(Todas as funções são supostas de classe C^1 ou diferenciáveis, quando necessário.)

1. Calcule $\frac{dz}{dt}$ pelo dois processos descritos no Exemplo 2.

   a) $z = \operatorname{sen} xy$, $x = 3t$ e $y = t^2$.
   b) $z = x^2 + 3y^2$, $x = \operatorname{sen} t$ e $y = \cos t$.
   c) $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$, $x = \operatorname{sen} 3t$ e $y = \cos 3t$.

2. Seja $g(t) = f(3t, 2t^2 - 1)$.

   a) Expresse $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f.

   b) Calcule $g'(0)$ admitindo $\frac{\partial f}{\partial x}(0, -1) = \frac{1}{3}$.

3. Expresse $\frac{dz}{dt}$ em termos das derivadas parciais de f, sendo $z = f(x, y)$ e

   a) $x = t^2$ e $y = 3t$.
   b) $x = \operatorname{sen} 3t$ e $y = \cos 2t$.

4. Suponha que, para todo t, $f(t^2, 2t) = t^3 - 3t$. Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$.

5. Suponha que, para todo x, $f(3x, x^3) = \operatorname{arctg} x$.

   a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(3, 1)$ admitindo $\frac{\partial f}{\partial y}(3, 1) = 2$.

   b) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(3, 1, f(3, 1))$.

6. Admita que, para todo (x, y),

$$4y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2.$$

   Calcule $g'(t)$, sendo $g(t) = f(2 \cos t, \operatorname{sen} t)$.

7. Admita que, para todo (x, y),

$$4y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

   Prove que f é constante sobre a elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

   (*Sugestão*: Observe que a função g do exercício anterior fornece os valores de f sobre a elipse.)

8. A imagem da curva $\gamma(t) = (2t, t^2, z(t))$ está contida no gráfico de $z = f(x, y)$. Sabe-se que $f(2, 1) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = -1$. Determine a equação da reta tangente a γ no ponto $\gamma(1)$.

9. Admita que, para todo (x, y),

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

   Mostre que $g(t) = f\left(t, \frac{2}{t}\right)$, $t > 0$, é constante.

10. Seja $z = f(u + 2v, u^2 - v)$. Expresse $\frac{\partial z}{\partial u}$ e $\frac{\partial z}{\partial v}$ em termos das derivadas parciais de f.

11. Seja $z = f(u - v, v - u)$. Verifique que

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

12. Considere a função $F(x, y) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$. Mostre que $x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} = 0$.

13. Prove que a função $u = f(x + at, y + bt)$, a e b constantes, é solução da equação as derivadas parciais

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y}.$$

14. Seja $z = t^2 f(x, y)$, onde $x = t^2$ e $y = t^3$. Expresse $\dfrac{dz}{dt}$ em termos das derivadas parciais de f.

15. Seja g dada por $g(t) = f(x, y)$ sen $3t$, onde $x = 2t$ e $y = 3t$. Verifique que

$$g'(t) = 3f(x, y) \cos 3t + \operatorname{sen} 3t \left[2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 3 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right],$$

onde $x = 2t$ e $y = 3t$.

16. Seja $z = u f(u - v, u + v)$. Verifique que

$$u \frac{\partial z}{\partial u} + u \frac{\partial z}{\partial v} = z + 2u^2 \frac{\partial f}{\partial y}.$$

onde $x = u - v$ e $y = u + v$.

17. Seja $g(x, y) = (x^2 + y^2) f(u, v)$, onde $u = 2x - y$ e $v = x + 2y$. Mostre que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x f(u, v) + (x^2 + y^2) \left[2 \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right].$$

18. Seja $g(x)$ uma função diferenciável tal que $f(x, g(x)) = 0$, para todo $x \in D_g$. Mostre que

$$g'(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}$$

para todo $x \in D_g$, com $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0$.

