Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

- Método do *Ponto Fixo* (*MPF*)

Dada uma função $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$ onde existe uma raiz única, $f(x) = 0$, é possível transformar tal equação em uma equação equivalente $x = g(x)$ e, a partir de uma aproximação inicial x_0, gerar uma seqüência $\{x_k\}$ de aproximações para ξ pela relação $x_{k+1} = g(x_k)$, uma vez que $g(x)$ é tal que $f(\xi) = 0$ se e somente se $g(\xi) = \xi$.

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

- **Método do *Ponto Fixo* (*MPF*) – Método da *Iteração Linear (MIL)***

- Seja uma função f(x) contínua em um intervalo [a,b] que contenha uma raiz de f(x). O Método do Ponto Fixo inicia-se reescrevendo a função f(x) como:

$$\mathbf{f(x) = g(x) - x}$$

- Essa forma de escrever *f(x)* é bastante útil. No ponto *x* que corresponde à raiz de *f(x)*, isto é, *f(x) = 0*, teremos que:

$$f(x) = g(x) - x = 0$$

$$g(x) = x$$

- **g(x)** é a **Função de Iteração** para **f(x)=0**

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

- Por exemplo, a função $f(x) = x^2 - x - 2$ pode ser reescrita como, $f(x) = x^2 - 2 - x = g(x) - x$, onde $g(x) = x^2 - 2$.
- Essa função tem como ponto fixo o valor $x=2$, pois $g(2) = 2^2 - 2 = 2$.
- E esse é exatamente o valor da raiz de $f(x)$, pois $f(2) = 2^2 - 2 - 2 = 0$.
- Ou seja, no ponto x que corresponde à raiz de $f(x)$, ao substituirmos o valor de x na função $g(x)$, teremos como resultado o próprio valor de x.
- Portanto, a raiz de $f(x)$ será o **ponto fixo** de $g(x)$, ou seja, o valor que ao ser substituído em $g(x)$ retorna o próprio valor de x.

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

- Método do *Ponto Fixo* (*MPF*)
  - Implicação de tal procedimento:

Problema de determinação de um zero de *f(x)*

Problema de determinação de um <u>ponto</u> <u>fixo</u> de *g(x)*

Função de iteração

  - Mais importante a abordagem conceitual do que a eficiência computacional.

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

- Método do *Ponto Fixo* (*MPF*)

  Forma geral das funções de iteração:

$$g(x) = x + A(x)f(x)$$

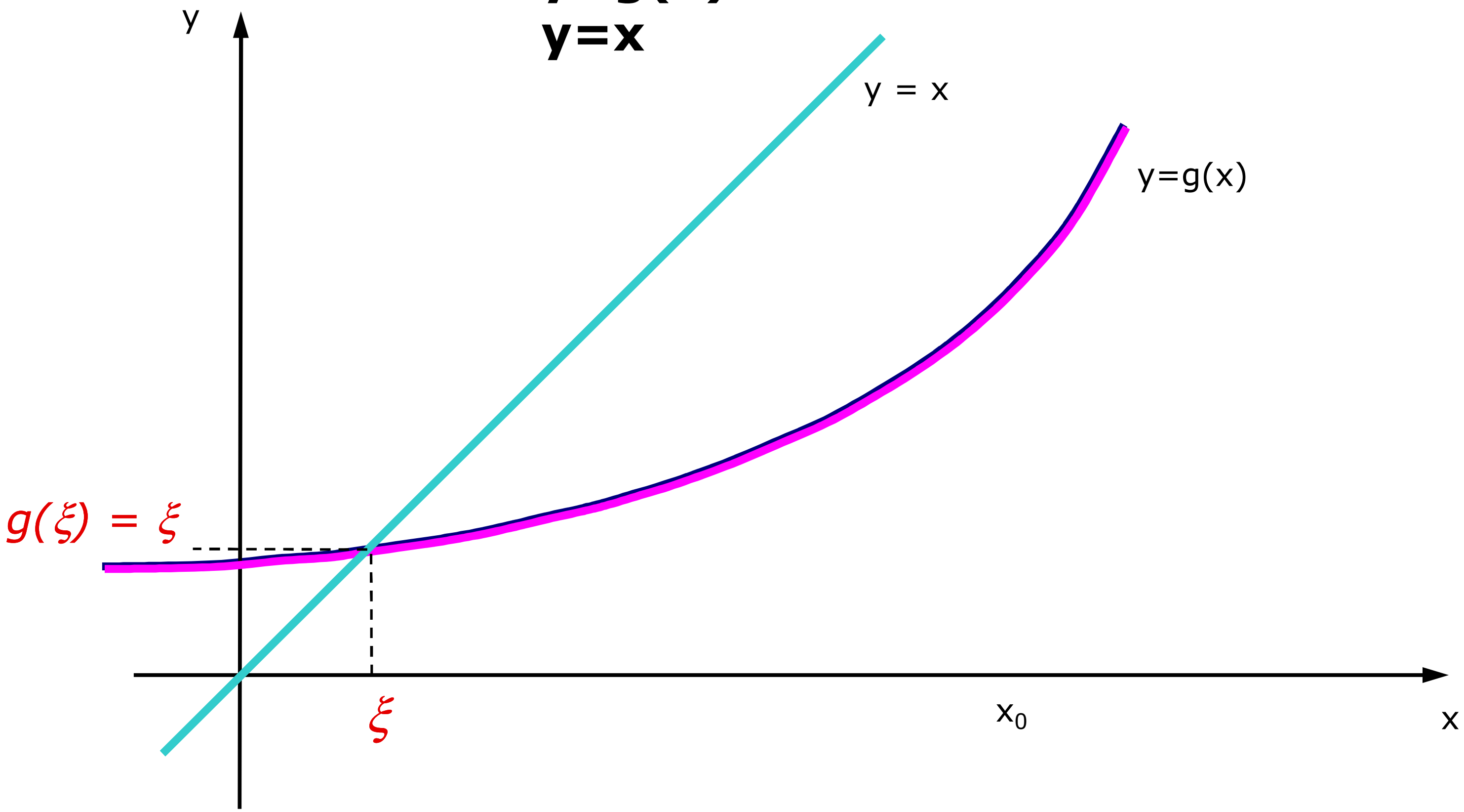
  com $A(\xi) \neq 0$ em ξ, *ponto fixo* de $g(x)$.

