LISTA 8

CHECKLIST

fiz ☐ incompleto ☐ tem resolução ☐ não entendi ☐

PARTE 1

- ☐ 1.
- ☐ 2.
- ☐ 3.

PARTE 2

- ☐ 4.
- ☐ 5.
- ☐ 6.
- ☐ 7.
- ☐ 8.
- ☐ 9.
- ☐ 10.

PARTE 3

- ☐ 11.
- ☐ 12.
- ☐ 13.
- ☐ 14.

$$e^z = \sum \frac{z^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\ln(1+z) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\text{arctg } z = \sum \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\text{sen } z = \sum \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\text{senh } z = \sum \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

$$\cos z = \sum \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\cosh z = \sum \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$$

2. Encontre o raio de convergência, e o disco de convergência, das seguintes séries de potências

(a) $\sum_{n=0}^{+\infty} n^3 z^n$

$|a_n| = n^3 z^n$

pelo critério da razão:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 z^{(n+1)}}{n^3 z^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 z \cdot \cancel{z^n}}{n^3 \cancel{z^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 z}{n^3}$$

$$z \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = z \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^3}{n^3} = z \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}{\cancel{n^3}} = z \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^3$$

$$= z\,(1+0)^3 = |z| < 1$$

então $-1 < z < 1$

portanto, o raio de convergência é 1

o disco de convergência é uma bola aberta $B(0,1)$

(b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} z^n$.

$|a_n| = \frac{2^n}{n!} z^n$

pelo critério da razão; para $a_n > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2^{n+1} z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n z^n} = \frac{2 \cdot \cancel{2^n} \cdot z \cdot \cancel{z^n} \cdot \cancel{n!}}{(n+1) \cdot \cancel{n!} \cdot \cancel{2^n} \cdot \cancel{z^n}} = \frac{2z}{(n+1)}$$

$$2z \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0$$

portanto, a série é absolutamente convergente

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} z^n$ converge para $\forall x \in \mathbb{R}$

o raio de convergência é infinito e o disco de convergência é uma bola aberta $B(0,\infty)$

(c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2} z^n$

$$|a_n| = \frac{2^n}{n^2} z^n$$

pelo critério da razão para $a_n > 0$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} \; z^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{2^n \; z^n} = \frac{2 \cdot \cancel{2^n} \cdot z \cdot \cancel{z^n} \, n^2}{(n+1)^2 \, \cancel{2^n} \, \cancel{z^n}} = \frac{2z \, n^2}{(n+1)^2}$$

$$= 2z \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{(n+1)}\right)^2 = 2z \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}}\right)^2 = 2z \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)^2 = 2z \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2$$

$$= 2z \left(\frac{1}{1}\right)^2 = |2z| < 1$$

pelo critério da razão, se $L < 1$ a série converge

assim, para $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} z^n$ convergir $|2z|$ tem que ser menor que 1

então temos

$$|2z| < 1 \rightarrow \frac{1}{2} < z < \frac{1}{2}$$

e, assim, o raio de convergência é $\frac{1}{2}$ e o disco de convergência é uma bola aberta $B(0, \frac{1}{2})$

(d) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{3^n} z^n.$

temos $|a_n| = \frac{n^3}{3^n} z^n$

pelo critério da razão:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$$

se $L < 1$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

se $L > 1$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge

se $L = 1$, nada se pode afirmar

assim, vamos calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 z^{(n+1)}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3 z^n} = \frac{(n+1)^3 z \cdot \cancel{z^n}\, \cancel{3^n}}{3 \cdot \cancel{3^n}\, n^3\, \cancel{z^n}}$$

$$= \frac{z}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = \frac{z}{3} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)}{n}\right)^3 = \frac{z}{3} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{n}{n}}\right)^3$$

$$= \frac{z}{3} \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^3 = \frac{z}{3} (1+0)^3 = \left|\frac{z}{3}\right|$$

para convergir: $\left|\frac{z}{3}\right| < 1$

assim, temos $-3 < z < 3$

o raio de convergência é 3 e o disco de convergência é uma bola aberta $B(0,3)$

3. (b) Escreva as séries de potências para as funções $\cosh z$ e $\sinh z$.

