Nome: Sabrina Araújo da Silva   nº USP: 12566182

MAC0338 – ANÁLISE DE ALGORITMOS

LISTA 03

exercícios 1, 6 e 8

1. Considere o seguinte algoritmo que determina o segundo maior elemento de um vetor $v[1\,..\,n]$ com $n \geq 2$ números positivos distintos.

Algoritmo Máximo (v, n)

1. *maior* $\leftarrow 0$
2. *segundo_maior* $\leftarrow 0$
3. **para** $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
4.   **se** $v[i] >$ *maior*
5.   **então** *segundo_maior* $\leftarrow$ *maior*
6.   *maior* $\leftarrow v[i]$
7.   **senão se** $v[i] >$ *segundo_maior*
8.   **então** *segundo_maior* $\leftarrow v[i]$
9. **devolva** *segundo_maior*

Suponha que v é uma permutação de 1 a n escolhida ao acaso dentre todas as permutações de 1 a n, de acordo com a distribuição uniforme de probabilidade. Seja X o número de vezes que a variável *segundo_maior* é alterada (ou seja, o número de execuções das linhas 5 e 8 do algoritmo) numa chamada de Máximo(v, n). Note que X é uma variável aleatória. Calcule o valor esperado de X.

cada permutação de v tem probabilidade $\frac{1}{n!}$

X = número total de execuções da linha 5 e 8 $= Y + W$

Y = número total de execuções da linha 5

W = número total de execuções da linha 8

$$Y_i = \begin{cases} 1, \text{ se "segundo\_maior} \leftarrow \text{maior" é executado} \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$Y = Y_1 + \dots + Y_n$

$E[Y_i]$ = probabilidade de que $v[i]$ seja máximo em $v[1 \dots i]$

$= \frac{1}{i}$

$E[Y] = E[Y_1 + \dots + Y_n] = E[Y_1] + \dots + E[Y_n]$

$= \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < \ln n$

$$W_i = \begin{cases} 1, \text{ se "segundo\_maior} \leftarrow v[i] \text{" é executado} \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$W = W_1 + \dots + W_n$$

$E[W_i]$ = probabilidade de que $v[i]$ seja o segundo máximo em $v[1 \dots i]$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{i}\right)}_{\text{prob de não executar a linha 5}} \cdot \frac{1}{i-1} = \frac{1}{i}$$

$$E[W] = E[W_1 + \dots + W_n] = E[W_1] + \dots + E[W_n]$$

$$= \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < \ln n$$

$$E[X] = E[Y] + E[W] < \ln n + \ln n$$

$$< 2 \ln n$$

6. Escreva uma função que recebe um vetor com n letras A's e B's e, por meio de trocas, move todos os A's para o início do vetor. Sua função deve consumir tempo $O(n)$.

seja v[1...n] o vetor com n letras A's e B's

```
TROCA(v, n)
    j ← n
    PARA i ← 1 ENQUANTO i < j FAÇA
        SE v[i] == "B" E v[j] == "A"
            v[i] = "A"
            v[j] = "B"
            j = j - 1
        SENÃO SE v[i] = "A" E v[j] == "B"
            j = j - 1
        SENÃO SE v[i] = "B" E v[j] == "B"
            j = j - 1
            i = i - 1
        i = i + 1
    DEVOLVA v
```

8. Sejam $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$ dois vetores, cada um contendo n números ordenados. Escreva um algoritmo $O(\lg n)$ para encontrar uma das medianas de todos os $2n$ elementos nos vetores X e Y.

seja X [ix ... fx] e Y [iy ... fy]

```
MEDIANA (X, Y, ix, fx, iy, fy)
    SE ix É IGUAL A iy
        DEVOLVA O MÍNIMO ENTRE ix E iy
    // MEDIANAS DE X E Y
    mx = (ix + fx) / 2
    my = (iy + fy) / 2
    x = X[i]
    y = Y[j]
    SE x == y
        DEVOLVA x
    SE x < y
        DEVOLVA MEDIANA (X, Y, mx, fx, iy, my)
    SE y < x
        DEVOLVA MEDIANA (X, Y, ix, mx, my, fy)
```