LISTA 7

CHECKLIST

fiz ☐ incompleto ☐ tem resolução ☐ não entendi ☐

PARTE 1

- ☐ 1.
- ☐ 2.
- ☐ 3.
- ☐ 4.
- ☐ 5.
- ☐ 6.
- ☐ 7.
- ☐ 8.
- ☐ 9. teste M de Weierstrass, tem exemplos nas notas de aula
- ☐ 10. // até onde cai na prova

PARTE 2

- ☐ 1.
- ☐ 2.
- ☐ 3.
- ☐ 4.
- ☐ 5.
- ☐ 6.
- ☐ 7.

1. Determine o domínio de convergência da série e esboce o gráfico de f.

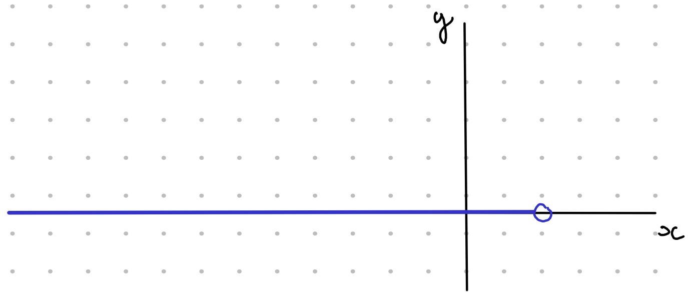
(a) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$

O domínio de f é o conjunto de todos os x para os quais a sequência $f_n(x)$ converge. Sendo assim, temos que proceder da seguinte forma:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0 \quad \text{para } x < 1$$

Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x < 1\}$

esboço do gráfico de f:



(b) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$

O domínio de f é o conjunto de todos os x para os quais a sequência $f_n(x)$ converge. Assim,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} nx^n =$$

2. Determine o limite $f(x) = \lim f_n(x)$, onde $x \in X$, e mostre que a sequência (f_n) não converge uniformemente a f, nos casos abaixo.

outra convergência (não lembro)

$f_n \to f$ $(f_n : X \to \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R})$ sse $\forall x \in X$

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

convergência uniforme

$f_n \xrightarrow{u} f$ sse $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ tal que $n > n_0$ então $\forall x \in X$

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

1. $f_n \xrightarrow{u} f$ então $f_n \to f$
2. se $f_n \not\xrightarrow{u} f$ então $f_n \not\to f$ se não convergir do jeito normal não converge uniforme.

(a) $f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{1+n^2x^2}$, $X = \mathbb{R}$. Dica: analise o que ocorre nos pontos $x_n = \frac{\pi}{2n}$.

- calcular limite

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{1+n^2x^2}$$

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$

f_n não converge uniformemente para f se:

existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $x_0 \in X$ tal que existe $n > n_0$ com $|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon$

$$|f_n(x_n)| = \frac{\operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{2n}\right)}{1 + n^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2} =$$

resolução do monitor: não terminei

2. Determine o limite $f(x) = \lim f_n(x)$, onde $x \in X$, e mostre que a sequência (f_n) não converge uniformemente a f, nos casos abaixo.

(a) $f_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{1+n^2x^2}$, $X = \mathbb{R}$. Dica: analise o que ocorre nos pontos $x_n = \frac{\pi}{2n}$.

primeiramente, vamos determinar o limite $f(x) = \lim fn(x)$

→ seno oscila entre -1 e 1

$$\lim_{n \to \infty} fn(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{\text{sen}(nx)}{1 + n^2x^2} = 0$$

pelo teorema da convergência uniforme:

fn converge uniformemente para f se:

existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $no \in \mathbb{N}$ existe $xo \in X$ tal que existe $n > no$ com $|fn(x) - f(x)| < \varepsilon$

assim, temos

$$n > no \to \left| \frac{\text{sen}(nx)}{1 + n^2x^2} - \frac{1}{x^2} \right| < \varepsilon$$

analisando fn em $xn = \frac{\pi}{2n}$

$$|fn(xn)| = \frac{\text{sen}\left(n\frac{\pi}{2n}\right)}{1 + n^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2} = \frac{1}{1 + \cancel{n^2}\frac{\pi^2}{4\cancel{n^2}}} = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{4}} > 0$$

como $|fn(xn)| > \varepsilon$ para $xn = \frac{\pi}{2n}$

temos que a sequência fn não converge uniformemente a f.

