Segunda Lista de Exercícios de Métodos Estocásticos da Engenharia I

1. Dois dados honestos são lançados. Seja X a variável aleatória definida como sendo a soma dos números mostrados na face superior após o lançamento. Determine o espaço amostral desse experimento, assim como a distribuição de probabilidades, a média e a variância de X. (*Resposta parcial:* $E(X) = 7$; $\sigma_X^2 \cong 5{,}83$)

2. A variável aleatória X assume os valores 1,2 e 3 com probabilidade $(1 + 3k)/3$, $(1 + 2k)/3$ e $(0{,}5 + 5k)/3$, respectivamente.
   (a) Ache o valor apropriado de k para que f(x) seja a função de probabilidade de X; (*Resposta:* $k = 5/100$)
   (b) Encontre a média e a variância de X; (*Respostas:* $E(X) = 112/60$; $\sigma_X^2 = 2216/3600$)
   (c) Determine a Função de Distribuição Acumulada (FDA) de X.

3. A distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta X é dada por

$$f(x) = \begin{cases} kr^x, & 0 < r < 1 \text{ } e \text{ } x = 0,1,2,\dots \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   Encontre os valores apropriados de k para que f(x) seja a função de probabilidade de X. (*Resposta:* $k = 1 - r$, *para* $0 < r < 1$)

4. Suponha que X, o número de produtos vendidos em uma semana, seja uma variável aleatória com a seguinte função de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} Cx^2/x!; & x = 1,2,3,4 \\ 0; & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   Determine:
   (a) A constante C para que f(x) seja a função de probabilidade de X; (*Resposta:* $C = 6/31$)
   (b) O número médio de produtos vendidos em uma semana; (*Resposta:* $\cong 2{,}35$)
   (c) A probabilidade de que o número de produtos vendidos em uma semana seja no máximo três peças; (*Resposta:* $\cong 87\%$)
   (d) Se em cada produto vendido, o vendedor ganha uma comissão de R$ 12,00 e se o custo do produto é de R$ 3,00, qual é o lucro esperado em uma semana?(*Resposta:* $\cong$ *R$ 21,15*)

5. Uma variável aleatória X tem a seguinte função de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{2^x}; & x = 0,1,\dots \\ 0; & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Determine a constante k para que f(x) seja a função de probabilidade de X; (*Resposta:* $k = 1/2$)

(b) Determine a probabilidade de que X assuma um valor par. (*Resposta:* 1/6)

6. A distribuição de probabilidades de X é

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x}, & 0 \leq x < \infty \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Encontre o valor apropriado de k para que f(x) seja a função densidade de probabilidade (fdp) de X. (*Resposta:* $k = 1$)

(b) Encontre a média e a variância de X; (*Respostas:* $E(X) = 1$; $\sigma_X^2 = 1$)

7. Uma empresa produtora de calculadoras eletrônicas oferece um ano de garantia para seus produtos. Assim, se o produto falhar nesse intervalo, ele será substituído. O tempo de falha é modelado de acordo com a seguinte distribuição de probabilidades:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}125e^{-0{,}125x}, & x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual é a probabilidade de uma calculadora falhar durante o período coberto pela garantia? (*Resposta:* 11,75%)

8. O conteúdo líquido, em onça-fluida (oz), de um refrigerante em lata é uma variável aleatória com distribuição de probabilidades dada por

$$f(x) = \begin{cases} 4(x - 11{,}75), & 11{,}75 \leq x \leq 12{,}25 \\ 4(12{,}75 - x), & 12{,}25 \leq x \leq 12{,}75 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Encontre a probabilidade de uma lata de refrigerante conter menos de 12 oz do produto; (*Resposta:* 12,5%)

(b) Encontre a probabilidade de uma lata de refrigerante conter menos de 12,5 oz do produto; (*Resposta:* 87,5%)

9. O tempo de duração (em anos) de certo microprocessador, é considerado uma variável aleatória contínua X, com a seguinte função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x-k}{10}}; & x \geq 2 \\ 0; & x < 2 \end{cases}$$

(a) Determine a constante k para que $f(x)$ seja uma função densidade de probabilidade de X; (*Resposta:* $k = [10 \cdot ln(0{,}1)] + 2$)

(b) Determine e interprete $E(X)$ e σ_X^2; (*Resposta:* 1/6)

(c) Qual é a probabilidade de que um microprocessador dure mais de 5 anos?