19. $f(t)$ e $g(x, y)$ são funções diferenciáveis tais que $g(t, f(t)) = 0$, para todo t. Suponha $f(0) = 1$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0, 1) = 2$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0, 1) = 4$. Determine a equação da reta tangente a $\gamma(t) = (t, f(t))$, no ponto $\gamma(0)$.

20. $f(x, y, z)$ e $g(x, y)$ são funções diferenciáveis tais que, para todo (x, y) no domínio de g, $f(x, y, g(x, y)) = 0$. Suponha $g(1, 1) = 3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 3) = 2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 3) = 5$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 3) = 10$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de g no ponto $(1, 1, 3)$.

21. Seja $g(t) = f(3t^2, t^3, e^{2t})$; suponha $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1) = 4$.

a) Expresse $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f.
b) Calcule $g'(0)$.

22. Seja $g(x, y) = x f(x^2 + y, 2y, 2x - y)$. Expresse $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ em termos das derivadas parciais de f.

23. Suponha que, para todo (x, y), $f(x, y, x^2 + y^2) = 0$. Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 2) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 2)$.

24. Seja $F(x, y, z) = f\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{z}, \dfrac{z}{x}\right)$. Mostre que

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

25. Seja $F(u, v)$ diferenciável em $\mathbb{R}^2$, com $\dfrac{\partial F}{\partial v}(u, v) \neq 0$, para todo (u, v). Suponha que, para todo (x, y), $F(xy, z) = 0$, onde $z = z(x, y)$. Mostre que $x \dfrac{\partial z}{\partial x} - y \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

26. Seja $f(x, y)$ diferenciável e homogênea de grau λ no aberto A. Prove:

a) $a\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(at, bt) + b\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(at, bt) = \lambda t^{\lambda - 1} f(a, b)$ para todo $t > 0$ e para todo $(a, b) \in A$, com $(at, bt) \in A$.

b) (Relação de Euler.) Conclua de *a*) que

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda f.$$

(*Sugestão* para *a*): Derive em relação a t os dois membros de $f(at, bt) = t^{\lambda} f(a, b)$.)

27. Seja $f(x, y)$ definida e diferenciável na bola aberta A. Suponha que f verifica em A a relação de Euler

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda f(x, y).$$

Prove que f é homogênea de grau λ.

$\left(\textit{Sugestão}: \text{Mostre que } g(t) = \dfrac{f(at, bt)}{t^{\lambda}} \text{ é constante.}\right)$

28. Seja $\phi(u)$ uma função diferenciável qualquer. A função $f(x, y) = x^2\,\phi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ verifica a relação de Euler $x\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2f$? Por quê?

29. $f(x, y) = \dfrac{e^{\frac{x}{y}}\,\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} + \operatorname{sen}\left(\cos\dfrac{x}{y}\right)}{\sqrt[3]{x^3 + y^3}}$ verifica a equação $x\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y} = -f$? Por quê?

30. Determine uma família de funções que verifique a equação $x\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

31. Suponha $f(x, y)$ diferenciável no aberto A e homogênea de grau λ. Prove que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é homogênea de grau $\lambda - 1$, isto é, que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^{\lambda - 1}\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ para todo $t > 0$, e para todo (x, y) em A com $(tx, ty) \in A$.

(*Sugestão*: Derive em relação a x os dois membros de $f(tx, ty) = t^{\lambda} f(x, y)$.)

32. Seja $f(x, y)$ definida em $\mathbb{R}^2$, diferenciável em $(0, 0)$ e tal que $f(tx, ty) = t\,f(x, y)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Prove que f é linear, isto é, que existem reais a e b tais que $f(x, y) = ax + by$.

33. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

a) Verifique que $f(tx, ty) = t\,f(x, y)$ para todo t e todo (x, y).
b) Olhe para o Exercício 32 e responda: f é diferenciável em $(0, 0)$? Por quê?

