Ciência Computacional: Modelagem e Simulação

Roberto M. Cesar Jr.
rmcesar@usp.br

Capítulo 3

MOVIMENTO BIDIMENSIONAL

3.1 — Descrição em termos de coordenadas

Neste capítulo, vamos passar do movimento retilíneo à descrição do movimento num plano, que inclui muitos casos importantes, como o movimento dos projéteis e o movimento da Terra em torno do Sol.

Conforme já foi mencionado na Seção 1.6, podemos especificar a posição de um ponto num plano através de 2 parâmetros, que são suas *coordenadas* em relação a um dado referencial. Se adotarmos coordenadas cartesianas, por exemplo, a posição de uma partícula em movimento no plano será descrita pelo par de funções

$$(x(t), y(t)) \tag{3.1.1}$$

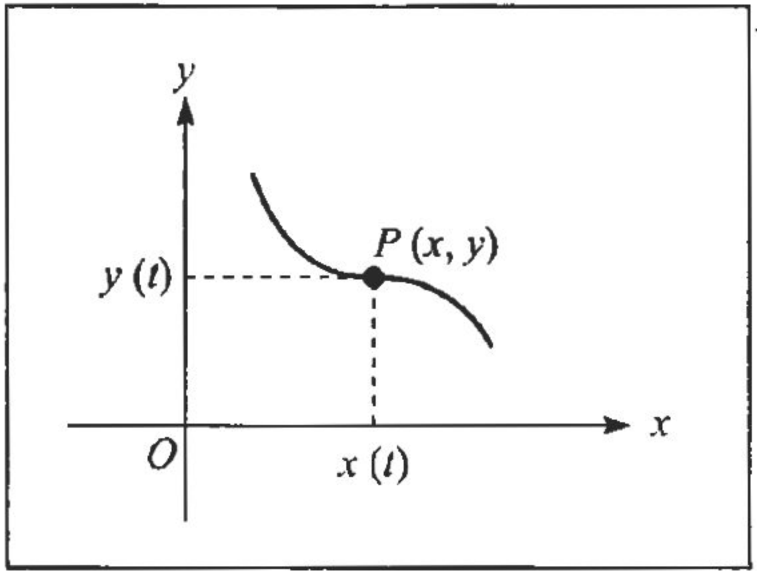


Figura 3.1 Movimento num plano.

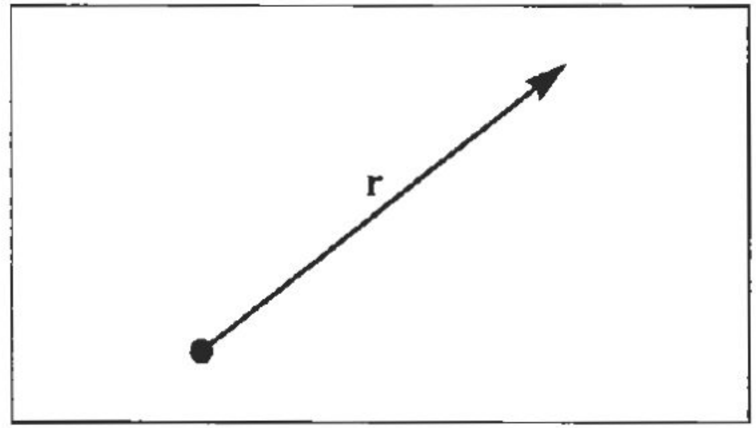


Figura 3.3 Deslocamento como vetor.

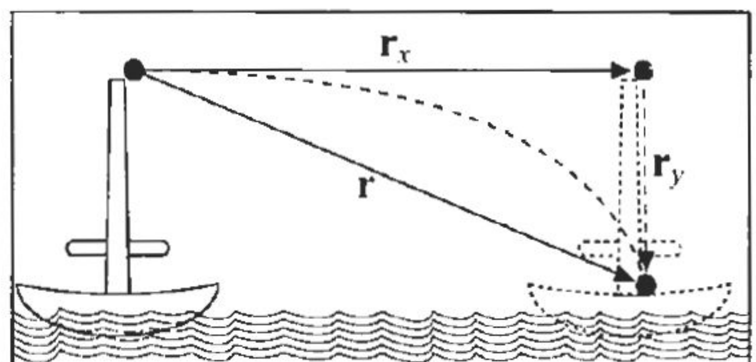


Figura 3.4 Composição de deslocamentos.

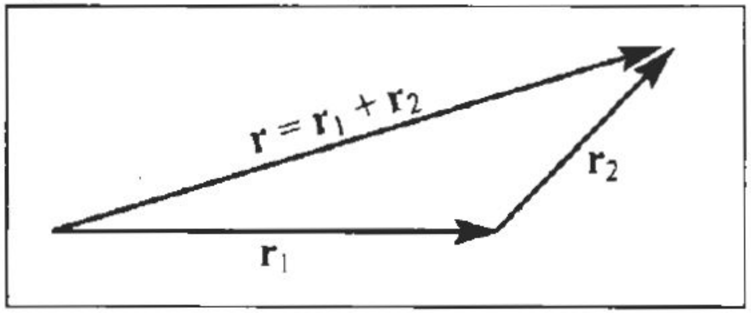


Figura 3.5 Deslocamento resultante.