(d) Determine a Função de Distribuição Acumulada (FDA) da variável tempo de vida;

10. Uma indústria produz artigos cuja massa individual (em kg) é uma variável aleatória contínua X, que tem a seguinte função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} x-8 & ; \quad 8 \leq x \leq 9 \\ 10-x & ; \quad 9 < x < 10 \\ 0 & ; \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Determine a média e desvio padrão da variável aleatória X;

(b) O fabricante vende um artigo por um preço fixo de R$ 20,00 e garante o reembolso do preço de venda a qualquer cliente se a massa do artigo for inferior a 8,25 kg. O custo de produção está relacionado à massa do artigo de acordo com a expressão $0{,}05X + 0{,}50$. Expresse a variável lucro L, em termos da variável aleatória X;

(c) Determine o lucro esperado por artigo.

11. Suponha que a VAC X tenha f.d.p. dada por

$$f(x) = e^{-x} \text{ , se } x > 0.$$

Determinar a f.d.p. da VA $Y = X^3$. (*Resposta:* $\frac{1}{3}e^{-y^{\frac{1}{3}}}y^{\frac{-2}{3}}, \quad y > 0$)

12. Suponha que a VAC X tenha f.d.p. dada por

$$f(x) = 3x^2 \text{ , se } 0 < x < 1.$$

Determinar a f.d.p. da VA $Y = 1 - X^2$. (*Resposta:* $\frac{3}{2}(1-y)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 < y < 1$)

13. Suponha que a VAC X tenha f.d.p. dada por

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ , se } 0 < x \leq 1.$$

Determinar a $P(Y > \frac{1}{4})$, sabendo-se que $Y = \sqrt{X}$. (*Resposta:* $\frac{3}{4}$)

14. A f.d.p. de uma VAC X é dada por

$$f(x) = cx^2 \text{ , se } -3 < x < 6.$$

(a) Determinar o valor da constante c; (*Resposta:* $\frac{1}{81}$)

(b) Determinar a f.d.p. da VA $Y = \frac{1}{3}(12 - X)$. (*Resposta:* $\frac{1}{27}(12-3y)^2, \quad 2 < y < 5$)

15. Uma VAC X tem f.d.p. dada por

$$f(x) = 2e^{-2x} \text{ , se } x > 0.$$

Determinar:

(a) A função geratriz de momentos de X; (*Resposta:* $M_X(t) = \frac{2}{2-t}, \quad t < 2$)

(b) $E(X)$, utilizando a função geratriz de momentos de X; (*Resposta:* $E(X) = \frac{1}{2}$)

(c) $Var(X)$, utilizando a função geratriz de momentos de X; (*Resposta:* $Var(X) = \frac{1}{4}$)

16. A FDA de uma variável aleatória X é dada por

$$F(x) = 1 - e^{-2x} \text{ , se } x > 0.$$

(a) Determinar a f.d.p. e a função geratriz de momentos de X; (*Resposta:* $f(x) = 2e^{-2x}, \quad x > 0; \quad M_X(t) = \frac{2}{2-t}, \quad t < 2$)

(b) $E(X)$, utilizando a função geratriz de momentos de X; (*Resposta:* $E(X) = \frac{1}{2}$)

(c) $Var(X)$, utilizando a função geratriz de momentos de X; (*Resposta:* $Var(X) = \frac{1}{4}$)

17. Seja X uma VAC com f.d.p. dada por

$$f(x) = 4e^{-4x} \text{ , se } x > 0.$$

Determinar $E(Y)$ e $Var(Y)$, sabendo que $Y = 2X + 3$, usando os conceitos de função geratriz de momentos. (*Resposta:* $E(X) = \frac{7}{2}; \quad Var(X) = \frac{1}{4}$)

Nota: Os exercícios desta lista se encontram nas obras referenciadas abaixo. Para um melhor aproveitamento, aconselha-se pesquisá-las e resolver outros exercícios nelas contidos.

1. CANCHO, V.G. *Notas de Aulas sobre Noções de Estatística e Probabilidade.* São Paulo: USP, 2010.

2. HINES, W.W.; *et al. Probabilidade e Estatística na Engenharia.* 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

3. MENDES, F. C. T. *Probabilidade para Engenharias.* Rio de Janeiro: LTC, 2010.

4. MEYER, P.L. Probabilidade: *Aplicações à Estatística.* 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1983.

5. MONTGOMERY, D.C.; RUNGER, G.C. *Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros.* 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.