2)$. Mostre que existe $\delta > 0$ e $\alpha\colon\, ]-\delta,\delta[ \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma = \sigma \circ \alpha$ em $]-\delta,\delta[$.

120. Considere $f(X) = XX^t$, $X \in M_n(\mathbb{R})$ como aplicação de $\mathbb{R}^{n^2}$ em $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, levando em conta que $XX^t$ é simétrica.
   (a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial H}$ e mostre que $f$ é diferenciável em $X$.
   (b) Suponha que $A$ seja ortogonal, isto é, $AA^t = I$. Mostre que a aplicação $f'(A) \in L(\mathbb{R}^{n^2}, \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}})$ é sobrejetora.
   (c) Mostre que $f \in C^1$.
   (d) Conclua que $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) :\ A \text{ ortogonal}\}$ é uma superfície de dimensão $\dfrac{n(n-1)}{2}$.
   (e) Mostre que o plano tangente a $O(n)$ em $I$ é o conjunto $I + \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t = -A\}$.
   (f) Mostre que $O(n)$ é compacto.

# Referências Bibliográficas


[1] Buck, R.C.: *Advanced Calculus*, Mc Graw-Hill Kogakusha, Ltd. 3rd edition (1978).

[2] Guidorizzi, H.: *Um curso de Cálculo*, vol. 2, LTC, RJ (2001).

[3] Lima, E.L.: *Espaços Métricos*, $10^{\text{o}}$ Colóquio Brasileiro de Matemática (1975).

[4] Lima, E.L.: *Curso de Análise*, vol. 2, Projeto Euclides, Impa, RJ (1981).

[5] Spivak, M.: *Calculus on Manifolds*, W.A. Benjamin Inc. (1965).

[6] Munkres, J.R.: *Analysis on Manifolds*, Addison-Wesley Publishing Company (1991).

[7] Rudin, W.: *Principles of Mathematical Analysis* Mc Graw-Hill Book Company, 3rd edition (1976).

# Índice Remissivo