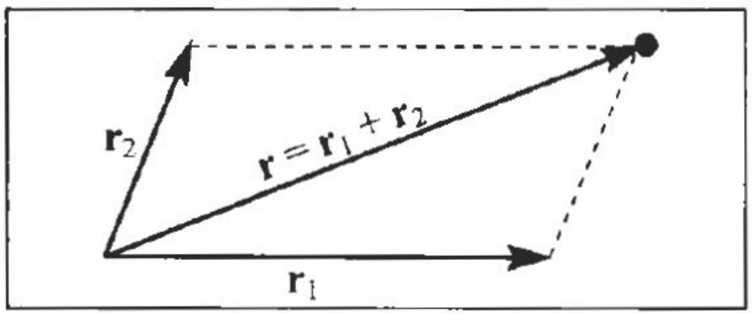


Figura 3.6 Regra do paralelogramo.

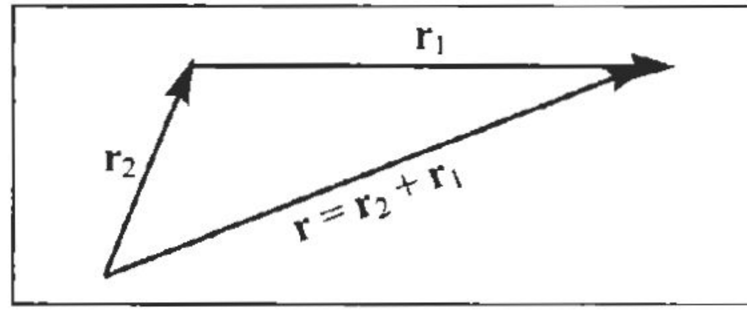


Figura 3.7 Comutatividade da soma.

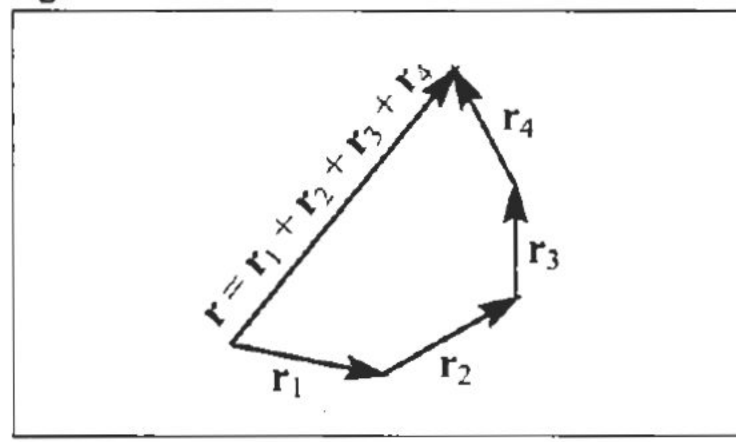


Figura 3.8 Soma de vários deslocamentos.

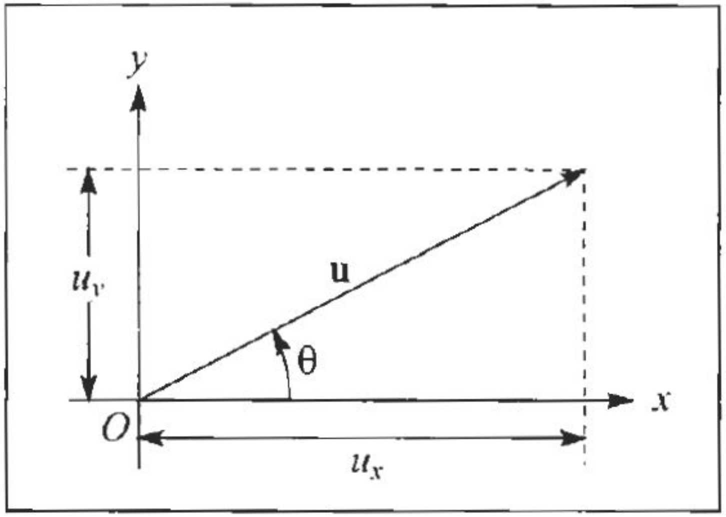


Figura 3.13 Componentes de um vetor.

Seja **u** um vetor qualquer (na Fig. 3.13, tomamos a origem de **u** no ponto O, origem das coordenadas, o que não tem nada de restritivo, porque um vetor não está associado a uma origem determinada: um vetor obtido de **u** por uma translação é igual a **u**).

Chamam-se *componentes de* **u** segundo os eixos *Ox* e *Oy* as projeções u_x e u_y de **u** sobre esses eixos (Fig.). A magnitude de **u** (ou *módulo* de **u**) é dada por

