MAC0338 - ANÁLISE DE ALGORITMOS

LISTA 10

CHECKLIST

entregue ☐ fiz ☐ incompleto ☐ não entendi ☐ CRLS ☐

- definição

1 ☐

- mostrar que está em P, NP, coNP

2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 7 ☐

- NP - completo

6 ☐ 8 ☐ 9 ☐

1. Defina *algoritmo eficiente*. Defina *problema de decisão*. Defina *verificador polinomial para* SIM. Defina *verificador polinomial para* NÃO. Defina as classes P, NP e coNP. Dê um exemplo de um problema em cada uma dessas classes, justificando a sua pertinência à classe.

ALGORITMO EFICIENTE: por algoritmo eficiente entende-se um algoritmo polinomial.

PROBLEMA DE DECISÃO: problema que pede uma resposta do tipo sim ou não.

VERIFICADOR POLINOMIAL PARA SIM: um verificador polinomial para sim a um problema Π é um algoritmo polinomial ALG que recebe

- uma instância I de Π e um objeto C
- tal que $\langle C \rangle$ é $O(\langle I \rangle^c)$ para alguma constante

e devolve:

- sim para algum C se a resposta a $\Pi(I)$ é sim
- não para todo C se a resposta a $\Pi(I)$ é não

VERIFICADOR POLINOMIAL PARA NÃO: um verificador polinomial para não a um problema Π é um algoritmo polinomial ALG que recebe

- uma instância I de Π e um objeto C
- tal que $\langle C \rangle$ é $O(\langle I \rangle^c)$ para alguma constante

e devolve:

- sim para algum C se a resposta a $\Pi(I)$ é não
- não para todo C se a resposta a $\Pi(I)$ é sim

CLASSE P: a classe de todos os problemas de decisão que podem ser resolvidos por algoritmos polinomiais.

- **EXEMPLO:** a versão de decisão do problema : subsequência comum máxima, é da classe P, pois a resposta é sim ou não e o problema é resolvido em tempo polinomial

CLASSE NP: a classe NP é formada pelos problemas de decisão que possuem um verificador polinomial para sim.

- **EXEMPLO**: existe subsequência comum máxima ≥ K ? É um problema NP, pois é um problema de decisão, porém estamos tratando de um caso específico (≥K).

- **EXEMPLO 2**: dado um grafo G, existe um caminho de tamanho L ou menor que visita cada vértice pelo menos uma vez?

  Está em NP se a resposta for: "sim, existe um caminho de tamanho L ou menor que visita cada vértice pelo menos uma vez."

  O jeito de provar (certificado) é dando um caminho com essas condições.

CLASSE CO-NP: a classe co-NP é formada pelos problemas de decisão que possuem um verificador polinomial para não. (contrário da classe NP)

- **EXEMPLO**: Dado um grafo G, não existem caminhos de tamanho L ou menos que visita cada vértice ao menos uma vez?

  Responder "não" a esta pergunta é basicamente o mesmo problema do exemplo 2 em NP.

  Para provar é preciso dar um caminho de tamanho L ou menor que visita cada vértice pelo menos uma vez. Então, não é verdade que não existem caminhos em G com essas condições.

2. Mostre que SAT está em NP. (Essa é a parte fácil do teorema de Cook.)

SAT: (Boolean Satisfiability Problem) é o problema de determinar se existe uma interpretação que satisfaça uma dada fórmula booleana.

SAT ESTÁ EM NP: se algum problema estiver em NP, então dado um 'certificado', que é uma solução para o problema e uma instância do problema (uma fórmula booleana f) poderemos verificar (identificar se a solução está correta ou não) o certificado em tempo polinomial. Isso pode ser feito verificando se a atribuição dada de variáveis satisfaz a fórmula booleana.

- Qualquer problema em NP pode ser reduzido em tempo polinomial para o problema de determinar se uma fórmula booleana é satisfazível.

3. Uma fórmula booleana sobre um conjunto X de variáveis booleanas (não necessariamente em CNF) é uma *tautologia* se toda atribuição a X satisfaz $\mathcal{C}$. O problema TAUTOLOGIA consiste em, dado X e $\mathcal{C}$, decidir se $\mathcal{C}$ é ou não uma tautologia. O problema TAUTOLOGIA está em NP? Está em coNP? Justifique suas respostas.

seja T' o complemento de Tautologia, ou seja, para toda fórmula booleana existe uma atribuição que não satisfaz C. Um certificado para esse problema seria uma atribuição que não satisfaz a fórmula booleana. É um problema NP.

Não existem atribuições que não satisfaçam a formula booleana? Esse problema está em co-NP se a resposta for: "não, não é verdade que não existem atribuições que não satisfaçam a fórmula booleana". Um certificado seria uma atribuição que não satisfaça a fórmula booleana. Ou seja, há um verificador polinomial para não tal que, vendo uma instância I de um problema Π e um objeto C, devolve sim para algum C se a resposta a $\Pi(I)$ é não.

NP — sim para algum C se sim
não para todo C se não

CO-NP — sim para algum C se não
não para todo C se sim

4. O problema 2-SAT consiste na restrição de SAT a instâncias X e $\mathcal{C}$ em que toda cláusula de $\mathcal{C}$ tem exatamente dois literais. Mostre que o 2-SAT está em P, ou seja, descreva um algoritmo polinomial que resolva o 2-SAT.

5. Mostre que 2-COLORAÇÃO está em P.

6. Seja $G = (V, E)$ um grafo. Um conjunto $S \subseteq V$ é *independente* se quaisquer dois vértices de S não são adjacentes. Ou seja, não há nenhuma aresta do grafo com as duas pontas em S. O problema IS consiste no seguinte: dado um grafo G e um inteiro $k \geq 0$, existe um conjunto independente em G com k vértices? Mostre que IS é NP-completo.

7. Seja $G = (V, E)$ um grafo. Uma *3-coloração* de G é uma função $c : V \to \{1, 2, 3\}$ tal que $c(u) \neq c(v)$, para toda aresta $uv \in E$.

Considere o

> **Problema** 3-COLORAÇÃO**:** Dado um grafo, determinar se ele tem ou não uma 3-coloração.

Mostre que o 3-COLORAÇÃO está em NP.

Dado um grafo, existe uma função $c: V \to \{1, 2, 3\}$ tal que $c(u) \neq c(v)$ para toda aresta $uv \in E$? O problema está em NP, pois aceita a resposta: "sim, existe uma função que atende essas condições". Ou seja, há um verificador polinomial para sim tal que, para uma instância I do problema Π e um objeto C, devolve sim para algum C sse a resposta a $\Pi(I)$ é sim.

NP   sim para algum C sse sim
       não para todo C sse não

co-NP   não para algum C sse sim
        sim para todo C sse não

8. Mostre que o problema abaixo é NP-completo.

Problema PARTIÇÃO**:** Dada uma coleção S de números, decidir se existe uma subcoleção S' de S cuja soma é igual a soma dos números em $S \setminus S'$, ou seja,

$$\sum_{x \in S} x = \sum_{x \notin S} x.$$

9. Mostre que o problema abaixo é NP-completo.

Problema MOCHILA**:** Dado um número W, um número V, um número inteiro positivo n, uma coleção de números $w_1, \ldots, w_n$, e uma coleção de números $v_1, \ldots, v_n$, decidir se existe um subconjunto S de $\{1, \ldots, n\}$ tal que

$$\sum_{i \in S} w_i \leq W \quad \text{e} \quad \sum_{i \in S} v_i \geq V.$$

.