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

6. Ache os primeiros cinco termos não nulos da série de potências para a divisão

$$\frac{x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + \cdots}{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \cdots}.$$

$$
\begin{array}{l|l}
x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 \ldots & 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 \ldots \\
\cline{2-2}
-\ \underline{x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 \ldots} & x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots \\
\qquad x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 \ldots & \\
\qquad -\ \underline{x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 \ldots} & \\
\qquad\qquad x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 \ldots & \\
\qquad\qquad -\ \underline{x^3 + x^4 + x^5 + x^6 \ldots} & \\
\qquad\qquad\qquad x^4 + 2x^5 + 3x^6 \ldots & \\
\qquad\qquad\qquad -\ \underline{x^4 + x^5 + x^6 \ldots} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad x^5 + 2x^6 \ldots & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -\ \underline{x^5 + x^6 \ldots} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x^6 \ldots &
\end{array}
$$

7. Ache os primeiros três termos não nulos da série de potências para a divisão

$$\frac{z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} + \cdots}{1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} + \cdots}.$$

$$\begin{array}{l|l} z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} + \cdots & 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} + \cdots \\ \hline - \; z + \frac{z^3}{2!} + \frac{z^5}{4!} + \frac{z^7}{6!} + \frac{z^9}{8!} + \cdots & z \\ \hline \end{array}$$

11. Efetue a tradicional divisão polinomial (**divisão polinomial euclideana**) do polinômio $p(x)$ pelo polinômio $q(x)$.

exemplo de divisão polinomial euclidiana

1. primeiro dividimos o termo de grau mais alto do divisor pelo mais alto do dividendo

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 4x^2 + x - 6 & x + 2 \quad \text{divisor} \\ \text{dividendo} & \overline{x^2} \\ & \text{quociente} \end{array}$$

2. agora multiplicamos o valor do quociente (x^2) por todo o divisor e subtrair a expressão do dividendo.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 4x^2 + x - 6 & x + 2 \\ - \; x^3 + 2x^2 & \overline{x^2} \\ \hline 2x^2 + x - 6 & \end{array}$$

3. agora o maior termo do dividendo é $2x^2$ e repetimos o processo

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 4x^2 + x - 6 & x + 2 \\ - \; x^3 + 2x^2 & \overline{x^2 + 2x} \\ \hline 2x^2 + x - 6 & \end{array}$$

4. multiplicamos $2x$ pelo divisor

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 4x^2 + x - 6 & x + 2 \\ - \; x^3 + 2x^2 & \overline{x^2 + 2x} \\ \hline 2x^2 + x - 6 & \\ - \; 2x^2 + 4x & \\ \hline -3x - 6 & \end{array}$$

5. repetimos

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 4x^2 + x - 6 & x + 2 \\ - \; x^3 + 2x^2 & \overline{x^2 + 2x - 3} \\ \hline 2x^2 + x - 6 & \\ - \; 2x^2 + 4x & \\ \hline -3x - 6 & \\ - \; -3x - 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

terminamos a divisão, no caso obtivemos resto zero, mas caso não acontecesse, teríamos:

$$Q(x) = A(x) - R(x) \cdot B(x)$$

quociente dividendo resto divisor

(a) $p(x) = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$ e $q(x) = x + 1$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 & x+1 \\ \hline
-\ x^4 + x^3 & x^3 + 9x^2 + 26x + 24 \\ \hline
9x^3 + 35x^2 + 50x + 24 & \\
-\ 9x^3 + 9x^2 & \\ \hline
26x^2 + 50x + 24 & \\
-\ 26x^2 + 26x & \\ \hline
24x + 24 & \\
-\ 24x + 24 & \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

(b) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ e $q(x) = x - 1$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + 2x^2 - x - 2 & x-1 \\ \hline
-\ x^3 - x^2 & x^2 + 3x + 2 \\ \hline
3x^2 - x - 2 & \\
-\ 3x^2 - 3x & \\ \hline
2x - 2 & \\
-\ 2x - 2 & \\ \hline
0 &
\end{array}
$$