Exercícios

fiz ☐ não consegui ☐ prof fez ☐ incompleto ☐

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐
9 ☐ 10 ☐ 11 ☐ 12 ☐ 13 ☐ 14 ☐ 15 ☐ 16 ☐
17 ☐

lista 1

1. Num lago há N peixes. Um biologo coletou b peixes, identificou-os com uma pequena e inofensiva marca e os devolveu ao lago. No dia seguinte, passou uma rede no lago e pescou n peixes. Faça as hipóteses que achar necessárias e determine a probabilidade dele encontrar k peixes marcados dentre os n pescados em função de N e b. Suponha agora que N, o número de peixes no lago é desconhecido mas que esse biólogo sabe que $b = 100$ (há 100 peixes marcados no lago), $n = 100$ (na segunda coleta foram pescados 100 peixes) e que ele observou $k = 10$ (10 peixes marcados dentre os 100 pescados). Qual é sua estimativa de N a partir desses dados? Justifique sua estimativa.

1ª parte

$N = ?$ = número de peixes no lago

$b = 100$ = peixes marcados

$n = 100$ = coletados

$K = 10$ = marcados entre os coletados

$$p(K) = \frac{n!}{K!(n-K)!} \cdot \left(\frac{b}{N}\right)^K \cdot \left(\frac{N-b}{N}\right)^{n-K}$$

probabilidade de peixes não marcados entre os capturados

permutação com elementos repetidos

probabilidade de peixes marcados entre os capturados

2ª parte

$$\frac{10}{100} = \frac{100}{N} \rightarrow N = 1000$$

A partir desses dados podemos estimar que existem cerca de 1000 peixes no lago.

2. (Variação do problema do prêmio) Três prisioneiros são informados pelo carcereiro, que nunca mente, que um deles foi escolhido ao acaso para ser executado ao amanhecer enquanto os outros dois irão ser libertados. O rei tambem decidiu que o carcereiro não pode dizer qual foi escolhido até o amanhecer. O prisioneiro A, o heroi dessa estória, pede ao carcereiro que lhe diga confidencialmente o nome de um dos outros dois que vai ser solto. Ele argumenta que isto não lhe trará informação alguma, visto que o prisioneiro A já sabe que um dos outros dois vai ser libertado e o carcereiro apontar o prisioneiro B (indicando que B será libertado) ou apontar o prisioneiro C é totalmente irrelevante do ponto de vista da sobrevivência ou não do prisioneiro A. O carcereiro recusa, argumentando que se fizer como A pede, a probabilidade dele ser executado, que era $1/3$, passa a ser de $1/2$. Algum dos dois tem razão ? Construa um modelo adequado a esta situação.

probabilidade de ser executado $= \frac{1}{3} = P(E)$

probabilidade de não ser executado $= \frac{2}{3} = P(N)$

('A' é executado)

$\frac{1}{3}$ A executado

1 — carcereiro não revelou $\quad P(E) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$

1 — carcereiro revelou $\quad P(E) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$

podemos concluir que a probabilidade do prisioneiro A ser executado não muda caso o carcereiro faça como A pede.

3. Um dado é jogado três vezes e os resultados são anotados na ordem de ocorrência. Assumindo que todos os resultados são igualmente prováveis, calcule as probabilidades de (a) $A = \{$o produto dos resultados é ímpar$\}$; (b) $B = \{$os três resultados são diferentes$\}$.

$\Omega = \{(1,1,1),(1,1,2),\ldots,(6,6,6)\}$

quantidade de resultados $= 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

a) todos os resultados devem ser ímpares $= 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

$P(A) = \dfrac{27}{216} = 0{,}125$

b) quantidade de resultados diferentes $= 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

$P(B) = \dfrac{120}{216} \approx 0{,}55\ldots$

4. Retiramos ao acaso 2 cartas de um baralho de 52 cartas. Sejam $A = \{$as duas cartas são de cor vermelha$\}$ e $B = \{$entre as duas cartas há exatamente um valete$\}$. Os eventos A, B são independentes?

probabilidade de ser uma carta vermelha $= \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{52} = \frac{25}{104}$

probabilidade de uma carta ser um valete $= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

probabilidade da 2ª. carta não ser um valete $= \frac{48}{51} = \frac{16}{17}$

$P(B) = \frac{1}{13} \cdot \frac{16}{17} = \frac{16}{221}$

se dois eventos são independentes: dois eventos são independentes quando o fato de saber que um evento ocorreu não altera a probabilidade do outro evento.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(A \cap B) = \frac{1}{52} \cdot \frac{25}{52} = \frac{25}{2704}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{25}{104} \cdot \frac{16}{221} = \frac{400}{22\,984}$

os dois eventos não são independentes, pois $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ e se pensarmos que se ocorrer o evento A só podemos obter um valete vermelho no evento B, assim a probabilidade de B diminui. ``

5. Uma urna contém 3 bolas brancas e 4 pretas. Lançamos um dado, e se o resultado for i, retiramos i bolas da urna. Aconteceu que todas as bolas retiradas eram brancas. Qual é a probabilidade que o resultado do dado tenha sido 3?

