P2 - CÁLCULO P1

IMPORTANTE!

- [x] raio de convergência
- [x] série convergente / divergente
- [ ] divisão de séries
- [x] convergência num intervalo específico
- [x] pode escolher se resolve a questão na variável complexa z ou na variável simples x
- [ ] função exponencial
- [ ] precisa enunciar, mais pode enunciar na forma mais simples (sem lim inf ou lim sup)
- [ ] teste -M de Weierstrass

IMPORTANTE 2!

- [x] série converge (uniforme, absoluta) ou diverge
- [x] converge em um intervalo específico
- [ ] calcule a raiz de convergência
- [ ] divida essas séries
- [x] variável complexa z ou variável complexa x (escolher uma das duas)
- [ ] teste M de Weirstrass: séries de potências
- [x] sem limite (inf e sup): não cai lista 5
- [ ] enunciar teoremas

ANOTAÇÕES DAS AULAS DO POSSANI

AULA 1 - SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

- família de números que está indexada pelos números naturais ($a_0, a_1 \ldots$)
- lei de formação: fórmulas
- lei de recorrência: Fibonacci

CONVERGENTE

Uma sequência é **convergente** se existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \to \infty} a_n = L$
(o limite da sequência quando os índices vão para o infinito é aquele valor)

- $L \in \mathbb{R}$ (finito)
- se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não for convergente ela é dita divergente.

DIVERGENTE

é divergente se:

- não se aproxima de nenhum número real definido finito
- vai para $\pm \infty$
- oscila

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \iff \forall \varepsilon > 0, \ \exists n_1 \in \mathbb{N}$$
$$\text{tal que } n \geq n_0 \to |a_n - L| < \varepsilon$$

TEOREMAS

Propriedades operatórias básicas

1) $\lim_{n \to \infty} a_n = L$, $\lim_{n \to \infty} b_n = M \Rightarrow \lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = L + M$

2) $\lim_{n \to \infty} a_n = L$, $\lim_{n \to \infty} b_n = M$, $M \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{L}{M}$

3) $\lim_{n \to \infty} a_n = L$, $\lim_{n \to \infty} b_n = M$, $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = L \cdot M$

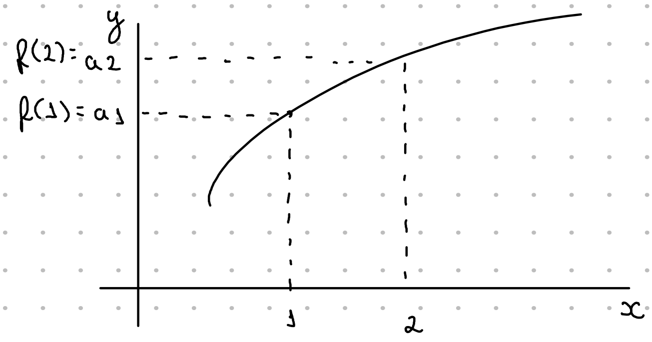
etc...

TEOREMA seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência e

$f: [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ e $a_n = f(n)$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = L$

o limite da função é o mesmo valor que o limite da sequência



EXEMPLO 1

$a_n = \frac{\ln n}{n}$, $n \geq 1$

seja $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$a_n = f(n)$

$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ indeterminação} \right) \overset{\text{L'Hopital}}{=} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

logo $a_n = \frac{\ln n}{n}$ converge a zero!

(ás vezes a sequência tem limite, mas a função não)

EXEMPLO 2

não existe $\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x$

mas existe para $a_n = \operatorname{sen}(n\pi) \Rightarrow$ converge a zero

$b_n = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ não é convergente

$c_n = \operatorname{sen}(n)$ é divergente

quando a função tem limite a sequência tem limite, mas quando a função não tem limite o teorema não afirma nada - a sequência pode ou não ter limite.

