CÁLCULO I

Prof. Marcos Diniz | Prof. André Almeida | Prof. Edilson Neri Júnior | Prof. Emerson Veiga | Prof. Tiago Coelho

Aula nº 14: Derivação Implícita. Derivada da Função Inversa. Taxas Relacionadas.

Objetivos da Aula

- Apresentar a técnica de derivação implícita;
- Determinar a derivada da função inversa;
- Resolver problemas envolvendo taxas relacionadas.

1 Derivação Implícita

As funções apresentadas até agora podem ser descritas expressando-se uma variável explicitamente em termos de outras. Por exemplo:

$$y = x^2 - 3x + 1 \qquad \text{ou} \qquad y = \operatorname{sen}(x)$$

ou, em geral, $y = f(x)$. Algumas funções, entretanto, são definidas implicitamente por uma relação entre x e y, tais como

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad \text{ou} \qquad x^3 + y^3 = 6xy.$$

Observe que o gráfico da equação $x^2+y^2 = 1$ é uma curva chamada circunferência de raio 1 com centro na origem. Se você separar y da equação, é possível escrever explicitamente em relação a x, porém temos duas funções, uma positiva e outra negativa:

$$y = \sqrt{1 - x^2} \qquad \text{ou} \qquad y = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Apresentaremos a seguir, algumas curvas definidas implicitamente.

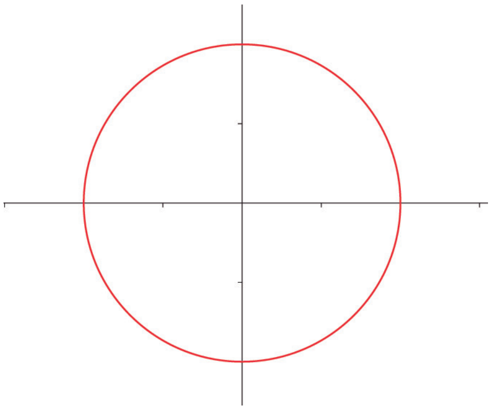


Figura 1: Círculo: $x^2 + y^2 = 1$

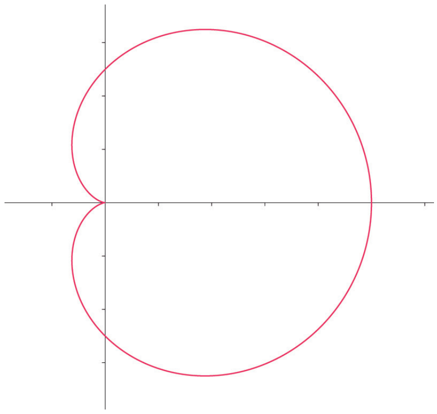


Figura 2: Cardioide: $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$

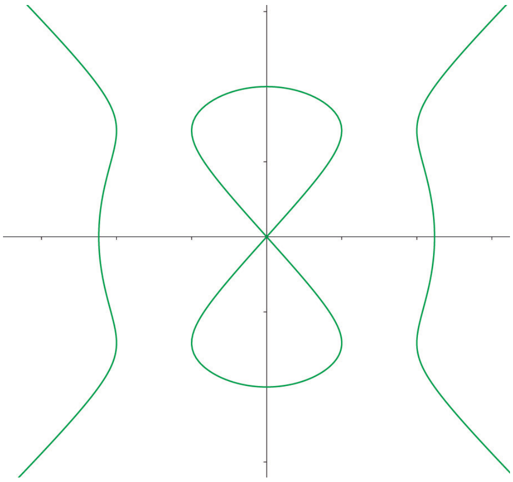


Figura 3: Curva do Diabo: $y^2(y^2-4) = x^2(x^2-5)$

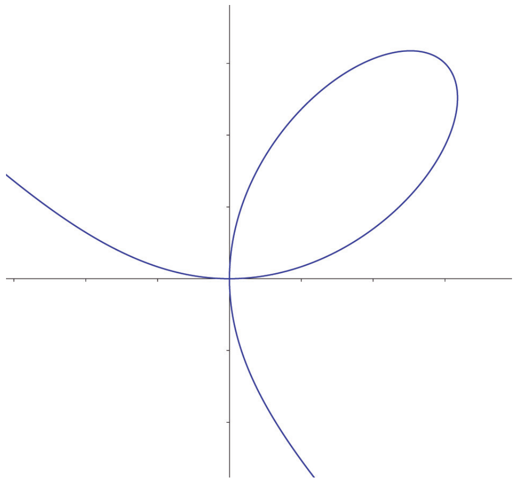


Figura 4: Folio de Descartes: $x^3 + y^3 = 6xy$

Definição 1. *Dizemos que uma função $y = f(x)$ é dada implicitamente pela equação $Q(x,y) = 0$, se para todo x no domínio de f, o ponto $(x, f(x))$ for solução da equação, isto é, $Q(x,y) = 0$.*

