Exercícios

fiz ☐ não consegui ☐ prof fez ☐ incompleto ☐

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ provar

9 ☐ 10 ☐

1. Três bolas numeradas de 1 a 3 são distribuidas em duas urnas A e B. A cada instante, um dado honesto é lançado. Se o número que aparece na face de cima for de 1 até 3, a bola de número correspondente é trocada de urna; se, por outro lado, a face que sai para cima for 4, 5 ou 6, as urnas permanecem como estão até o instante seguinte, quando o processo todo se repete. Seja $X_n \in \{0, 1, 2, 3\}$ o número de bolas na urna A no instante n.

   (a) Determine a matriz de transição da cadeia de Markov $\{X_n\}_{n\geq 0}$.

   (b) Seja π_0 a distribuição de probabilidade em $\{0, 1, 2, 3\}$ no instante 0 dada por $\pi_0(k) = \binom{3}{k}(\frac{1}{2})^3$. Qual é a distribuição no instante 1?

questão parecida com a do "simulado"

a)

$$\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & \frac{3}{6} & \frac{3}{6} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{6} & \frac{3}{6} & \frac{2}{6} & 0 \\ 2 & 0 & \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} \\ 3 & 0 & 0 & \frac{3}{6} & \frac{3}{6} \end{array}$$

b) $\pi_0(K) = \binom{3}{K}\left(\frac{1}{2}\right)^3$

~~não sei o que fazer aqui~~

$\pi_0(0) = \binom{3}{0}\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

$\pi_0(1) = \binom{3}{1}\frac{1}{8} = \frac{3!}{1!(3-1)!}\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

$\pi_0(2) = \binom{3}{2}\frac{1}{8} = \frac{3!}{2!(3-2)!}\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

$\pi_0(3) = \binom{3}{3}\frac{1}{8} = \frac{3!}{3!(3-3)!}\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

$$\pi_1 = \pi_0 \mathbb{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

2. Após acalorada discussão, três *pistoleiros do velho Oeste*, digamos, srs. Wyatt A, Luke B e Jesse C, decidem resolver sua desavença através de um "duelo triplo". Sr. A acerta seu alvo com probabilidade $\frac{3}{4}$ em cada tiro; sr. B acerta com probabilidade $\frac{1}{2}$ e o sr. C acerta com probabilidade $\frac{1}{4}$. Assuma independência e que, em cada rodada deste duelo triplo, cada competidor sobrevivente atira no melhor oponente vivo, ou seja, atira naquele que acerta seu alvo com maior probabilidade. Portanto, na primeira rodada, B e C atiram em A e A atira em B. Os tiros sao simultâneos. Descreva a cadeia de Markov correspondente, com espaço de estados = "conjunto dos indivíduos sobreviventes numa dada rodada" (portanto, há 8 estados) e determine a matriz de transição correspondente. Qual é a probabilidade de que o sr. C sobreviva o duelo?