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \tag{3.3.1}$$

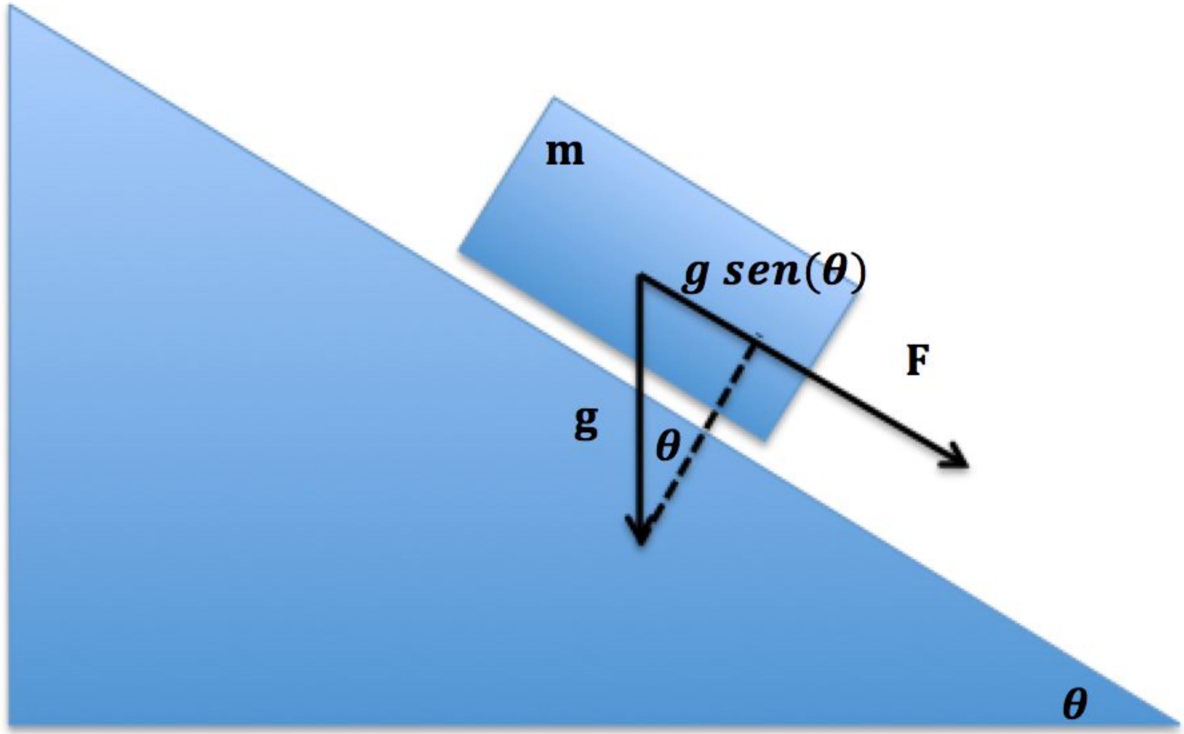
Chama-se *vetor unitário* um vetor de módulo = **1**. Costuma-se designar um vetor unitário na direção de **u** por $\hat{\mathbf{u}}$, de forma que

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} / |\mathbf{u}| \tag{3.3.2}$$

Forças bidimensionais

Descida na rampa: Escreva o algoritmo de Euler

implementar



implementar

$$F = m\,g\,sen\,\theta = m\,\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = g\,sen\,\theta$$

Movimentos bidimensionais

3.4 — Velocidade e aceleração vetoriais

Consideremos uma partícula, em movimento num plano, que descreve uma trajetória APB, em relação a um sistema de referência Oxy. Seja $\mathbf{r}(t)$ = **OP** o *deslocamento* da partícula em relação à origem O no instante t, onde P é a posição ocupada pela partícula no instante t; seja $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ = **OP′** o deslocamento no instante $t + \Delta t$. Pela (3.3.10), o deslocamento relativo da partícula entre os instantes t e $t + \Delta t$ é o vetor (Fig. 3.18).

$$\mathbf{PP'} = \mathbf{\Delta r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) \qquad (3.4.1)$$

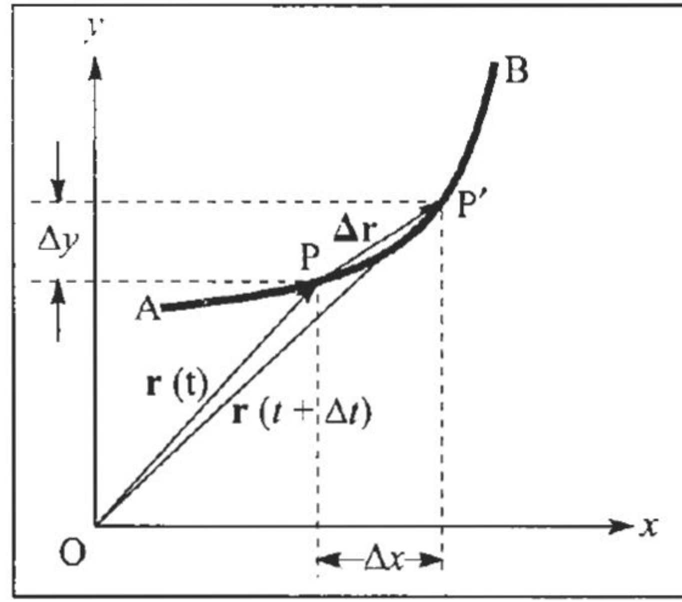


Figura 3.18 Trajetória plana.

Por analogia com a (2.1.5), é natural definirmos a *velocidade média* entre os instantes t e $t + \Delta t$ por

$$\mathbf{v}_{t \to t+\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathbf{\Delta r}}{\Delta t} \qquad (3.4.2)$$

Como a diferença entre dois vetores e o produto de um vetor por um escalar são vetores, a (3.4.2) mostra que a velocidade média é um vetor, cuja direção e sentido são os da corda PP′ que liga as posições nos instantes t e $t + \Delta t$ sobre a trajetória.