$\Omega = \{ (P), (B), (P,P), (B,B), (P,B), (P,P,P), (B,B,B), (P,P,B),$
$(P,B,B), (P,P,P,P), (B,B,B,P), (P,P,B,B), (P,P,P,B),$
$(P,P,P,P,B), (P,P,P,B,B), (P,P,B,B,B), (P,P,P,P,B,B),$
$(P,P,P,B,B,B) \}$

quantidade de eventos = 18

quantidade de eventos somente com bolas brancas = 3

probabilidade que o resultado do dado tenha sido 3 = $\frac{1}{3}$ //

dado que todas as bolas retiradas eram brancas.

6. Numa fábrica de parafusos, as máquinas A, B, C produzem respectivamente 30, 20 e 50 por cento do total. De sua produção, 5, 4, e 8 por cento são defeituosos. Um parafuso é retirado ao acaso da produção e se verifica que o mesmo está defeituoso. Quais são as probabilidades que ele tenha sido manufaturado pelas máquinas A, B, C?

probabilidade condicional

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(A) = \frac{3}{10}$ $\quad P(DA) = \frac{5}{100}$

$P(B) = \frac{2}{10}$ $\quad P(DB) = \frac{4}{100}$

$P(C) = \frac{5}{10}$ $\quad P(DC) = \frac{8}{100}$

$P(D) = \frac{17}{100}$

$$P(D|A) = \frac{P(DA)}{P(D)} = \frac{0,05}{0,17} = 0,29$$

$$P(D|B) = \frac{P(DB)}{P(D)} = \frac{0,04}{0,17} = 0,24$$

$$P(D|C) = \frac{P(DC)}{P(D)} = \frac{0,08}{0,17} = 0,47$$

$P(D|A) + P(D|B) + P(D|C) = 1$

7. Dois dados honestos são lançados. Qual é o espaço amostral correspondente? Seja E o evento de que a soma dos dois lançamentos seja impar, F o evento de que pelo menos um dos lançamentos seja 6 e G o evento de que o primeiro lançamento seja um número menor que o segundo lançamento. Determine $P(E)$, $P(F)$, $P(E \cup F)$, $P(G)$ e $P(E|F)$.

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,4), (4,5), (4,6), (5,5), (5,6), (6,6) \ldots\}$$

$$P(E) = \frac{18}{36} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(F) = \frac{11}{36}$$

$$P(E \cup F) = \frac{23}{36}$$

$$P(G) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

$$P(E|F) = \frac{6/36}{11/36} = \frac{6}{36} \cdot \frac{36}{11} = \frac{216}{396} = \frac{18}{33} = \frac{6}{11}$$

8. Um indivíduo tem quatro moedas no bolso, sendo que uma delas tem cara nas duas faces e as demais são normais. Ele fecha os olhos, escolhe uma delas ao acaso e lança. Qual é a probabilidade de que a face da moeda que fica para cima seja cara? Ele abre os olhos e nota que a face para cima é cara. Qual é a probabilidade de que a outra face da moeda também seja cara?

$P(C)$ = probabilidade de sair cara $= \frac{5}{8}$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) - P(A \cup B)$

$P(D)$ = probabilidade de sair a moeda com duas caras $= \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$

$$P(D|C) = \frac{P(D \cap C)}{P(C)} = \frac{2/8}{5/8} = \frac{2}{8} \cdot \frac{8}{5} = \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$$

9. *Paradoxo de Galton* Você lança três moedas honestas. Naturalmente você já sabe que pelo menos duas delas devem ser iguais. O outro lançamento pode resultar em cara ou coroa com a mesma probabilidade. *Portanto* a probabilidade das três serem iguais é $1/2$. Este argumento está correto?

10. Um dado honesto é lançado repetidas vezes até que apareça, pela primeira vez, a face 3 para cima. Qual é o espaço amostral deste experimento aleatório? Seja A_n o evento "a face 3 aparece pela primeira vez na jogada n". Determine $P(A_n)$. Seja B o evento "a face 2 aparece antes da primeira face 3". Determine $P(B)$.

A é geométrica

B = " aparece 2 antes do primeiro aparecimento da face 3.