$A = \frac{3}{4} \qquad B = \frac{2}{4} \qquad C = \frac{1}{4}$

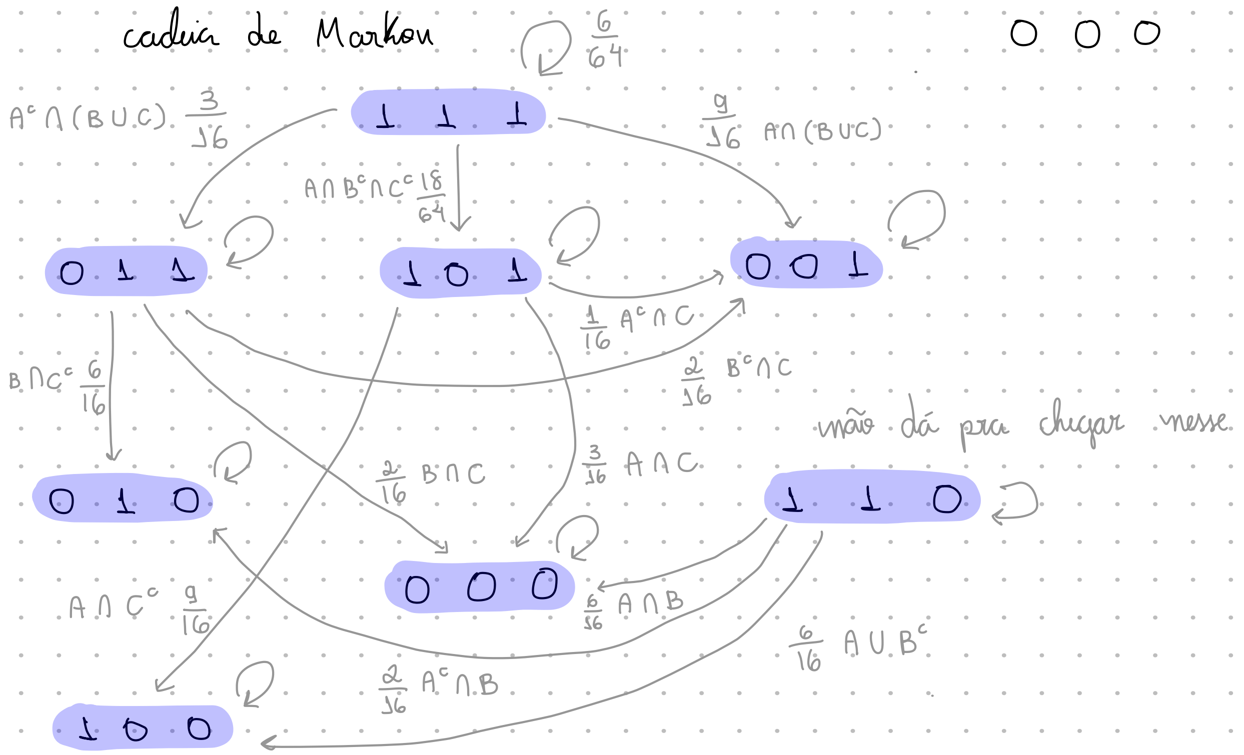
espaço de estados (1 = vivo, 0 = morto) =

A	B	C
1	1	1
1	1	0
1	0	1
0	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1
0	0	0

$A = \frac{3}{4} \qquad B = \frac{2}{4} \qquad C = \frac{1}{4}$

$A^c = \frac{1}{4} \qquad B^c = \frac{2}{4} \qquad C^c = \frac{3}{4}$

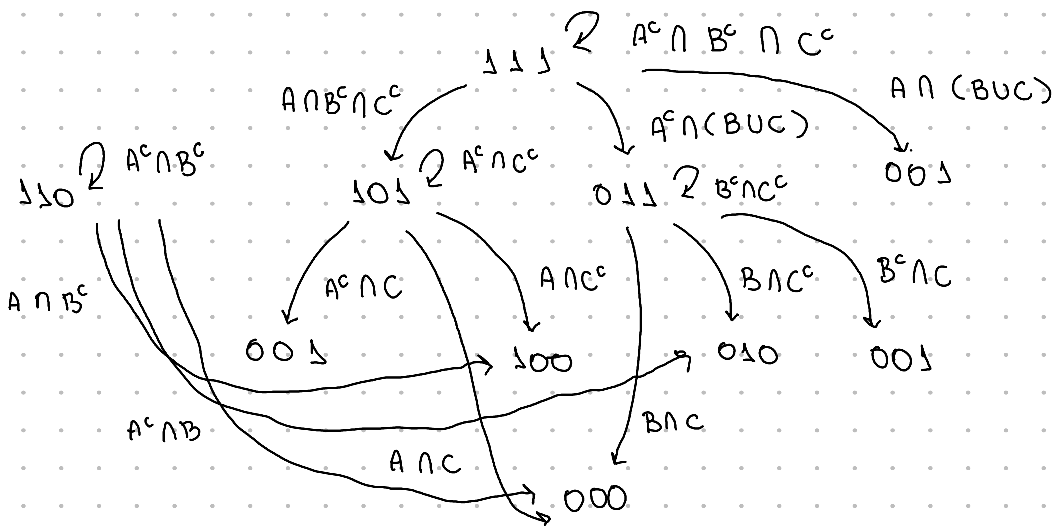
cadeia de Markov



prob de que o sr. C sobreviva

$$\frac{9}{16} + \left(\frac{3}{16} \cdot \frac{2}{16}\right) + \left(\frac{9}{32} \cdot \frac{1}{16}\right) = \frac{9}{16} + \frac{3}{128} + \frac{9}{512} = \frac{309}{512} \approx 0{,}6$$