- Interpretação Gráfica
  - $x = g(x)$ tem como raiz a abcissa do ponto de intersecção da reta $r(x) = x$ e da curva $g(x)$.

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

- **Análise Gráfica -** Determinar os pontos fixos de uma função g(x) é determinar os pontos de intersecção entre as curvas:

y=g(x)
y=x

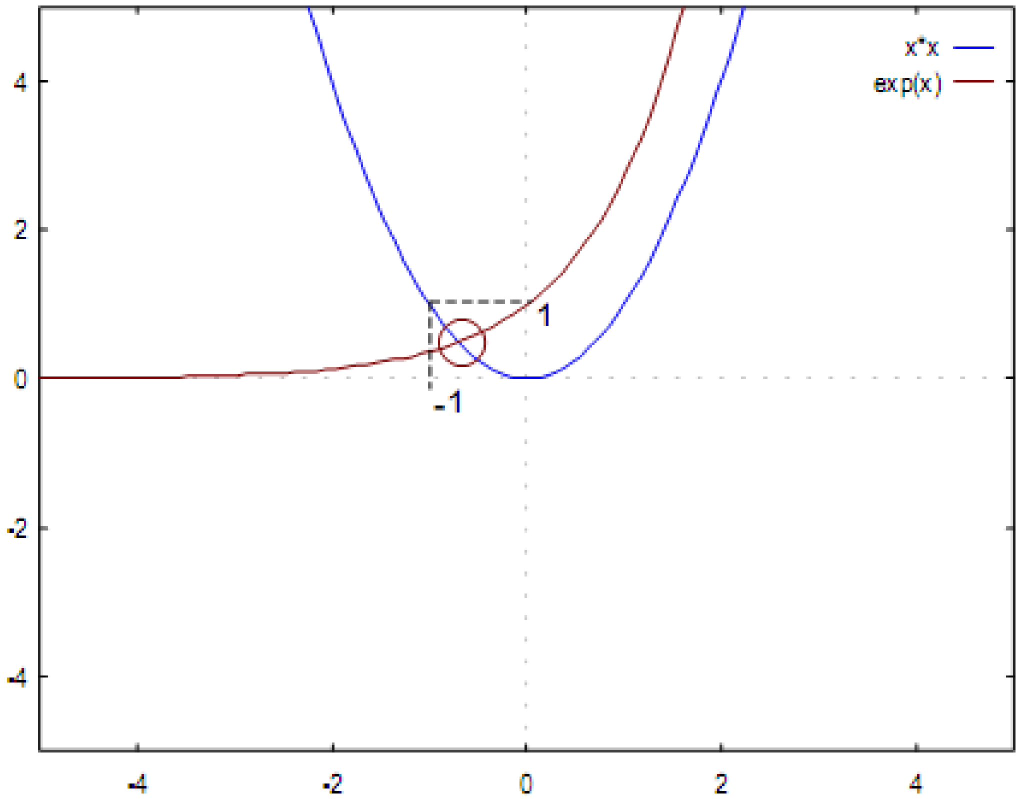


Exemplo 11: Encontre uma estimativa para a raiz de f(x) = $x^2 - e^x$, usando o Método da Iteração Linear (Pontos Fixos).

1 - Encontrando o intervalo da raiz:

f(x) = g(x) – h(x)

g(x) = x^2 e h(x) = e^x



2 - Escolha uma função de iteração ϕ(x):

$$f(x) = 0$$
$$x^2 - e^x = 0$$
$$x = \pm\sqrt{e^x}$$

Ou seja, podemos ter como função de iteração:

ϕ(x) = $\sqrt{e^x}$

ϕ(x) = $-\sqrt{e^x}$

3 – Usando $\phi(x) = -\sqrt{e^x}$ e x_0 = -1, temos:

$$x_0 = -1 \rightarrow \varphi(x_0) = \varphi(-1) = -\sqrt{e^{-1}} = -0{,}606$$
$$x_1 = -0{,}606 \rightarrow \varphi(x_1) = \varphi(-0{,}606) = -\sqrt{e^{-0{,}606}} = -0{,}738$$
$$x_2 = -0{,}738 \rightarrow \varphi(x_2) = \varphi(-0{,}738) = -\sqrt{e^{-0{,}738}} = -0{,}691$$
$$x_3 = -0{,}691 \rightarrow \varphi(x_3) = \varphi(-0{,}691) = -\sqrt{e^{-0{,}691}} = -0{,}707$$
$$x_4 = -0{,}707$$

4 – Substituindo os valores de x_k em *f(x)* para cada iteração *k*, observamos que a cada etapa, nos aproximamos da raiz de *f(x)*, conforme tabela abaixo:

x	$f(x) = x^2 - e^x$
-1	0,632
-0,606	-0,178
-0,738	0,067
-0,691	-0,024
-0,707	0,007

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

Exemplo 12:

Seja a equação $x^2 + x - 6 = 0$.

Funções de iteração possíveis:

- $g1(x) = 6 - x^2$
- $g_2(x) = \pm\sqrt{6 - x}$
- $g_3(x) = 6/x - 1$
- $g_4(x) = 6/(x + 1)$

Dada uma equação do tipo *f(x) = 0*, há para tal equação *mais de uma função* de iteração *g(x)*, tal que: *f(x) = 0 ⇔ x = g(x)*

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

- Não há necessidade de uso de método numérico para a determinação das raízes $\xi_1 = -3$ e $\xi_2 = 2$
- Utilização desta exemplo para demonstrar a convergência ou divergência numérica e gráfica do processo iterativo
- Seja a raiz $\xi_2 = 2$ e $g_1(x) = 6 - x^2$
- Considere-se $x_0 = 1,5$ e $g(x) = g_1(x)$

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

Seja a raiz $\xi_2 = 2$, $x_0 = 1{,}5$ e $g_1(x) = 6 - x^2$:

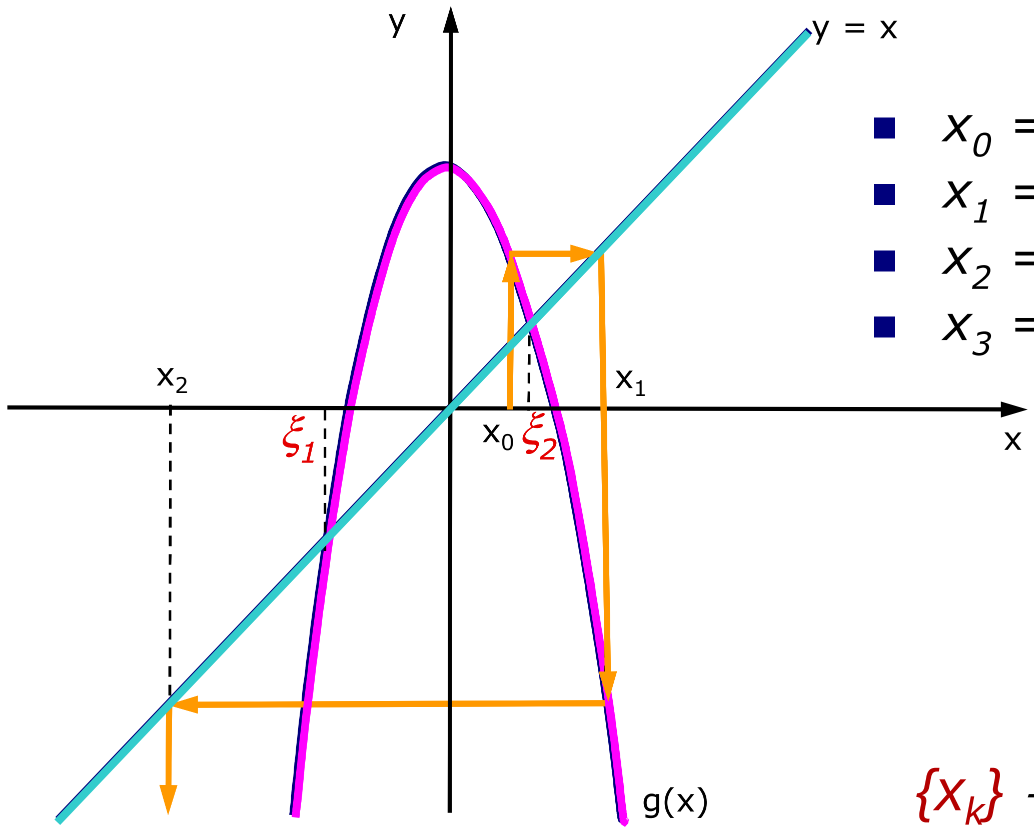
- $x_1 = g(x_0) = 6 - 1{,}5^2 = 3{,}75 \Leftrightarrow x_1$
- $x_2 = g(x_1) = 6 - 3{,}75^2 = -8{,}0625$
- $x_3 = g(x_2) = 6 - (-8{,}0625)^2 = -59{,}003906$
- $x_4 = g(x_3) = 6 - (-59{,}003906)^2 = -3475{,}4609$

$$\vdots$$

- Conclui-se que $\{x_k\}$ não convergirá para $\xi_2 = 2$

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

Exemplo 12: Análise Gráfica:



- $x_0 = 1{,}5$
- $x_1 = g(x_0) = 6 - 1{,}5^2 = 3{,}75$
- $x_2 = g(x_1) = 6 - 3{,}75^2 = -8{,}0625$
- $x_3 = g(x_2) = -59{,}00039$

$\{x_k\} \rightarrow inf$ quando $k \rightarrow inf$

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

Exemplo 13: Seja a raiz $\xi_2 = 2$,

$$g_2(x) = \sqrt{6 - x} \text{ e } x_0 = 1,5$$

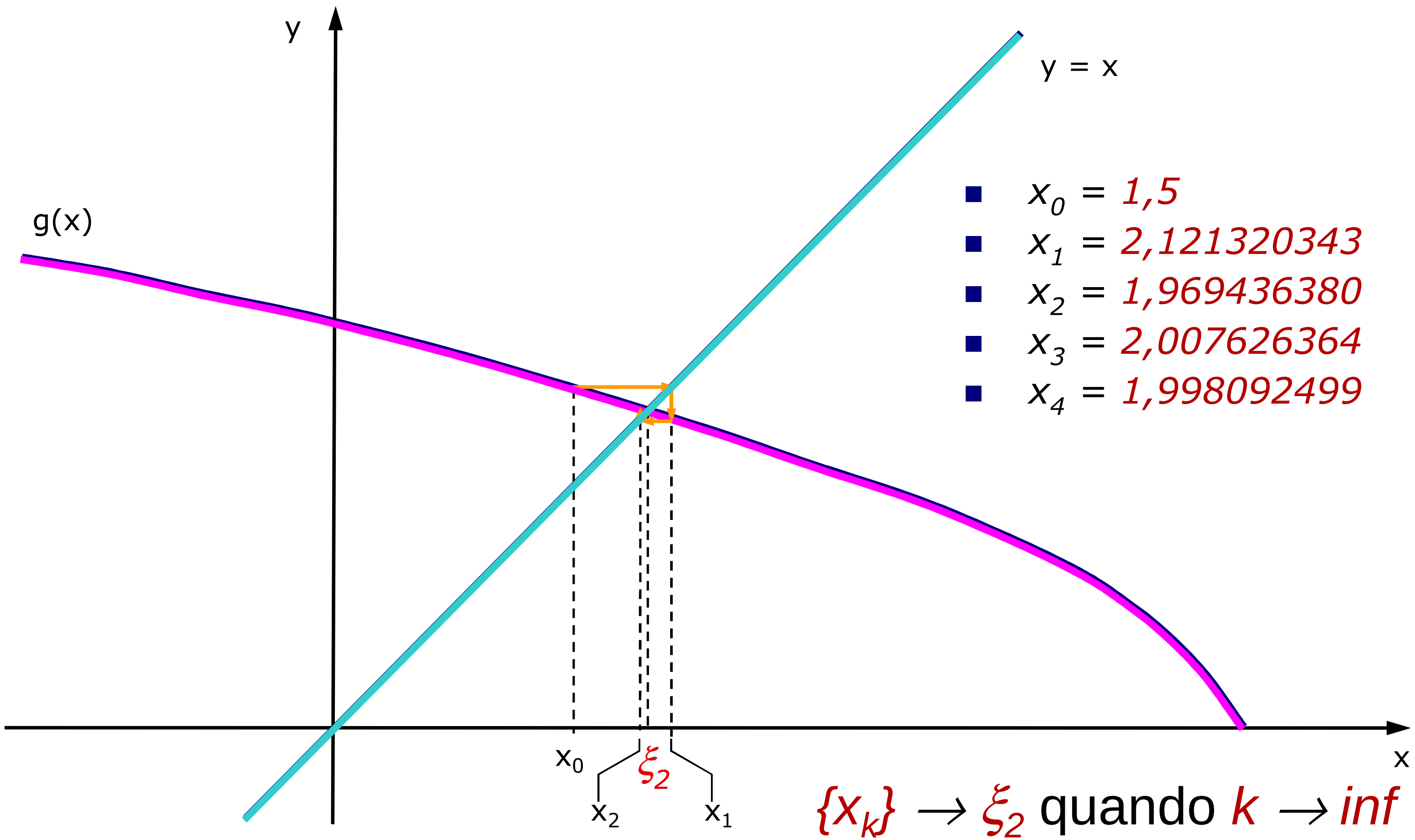
- $x_1 = g(x_0) = \sqrt{6 - 1,5} = 2,121320343$
- $x_2 = g(x_1) = \sqrt{6 - 2,121320343} = 1,969436380$
- $x_3 = g(x_2) = \sqrt{6 - 1,969436380} = 2,007626364$
- $x_4 = g(x_3) = \sqrt{6 - 2,007626364} = 1,998092499$
- $x_5 = g(x_4) = \sqrt{6 - 1,998092499} = 2,000476818$