As componentes da velocidade média são

$$\left.\begin{aligned} v_{x(t \to t+\Delta t)} &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ v_{y(t \to t+\Delta t)} &= \frac{\Delta y}{\Delta t} \end{aligned}\right\} \qquad (3.4.3)$$

Velocidade Instantânea

$$\boxed{\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}\right) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} = v_x(t)\mathbf{i} + v_y(t)\mathbf{j}} \tag{3.4.5}$$

Aceleração média

$$\overline{\mathbf{a}}_{t \to t+\Delta t} = \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \tag{3.4.6}$$

A aceleração *instantânea* no instante t é o vetor

$$\boxed{\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}\right) = \frac{d\mathbf{v}}{dt}} \tag{3.4.7}$$

ou seja, é a derivada do vetor velocidade instantânea em relação ao tempo. Pela (3.4.5), também podemos escrever

$$\boxed{\mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathrm{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathrm{j}} \tag{3.4.8}$$

3.5 — Movimento uniformemente acelerado

Um movimento qualquer chama-se *uniformemente acelerado* quando a aceleração é constante (independente do tempo):

$$\boxed{\mathbf{a}(t) = \mathbf{a} = \text{ constante}} \tag{3.5.1}$$

onde "constante", para um vetor, significa *constante em módulo,* direção e sentido.

Analogamente à discussão da Seç. 2.5, para determinar o movimento é preciso ainda dar as *condições iniciais*:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{v}(t_0) &= \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{r}(t_0) &= \mathbf{r}_0 \end{aligned}} \tag{3.5.2}$$

No instante $t_0 + \Delta t$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{r}$ terão variado respectivamente de $\mathbf{\Delta v}$ e $\mathbf{\Delta r}$, onde, para Δt suficientemente pequeno (de modo que possamos confundir aceleração e velocidade médias e instantâneas), teremos

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{\Delta v} &= \mathbf{a}\Delta t \\ \mathbf{\Delta r} &= \mathbf{v}_0\Delta t \end{aligned}\right\} \tag{3.5.3}$$

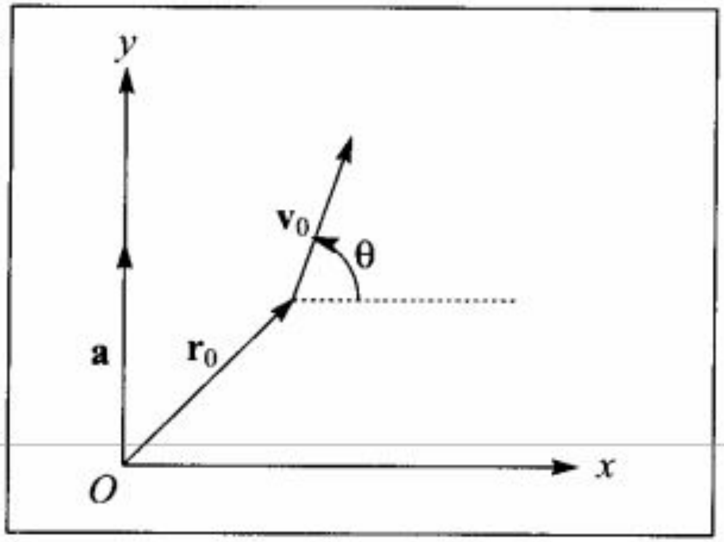


Figura 3.23 Condições iniciais.

Vamos adotar um sistema de coordenadas cartesianas com eixo Oy segundo a direção de **a** (Fig. 3.23). Temos então

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a} &= a\mathbf{j} \\ \mathbf{v}_0 &= v_{0x}\mathbf{i} + v_{0y}\mathbf{j} \\ \mathbf{r}_0 &= x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3.5.4)}$$

As projeções do movimento sobre os eixos x e y obedecerão então a

$$\left.\begin{aligned} &a_y = a = \text{constante}; \quad v_y(t_0) = v_{0y}; \quad y(t_0) = y_0 \\ &a_x = 0; \qquad\qquad\qquad\;\; v_x(t_0) = v_{0x}; \quad x(t_0) = x_0 \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3.5.5)}$$

que correspondem a movimentos unidimensionais do tipo já considerado na Seç. 2.5. Podemos então aplicar imediatamente as (2.5.4) e (2.5.8), obtendo.

$$\boxed{\left.\begin{aligned} v_y(t) &= v_{0y} + a(t - t_0) \\ v_x(t) &= v_{0x} \end{aligned}\right\}} \tag{3.5.6}$$

$$\boxed{\left.\begin{aligned} y(t) &= y_0 + v_{0y}(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \\ x(t) &= x_0 + v_{0x}(t - t_0) \end{aligned}\right\}} \tag{3.5.7}$$

$$\boxed{\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}(t - t_0)} \tag{3.5.8}$$

$$\boxed{\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t - t_0)^2} \tag{3.5.9}$$