	111	110	101	011	100	010	001	000	
111	$\frac{6}{64}$	0	$\frac{18}{64}$	$\frac{10}{64}$	0	0	$\frac{30}{64}$	0	= 1
110	0	$\frac{8}{64}$	0	0	$\frac{24}{64}$	$\frac{8}{64}$	0	$\frac{24}{64}$	= 1
101	0	0	$\frac{12}{64}$	0	$\frac{36}{64}$	0	$\frac{4}{64}$	$\frac{12}{64}$	= 1
011	0	0	0	$\frac{24}{64}$	0	$\frac{24}{64}$	$\frac{8}{64}$	$\frac{8}{64}$	= 1
100	0	0	0	0	1	0	0	0	= 1
010	0	0	0	0	0	1	0	0	= 1
001	0	0	0	0	0	0	1	0	= 1
000	0	0	0	0	0	0	0	1	= 1



$A = \frac{3}{4}$ $\quad A^c = \frac{1}{4}$ $\quad B = \frac{2}{4}$ $\quad B^c = \frac{2}{4}$ $\quad C = \frac{1}{4}$ $\quad C^c = \frac{3}{4}$

$111 \rightarrow 111 = A^c \cap B^c \cap C^c = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{64}$

$111 \rightarrow 101 = A \cap B^c \cap C^c = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{18}{64}$

$111 \rightarrow 011 = A^c \cap [(B \cap C^c) \cup (B^c \cap C) \cup (B \cap C)] = \frac{1}{4} \cdot \left[\left(\frac{2}{4} \cdot \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4}\right)\right]$

$\hookrightarrow \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{6}{16} + \frac{2}{16} + \frac{2}{16}\right) = \frac{10}{64}$

$111 \rightarrow 001 = A \cap [(B \cap C^c) \cup (B^c \cap C) \cup (B \cap C)] = \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{16} = \frac{30}{64}$

$101 \rightarrow 001 = A^c \cap C = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = \frac{4}{64}$

$101 \rightarrow 101 = A^c \cap C^c = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16} = \frac{12}{64}$

$101 \rightarrow 100 = A \cap C^c = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{36}{64}$

$101 \rightarrow 000 = A \cap C = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{12}{64}$

$011 \rightarrow 011 = B^c \cap C^c = \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{24}{64}$

$011 \rightarrow 001 = B^c \cap C = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{8}{64}$

$011 \rightarrow 010 = B \cap C^c = \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{24}{64}$

probabilidade que o sr C sobreviva

$$\frac{30}{64} + \left(\frac{18}{64} \cdot \frac{4}{64}\right) + \left(\frac{10}{64} \cdot \frac{8}{64}\right) =$$

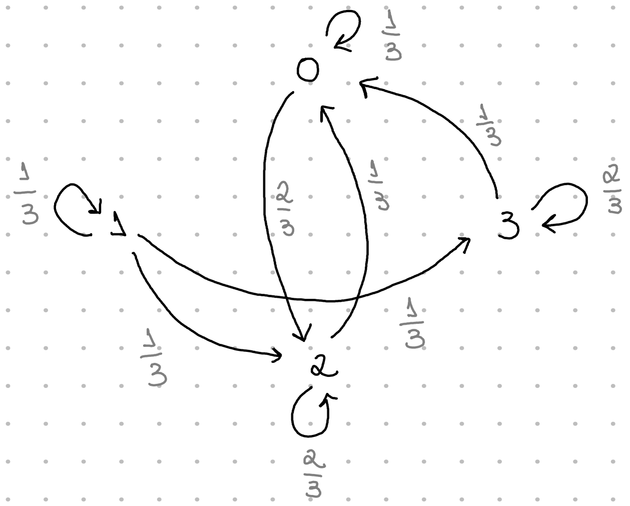
$$\frac{30}{64} + \frac{72}{4096} + \frac{80}{4096} = \frac{30}{64} + \frac{152}{4096} = \frac{259}{512} = 0,506$$

supondo que o duelo termine quando apenas um pistoleiro estiver vivo e que não há rodada em que todos erram.

