21 de junho

Exercícios

11.7

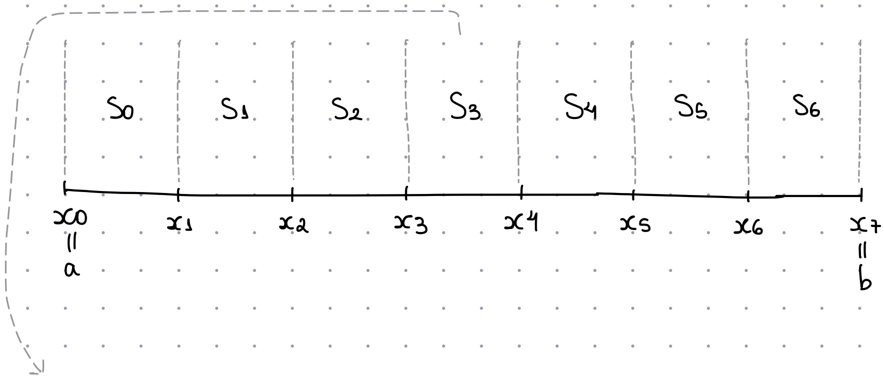
i para cada intervalo são 3 pontos

0

1

⋮

7



$S_i(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n-1$

$S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) = i = 0, \dots, n-1$

$S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1})$, $i = 0, \dots, n-2$

$S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1})$, $i = 0, \dots, n-2$

devemos escolher uma fórmula que tenha valores que conhecemos

i. X não podemos subtrair de x_0

ii. podemos usar $h = -0.2$

iii. X

iv. o erro da quarta é menor, usando $h = -0.2$

v.

11.2

3 coeficientes = 3 condições

$v(x) = p_i(x) \qquad x \in [\quad]$

quantas derivadas $v(x)$ possui antes que vire um único

consigo pedir para cada p:

$$\left.\begin{array}{ll} p_i(x_i) = f(x_i), & i = 0, \dots, n-1 \\ p_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), & i = 0, \dots, n-1 \end{array}\right\} \text{temos } 2n \text{ condições}$$

$p_i'(x_{i+1}) = p_{i+1}'(x_{i+1}), \quad i = 0, \dots, n-2$

o polinômio é quadrático então queremos

$p(x) = ax^2 + bx + c$

$p'(x) = 2ax + b$

$p''(x) = 2a$

se forçar que a derivada segunda tem o mesmo a, assim, forçamos que a derivada primeira tenha b igual

11.9 Hermite: C^1 spline: C^2

é o que está na tabela do livro

- não precisa de condições adicionais, pois já foi dado
- polinômio de grau 3 pois há 4 coeficientes
- Hermite é local: se tiver um dado novo é mais fácil de trocar
- Hermite resolve sistemas mais triviais (sistema 4x4)
- desvantagem: Hermite é C_1 e spline é C^2, talvez precise de C^2

equações

14.3

método de sexta ordem: erro $O(h^6)$

aproximação de $f''(x_0)$ usando Taylor

$f(x_0 + h)$

$f(x_0 - h)$

derivada

$f(x_0 - h) + f(x_0 + h) =$ (termos pares) $= \bigcirc^0 + \bigcirc^2 + \bigcirc^4 + \bigcirc^6 + O(h^8)$

falar que é limitada

$f(x_0 + 2h) =$

$f(x_0 - 2h) =$

$f(x_0 + 2h) + f(x_0 - 2h)$ => tem que eliminar o $\bigcirc^6$

$f(x_0 - 3h) =$

$f(x_0 + 3h) =$

---- //

devemos eliminar a 4ª derivada e depois a 6ª derivada

15.6

erro da regra não composta: $K(b-a)^{q+1}$

erro da regra composta → em cada intervalo: $K_i h^{q+1}$

→ observando $\sum_{i=1}^{n} h = (b-a)$

$$E(f) = \sum_{i=1}^{n} K_i h^{q+1} = \underbrace{K}_{K = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_i}(b-a)h^q$$

pag 445

do exercício 4, o erro em cada intervalo da regra do trapézio não corrigida é:

$$\frac{f''(\eta)}{12}(b-a)^3$$

isso aplicado a um intervalo de tamanho h é igual a

$\frac{f''(\eta_i)}{12}h^3$, quer dizer $K_i h^{q+1}$

com $K_i = \frac{f''(\eta_i)}{12}$ e $q = 2$

logo, $E(f) = K(b-a)h^2$

minhas resoluções:

11.3

queremos construir

a) $v(x) = s(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$, $x_i \leq x \leq x_{i+1}$

para $i = 0, 1, \dots, n-1$

temos 3 coeficientes, então devemos determinar 3n condições

assim, montamos o sistema

$$\begin{cases} s_i(x_i) = f(x_i) & i = 0, \dots, n-1 \\ s_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) & i = 0, \dots, n-1 \\ s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1}) & i = 0, \dots, n-2 \end{cases}$$

devemos adicionar a condição adicional:

como $f'(x_0)$ e $f'(x_n)$ são conhecidas usamos clamped boundary

$s_0'(x_0) = f'(x_0)$

$s_{n-1}'(x_n) = f'(x_n)$

resolvendo o sistema podemos determinar $v(x)$

Algorithm: Cubic Spline.
Given data pairs (x_i, y_i), $i = 0, 1, \dots, n$:

1. Identify $f(x_i) \equiv y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, and set $a_i = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$.
2. Construct a tridiagonal system of equations for the unknowns $c_0, c_1, \dots, c_n$ using the $n-1$ equations (11.5) and two more boundary conditions.
3. Solve the linear system, obtaining the coefficients c_i.
4. Set the coefficients d_i, $i = 0, 1, \dots, n-1$, by equations (11.4a); set the coefficients b_i, $i = 0, 1, \dots, n-1$, by equations (11.4b).
5. The desired spline $v(x)$ is given by

$$v(x) = s_i(x), \ x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

where s_i are given by equations (11.2a).

b)

monitoria 22 de junho

14.4

erro: limitado e constante