Equação da trajetória

de $\quad x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t_0)$

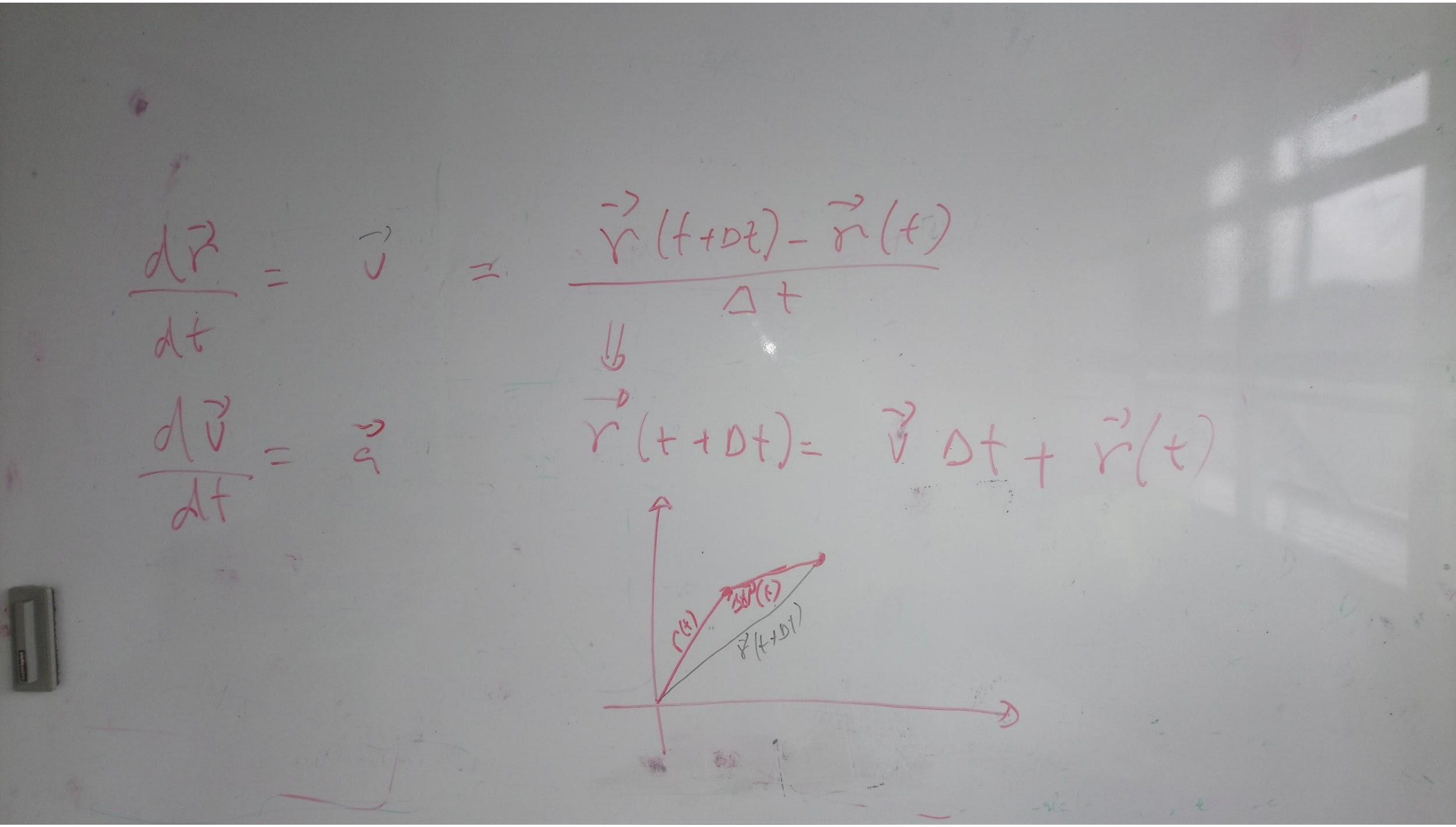
temos que: $\quad t - t_0 = \dfrac{x - x_0}{v_{0x}}$

substituindo na eq. $\quad y(t) = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + \dfrac{1}{2}a(t - t_0)^2$

temos que:

$$\boxed{y - y_0 = \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right)(x - x_0) + \frac{1}{2}\frac{a}{v_{0x}^2}(x - x_0)^2} \qquad (3.5.13)$$

Euler vetorial



Simulação usando Jupyter

- Proponha uma representação do movimento uniformemente acelerado usando sistemas dinâmicos e vetor de estados.
- Crie um documento jupyter implementando o movimento estudado.

Material complementar

Movimento de projéteis

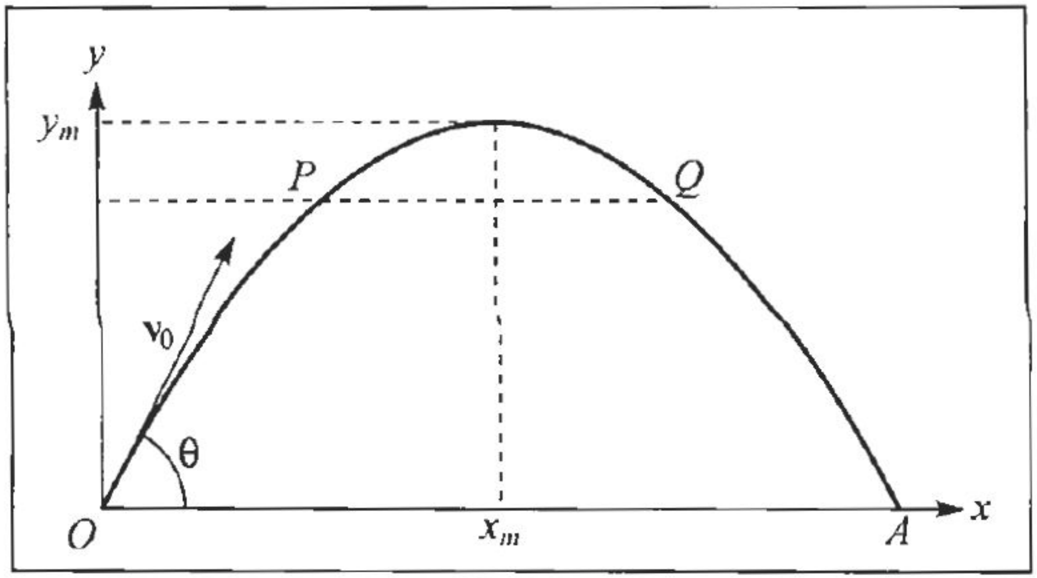


Figura 3.25 Trajetória parabólica.

