Segunda Lista de Exercícios de Métodos Estocásticos da Engenharia II

1. Seja X uma variável aleatória de Bernoulli, cuja função de probabilidade é dada por:

$$f(x,p) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x}, & x = 0;1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Obtenha o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro p, que descreve a probabilidade de sucesso. (*Resposta:* $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$)

2. Seja X uma variável aleatória Binomal, cuja função de probabilidade é dada por:

$$f(x,p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}, & x = 0,1,\ldots,n \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Obtenha o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro p, que descreve a probabilidade de sucesso, com base em uma amostra aleatória de tamanho n. (*Resposta:* $\hat{p} = \frac{\bar{X}}{n}$)

3. Seja X uma variável aleatória geométrica, cuja função de probabilidade é dada por:

$$f(x,p) = \begin{cases} (1-p)^{x-1}p, & x = 1,2,3,\ldots \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Obtenha o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro p, que descreve a probabilidade de sucesso. (*Resposta:* $\hat{p} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i} = \bar{X}^{-1}$)

4. Seja X uma variável aleatória de Poisson, cuja função de probabilidade é dada por:

$$f(x,\mu) = \begin{cases} \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}, & x = 0,1,2,3,\ldots \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Obtenha o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro μ, que descreve a média do processo de Poisson. (*Resposta:* $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$)

5. Seja X uma variável aleatória com *fdp* dada por:

$$f(x,\beta) = \begin{cases} c(1+\beta x), & -1 \le x \le 1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

   (a) Determine o valor da constante c para que $f(x,\beta)$ seja realmente uma *fdp* para X; (*Resposta:* $c = \frac{1}{\beta}$)

   (b) Obtenha o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro β. (*Resposta:* $\hat{\beta} = \max[X_i]$)

6. Seja X uma variável aleatória Gama, cuja *fdp* é dada por:

$$f(x,r,\lambda)=\begin{cases}\frac{\lambda}{\Gamma(r)}(\lambda x)^{r-1}e^{-\lambda x}, & com\ r>0,\ x>0\\ 0, & c.c.\end{cases}$$

Obtenha as equações que têm de ser resolvidas para encontrar os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetro r e λ. Quais as complicações envolvidas na resolução destas equações? (*Resposta:* $\lambda=\frac{r}{x}$ e $n\ln\lambda+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=n\frac{\Gamma'(r)}{\Gamma r}$; métodos numéricos computacionais são requeridos.)

7. Seja X uma variável aleatória de Weibull, cuja *fdp* é dada por:

$$f(x,\beta,\delta)=\begin{cases}\frac{\beta}{\delta}(\frac{x}{\delta})^{\beta-1}e^{[-(\frac{x}{\delta})^{\beta}]}, & x>0\\ 0, & c.c.\end{cases}$$

Obtenha as equações que têm de ser resolvidas para encontrar os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetro β e δ. Quais as complicações envolvidas na resolução destas equações? (*Resposta:* $\beta=\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\beta}\ln x_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\beta}}-\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}\right]^{-1}$ *e* $\delta=\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\beta}}{n}\right]^{\frac{1}{\beta}}$; métodos numéricos computacionais são requeridos.)

8. Considere que a espessura de certo óxido em semicondutores seja normalmente distribuída com média μ e variância σ^2. Alguns valores dessa espessura foram coletados:

$$425; 431; 416; 419; 421; 436; 418; 410; 431; 433; 423; 426;$$
$$410; 435; 436; 428; 411; 426; 409; 437; 422; 428; 413; 416.$$

Calcule as estimativas de máxima verossimilhança de μ e de σ^2. (*Resposta:* $\hat{\mu}=423{,}33$ *e* $\hat{\sigma^2}=79{,}06$)

9. Um tubo de PVC é fabricado com um diâmetro médio de 1,01 polegada e um desvio-padrão de 0,003 polegadas. Supondo que o diâmetro seja normalmente distribuído, encontre a probabilidade de uma amostra aleatória de n=9 seções de tubo ter um diâmetro médio amostral maior que 1,009 polegada e menor que 1,012 polegada. (*Resposta:* $\cong 0{,}8186$)

10. Suponha que amostras de tamanho $n=25$ sejam selecionadas, ao acaso, de uma população normal, com média igual a 100 e desvio-padrão igual a 10. Qual é a probabilidade de que a média amostral caia no intervalo de $\mu_{\bar{X}}-1{,}8.\sigma_{\bar{X}}$ a $\mu_{\bar{X}}+1{,}0.\sigma_{\bar{X}}$? (*Resposta:* $\cong 0{,}8054$)

11. Uma fibra sintética usada na fabricação de carpete tem uma resistência à tração que é normalmente distribuída, com média de 75,5 psi e desvio-padrão de 3,5 psi. Encontre a probabilidade de uma amostra aleatória de tamanho $n=6$ corpos-de-prova de fibra ter uma resistência média amostral à tração que exceda 75,75 psi.(*Resposta:* $\cong 0{,}43055$)

12. Considere a fibra sintética do exercício prévio. Como varia o desvio-padrão da média amostral quando o tamanho da amostra aumenta de $n = 6$ para $n = 49$? (*Resposta:* $\sigma_{\bar{X}}$ *é reduzido em 0,929*)