$\vdots$

- Conclui-se que $\{x_k\}$ tende a convergir para $\xi_2 = 2$

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

Exemplo 13: Análise Gráfica



- $x_0 = 1{,}5$
- $x_1 = 2{,}121320343$
- $x_2 = 1{,}969436380$
- $x_3 = 2{,}007626364$
- $x_4 = 1{,}998092499$

$\{x_k\} \rightarrow \xi_2$ quando $k \rightarrow inf$

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

Exemplo 14: Seja a equação $x^3 - x - 1 = 0$, Tem-se as seguintes funções de iteração possíveis:

- $g_1(x) = x^3 - 1$
- $g_2(x) = \pm\sqrt[3]{1 + x}$
- $g_3(x) = 1/x^3 - 1$

Dada uma equação do tipo *f(x) = 0*, há para tal equação *mais de uma função* de iteração *g(x)*, tal que: *f(x) = 0* ⇔ *x = g(x)*

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

Exemplo 14: Seja $\xi = 1{,}32493$, $g_2(x) = \sqrt[3]{1 + x}$ e $x_0 = 1$

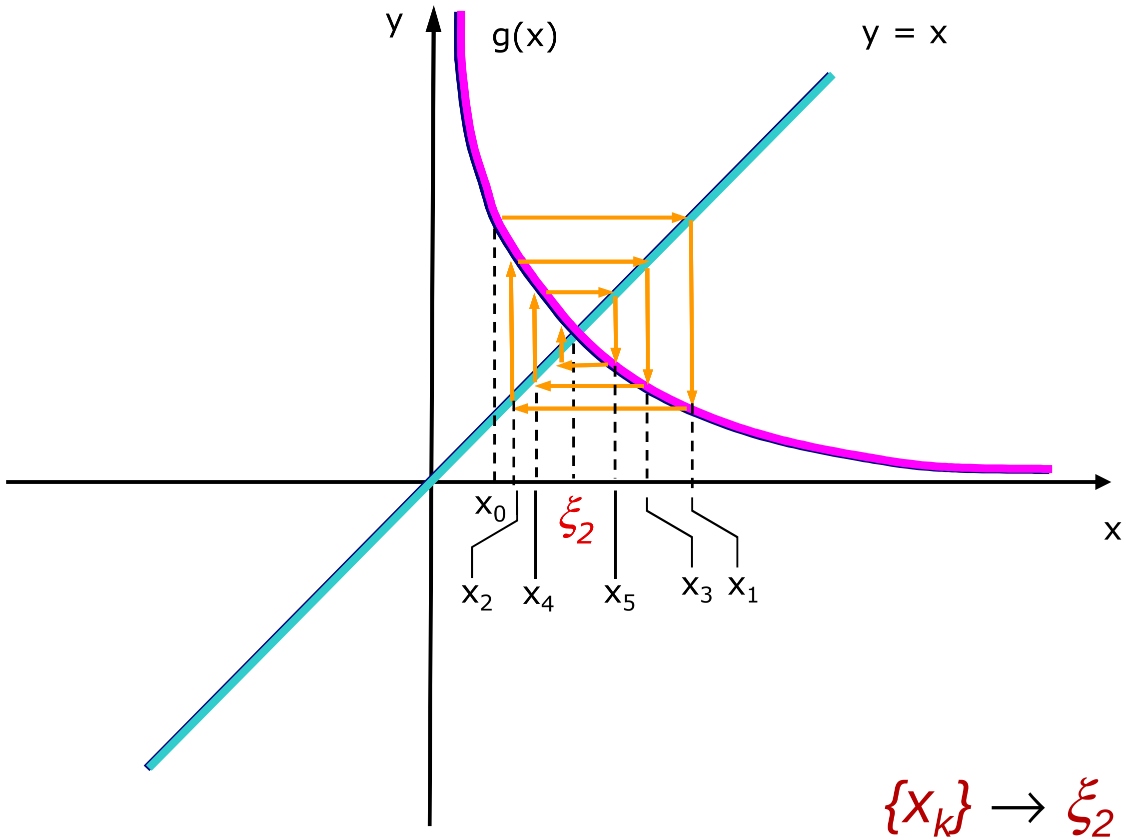
- $x_1 = g(x_0) = \sqrt[3]{1 + 1} = 1{,}259921$
- $x_2 = g(x_1) = \sqrt[3]{1 + 1{,}259921} = 1{,}312294$
- $x_3 = g(x_2) = \sqrt[3]{1 + 1{,}312294} = 1{,}322354$
- $x_4 = g(x_3) = \sqrt[3]{1 + 1{,}322354} = 1{,}324269$
- $x_5 = g(x_4) = \sqrt[3]{1 + 1{,}324269} = 1{,}324633$

$\vdots$

- Conclui-se que $\{x_k\}$ tende a convergir para $\xi = 1{,}324930$

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

Exemplo 14: Análise Gráfica



$\{x_k\} \rightarrow \xi_2$ quando $k \rightarrow inf$

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

- TEOREMA 2 (convergência):

Sendo ξ uma raiz de $f(x) = 0$, isolada em um intervalo $I = [a,b]$ centrado em ξ e $g(x)$ uma função de iteração para $f(x) = 0$. Se

1. *$g(x)$ e $g'(x)$ são contínuas em I*
2. *$|g'(x)| < 1$, $\forall x \in I = [a,b]$, e*
3. *$x_1 \in I$*

então a seqüência $\{x_k\}$ gerada pelo processo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ convergirá para ξ.