A_n = " primeiro 3 na jogada n "

$P(A_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6}$

11. Numa fruteira há 3 maçãs e duas goiabas sendo que uma das maçãs e uma das goiabas estão estragadas. Um indivíduo escolhe uma fruta ao acaso; se a fruta estiver estragada, ele a joga fora e escolhe outra, também aleatoriamente, repetindo o procedimento anterior (jogando fora a fruta se ela estiver estragada e fazendo nova escolha ao acaso) até encontrar uma fruta que não esteja estragada. Identifique um espaço amostral adequado para este experimento aleatório. Qual é a probabilidade dele ter que jogar fora pelo menos uma fruta antes de encontrar uma boa? Se a primeira fruta escolhida estava estragada qual é a probabilidade da segunda fruta escolhida ser uma maçã?

12. A água de uma certa região é considerada imprópria para o consumo (contaminada) se são encontrados bacilos do tipo A ou bacilos tipo B e C (estes dois simultaneamente). As probabilidades de se encontrarem bacilos tipo A, B e C são, respectivamente, 0,30; 0,20 e 0,80. Existindo bacilos do tipo A não existirão bacilos do tipo B; e existindo bacilos do tipo B, a probabilidade de existirem bacilos do tipo C é reduzida a metade. Baseado nessas informações, calcule a) a probabilidade de aparecerem bacilos tipo B ou C. b) a probabilidade da água estar contaminada.

13. Se Y tem distribuição uniforme em $(0, 5)$ qual é a probabilidade de que a equação $4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$ tenha duas raizes reais?

14. Você quebra, ao acaso, uma barra de comprimento l em três pedaços. Qual é a probabilidade de ser possível formar um triângulo com esses três pedaços?

15. Uma urna contém 2 bolas brancas e 3 bolas vermelhas. Primeiro, o jogador **A** tira (sem reposição) 3 bolas da urna. Se a maioria das bolas escolhidas por ele for branca ele devolve uma bola branca para a urna.

Caso contrário, isto é, se a maioria das bolas que ele escolheu for vermelha, ele devolve uma bola vermelha. Depois disso tudo, o jogador **B** tira uma bola da urna ao acaso e, em seguida, o jogador **C** tira outra bola da urna também ao acaso.
a) Seja X = número de bolas brancas escolhidas pelo jogador **A**. Determine a distribuição de probabilidades de X e seu valor esperado.
b) Qual é a probabilidade de que as bolas escolhidas pelos jogadores **B** e **C** sejam brancas?

a) 1) retiro 3 sem rep.

2) "reponho bola com cor da maioria"

$X \in \{0, 1, 2\}$

3) escolho 2 bolas $\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$

A = "as duas são brancas"

$P(A) = ?$

$P(A \mid X = 0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

$P(A \mid X = 1)$

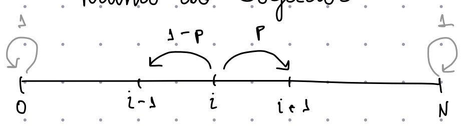
16. Um indivíduo guarda suas camisas em um armário com duas gavetas. No começo da semana a gaveta 1 contém duas camisas brancas e uma azul e a gaveta 2 contém uma camisa azul e uma camisa branca. Em cada dia da semana, de segunda a sexta, ele escolhe a camisa que vai usar naquele dia da seguinte forma: escolhe ao acaso uma gaveta; se ela não estiver vazia, ele escolhe uma camisa ao acaso; se a gaveta escolhida estiver vazia, ele abre a outra gaveta e escolhe uma camisa ao acaso dessa gaveta. a) Qual é a probabilidade de que ele use uma camisa branca na segunda-feira? b) Se ele usou uma camisa azul na terça-feira, qual é a probabilidade de que ela tenha sido escolhida da gaveta 1? c) Qual é a probabilidade de que ele use camisa branca em dois dias sucessivos?

diagrama

professor fez na aula

17. Numa roleta existem 38 números sendo 18 pretos, 18 vermelhos e 2 verdes. Um jogador sempre aposta no preto (probabilidade de ganhar de $\frac{18}{38}$) e, dependendo do resultado, ganha ou perde 1 real. Ele começa a jogar com 10 reais e para se perder tudo ou ganhar 90 (ou seja, atingir a "fortuna" de 100 reais. Qual é a probabilidade dele acabar perdendo tudo? Qual é a probabilidade de perder tudo se ele ficar *duplamente ganancioso*, isto é, se decidir parar somente se arruinado ou se atingir 200 reais?

" Ruina do Jogador "



$\{X_n\}_{n \geq 0}$

$X_n \in S = \{0, 1, \dots, N\}$

" sua fortuna "

p = " probabilidade de ganhar uma jogada "

aposta de um em um

f_i = " probabilidade de ganhar o jogo começando com i "

definição: A = " ganhar o jogo "

= " atingir N antes de 0 "

= $\{X_n = N$, para algum $n \geq 0$ "

$= \bigcup_{n \geq 0} \{X_n = N\}$

Seja $y = \begin{cases} 1, & \text{se ganhou a } 1^a \text{ jogada} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$