13. A resistência do concreto à compressão é normalmente distribuída, com $\mu = 2500$ psi e $\sigma = 50$ psi. Encontre a probabilidade de uma amostra aleatória de $n = 5$ corpos-de-prova ter um diâmetro médio amostral que caia no intervalo de 2499 psi a 2510 psi. (*Resposta:* $\cong$ 0,191)

14. A quantidade de tempo que um consumidor gasta esperando no balcão de *check-in* de um aeroporto é uma variável aleatória, com média de 8,2 minutos e desvio-padrào de 1,5 minuto. Suponha que uma amostra aleatória de $n = 49$ consumidores seja observada. Encontre a probabilidade de o tempo médio de espera na fila para esses consumidores ser:

    (a) menor que 10 minutos; (*Resposta:* $\cong$ 1)
    (b) entre 5 e 10 minutos; (*Resposta:* $\cong$ 1)
    (c) menor que 6 minutos; (*Resposta:* $\cong$ 0)

15. Uma amostra aleatória de tamanho $n_1 = 16$ é selecionada de uma população normal, com uma média de 75 e um desvio-padrão de 8. Uma segunda amostra aleatória de tamanho $n_2 = 9$ é retirada de uma outra população normal, com média 70 e desvio-padrão 12. Sejam $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$ duas médias amostrais. Encontre:

    (a) A probabilidade de $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ exceder 4; (*Resposta:* $\cong$ 0,5885)
    (b) A probabilidade de $3{,}5 \leq \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq 5{,}5$. (*Resposta:* $\cong$ 0,1759)

16. Uma empresa fabricante de pastilhas para freios efetua um teste para controle de qualidade de seus produtos. Supondo que 1% das pastilhas fabricadas pelo processo atual apresenta desempenho deficiente quanto ao nível de desgaste, qual é a probabilidade, em uma amostra aleatória com 10.000 pastilhas, de serem encontradas 85 ou menos pastilhas com problemas? (*Resposta:* $\cong$ 0,07)

17. Sabe-se 50% dos edifícios construídos em uma grande cidade apresentam problemas estéticos relevantes em menos de cinco anos após a entrega da obra. Considerando a seleção de uma amostra aleatória com 200 edifícios com cinco anos, qual é a probabilidade de menos de 90 deles apresentarem problemas estéticos relevantes (considerar que não tenha havido obras de reparo nos edifícios selecionados)? (*Resposta:* $\cong$ 0,079)

18. A dimensão de hastes metálicas fabricadas em série é uma variável aleatória normalmente distribuída com média 60 cm e variância 4 cm. Ao se coletar uma amostra aleatória de 10 valores determine a probabilidade de que a média amostral esteja situada entre 59,5 a 60,5 cm. (*Resposta:* $\cong$ 0,57046)

19. Admitimos que em um lote de 800 motores, 200 apresentem um determinado defeito. Ao coletarmos uma amostra de 50 motores sem reposição, qual é a probabilidade de que a mesma apresente menos de 10 motores com defeito?

20. Suponha que têm-se 2 processos (A e B) para produzir um artigo, e que o tempo médio de produção para o processo A é de 300 horas e desvio-padrão é de 16 horas, enquanto que para o processo B, o tempo médio é de 306 horas e o desvio-padrão é de 12 horas. Sorteia-se uma amostra aleatória de 64 artigos produzidos com processo A e 49 produzidos com o processo B. Calcular a probabilidade de que:
    (a) A diferença de médias amostrais seja superior a 2 horas.
    (b) O tempo médio de produção da amostra do processo A seja menor ao correspondente processo B.
21. Suponha que 2 máquinas A e B produzam um mesmo artigo e que as massas por artigo (em gramas) tenham distribuição normal com médias: $\mu_1 = 550$ e $\mu_2 = 565$ e variâncias: $\sigma_1^2 = 144$ e $\sigma_2^2 = 256$, respectivamente. Escolhem-se ao acaso 21 artigos produzidos pela máquina A e 31 produzidos pela máquina B. Calcular a probabilidade de que a massa média de produção da amostra da máquina A seja maior do que a massa média dos artigos produzidos pela máquina B em mais de 2 gramas.
22. A probabilidade de uma máquina produzir uma peça perfeita é 80%. Suponha que a classificação de uma peça seja independente da classificação de qualquer outra peça. Em 800 peças fabricadas, qual é a probabilidade da proporção de peças defeituosas ser maior que 18,75%? (*Resposta:* $\cong$ 0,8)
23. Um sistema é formado por 100 componentes, cada um dos quais com confiabilidade de 0,95. Se esses componentes funcionarem independentemente um do outro, e se o sistema completo funcionar adequadamente quando a proporção de componentes funcionando for ao menos de 80%, qual será a confiabilidade desse sistema? (*Resposta:* $\cong$ 0,99)

Nota: Os exercícios desta lista se encontram nas obras referenciadas abaixo. Para um melhor aproveitamento, aconselha-se pesquisá-las e resolver outros exercícios nelas contidos.

1. CANCHO, V.G. *Notas de Aulas sobre Noções de Estatística e Probabilidade.* São Paulo: USP, 2010.
2. HINES, W.W.; *et al.* *Probabilidade e Estatística na Engenharia.* 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
3. MENDES, F. C. T. *Probabilidade para Engenharias.* Rio de Janeiro: LTC, 2010.
4. MEYER, P.L. Probabilidade: *Aplicações à Estatística.* 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1983.
5. MONTGOMERY, D.C.; RUNGER, G.C. *Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros.* 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.