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

Exemplo 15: Resgatando os Exemplos 12 e 13, verificou-se que:

- $g_1(x)$ ⇨ geração de uma seqüência divergente de $\xi_2 = 2$
- $g_2(x)$ ⇨ geração de uma seqüência convergente p/ $\xi_2 = 2$
- $g_1(x) = 6 - x^2$ e $g'_1(x) = -2x$ ⇨ contínuas em I *(Condição 1)*

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

Exemplo 15: Resgatando os Exemplos 12 e 13, verificou-se que:

- $|g'_1(x)| < 1 \Leftrightarrow |-2x| < 1$ (Condição 2)
  - $x_0=1,5 \Leftrightarrow |g'_1(x_0)| = |g'_1(1,5)| = |-3| > 1$, ou seja a condição 2 falha.

- Não existe um intervalo I centrado em $\xi_2=2$, tal que $|g'(x)| < 1$, $\forall x \in I \Rightarrow g_1(x)$ não satisfaz a condição 2 do Teorema 2 com relação a $\xi_2=2$.

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

Exemplo 15:

- $g_2(x) = \sqrt{6 - x}$ e $g'_2(x) = -(1/2)\sqrt{6 - x}$
  - ⇨ $g_2(x)$ é contínua em S = {$x \in R \mid x \leq 6$}
  - ⇨ $g'_2(x)$ é contínua em S′ = {$x \in R \mid x < 6$}
- $|g'_2(x)| < 1 \Leftrightarrow |1/2\sqrt{6 - x}| < 1 \Leftrightarrow x < 5{,}75$
  - $x_0 = 1{,}5 \Leftrightarrow |g'_2(x_0)| = |g'_2(1{,}5)| = |-0.2357| < 1$, ou seja a condição 2 é cumprida, para X_0 *e os pontos seguintes*.
- É possível obter um intervalo *I* centrado em $\xi_2 = 2$, tal que todas as condições do Teorema 2 sejam satisfeitas.

- **Critérios de parada**
  - Se os valores fossem *exatos*
    - $f(x_k) = 0$
    - $|x_k - x_{k-1}| = 0$
  - *Não o sendo*
    - $|f(x_k)| \leq tolerância$
    - $|x_k - x_{k-1}| \leq tolerância$

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

Algoritmo

$k := 0$; $x_0 := x$;

while critério de interrupção não satisfeito and $k \leq L$

    $k := k + 1$;

    $x_{k+1} := g(x_k)$;

endwhile

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

Vantagens:

- Rapidez processo de convergência;
- Desempenho regular e previsível.

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

Desvantagens:

- Um inconveniente é a necessidade da obtenção de uma função de iteração *g(x)*;
- Difícil sua implementação.

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

- Método de *Newton-Raphson*

Dada uma função f(x) contínua no intervalo [a,b] onde existe uma raiz única, é possível determinar uma aproximação de tal raiz a partir da interseção da tangente à curva em um ponto x_0 *com o eixo das abscissas.*

x_0 *- atribuído em função da geometria do método e do comportamento da curva da equação nas proximidades da raiz.*

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

- **Considerações Iniciais**
  - Método do *Ponto Fixo* (*MPF*)
    - Uma das condições de convergência é que $|g'(x)| < 1, \forall x \in I$, onde I é um intervalo centrado na raiz
    - A convergência será tanto mais rápida quanto menor for $|g'(x)|$
  - O método de *Newton* busca garantir e acelerar a convergência do *MPF*
    - Escolha de $g(x)$, tal que $g'(\xi) = 0$, como *função de iteração*

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

- **Considerações Iniciais**
  - Dada a equação $f(x) = 0$ e partindo da forma geral para $g(x)$

$$g(x) = x + A(x)f(x)$$

  - Busca-se obter a função $A(x)$ tal que $g'(\xi) = 0$

$$g(x) = x + A(x)f(x) \Rightarrow$$
$$g'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x) \Rightarrow$$
$$g'(\xi) = 1 + A'(\xi)f(\xi) + A(\xi)f'(\xi) \Rightarrow \quad f(\xi) = 0$$
$$g'(\xi) = 1 + A(\xi)f'(\xi)$$

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

- **Considerações Iniciais**
  - Assim $g'(\xi) = 1 + A(\xi)f'(\xi)$

    $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 1 + A(\xi)f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow A(\xi) = -1/f'(\xi)$

    daí se toma $A(x) = -1/f'(x)$

  - Como $g(x) = x + A(x)f(x)$

$$g(x) = x + \left(\frac{-1}{f'(x)}\right).f(x)$$

então:

$$\boxed{g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

- **Considerações Iniciais**
  - Deste modo, escolhido x_0 , a seqüência $\{x_k\}$ será determinada por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad ,$$

onde $k = 0, 1, 2, \ldots$

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

- **Motivação Geométrica**
  - Dado o ponto (x_k , $f(x_k)$)
    - Traça-se a reta $L_k(x)$ tangente à curva neste ponto:

      $$L_k(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x-x_k)$$

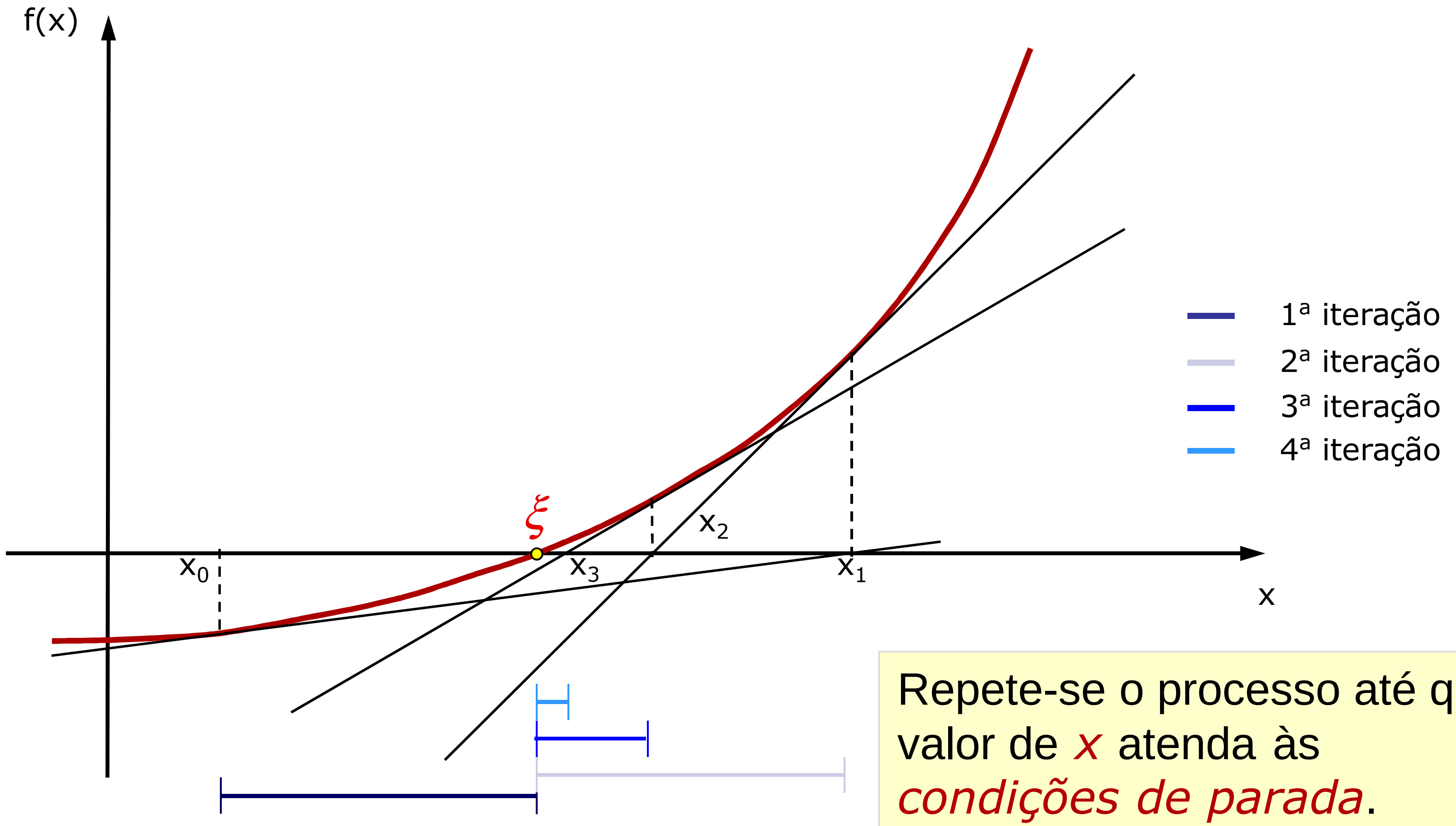
    - Determina-se o zero de $L_k(x)$, um modelo linear que aproxima $f(x)$ em uma vizinhança x_k

      $$L_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$$

    - Faz-se $x_{k+1} = x$

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

- **Análise Gráfica**



Repete-se o processo até que o valor de *x* atenda às *condições de parada*.

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

- Estudo da Convergência

TEOREMA 3:

Sendo $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ contínuas em um intervalo I que contém uma raiz $x = \xi$ de $f(x) = 0$ e supondo $f'(\xi) \neq 0$, existirá um intervalo $\bar{I} \subseteq I$ contendo a raiz ξ, tal que se $x_0 \in \bar{I}$, a seqüência $\{x_k\}$ gerada pela fórmula recursiva

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

convergirá para a raiz.

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

- Testes de Parada
  - A cada iteração, testa-se se a aproximação encontrada poderá ser considerada como a solução do problema.
    - $|f(x_k)| \leq tolerância$
    - $|((x_{k+1} - x_k)/x_{k+1})| \leq tolerância$

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

Algoritmo

k := 0; x_0 := x;

while critério de interrupção não satisfeito and k $\leq$ L

  k := k +1;

  $x_{k+1} := x_k - f(x_k)/f'(x_k)$

endwhile

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

Exemplo 17: No Exemplo 13, no qual $x^2 + x - 6 = 0$:

- Seja a raiz $\xi_2 = 2$ e $x_0 = 1,5$
- Assim:
  - $g(x) = x - f(x)/f'(x) = x - (x^2 + x - 6)/(2x + 1)$
  - $x_1 = g(x_0) = 1,5 - (1,5^2 + 1,5 - 6)/(2.1,5 + 1)$

    $x_1 = 2,062500000$
  - $x_2 = g(x_1) = 2,000762195$
  - $x_3 = g(x_2) = 2,000000116$

$\vdots$

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

Exemplo 17: Comentários:

- A parada poderá ocorrer na 3ª iteração ($x = 2{,}000000116$), caso a precisão do cálculo com 6 casas decimais for satisfatória para o contexto do trabalho

- Observe-se que no *Exemplo 10*, no *Método do Ponto Fixo* com $g(x) = \sqrt{6 - x}$ só veio a produzir $x = 2{,}000476818$ na 5ª iteração

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

Exemplo 18: Considere-se a função

$f(x) = x^3 - x - 1$, e $tol = 0{,}0002 \, . \, 10^{-8}$

cujos zeros encontram-se nos intervalos:

$$\xi_1 \in I_1 = (-1, 0), \quad \xi_2 \in I_2 = (1, 2)$$

- Seja $x_0 = 1$
- $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$
- **e** $\boldsymbol{g(x) = x - (x^3 - x - 1)/(3x^2 - 1)}$

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

Exemplo 18:

- **Cálculo da 1ª aproximação**

$$g(x_0) = 1 - \frac{[\,(1)^3 - 1 - 1\,]}{[\,3*(1)^2 - 1\,]} = 1{,}5$$

- **Teste de Parada**
  - $|f(x_0)| = |\,0{,}875\,| = 0{,}875 > \varepsilon$

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

Exemplo 18:

- **Cálculo da 2ª aproximação**

$$g(x_1) = 1.5 - \frac{[\,(1.5)^3 - 1.5 \; - 1\,]}{[\,3*(1.5)^2 - 1\,]} = 1,3478261$$

  - **Teste de Parada**
    - $|f(x_1)| = |\,0,100682\,| = 0,100682 > \varepsilon$

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

Exemplo 18:

- **Cálculo da 3ª aproximação**

$$g(x_2) = 1{,}3478261 - \frac{[\,(1{,}3478261)^3 - 1{,}3478261 - 1\,]}{[\,3*(1{,}3478261)^2 - 1\,]}$$

$$g(x_2) = 1{,}3252004$$

- **Teste de Parada**
  - $|f(x_2)| = |\,0{,}0020584\,| = 0{,}0020584 > \varepsilon$

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

Exemplo 18:

A seqüência $\{x_k\}$ gerada pelo método de Newton será:

Iteração	x	F(x)
1	1,5	0,875
2	1,3478261	0,1006822
3	1,3252004	0,0020584
4	1,3247182	$9{,}24378.10^{-7}$
5	1,3247178	$1{,}86517.10^{-13}$

$\varepsilon = 0{,}0002 \,.\, 10\text{-}8$

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

Vantagens:

- Rapidez processo de convergência;
- Desempenho elevado.