EXEMPLOS

1) $a_n = \sqrt[n]{3}$

$a_n = e^{\ln a_n} = e^{\ln \sqrt[n]{3}} = e^{\ln 3^{\frac{1}{n}}} = e^{\frac{1}{n}\ln 3} \rightarrow e^0 = 1$

2) $a_n = \sqrt[n]{n} = e^{\ln \sqrt[n]{n}} = e^{\ln n^{\frac{1}{n}}} \rightarrow e^0 = 1$

—n

CONVERGÊNCIA

sequência crescente: o valor numérico de um termo para o outro aumenta

sequência limitada: tem uma barreira de crescimento, por mais que avance não passa de um valor

Se uma sequência tem essas duas características, então, ela converge:

DEFINIÇÃO. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente se e só se

$a_{n+1} \geq a_n \;, \; \forall n \geq 0$

DEFINIÇÃO. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada se e só se

$\exists\, M \in \mathbb{R} \mid a_n \leq M \;, \; n \geq 0$

TEOREMA. toda sequência crescente e limitada superiormente é convergente.

—4

$a_1 = \sqrt{2}\,, \quad a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}\,, \quad a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\,,$ etc...

- passo 1: é crescente
- passo 2: é limitada superiormente

conclusão: a_n é convergente

$a_{n+1} = \sqrt{2 \cdot a_n}$

$n \rightarrow \infty$ se eu não soubesse que é convergente eu não poderia escrever:

$L = \sqrt{2 \cdot L}$

L não é igual a série, pois a seq é crescente

$L^2 = 2L$ — $\cancel{L = 0}$ ou

— $L = 2$

portanto, converge para 2

AULA 2 - SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS II

propriedades operatórias iniciais

1) $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5$ = limite do produto é o produto do limite = $1.1.1.1.1 = 1$

2) $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ = não dá para aplicar lim do produto, pois o produto não é fixo = e

$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to e$

3) $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$

4) $a_n = n . \alpha^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$

- $\alpha > 1$, $a_n > n$ e $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$

- $\alpha = 1 \Rightarrow a_n = n$ $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$

- $0 < \alpha < 1$

$-n$

vamos considerar $f(x) = x . \alpha^x = x\left(\frac{1}{b}\right)^x$

$\left(\alpha = \frac{1}{b} \Leftrightarrow b = \frac{1}{\alpha}\right)$

$f(x) = \frac{x}{b^x}$ com $b > 1$

$\lim f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{b^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{b^x \ln b} = 0$

$a_n = f(n) \to 0$, com $n \to \infty$

- $\alpha = 0 \to a_n = 0 \to 0$

- $-1 < \alpha < 0$

como $n|\alpha|^n \to 0 \Rightarrow n\alpha^n \to 0$

- $\alpha = -1 \Rightarrow a_n = (-1)^n n$ diverge

- $\alpha < -1$ como $n|\alpha|^n \to +\infty$, $n\alpha^n \to +\infty$

$a_n \to 0 \Rightarrow |a_n| \to 0$

$|a_n| \to 0 \Rightarrow a_n \to 0$

$a_n \to +\infty \Rightarrow |a_n| \to +\infty$

$|a_n| \to +\infty \Rightarrow a_n \to +\infty$ ou

$a_n \to -\infty$ ou

a_n oscila

resumindo

$-1 < \alpha < 1 \Rightarrow a_n = n\alpha^n$ converge a 0

$\alpha < -1$ ou $\alpha \geq 1 \Rightarrow a_n$ diverge

5) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ $\quad \lim\limits_{n \to \infty} a_n \to 0$

SÉRIES NUMÉRICAS

soma finita convergente

segunda sequência a partir da primeira, sequência das somas parciais

DEFINIÇÃO. seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência numérica

e $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

Dizemos que a série

$\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ converge a L $(L \in \mathbb{R})$

se $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = L$

notação: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = L$

caso contrário dizemos que a série é divergente

EXEMPLO:

1) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots\right)$

$a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}, \quad n \geq 1$

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

$S_3 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{4}$

$S_4 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} = 1,825$

$S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dots + \dfrac{1}{2^{n-1}} + \dots = 2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}}$ é convergente

AULA 2 - SÉRIES NUMÉRICAS

TEOREMA. $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge $\Rightarrow$ $a_i \to 0$

não basta a sequencia ir para 0 para convergir

EXEMPLO: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+5}$ é divergente

pois $a_n = \frac{2n+1}{3n+5} \to \frac{2}{3} \neq 0$

porém a recíproca do Teorema não vale

há sequência que tende para zero, mas a soma não

EXEMPLO: série harmônica

$a_n = \frac{1}{n} \quad \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right) \to 0$