Exemplo 1. *A função $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{3x-1}$ é dada implicitamente pela equação $\operatorname{sen}^2(x) + y = 3xy$, uma vez que para todo $x \neq \dfrac{1}{3}$, o par $\left(x, \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{3x-1}\right)$ é solução desta equação.*

■

Suponha $y = f(x)$ uma função diferenciável e dada implicitamente pela equação:

$$Q(x,y) = 0.$$

Usando a regra da cadeia podemos derivar $Q(x,y) = 0$, isto é, derivamos os dois lados desta equação em relação a x:

$$\frac{d}{dx}[Q(x,y)] = 0,$$

considerando x como variável independente e lembrando que y é função de x. Desta forma, é possível obter a derivada das funções implícitas, mesmo não conhecendo explicitamente a função $f(x)$. Basta achar a derivada usando as propriedades e a regra da cadeia para y. Este processo é chamado de **derivação implícita**.

Exemplo 2. *Seja $y = f(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $-3x^2 + 6y + 2x = 6$. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$.*

Solução: Derivando a equação dada em relação a x, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(-3x^2 + 6y + 2x) &= \frac{d}{dx}(6) \\
-6x + 6\frac{dy}{dx} + 2 &= 0 \\
\frac{dy}{dx} &= x - \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 3. *Se $g(x) + x\operatorname{sen}(g(x)) = x^2$, encontre $g'(0)$.*

Solução: Derivando a equação em relação a x, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[g(x) + x\,\mathrm{sen}(g(x))] &= \frac{d}{dx}[x^2] \\
g'(x) + \mathrm{sen}(g(x)) + x\cos(g(x)).g'(x) &= 2x \\
g'(x) &= \frac{2x - \mathrm{sen}(g(x))}{1 + x\cos(g(x))} \\
g'(0) &= -\,\mathrm{sen}(g(0)).
\end{aligned}$$

Como $g(x)$ satisfaz a equação dada, então fazendo $x = 0$ nesta equação:

$$g(0) + 0.\,\mathrm{sen}(g(0)) = 0 \;\Rightarrow\; g(0) = 0.$$

Substituindo este valor em $g'(0)$, obtemos:

$$g'(0) = -\,\mathrm{sen}(0) = 0.$$

■

Exemplo 4. *Encontre a equação da reta tangente à curva $x^2 + y^2 = 9$, no ponto $(2, \sqrt{5})$.*

Solução: Derivando em relação x, temos:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(9) \;\Rightarrow\; 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},\; y \neq 0.$$

Para escrever a equação da reta, precisamos calcular m:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,\sqrt{5})} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Assim:

$$y - \sqrt{5} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}(x - 2) \;\Rightarrow\; 5y + 2\sqrt{5}x = 9\sqrt{5}.$$

■

Exemplo 5. *Use derivação implícita para encontrar uma equação da reta tangente à curva $\mathrm{sen}(x + y) = 2x - 2y$, no ponto de abscissa (π, π).*

Solução:

Considere $y = f(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $\mathrm{sen}(x + y) = 2x - 2y$. Como já temos o ponto de tangência, resta determinar o coeficiente angular da reta, dado por $f'(\pi)$. Derivando implicitamente a equação dada e usando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\mathrm{sen}(x + y)) &= \frac{d}{dx}(2x - 2y) \\
\cos(x + y).\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) &= 2 - 2\frac{dy}{dx} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{2 - \cos(x + y)}{2 + \cos(x + y)}
\end{aligned}$$

Aplicando no ponto (π, π), temos:

$$f'(\pi) = \frac{2 - \cos(2\pi)}{2 + \cos(2\pi)} = \frac{1}{3}.$$

Portanto, a equação da reta tangente é dada por

$$y - \pi = \frac{1}{3}(x - \pi) \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{3}x + \frac{2\pi}{3}.$$

■

Exemplo 6. *Encontre a equação das retas tangente e normal à Curva do Diabo, dada implicitamente por* $y^2(y^2-4) = x^2(x^2-5)$, *no ponto* $(0,-2)$.