(b) $\frac{n}{x+n}$, $X = [0, +\infty)$. Dica: analise o que ocorre nos pontos $x_n = n$.

primeiramente, iremos analisar o limite $f(x) = \lim fn(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{x+n} \overset{L.H.}{=} \frac{1}{0+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 0$$

pelo teorema da convergência uniforme

fn converge uniformemente para f se:

existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $x_0 \in X$ tal que existe $n > n_0$ com $|fn(x) - f(x)| < \varepsilon$, e n_0 só depende de ε

assim, temos

$$n > n_0 \rightarrow \left| \frac{n}{x+n} - 0 \right| < \varepsilon$$

analisando fn em $x_n = n$, temos

$$fn(x_n) = \frac{n}{n+n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} > 0$$

assim, temos que não existe n_0 que depende de ε e $|fn(x_n)| > \varepsilon$

3. Mostre a convergência uniforme de (f_n) em $X \subset \mathbb{R}$ nos casos abaixo.

(a) $f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{n^7}$ e $X = \mathbb{R}$.

pelo teorema da convergência uniforme:

fn converge uniformemente para f se:

existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $x_0 \in X$ tal que existe

$n > n_0$ com $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

primeiramente, vamos calcular $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^7} = 0$$

agora, vamos avaliar $f_n(x)$

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{n^7} \leq \frac{1}{n^7}$$

limitamos $\frac{1}{n^7}$ por ε

$\frac{1}{n^7} < \varepsilon \rightarrow n^7 > \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow n > \sqrt[7]{\frac{1}{\varepsilon}}$, então n_0 tal que $n_0 > \sqrt[7]{\frac{1}{\varepsilon}}$

podemos observar que n_0 depende só de ε e portanto

$n > n_0 \rightarrow \left| \frac{\operatorname{sen} nx}{n^7} - 0 \right| < \varepsilon$ para $x \in \mathbb{R}$

e, assim, fn converge uniformemente a f.

8. Mostre que a série dada converge uniformemente no intervalo dado.

(a) $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ em $[-r, r], r > 0$.

Para todo $x \in [-r, r]$, temos $|x| \leq r$. Logo, para todo $x \in [-r, r]$ e para todo natural $n \geq 1$, temos

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \left|\frac{r^n}{n!}\right| = a_n$$

temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{r^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{r}{n+1} = 0$$

como $L < 1$, a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!}$ é convergente

Nestas condições, pelo critério M de Weierstrass, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge uniformemente em $[-r, r]$ para todo $r > 0$.

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$, em $[-r, r], 0 < r < 1$.

Para todo $x \in [-r, r]$, temos $|x| \leq r$. Logo, para todo $x \in [-r, r]$ e para todo natural $n \geq 1$, temos:

$$\left|\frac{x^n}{2n+1}\right| \leq \left|\frac{r^n}{2n+1}\right| = a_n$$

temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}}{2(n+1)+1} \cdot \frac{2n}{r^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{r \cdot \cancel{r^n}}{(2n+2+1)} \cdot \frac{2n}{\cancel{r^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2nr}{2n+2+1} = 2r \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+3} = 2r \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+3)\cdot\frac{1}{n}}$$

$$= 2r \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{3}{n}} = 2r \cdot \frac{1}{2} = r$$

Como r é menor que 1, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{2n+1}$ converge. Assim, pelo critério M de Weierstrass a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}$ converge.