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

Desvantagens:

- Necessidade da obtenção de *f'(x)* *, o que pode ser impossível em determinados casos;*
- O cálculo do valor numérico de *f'(x)* a cada iteração;
- Difícil implementação.

Cálculo Numérico – **Secante**

- Método da *Secante*

Dada uma função $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$ onde existe uma raiz única, é possível determinar uma aproximação de tal raiz a partir da interseção da secante à curva em dois pontos x_0 e x_1 com o eixo das abscissas.

x_0 e x_1 - atribuídos em função da geometria do método e do comportamento da curva da equação nas proximidades da raiz.

Cálculo Numérico – **Secante**

- **Considerações Iniciais**
  - Método de *Newton-Raphson*
    - Um grande inconveniente é a necessidade da obtenção de $f'(x)$ e o cálculo de seu valor numérico a cada iteração
  - Forma de desvio do inconveniente
    - Substituição da derivada $f'(x_k)$ pelo quociente das diferenças

$$f'(x_k) \approx [f(x_k) - f(x_{k-1})]/(x_k - x_{k-1})$$

onde x_{k-1} e x_k são duas aproximações para a raiz

Cálculo Numérico – **Secante**

- **Considerações Iniciais**
  - A função de iteração será

$$
\begin{aligned}
g(x) &= x_k - f(x_k)/[(f(x_k) - f(x_{k-1}))/(x_k - x_{k-1})] \\
&= (x_k - x_{k-1}) \,.\, f(x_k)/[f(x_k) - f(x_{k-1})] \\
&= [x_{k-1}\,.f(x_k) - x_k\,.f(x_{k-1})]/[f(x_k) - f(x_{k-1})]
\end{aligned}
$$

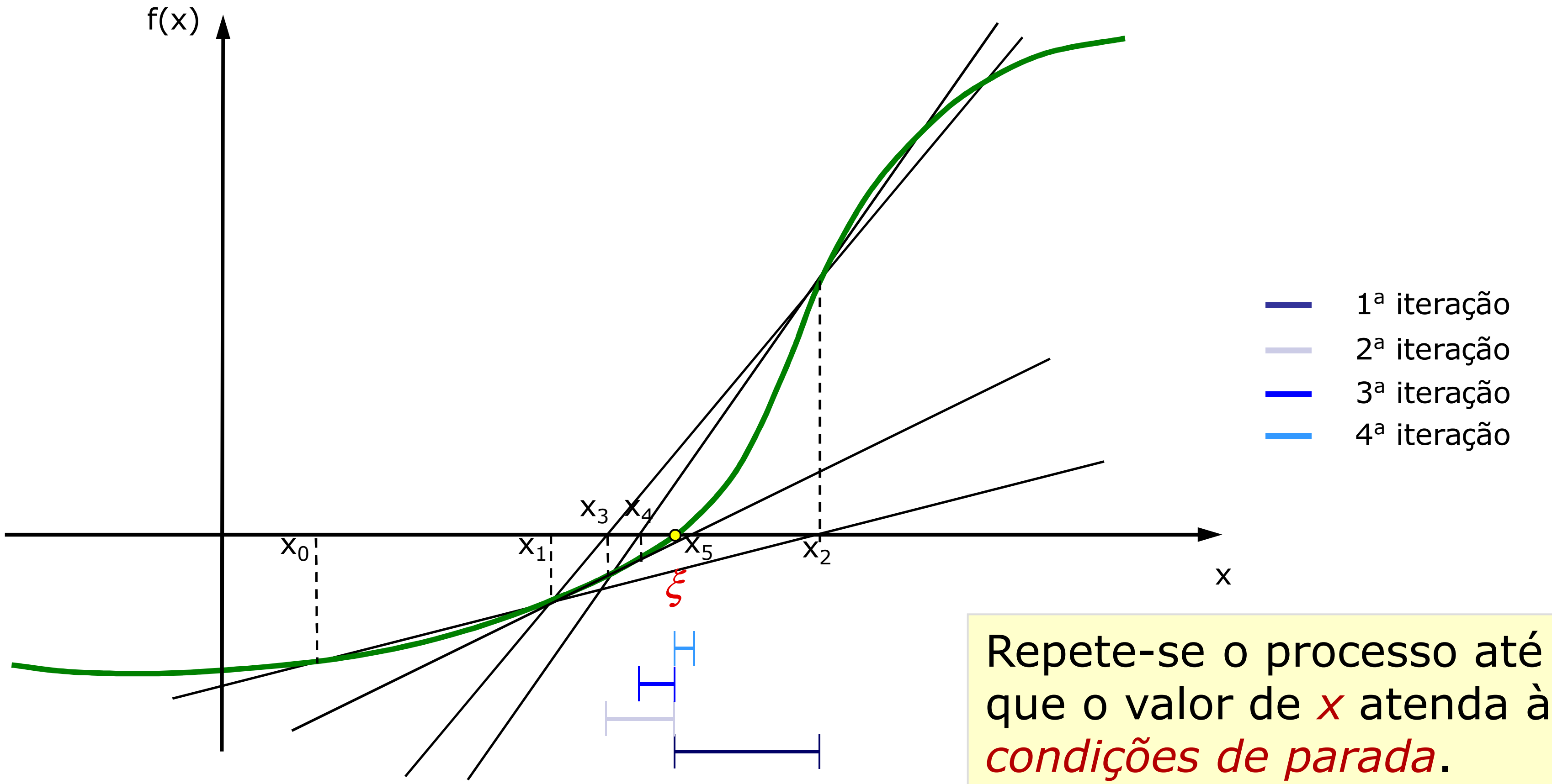
$$
\mathbf{g(x)} = \frac{[x_{k-1}.f(x_k) - x_k.f(x_{k-1})]}{[f(x_k) - f(x_{k-1})]}
$$

Cálculo Numérico – **Secante**

- **Interpretação Geométrica**
  - A partir de duas aproximações x_{k-1} e x_k
    - Obtém-se o ponto x_{k+1} como sendo a abscissa do ponto de intersecção do eixo $\overrightarrow{ox}$ e da reta que passa pelos pontos (x_{k-1}, $f(x_{k-1})$) e (x_k, $f(x_k)$) (secante à curva da função)

Cálculo Numérico – **Secante**

- **Análise Gráfica**



Repete-se o processo até que o valor de *x* atenda às *condições de parada*.