Solução: Derivando implicitamente a equação dada, temos:

$$4y^3\frac{dy}{dx} - 8y\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 10x \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{4x^3-10x}{4y^3-8y} \;\Rightarrow\; \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,-2)} = 0.$$

Portanto, a reta tangente é a reta horizontal $y=-2$ e a reta normal é a reta vertical $x=0$.

■

Exemplo 7. *Se* $x^3+y^3=1$, *encontre* y'' *por derivação implícita.*

Solução: Derivando implicitamente, temos:

$$\frac{d}{dy}(x^3+y^3) = \frac{d}{dy}(1) \;\Rightarrow\; 3x^2+3y^2.y' = 0.$$

Derivando implicitamente novamente, temos:

$$\frac{d}{dy}(3x^2+3y^2.y') = 0 \;\Rightarrow\; 6x+6y.y'.y'+3y^2.y'' = 0 \;\Rightarrow\; y'' = \frac{-2(x+y.(y')^2)}{y^2}.$$

■

2 Derivada da função inversa

Suponha f uma função inversível e derivável em um ponto x, com $f'(x)\neq 0$. Já vimos que:

$$y = f(x) \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = [f(x)]'$$

e

$$x = f^{-1}(x) \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dy} = [f^{-1}(y)]'.$$

Da definição de função inversa, segue que para todo $x \in D_f$, temos:

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Derivando esta última identidade em relação a x e usando a regra da cadeia, obtemos:

$$[f^{-1}(f(x))]'.f'(x) = 1$$

Substituindo $f(x)$ por y na inversa, temos:

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{[f(x)]'}.$$

Com isto, temos a seguinte proposição:

Proposição 1. *Seja* f *uma função inversível com inversa* f^{-1}. *Se* f *é derivável em um ponto* x *e* $f'(x)\neq 0$, *então sua inversa é também derivável em* $y=f(x)$. *Além disso:*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Exemplo 8 (Derivada da função arco-cosseno). *Calcule* $f'(x)$ *para* $f(x) = \arccos(x)$.

Solução: Da definição de inversa, temos que:

$$y = \arccos(x) \;\Rightarrow\; x = \cos(y),$$

com $y \in [0, \pi]$. Usando a derivada da inversa, segue que:

$$[\arccos(x)]' = \frac{1}{[\cos(y)]'} = -\frac{1}{\mathrm{sen}(y)}.$$

Como $x = \cos(y)$ e $\mathrm{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$, então $\mathrm{sen}(y) = \sqrt{1 - cos^2 y} = \sqrt{1-x^2}$. Substituindo este valor na equação anterior, temos:

$$[\arccos(x)]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1)$$

■

Exemplo 9 (Derivada da função arco-seno). *Calcule* $f'(x)$ *para* $f(x) = \mathrm{arcsen}(x)$.

Solução: Da definição de inversa, temos que:

$$y = \mathrm{arcsen}(x) \;\Rightarrow\; x = \mathrm{sen}(y),$$

com $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Usando a derivada da inversa, segue que:

$$[\mathrm{arcsen}(x)]' = \frac{1}{[\mathrm{sen}(y)]'} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Portanto,

$$[\mathrm{arcsen}(x)]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1)$$

■

Exemplo 10 (Derivada da função arco-tangente). *Calcule* $f'(x)$ *para* $f(x) = \mathrm{arctg}(x)$.

Solução: Da definição de inversa, temos que:

$$y = \mathrm{arctg}(x) \;\Rightarrow\; x = \mathrm{tg}(y),$$

com $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Usando a derivada da inversa e a identidade $\mathrm{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$, segue que:

$$[\mathrm{arctg}(x)]' = \frac{1}{[\mathrm{tg}(y)]'} = \frac{1}{\sec^2(y)} = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Portanto:

$$[\mathrm{arctg}(x)]' = \frac{1}{1+x^2}.$$

■

Exemplo 11 (Derivada de $\ln x$). *Mostre que*

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}.$$

Solução: Como $y = \ln x$ é a inversa de $y = e^x$ e esta é derivável, então a função $y = \ln x$ é derivável. Assim, utilizaremos o método da função inversa para calcular a derivada de $y = \ln x$. Seja