3. Seja $\{X_n\}_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{0,1,2,3\}$ com matriz de transição $\mathbf{P}$ dada por

$$\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 3 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}$$

a) Classifique esta cadeia. b) Determine: $P(X_7 = 0|X_5 = 1)$. c) Determine $P(X_7 = 0|X_5 = 1, X_8 = 0)$. d) Estime $P(X_{5724659} = 0|X_0 = 2)$.



a) Temos 3 classes

$\{0, 2\}$ → recorrente

$\{1\}$ → transiente

$\{3\}$ → transiente

portanto a cadeia é redutível tem mais de uma classe

é também aperiódica todos os estados tem período 1

b) $P(X_7 = 0 \mid X_5 = 1) = P(X_2 = 0 \mid X_0 = 1) = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$

$1 \to 2 \to 0$ $\quad$ $1 \to 3 \to 0$

c) $P(X_7 = 0 \mid X_5 = 1, X_8 = 0) = P(X_2 = 0 \mid X_0 = 1, X_3 = 0)$

o resultado não muda de b), pois o estado 0 é reflexivo

(não tenho certeza)

4. Seja $\{X_n\}_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{0,1,2,3,4\}$ com matriz de transição $\mathbf{P}$ dada por

$$\mathbf{P}\ \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Determine $P(X_4 = 0 | X_2 = 4)$.

(b) Determine $P(X_4 = 0 | X_2 = 4, X_5 = 1)$.

(c) Determine uma distribuição estacionária. Ela é única?

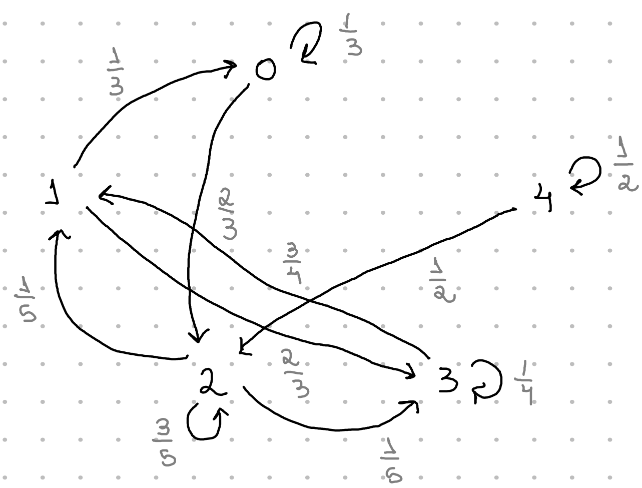
(d) Estime $P(X_n = 1 | X_0 = 0)$ para n grande.

↳ distr. estacionária

a) $P(X_4 = 0 \mid X_2 = 4)$

$= P(X_2 = 0 \mid X_0 = 4) = 0$

exemplo: $P(X_4 = 2 \mid X_2 = 4)$



a) $P(X_4 = 0, X_2 = 4) = P(X_2 = 0, X_0 = 4) = 0$

não da para ir de 4 até 0 em dois tempos

b) $P(X_4 = 0 \mid X_2 = 4, X_5 = 1)$

não dá, assim como a), além de que X_5 não pode ser 1 se X_4 é 0.

c) a cadeia não é irredutível, pois há estados que não se comunicam com o estado 4. Então, vamos achar uma classe que seja irredutível e aperiódica. A classe $\{0, 1, 2, 3\}$ se encaixa.