AULA 3 - CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

TEOREMA: CRITÉRIO DA COMPARAÇÃO

Sejam $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequências numéricas com $0 \leq a_n \leq b_n$, $n \geq 1$

1) se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for divergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge

2) se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

EXEMPLO

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1} \quad \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \dots\right)$

$2^n + 1 > 2^n, \quad \forall n \geq 1$

$\frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$

como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge (pg. de razão $\frac{1}{2}$) segue que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ converge

2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

$\ln n < n \ , \quad n \geq 2$

$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \ , \quad n \geq 2$

logo $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ diverge

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

$\ln n \geq 1 \ , \quad n \geq 3$

$\frac{\ln n}{n} \geq \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{divergente}} \ , \quad n \geq 3$

logo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ diverge

TEOREMA: CRITÉRIO DA COMPARAÇÃO NO LIMITE

Sejam (a_n), (b_n) sequências numéricas

$0 < a_n$ e $0 < b_n$ (positivas)

suponha $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$

1) $0 < L < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\overset{\text{se e sse}}{\Longleftrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge

2) $L = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge

3) $L = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

EXEMPLO:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n - 1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = 1$$

como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge segue que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ converge

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge então $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$ diverge

RECORDAÇÃO

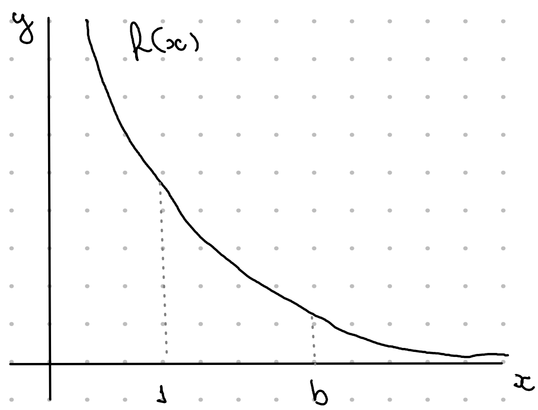
$f: [1; +\infty[\to \mathbb{R}$, função contínua

Dizemos que a "integral imprópria"

$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente se e só se

$$\lim_{b \to +\infty} \int_1^b f(x)\,dx = L \quad (L \in \mathbb{R}, \text{ finito})$$

escrevemos $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = L$



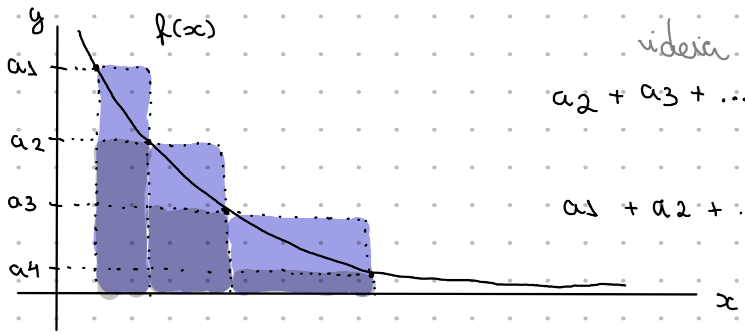
integral imprópria: integrais definidas que cobrem uma área ilimitada

TEOREMA: CRITÉRIO DA INTEGRAL

$f: [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, contínua, decrescente e $f(x) > 0$, $\forall x \in [1, +\infty[$

seja $a_n = f(n)$

então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge



ideia da demonstração

$$a_2 + a_3 + \dots + a_n \leq \int_1^n f(x)\,dx$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq \int_1^n f(x)\,dx$$

1) série harmônica generalizada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$\alpha = 1$ (série harmônica) série diverge

$\alpha = 0$ $\quad a_n = 1$ $\quad$ série diverge

$\alpha < 0$ $\quad a_n \to +\infty$ $\quad$ série diverge

$\alpha > 0 \; , \; \alpha \neq 1$

$f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha} \; , \; x \geq 1 \quad (x \in [1, +\infty[)$