Cálculo Numérico – **Secante**

- Testes de Parada
  - A cada iteração, testa-se se a aproximação encontrada poderá ser considerada como a solução do problema.
    - $|f(x_k)| \leq \varepsilon$
    - $|((x_{k+1} - x_k)/x_{k+1})| \leq \varepsilon$

Cálculo Numérico – **Secante**

Algoritmo

$k := 0;\ x_0 := X_0;\ x_1 := X_1$

while critério de interrupção não satisfeito and $k \leq L$

$\quad k := k + 1;$

$\quad x_{k+1} := (x_{k-1} * f(x_k) - x_k * f(x_{k-1})) / (f(x_k) - f(x_{k-1}))$

endwhile

Cálculo Numérico – **Secante**

Exemplo 19: Considere-se a função $f(x) = x^3 - x - 1$, e $\varepsilon = 0{,}002$ cujos zeros encontram-se nos intervalos:

- Seja $x_{k-1} = 1{,}5$ e $x_k = 1{,}7$
- $$g(x) = \frac{[x_{k-1} \cdot f(x_k) - x_k \cdot f(x_{k-1})]}{[f(x_k) - f(x_{k-1})]}$$

Cálculo Numérico – **Secante**

Exemplo 19:

- **Cálculo da 1ª aproximação x_0 = 1,5 x_1 = 1,7**

  $f(x_0) = 0,875 > 0$

  $f(x_1) = 2,213 > 0$

  $$x_2 = \frac{[1,5.(2,213) - 1,7.(0,875)]}{[2,213 - (0,875)]} = 1,36921$$

- **Teste de Parada**
  - $|f(x_2)| = |0,19769| = 0,19769 > \varepsilon$
  - **Escolha do Novo Intervalo**
    - $x_1 = 1,36921$ e $x_2 = 1,5$

Cálculo Numérico – **Secante**

Exemplo 19:

- **Cálculo da 2ª aproximação: x_1 = 1,36921 e x_2 = 1,5**

  $f(x_1) = 0{,}19769 > 0$

  $f(x_2) = 0{,}875 > 0$

  $$x_3 = \frac{[1{,}36921.(0{,}875) - 1{,}5.(0{,}19769)]}{[0{,}875 - (0{,}19769)]} \Rightarrow$$

  $x_3 = 1{,}33104$

Cálculo Numérico – **Secante**

Exemplo 19:

- **Cálculo da 2ª aproximação: x_1 = 1,36921 e x_2 = 1,5**
  - **Teste de Parada**
    - $|f(x_3)| = |0{,}02712| = 0{,}02712 > \varepsilon$
  - **Escolha do Novo Intervalo**
    - $x_2 = 1{,}33104$ e $x_3 = 1{,}36921$

Cálculo Numérico – **Secante**

Exemplo 19:

- **Cálculo da 3ª aproximação: x_2 = 1,33104 e x_3 = 1,36921**

$$f(x_2) = 0{,}02712 > 0$$

$$f(x_3) = 0{,}19769 > 0$$

$$x_4 = \frac{[1{,}33104.(0{,}19769) - 1{,}36921.(0{,}02712)]}{[0{,}19769 - (0{,}02712)]}$$

$$x_4 = 1{,}324971$$

Cálculo Numérico – **Secante**

Exemplo 19:

- **Cálculo da 3ª aproximação: x_2 = 1,33104 e x_3 = 1,36921**
  - **Teste de Parada**
    - $|f(x_4)| = |0{,}00108| = 0{,}00108 < \varepsilon$

      (***valor aceitável para a raiz***)

Cálculo Numérico – **Secante**

Exemplo 20: Resgatando o Exemplo 13, no qual $x^2 + x - 6 = 0$:

- Sejam x_0 = 1,5 e x_1 = 1,7
- Assim:
  - $x_2 = [x_0 .f(x_1) - x_1 . f(x_0)]/[f(x_1) - f(x_0)]$
    $= [1,5.(-1,41) - 1,7.(2,25)]/(-1,41 + 2,25)$
    $= 2,03571$
  - $x_3 = [x_1 .f(x_2) - x_2 . f(x_1)]/[f(x_2) - f(x_1)]$
    $= 1,99774$

Cálculo Numérico – **Secante**

Exemplo 20: Resgatando o Exemplo 13, no qual $x^2 + x - 6 = 0$:

- Assim:
  - $x_4 = [x_2 .f(x_3) - x_3 . f(x_2)]/[f(x_3) - f(x_2)]$
    $= 1,99999$

⋮

- Comentários:
  - A parada poderá ocorrer na 3ª iteração ($x = 1,99999$), caso a precisão do cálculo com 5 casas decimais for satisfatória para o contexto do trabalho

Cálculo Numérico – **Secante**

Vantagens:

- Rapidez processo de convergência;
- Cálculos mais convenientes que do método de Newton;
- Desempenho elevado.

Cálculo Numérico – **Secante**

Desvantagens:

- Se o cálculo *f′(x)* não for difícil, então o método logo será substituído pelo de Newton-Raphson;
- Se o gráfico da função for paralela a um dos eixos e/ou tangencia o eixo das abscissas em um ou mais pontos, logo não se deve usar o método da *Secante* ;
- Difícil implementação.

Exercício

- Utilize os Métodos da Bissecção e da Falsa Posição para encontrar soluções com precisão de 10^{-2} para $\boldsymbol{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = 0}$ no seguinte intervalo: [0; 2]
- Resolva a mesma equação utilizando os métodos de Newton e das Secantes, com $x_0=1,3$ e $x_1=1,5$.