- encontrando a distribuição estacionária de $\{0,1,2,3\}$

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_0 P_{00} + \pi_1 P_{10} + \pi_2 P_{20} + \pi_3 P_{30} \\ \pi_1 = \pi_0 P_{01} + \pi_1 P_{11} + \pi_2 P_{21} + \pi_3 P_{31} \\ \pi_2 = \pi_0 P_{02} + \pi_1 P_{12} + \pi_2 P_{22} + \pi_3 P_{32} \\ \pi_3 = \pi_0 P_{03} + \pi_1 P_{13} + \pi_2 P_{23} + \pi_3 P_{33} \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_0 \frac{1}{3} + \pi_1 \frac{1}{3} + \pi_2 0 + \pi_3 0 \\ \pi_1 = \pi_0 0 + \pi_1 0 + \pi_2 \frac{1}{5} + \pi_3 \frac{3}{4} \\ \pi_2 = \pi_0 \frac{2}{3} + \pi_1 0 + \pi_2 \frac{3}{5} + \pi_3 0 \\ \pi_3 = \pi_0 0 + \pi_1 \frac{2}{3} + \pi_2 \frac{1}{5} + \pi_3 \frac{1}{4} \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_0 \frac{1}{3} + \pi_1 \frac{1}{3} & \Rightarrow \pi_0 \frac{2}{3} = \pi_1 \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{\pi_1 = \pi_0 2} \\ \pi_1 = \pi_2 \frac{1}{5} + \pi_3 \frac{3}{4} & \\ \pi_2 = \pi_0 \frac{2}{3} + \pi_2 \frac{3}{5} & \Rightarrow \pi_2 \frac{2}{5} = \pi_0 \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\pi_2 = \pi_0 \frac{5}{3}} \\ \pi_3 = \pi_1 \frac{2}{3} + \pi_2 \frac{1}{5} + \pi_3 \frac{1}{4} & \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 & \end{cases}$$

substituindo na 3ª

$$\pi_0 2 = \pi_0 \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{5} + \pi_3 \frac{3}{4} \Rightarrow \pi_0 2 - \pi \frac{5}{15} = \pi_3 \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \pi_0 \frac{5}{3} = \pi_3 \frac{3}{4}$$

$$\boxed{\pi_0 \frac{20}{9} = \pi_3}$$

substituindo na 5ª

$$\pi_0 + \pi_0 2 + \pi_0 \frac{5}{9} + \pi_0 \frac{20}{9} = 1 \Rightarrow \pi_0 = \frac{9}{52}$$

$\pi_0 = \frac{9}{25}$ $\pi_1 = \frac{18}{25}$ $\pi_2 = \frac{3}{5}$ $\pi_3 = \frac{4}{5}$

assim, temos

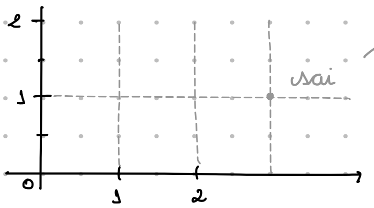
$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
0 & \frac{9}{25} & \frac{18}{25} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\
1 & \frac{9}{25} & \frac{18}{25} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\
2 & \frac{9}{25} & \frac{18}{25} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\
3 & \frac{9}{25} & \frac{18}{25} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\
\hline
\end{array}
$$

a distribuição estacionária não é única para $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, pois não é uma cadeia irredutível, mas para $\{0, 1, 2, 3\}$ é única, pois a cadeia é irredutível e aperiódica.

5. Certo aparelho tem três possíveis estados: 0=funcionando, 1=quebrado e aguardando início de serviço de reparo e 2=quebrado e sendo consertado. Os tempos de permanência (em minutos) em cada estado têm distribuições geométricas independentes com médias $\mu_a = 1$ min, $\mu_b = 2$ min e μ_c min, resp. Ao final do tempo de permanência num estado a escolha do estado seguinde se faz conforme a matriz de transição dada por

$$\begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

Se $X_n \in \{0,1,2\}$ estado do aparelho ("funcionando", "quebrado e aguardando início de serviço de reparo" ou "quebrado e sendo consertado"), mostre que $\{X_n\}_{n\geq 0}$ é uma cadeia de Markov e determine sua matriz de taxas. Determine uma distribuição estacionária.



consulta a matriz

$$Q = \begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

$\left.\begin{array}{l} T_2 \\ T_1 \\ T_0 \end{array}\right\}$ tempo de permanência em cada

$T_i \sim \text{geom}(P_i) \qquad ET_i = \frac{1}{P_i}$

"como simulo uma geométrica" tentativas até o primeiro sucesso

$\begin{cases} X \sim \text{geom}(p) \in \{1, 2, \dots\} \\ EX = \frac{1}{p} \end{cases} \quad \to P(X = k) = (1-p)^{k-1}\, p = p_k$