$f(x) > 0$, contínua, decrescente

$f(x) = x^{-\alpha} \Rightarrow f'(x) = (-\alpha) \cdot x^{-\alpha - 1} < 0$

portanto é decrescente

$a_n = f(n) = \dfrac{1}{n^\alpha}$

critério da integral:

$$\int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_1^b x^{-\alpha} dx = \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_1^b = \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

$$\lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} +\infty \; , & \text{se } 1 - \alpha > 0 \\ -\dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se } 1 - \alpha < 0 \end{cases}$$

resumindo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1 \\ \text{diverge se } \alpha < 1 \end{cases}$$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}} + 7n - 5}$

↳ termo dominante

pelo critério da comparação no limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}}{\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}+7n-5}} = \lim \frac{n^{\frac{5}{3}} + 7n - 5}{n^{\frac{5}{3}}} = 1$$

e como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ converge (harmônica com $\alpha > 1$)

segue que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}} + 7n - 5}$ converge

AULA 4 - CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

EXERCÍCIOS

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1 - \cos\frac{1}{n}$ usando o critério da comparação no limite

$1 - \cos\frac{1}{n}$ tende a zero? se não tender a zero, é divergente.
se tender, usamos um dos critérios

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \cos\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2}$$ é um número real, portanto as duas séries tem o mesmo comportamento

como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (harmônica generalizada)

segue que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1 - \cos\frac{1}{n}$ converge

2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ usando o critério da integral

é preciso ter uma função auxiliar contínua que seja possível calcular a primitiva (critério da integral)

$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, $x \geq 2$ essa é a função auxiliar

- f é contínua
- f é positiva , $f(x) > 0$
- f é decrescente

a função auxiliar tem que ser

pela derivada podemos ver se f é decrescente

precisamos saber que a partir de algum valor de x a derivada é negativa

$f'(x)$ = regra do quociente $= \frac{-\left(\ln x + x \frac{1}{x}\right)}{(x \ln x)^2} = -\frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2} < 0$, $x > 2$

logo f é decrescente e podemos usar o critério da integral

agora vamos calcular a integral definida de 1 a b , porém, primeiro calculamos a primitiva

$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln u = \ln(\ln x)$

$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x} dx$

agora calculamos

$$\lim_{b \to \infty} \int_2^b \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{b \to +\infty} \ln(\ln x) \Big|_2^b = \lim_{b \to \infty} \ln(\ln b) - \ln(\ln 2) = \infty$$

isso significa que

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ diverge e portanto

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ também diverge

TEOREMA: CRITÉRIO DA RAIZ

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\quad a_n > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

1) $L > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

$L = \infty$

2) $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

$L = 0$

3) $L = 1$ nada se conclui

EXEMPLO

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^n}$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{n^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}}{n} = 0$$

segue que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n}$ converge

4) para que valores de x que a série $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot |x-3|^n$ converge?

para cada valor de x temos uma série diferente

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{2^n \cdot |x-3|^n} = 2^n \cdot |x-3|^n$$

convergência $\quad 2^n \cdot |x-3|^n < 1$

$$|x-3| < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < x - 3 < \frac{1}{2}$$

divergência $\quad \frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{5}{2} \\ \\ x = \frac{7}{2} \end{array}\right\} a_n = 1$$

resumindo

$\sum^{\infty} 2^n |x-3|^n$ converge $\iff \frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}$

diverge se $x \leq \frac{5}{2}$ ou $x \geq \frac{7}{2}$

TEOREMA: CRITÉRIO DA RAZÃO

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\quad a_n > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

1) $L > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

$L = \infty$

2) $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

$L = 0$

3) $L = 1$ nada se conclui

EXEMPLO

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0$$

logo a série converge

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)\cdot n^n}{(n+1)(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$$

portanto, a série converge

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n \cdot n!} = \frac{3(n+1) \cdot n^n}{(n+1)(n+1)^n}$