$$y = \ln x \quad\Longrightarrow\quad e^y = x$$

Derivando implicitamente a equação anterior, em relação a x, temos:

$$e^y . \frac{dy}{dx} = 1$$

Logo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

■

3 Taxas Relacionadas

Suponha que duas variáveis x e y sejam funções de uma terceira variável t, isto é,

$$x = f(t) \text{ e } y = g(t).$$

Como já vimos anteriormente, as derivadas

$$\frac{dx}{dt} = f'(t) \text{ e } \frac{dy}{dt} = g'(t)$$

são interpretadas como as taxas de variação, respectivamente, de x e y em relação a variável t. Se estas variáveis estão relacionadas por meio de alguma equação:

$$Q(x(t), y(t)) = 0$$

derivando esta equação em relação a t, obtemos também uma equação relacionando as derivadas $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{d}{dt}[Q(x(t), y(t))] = 0.$$

Neste caso, $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$ são chamadas de **taxas relacionadas**.

Exemplo 12. *Se a área A de um círculo com raio r e o círculo expande à medida que o tempo passa, encontre $\frac{dA}{dt}$ em termos de $\frac{dr}{dt}$.*

Solução: Sabemos que área A de um círculo de raio r é dada por:

$$A = \pi r^2$$

Como, tanto área, quanto raio variam no tempo, temos $A = A(t)$ e $r = r(t)$. Para encontrar $\frac{dA}{dt}$, basta derivar em relação ao tempo, a fórmula acima membro a membro usando derivada implícita e regrada cadeia em relação a $r = r(t)$. Temos assim:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = 2\pi r\frac{dr}{dt}$$

■

Exemplo 13. *Suponha que petróleo vaze por uma ruptura de um petroleiro e espalha-se em um padrão circular. Se o raio do petróleo derramado crescer a uma taxa constante de 1m/s, quão rápido a área do vazamento está crescendo quando a raio é igual a 30 m.*

Solução: Como o raio do petróleo derramado crescer a uma taxa constante de 1 m/s, significa que

$$\frac{dr}{dt} = 1\,\text{m/s}$$

e quando $r = 30$ m, a área do vazamento estará crescendo conforme

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt} = 2\pi.30.1 = 60\pi\, m^2/s.$$

■

Exemplo 14. *Um tanque cilíndrico com raio de 5 m está recebendo água a uma taxa de 3 m^3/min. Quão rápido a altura de água está aumentando?*

Solução: Temos que:

$$V = \pi r^2 h$$

Derivando esta equação em relação a t, lembrando que V e h são funções de t:

$$\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

e substituindo nesta equação os valores dados no problema, temos:

$$\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = \frac{3}{25\pi} \text{ m/min.}$$

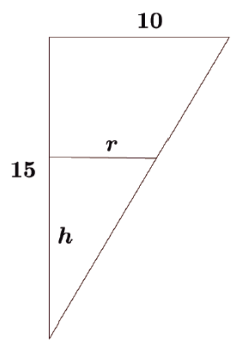
■

Exemplo 15. *Um tanque de água possui o formato de um cone circular reto invertido com raio da base igual a 10 m e altura igual a 15 m. Se a água está sendo bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 0,1 m^3/min, encontre a taxa na qual o nível da água está aumentando quando a água estiver a 5 m de profundidade.*

Solução: Sabemos que o volume do reservatório é dado por:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Note que a equação acima possui duas variáveis, r e h. Sendo assim, vamos eliminar uma delas, escrevendo-a em função da outra. Observe que:



Logo, por semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{15}{h} = \frac{10}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{2}{3}h.$$

Deste modo, podemos escrever o volume como:

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{2}{3}h\right)^2 h \quad \Rightarrow \quad V = \frac{4}{27}\pi h^3$$

Derivando em relação a t, obtemos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{27}.3h^2.\frac{dh}{dt} = \frac{4\pi}{9}.h^2.\frac{dh}{dt}.$$

Substituindo os dados da questão na equação anterior, temos:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{9}{1000\pi} \text{ m/min.}$$

■

Resumo

Faça um resumo dos principais resultados vistos nesta aula.

Aprofundando o conteúdo

Leia mais sobre o conteúdo desta aula nas páginas $179 - 185$ e $188 - 193$ do livro texto.

Sugestão de exercícios

Resolva os exercícios das páginas $185 - 188$ e $194 - 196$ do livro texto.