usa uma uniforme $U \sim U(0,1)$

é uma cadeia de markov porque perde memória e recomeça

$0 \quad m \quad n \quad \to$ lâmpada

$$P(X > m+n \mid X > m) = \frac{P(X > m+n,\ X > m)}{P(X > m)} = P(X > n)$$

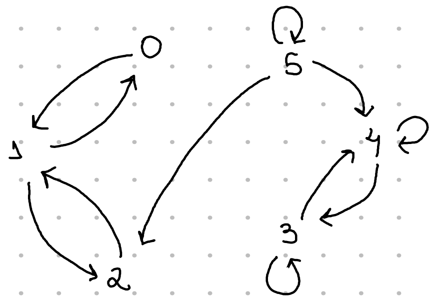
$X > m+n$

6. Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma cadeia de Markov em tempo discreto no espaço de estados $S = \{0,1,2,3,4,5\}$ com matriz de transição $\mathbf{P}$ dada por

$$\begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 5 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$$

a) Determine as classes de estados irredutíveis, classifique a cadeia de Markov em tempo discreto $\{X_n\}_{n\geq 1}$ e determine os períodos dos estados.
b) Determine $P(X_{10} = 1 | X_0 = 5, X_7 = 2)$.
c) Determine $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 4 | X_0 = 5)$.

cadeia de Markov



a) • classes de estados irredutíveis:

$\{0, 1, 2\}$, $\{3, 4\}$ e $\{5\}$

• classificação das classes

temos 3 classes

$\{0, 1, 2\}$ = recorrente

$\{3, 4\}$ = recorrente

$\{5\}$ = transiente

• período dos estados

estado 0: $P_{00} = 0$; $P_{00}^2 = \frac{1}{2}$; $P_{00}^3 = 0$; $P_{00}^4 = \frac{1}{2}$

$d(0) = \text{MDC}\{2, 4\} = 2$

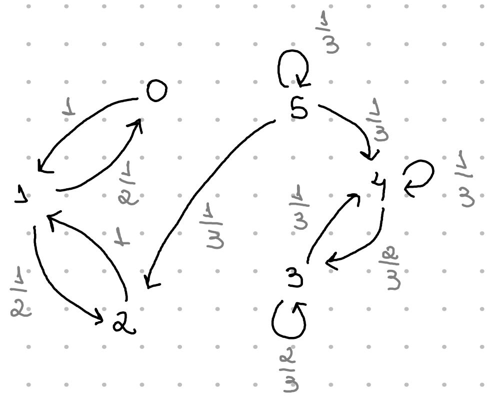
estado 1: $d(1) = \text{MDC}\{2, 4\} = 2$

estado 2: $d(2) = \text{MDC}\{2, 4\} = 2$

estado 3: $d(3) = \text{MDC}\{1, 2, 3, 4, 5\} = 1$

estado 4: $d(4) = \text{MDC}\{1,2,3,4,5\} = 1$

estado 5: $d(5) = \text{MDC}\{1,2,3,4,5\ldots\} = 1$



b) $P(X_{10} = 1 \mid X_0 = 5,\ X_7 = 2)$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4374}$$

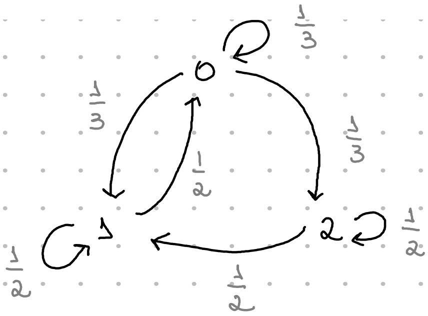
c) $\lim_{n \to \infty} P(X_n = 4 \mid X_0 = 5)$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

7. Seja $\{X_n\}_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{0,1,2\}$ com matriz de transição $\mathbf{P}$ dada por

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

a) Classifique os estados desta cadeia. b) Determine $P(X_3 = 1|X_2 = 0)$ e $P(X_5 = 1|X_3 = 0)$. c) Determine $P(X_5 = 1|X_3 = 0, X_6 = 2)$. d) Determine uma distribuição estacionária. Ela é única?



