Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
IME

Relatório do EP1 de MAC0210

Prof. Ernesto G. Birgin

Integrantes do grupo:
Luísa Menezes da Costa (nº USP 12676491)
Sabrina Araújo da Silva (nº USP 12566182)

Abril
2022

Parte 1 - Método do Ponto Fixo (MPF)

1. Breve introdução ao MPF

Precisamos encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$. Para isso, segundo o MPF, devemos encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x$ e, a partir de um ponto inicial $x_0 \in \mathbb{R}$, definir $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, ...$

2. Escolha das funções $g(x)$

Em nossa implementação do ponto fixo, utilizamos três equações $g(x)$ diferentes:

$$g_1(x) = \ln 2x^2$$

$$g_2(x) = \sqrt{\frac{e^x}{2}}$$

$$g_3(x) = -\sqrt{\frac{e^x}{2}}$$

Essas equações foram escolhidas, pois atendem aos seguintes critérios de uma funçaõ de iteração para o MPF:

1. $g(x)$ e $g'(x)$ são contínuas em um intervalo I;
2. $|g'(x)| < 1$, $\forall x \in$ I.

2.1. Manipulação de $f(x)$ para encontrar $g(x)$

2.1.1. $g_1(x)$

$$e^x - 2x^2 = 0$$
$$e^x = 2x^2$$
$$x = \ln 2x^2$$
$$g_1(x) = \ln 2x^2$$

Por definição, o polinômio $2x^2$ é sempre contínuo, e a função exponencial $f(x) = e^x$ também é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$. Já que a função $f(x) = lnx$ é a inversa da função exponencial, então $f(x) = lnx$ também é contínua em todo seu domínio ($\mathbb{R}$ com $x \neq 0$). Logo, $g_1(x) = ln(2x^2)$ é contínua.

A derivada de $g_1(x)$ é $g_1'(x) = \frac{2}{x}$. Aplicando o segundo critério para a escolha de $g(x)$, temos que:

$$|g'(x)| < 1, \forall x \in I.$$
$$\frac{2}{x} < 1$$
$$\frac{2}{x} - 1 < 0$$
$$\frac{2-x}{x} < 0$$
$$x > 2$$

2.1.2. $g_2(x)$ e $g_3(x)$

$$e^x - 2x^2 = 0$$
$$2x^2 = e^x$$
$$x^2 = \frac{e^x}{2}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{e^x}{2}}$$
$$g_2(x) = \sqrt{\tfrac{e^x}{2}} \text{ e } g_3(x) = -\sqrt{\tfrac{e^x}{2}}$$

A função exponencial $f(x) = e^x$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$, e a raiz quadrada é contínua em $x \geq 0$. Logo, as funções $g_2(x) = \sqrt{\frac{e^x}{2}}$ e $g_3(x) = -\sqrt{\frac{e^x}{2}}$ são contínuas.

A derivada de $g_2(x)$ é $g_2'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{2}\sqrt{e^x}}$, que é contínua em $[-\infty, \infty]$. Analogamente, a derivada de $g_3(x)$ é $g_3'(x) = -\frac{e^x}{2\sqrt{2}\sqrt{e^x}}$, que também é contínua em $[-\infty, \infty]$.

2.2. Funções descartadas

Além das funções mencionadas acima, também encontramos a função

$$g_4(x) = \frac{e^x}{2x}$$

Entretanto, essa função não é contínua no intervalo desejado e, portanto, foi descartada.

3. Resultados encontrados

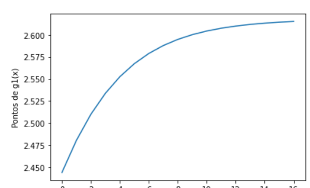
Os resultados abaixo foram computados com um erro de 10^{-3}.
k representa o número da iteração e x_k representa o ponto encontrado na iteração k.

3.1. Análise dos resultados de $g_1(x) = ln(2x^2)$

Considerando $x_0 = 2.4$, obtivemos os seguintes resultados:

k	x_k
1	2.60017
2	2.6043
3	2.60748
4	2.60991
5	2.61178
6	2.61321
7	2.61431
8	2.61515

A raiz encontrada para $g_1(x)$ foi 2.61515. O gráfico abaixo mostra a convergência da função.

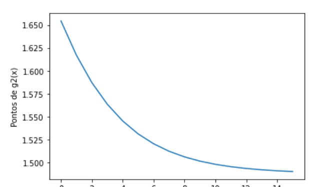


3.2. Análise dos resultados de $g_2(x) = \sqrt{\frac{e^x}{2}}$

Considerando $x_0 = 1.7$, obtivemos os seguintes resultados:

k	x_k
1	1.65438
2	1.61707
3	1.58718
4	1.56364
5	1.54535
6	1.53127
7	1.52054
8	1.5124
9	1.50625
10	1.50163
11	1.49817
12	1.49557
13	1.49364
14	1.49219
15	1.49111
16	1.49031

A raiz encontrada para $g_2(x)$ foi 1.49031. O gráfico abaixo mostra a convergência da função.

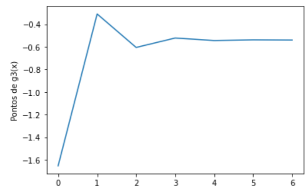


3.3. Análise dos resultados de $g_3(x) = -\sqrt{\frac{e^x}{2}}$

Considerando $x_0 = 1.7$, obtivemos os seguintes resultados:

k	x_k
1	-1.65438
2	-0.309201
3	-0.605819
4	-0.522316
5	-0.544585
6	-0.538555
7	-0.540181

A raiz encontrada para $g_3(x)$ foi -0.540181. O gráfico abaixo mostra a convergência da função.



4. Critérios de parada

No código, o usuário deve inserir E1 e E2 (erro 1 e erro 2, respectivamente), os quais irão definir os seguintes critérios de parada:

1. $|x_{k+1} - x_k| < E1$
2. $|f(x_{k+1})| < E2$

Parte 2 - Método de Newton

1. Escolha das funções

Para a implementação do método de Newton, foram escolhidas as seguintes funções:

$$f_1(x) = x^6 - 1$$
$$f_2(x) = x^3 - 1$$
$$f_3(x) = x^3 - 7$$

As derivadas dessas funções são:

$$f_1(x) = 6x^5$$

$$f_2(x) = f_3(x) = 3x^2$$

Já que tanto as funções quanto suas derivadas são polinômios, elas são contínuas, o que facilita sua aplicação para o método de Newton.

2. Fractais gerados