$$\mathbf{a} = -g\,\mathbf{j} \qquad (3.6.1)$$

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta \qquad v_{0y} = v_0 \text{ sen } \theta \tag{3.6.2}$$

As (3.5.6) e (3.5.7) ficam

$$v_y = v_0 \text{ sen } \theta - gt \qquad v_x = v_0 \cos\theta \tag{3.6.3}$$

$$\left.\begin{aligned} y = v_0 \text{ sen } \theta \, t - \frac{1}{2} g \, t^2 \\ x = v_0 \cos\theta \, t \end{aligned}\right\} \tag{3.6.4}$$

e a equação da trajetória (3.5.13) fica

$$\boxed{y = tg\theta \cdot x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\theta}} \tag{3.6.5}$$

3.7 — Movimento circular uniforme

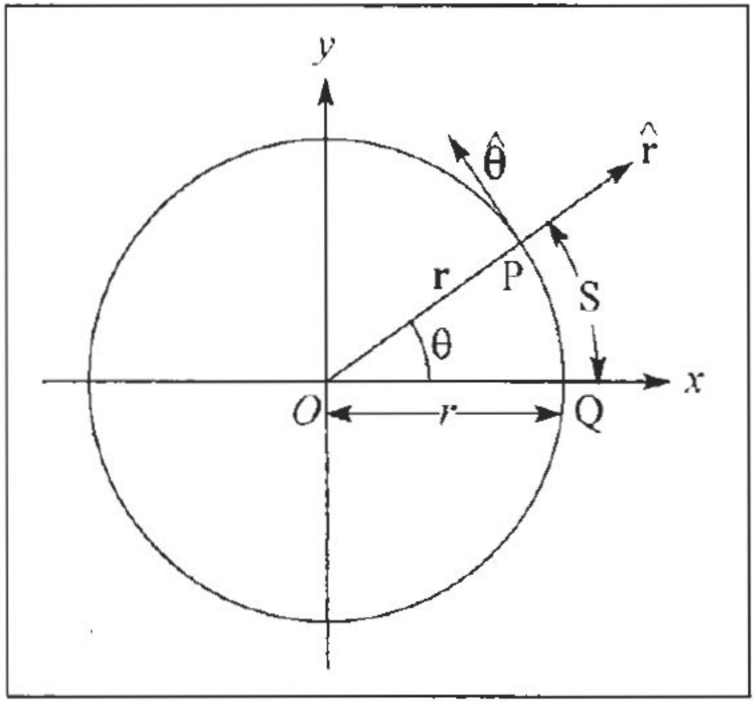


Figura 3.27 Movimento circular.

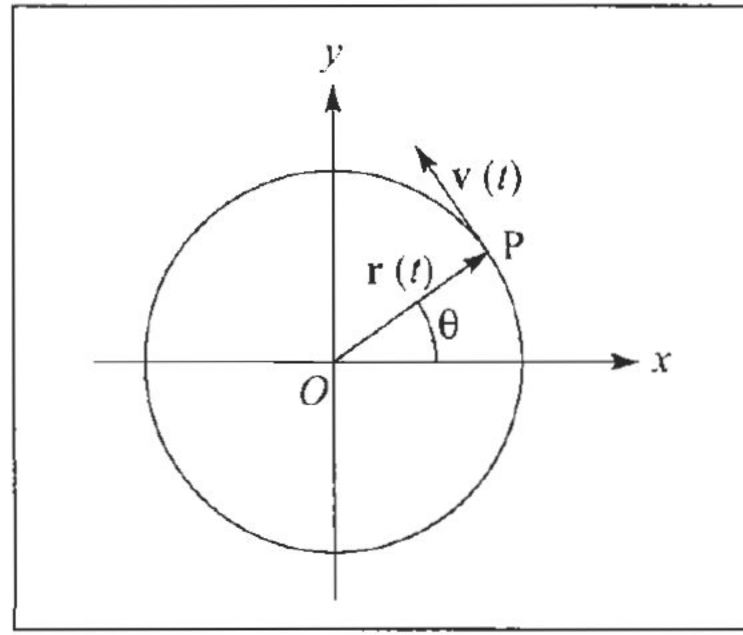


Figura 3.28 Velocidade instantânea.

$$\mathbf{v} = v\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\boxed{s = r\theta}$$

$$v = ds / dt$$

O *período* T do movimento é o tempo para dar uma volta completa, ou seja,

$$\boxed{T = 2\pi r / |v|} \tag{3.7.5}$$

Chama-se *freqüência* υ o inverso do período:

$$\boxed{\upsilon = 1 / T} \tag{3.7.6}$$

Podemos empregar a (3.7. 1) para exprimir a lei horária (3.7.2) em termos do ângulo θ descrito em função do tempo:

$$\boxed{\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0)} \tag{3.7.7}$$

onde

$$\boxed{\omega = v / r} \tag{3.7.8}$$

chama-se *velocidade angular*. Temos, analogamente à (3.7.4),

$$\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}} \tag{3.7.9}$$

e as (3.7.5) e (3.7.8) mostram que

$$\boxed{|\omega| = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu} \tag{3.7.10}$$