$\frac{1}{9}$ $\quad \frac{1}{18} + \frac{1}{12}$

a) temos 1 classe

$\{0, 1, 2\} \rightarrow$ recorrente

todas as classes se comunicam $\rightarrow$ cadeia de Markov irredutível

b) $P(X_3 = 1 | X_2 = 0) = P(X_1 = 1 | X_0 = 0) = \frac{1}{3}$

$P(X_5 = 1 | X_3 = 0) = P(X_2 = 1 | X_0 = 0) = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{36}$

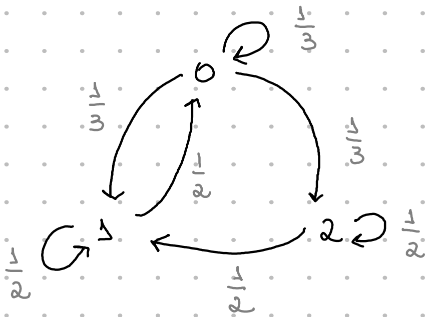
$0 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \qquad 0 \rightarrow 1 \rightarrow 1$

c) $P(X_5 = 1 | X_3 = 0, X_6 = 2) = P(X_2 = 1 | X_0 = 0, X_3 = 2) = 0$

se $X_2 = 1$ X_3 não pode ser 2.

d) para encontrar a distribuição estacionária, a cadeia tem que ser irredutível e aperiódica. para essa distribuição estacionária ser única, a cadeia de Markov (inteira) tem que ser irredutível.

- temos que a cadeia $\{0, 1, 2\}$ é irredutível, pois todos os estados se comunicam
- é aperiódica pois $d(0) = d(1) = d(2) = 1$
- determinando a distribuição estacionária:



$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_0 P_{00} + \pi_1 P_{10} + \pi_2 P_{20} \\ \pi_1 = \pi_0 P_{01} + \pi_1 P_{11} + \pi_2 P_{21} \\ \pi_2 = \pi_0 P_{02} + \pi_1 P_{12} + \pi_2 P_{22} \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{6}$,

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_0 \frac{1}{3} + \pi_1 \frac{1}{2} \\ \pi_1 = \pi_0 \frac{1}{3} + \pi_1 \frac{1}{2} + \pi_2 \frac{1}{2} \\ \pi_2 = \pi_0 \frac{1}{3} + \pi_2 \frac{1}{2} \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{\pi_1 = \pi_0 \frac{4}{3}}$

$\Rightarrow \pi_0 \frac{4}{3} = \pi_0 \frac{1}{3} + \pi_0 \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} + \pi_2 \frac{1}{2}$

$\pi_0 \frac{4}{3} = \pi_0 + \pi_2 \frac{1}{2}$

$\pi_0 \frac{4}{3} - \pi_0 \frac{3}{3} = \pi_2 \frac{1}{2}$

$\pi_0 \frac{1}{3} = \pi_2 \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\pi_2 = \pi_0 \frac{2}{3}}$

$\Rightarrow \pi \frac{3}{3} + \pi_0 \frac{4}{3} + \pi_0 \frac{2}{3} = 1$

$\pi_0 \frac{9}{3} = 1 \Rightarrow \boxed{\pi_0 = \frac{1}{3}}$

substituindo

$\pi_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{9}$ $\qquad$ $\pi_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

temos então

$$\begin{array}{c|ccc|} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ 2 & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ \hline \end{array}$$

a distribuição estacionária é única, pois a cadeia de Markov é irredutível.

8. Seja $\{X_n\}_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov com Matriz de transição $\mathbf{P}$. Considere os eventos "Passado"= $\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}\}$, "Presente"=$\{X_n = i\}$ e "Futuro"=$\{X_{n+1} = j\}$, onde $i_0, \ldots i_{n-1}, i$ e j são estados quaisquer da Cadeia. Mostre que

$$P(\text{"}Futuro\text{"} \cap \text{"}Passado\text{"} | \text{"}Presente\text{"}) = P(\text{"}Futuro\text{"} | \text{"}Presente\text{"})\, P(\text{"}Passado\text{"} | \text{"}Presente\text{"}).$$

ou seja, numa cadeia de Markov *dado o presente, o futuro e o passado são independentes.*

9. Considere o exemplo 4.4 do texto pdf usado na aula online (chover ou não num dia depende dos dois dias anteriores). Dado que choveu na segunda e na terça, qual é a probabilidade de chover na quarta e na quinta?

que texto ?

10. Considere o exemplo 2.16 do texto pdf usado na aula online (almoço do Danny). Dado que comeu pizza no sábado e no domingo, qual é a probabilidade dele comer sushi na terça e na quarta?

que texto?