$\lim_{n \to \infty} 3 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{3}{n} > 1$

portanto, a série diverge

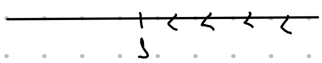
4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n} = \frac{2}{e} < 1$

portanto, a série converge

e é o divisor de águas

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE

Nos critérios da razão e da raiz se o limite 1 for atingido por valores superiores então a série diverge

$\sqrt[n]{a_n} \to 1^+$  está vindo por valores superiores

$\sqrt[n]{a_n} \searrow 1$

$\sqrt[n]{a_n} \to 1$ e $\sqrt[n]{a_n} > 1$

assim, a série diverge.

analogamente

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \to$ a série diverge

exemplo no vídeo 16 da playlist

TEOREMA: CRITÉRIO DE LEIBNIZ

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $a_n > 0$ ponto de partida positivo (série alternada)

$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ e $a_{n+1} < a_n$

isto é, a_n é decrescente

então $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

como $\frac{1}{n} \to 0$ e é decrescente em n, segue pelo critério de Leibniz que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ converge

nota:

$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$ aproximação

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$

como $\frac{1}{n \ln n} \to 0$ e é decrescente, segue pelo critério de Leibniz que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ converge

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{3n+3}$

diverge, pois $a_n = (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{3n+3} \to \pm \frac{2}{3}$

4) $\sum (-1)^{2n+1} \frac{2n+1}{n^2+2}$ → somente os ímpares, não podemos usar Leibniz

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2n+1}{n^2+2}} = \lim \frac{n^2+2}{2n^2+n} = \frac{1}{2}$$

harmônica diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+2}$ diverge

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} a_i \to \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{m} (-1)^{2n+1} \frac{2n+1}{n^2+2} \to -\infty$$

portanto diverge

AULA 5 - CONVERGÊNCIA CONDICIONAL OU ABSOLUTA

não supõe nada sobre a distribuição da série

TEOREMA.

seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ série numérica

se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

EXEMPLO

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}$ → troca de sinais irregular

$$|a_n| = \left| \frac{\operatorname{sen} n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$ converge (serie harmônica generalizada)

assim $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}$ converge

DEFINIÇÃO.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será chamada de <u>absolutamente convergente</u>.

DEFINIÇÃO.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ chama-se <u>condicionalmente convergente</u>

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$
- convergente
  - $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge $\Rightarrow$ absolutamente convergente
  - $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge $\Rightarrow$ condicionalmente convergente
- divergente

EXEMPLO

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } n}{n^2}$ absolutamente convergente

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmônica diverge

pelo critério de Leibniz: $b_n = \frac{1}{n}$ $\begin{cases} b_n \to 0 \\ b_n \text{ decresce} \end{cases}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ converge

portanto, a série é condicionalmente convergente

3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{4n+3}$

$b_n = \frac{2n+1}{4n+3} \to \frac{1}{2}$

$a_n = (-1)^n \frac{2n+1}{4n+3}$ $\begin{cases} \xrightarrow{n \text{ par}} \frac{1}{2} \\ \xrightarrow{n \text{ ímpar}} -\frac{1}{2} \end{cases}$

a_n não tende a 0, portanto a série diverge

4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^3}$

pelo critério de Leibniz

$b_n = \frac{1}{(\ln n)^3}$

$b_n \to 0$, pois $\ln n \to \infty$

b_n é decrescente, pois $\ln$ é crescente

logo $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^3}$ converge em módulo:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^3}$$

para n suficientemente grande $(\ln x)^3 < n$ e $\frac{1}{(\ln n)^3} > \frac{1}{n}$ e como

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge então $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^3}$ diverge

conclusão: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-(1)^n}{(\ln n)^3}$ converge condicionalmente

INTRODUÇÃO A SÉRIES DE POTÊNCIAS

Nos exemplos a seguir, determine para que valores de x, a série converge.

1) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$

aqui o x^n é o z^n da lista

$n!$ não converge

$x = 0 \rightarrow a_n = 0, \ \forall n \geq 1$

$x \neq 0 \rightarrow a_n = n! \quad x^n \not\rightarrow 0$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (x-3)^n$

$|a_n| = 2^n |x-3|^n$

pelo critério da raiz:

$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt{2^n |x-3|^n}$

$= 2|x-3| < 1$ (não sobra n)

$= |x-3| < \frac{1}{2}$

$= \frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}$

nesse intervalo tem convergência absoluta

$x \leq \frac{5}{2}$ ou $x \geq \frac{7}{2} \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0$ (não converge)

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$

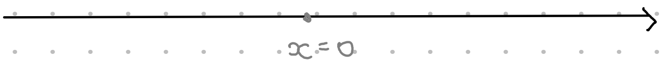
convergência absoluta

critério da razão

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \qquad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x-2|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x-2|^n} = \frac{|x-2|}{n+1} \to 0$

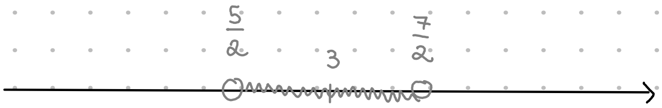
a série é absolutamente convergente

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$ converge para $\forall x \in \mathbb{R}$

1) 

no ponto — raio de convergência = 0

só converge $x = 0$

2) 

no intervalo — raio de convergência = $\frac{1}{2}$

convergência absoluta

3) 
em toda reta — raio de convergência = ∞

converge absolutamente em $\mathbb{R}$

SÉRIES DE POTÊNCIA

Uma série de potência é uma série do tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

(dizemos que foi desenvolvido em torno de x_0)

INTERVALO DE CONVERGÊNCIA

É o conjunto de valores de x para os quais a série converge.

valores em torno de x_0 ; intervalos simétricos em torno de x_0

TEOREMA

Dada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)$ o intervalo de convergência é necessariamente do tipo:

1) $I = \{x_0\}$

2) $I =]x_0 - r, x_0 + r[$, $[x_0 - r, x_0 + r[$, $]x_0 - r, x_0 + r]$ ou $[x_0 - r, x_0 + r]$

3) $I = \mathbb{R}$

EXEMPLO

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^3 + 1}$

$x_0 = 0$, $c_n = \frac{1}{n^3 + 1}$

em módulo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n^3 + 1}$$

critério da razão:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^3 + 1} \cdot \frac{n^3 + 1}{|x|^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{|x| \; n^3 + 1}{(n+1)^3 + 1} = |x|$$

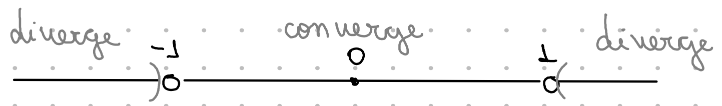
se $|x| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n^3 + 1} \right|$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^3 + 1}$ converge

$x = 1$ a série fica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 1}$ converge, pois

$\frac{1}{n^3 + 1} < \frac{1}{n^3}$ (harmônica generalizada $p = 3$)

$x = -1$ a série fica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 + 1}$ converge por Leibniz

$x > 1$ é uma série de termos positivos e diverge pelo critério da razão



Resumo: converge absolutamente em $|x| \leq 1$ e diverge para $|x| > 1$

fim das aulas do Possani.

CONVERGÊNCIA UNIFORME

Quando dizemos que a sequência de funções f_n converge a f em B, isto significa que, para todo $x \in B$ e para todo $\epsilon > 0$, existe n_0 (que pode depender de x e de ϵ) tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Pois bem, quando acontecer de o n_0 só depende de ϵ, diremos que a convergência é uniforme.

CRITÉRIO M DE WEIERTRASS

Seja $\sum_{K=0}^{+\infty} f_K$ uma série de funções e suponhamos que exista uma série numérica $\sum_{K=0}^{+\infty} M_K$ tal que, para todo $x \in B$ e para todo natural K

$$|f_K(x)| \leq M_K$$

Nestas condições, se a série $\sum_{K=0}^{+\infty} M_K$ for convergente, então a série $\sum_{K=0}^{+\infty} f_K$ convergirá uniformemente, em B, à função $s(x) = \sum_{K=0}^{+\infty} f_K(x)$.

pelo teorema da convergência uniforme

f_n converge uniformemente para f sse:

existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $x_0 \in X$ tal que existe

$n > n_0$ com $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, e n_0 só depende de ε