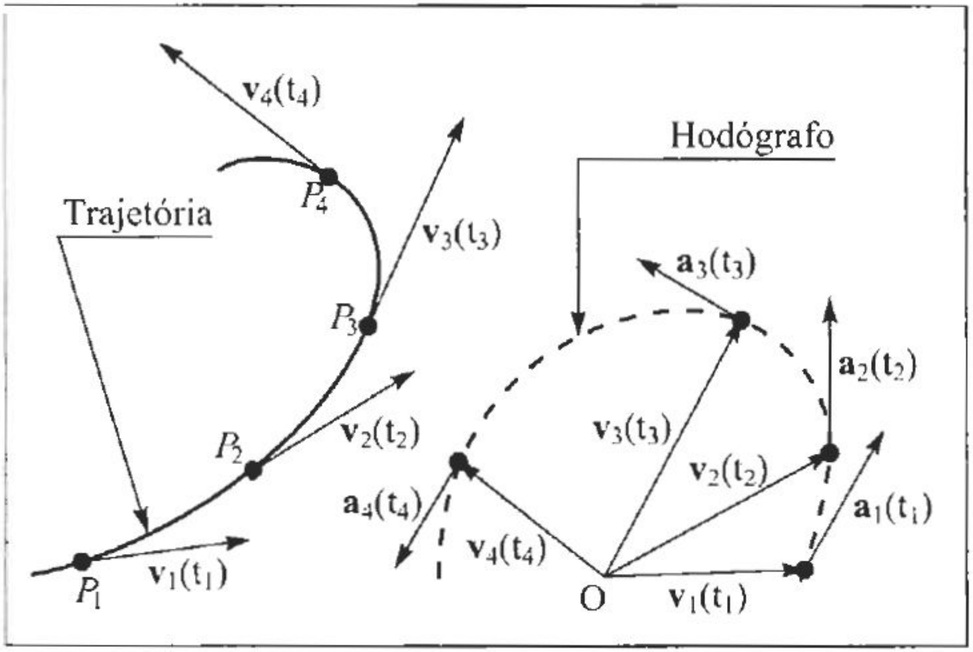


Figura 3.21 Hodógrafo.

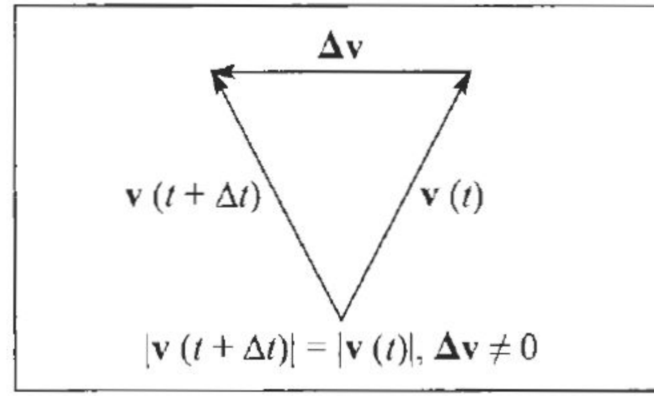


Figura 3.22 Variação da direção da velocidade.

$$\boxed{\mathbf{v} = \omega\, r\hat{\theta}} \tag{3.7.11}$$

Embora o movimento circular uniforme tenha uma velocidade de *módulo* constante, a *direção* da velocidade v varia de ponto a ponto da trajetória. Logo, conforme foi mencionado no fim da Seç. 3.4, ele é um movimento *acelerado,* ou seja, a aceleração é $\neq 0$. Vamos agora ver como se obtém a aceleração a.

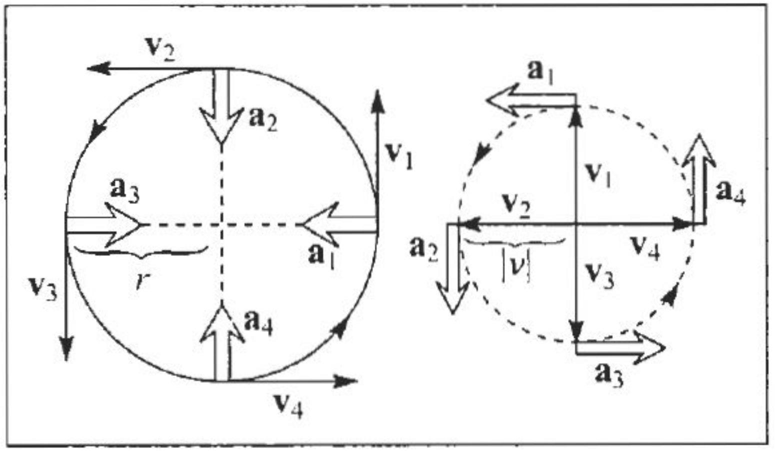


Figura 3.29 Hodógrafo do movimento circular uniforme.

Uma forma possível de determinar a é pelo processo geométrico do hodógrafo, descrito na Seç. 3.4. O hodógrafo de um movimento circudirigidas radialmente para dentro no círculo original (trajetória). Logo

$$\boxed{\mathbf{a} = -|\mathbf{a}|\hat{\mathbf{r}} = -\omega^2 r\hat{\mathbf{r}} = -\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{r}}} \tag{3.7.13}$$

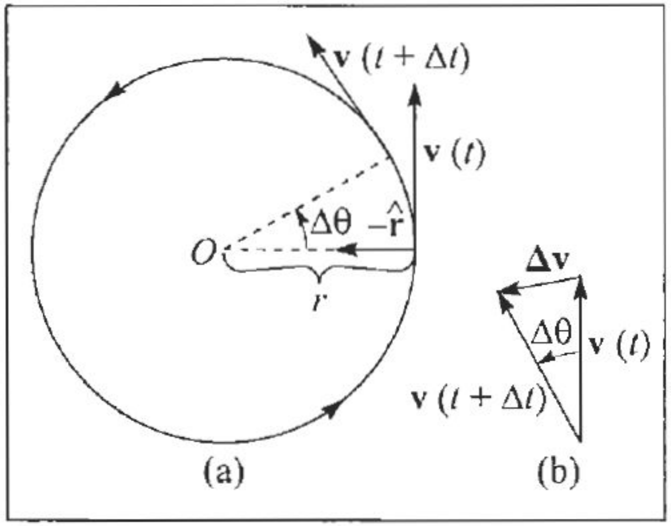


Figura 3.30 Incremento de velocidade.

Esta é a chamada *aceleração centrípeta* (porque aponta para o centro do círculo).

Podemos também obter o mesmo resultado de outra forma, empregando diretamente a definição (3.4.7) do vetor **a**. A Fig. 3.30 (a) ao lado mostra os vetores $v(t)$ e $v(t + \Delta t)$, onde Δt corresponde a um incremento $\Delta\theta$. A (b) ilustra a construção de $\mathbf{\Delta v}$, mostrando que, no limite em que $\Delta t \to 0$, $\mathbf{\Delta v}$ tende a apontar na direção de $-\hat{\mathbf{r}}$. Além disto, o ângulo entre $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ é também $\Delta\theta$, e, no limite em que $\Delta t \to 0$, podemos confundir o comprimento de $\mathbf{\Delta v}$ (corda) com o do arco de círculo de raio $|v|$ que subentende o ângulo $|\Delta\theta|$:

$$|\mathbf{\Delta v}| \approx |\mathbf{v}|\,|\Delta\theta| \quad \left\{ \quad \frac{|\Delta v|}{\Delta t} \approx |\mathbf{v}|\,\frac{|\Delta\theta|}{\Delta t} \right. \tag{3.7.14}$$

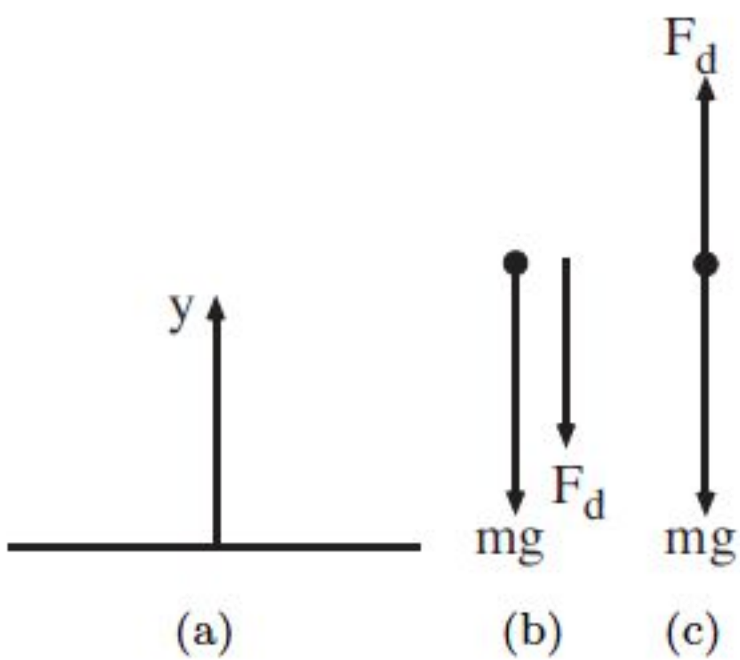
o que se torna exato no limite em que $\Delta t \to 0$, levando novamente à (3.7.12) (cf. (3.7.9)).

Modelos mais realistas

Effects of Drag Resistance

$$F = \frac{GMm}{(R+y)^2} = \frac{GMm}{R^2(1+y/R)^2} = mg(1 - 2\frac{y}{R} + \cdots), \tag{3.8}$$

where y is measured from the Earth's surface, R is the radius of the Earth, M is the mass of the Earth, G is the gravitational constant, and $g = GM/R^2$.



$$F = -mg + F_d.$$

Modelo com resistência do ar

- É necessário determinar a Fd como função de v, i.e. Fd(v)
- Duas abordagens:
  - Empiricamente: medindo y(t) e calculando numericamente v(t), a(t).
  - Assumindo um modelo *a priori* para v(t)

$$F_{1,d}(v) = C_1 v,$$

$$F_{2,d}(v) = C_2 v^2,$$

Because $F_d(v)$ increases as v increases, there is a limiting or *terminal velocity* (speed) at which the net force on a falling object is zero. This terminal speed can be found from (3.9) and (3.10) by setting $F_d = mg$ and is given by

$$v_{1,t} = \frac{mg}{C_1}, \qquad \text{(linear drag)} \qquad (3.11a)$$

$$v_{2,t} = \left(\frac{mg}{C_2}\right)^{1/2}, \qquad \text{(quadratic drag)} \qquad (3.11b)$$

$$F_{1,d} = C_1 v_{1,t}\left(\frac{v}{v_{1,t}}\right) = mg\frac{v}{v_{1,t}}, \qquad F_1(v)/m = -g\left(1 - \frac{v}{v_{1,t}}\right),$$

$$F_{2,d} = C_2 {v_{2,t}}^2\left(\frac{v}{v_{2,t}}\right)^2 = mg\left(\frac{v}{v_{2,t}}\right)^2. \qquad F_2(v)/m = -g\left(1 - \frac{v^2}{{v_{2,t}}^2}\right).$$

Simulação usando Jupyter

- Crie um documento jupyter implementando o movimento estudado.