34. Seja $f(x, y)$ diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e tal que para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$

$$\text{①} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

a) Verifique que a função $g(u, v)$ dada por $g(u, v) = f(x, y)$, onde $x = u + v$ e $y = u$, é tal que $\dfrac{\partial g}{\partial u} = 0$ em $\mathbb{R}^2$. Conclua que $g(u, v) = \varphi(v)$ para alguma função φ, definida e diferenciável em $\mathbb{R}$.

b) Determine uma família de soluções da equação ①.

c) $f(x, y) = \dfrac{e^{(x - y)^2} + \operatorname{arctg}(\operatorname{sen}(x - y)) + \ln\left[1 + (x - y)^2\right]}{(x - y)^2 + 5}$

verifica ①? (Não precisa fazer contas!)

1. A equação $y^3 + xy + x^3 = 4$ define implicitamente alguma função diferenciável $y = y(x)$? Em caso afirmativo, expresse $\frac{dy}{dx}$ em termos de x e y.

   (*Sugestão*: Observe que $(0, \sqrt[3]{4})$ satisfaz a equação e utilize o teorema das funções implícitas (caso $F(x, y) = 0$).)

2. Mostre que cada uma das equações seguintes define implicitamente pelo menos uma função diferenciável $y = y(x)$. Expresse $\frac{dy}{dx}$ em termos de x e y.

   a) $x^2y + \operatorname{sen} y = x$ *b*) $y^4 + x^2y^2 + x^4 = 3$

3. Mostre que cada uma das equações a seguir define implicitamente pelo menos uma função diferenciável $z = z(x, y)$. Expresse $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ em termos de x, y e z.

   a) $e^{x+y+z} + xyz = 1$ *b*) $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$

4. Suponha que $y = y(x)$ seja diferenciável e dada implicitamente pela equação $x = F(x^2 + y, y^2)$, onde $F(u, v)$ é suposta diferenciável. Expresse $\frac{dy}{dx}$ em termos de x, y e das derivadas parciais de F.

5. Suponha que $y = g(x)$ seja diferenciável no intervalo aberto I e dada implicitamente pela equação $f(x, y) = 0$, onde $f(x, y)$ é suposta de classe C^2. Suponha, ainda, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ em D_f

   a) Prove que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ é uma *condição necessária* para que x_0 seja ponto de máximo local de g.
   b) Prove que g'' é contínua em I.
   c) Prove que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$$

e

$$\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\,\dfrac{\partial f}{\partial x}\,\dfrac{\partial f}{\partial y}\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^3} > 0 \text{ em } (x_0, y_0)$$

   é *condição suficiente* para que x_0 seja ponto de máximo local de g.

6. A função diferenciável $z = z(x, y)$ é dada implicitamente pela equação $f\left(\frac{x}{y}, z\right) = 0$, onde $f(u, v)$ é suposta diferenciável e $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \neq 0$. Verifique que

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

7. A função diferenciável $z = z(x, y)$ é dada implicitamente pela equação $f\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{x^\lambda}\right) = 0$ ($\lambda \neq 0$ um real fixo), onde $f(u, v)$ é suposta diferenciável e $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \neq 0$. Verifique que

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} = \lambda z.$$

8. Suponha que as funções diferenciáveis $y = y(x)$ e $z = z(x)$ sejam dadas implicitamente pelo sistema

$$\text{①} \qquad \begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

a) Expresse $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ em termos de x, y e z.

b) Determine um par de funções $y = y(x)$ e $z = z(x)$ dadas implicitamente por ①.

9. Suponha que $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ sejam dadas implicitamente pelo sistema

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases} \qquad (x \neq 0).$$

Mostre que $\frac{\partial x}{\partial u}\left(1 + \frac{y}{x}\right) = 1$.

10. Sejam $u = x + y$ e $v = \frac{y}{x}$. Calcule o determinante jacobiano $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$.

11. Calcule:

a) $\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}$ sendo $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ e $G(x, y, z) = x + y + z$.

b) $\frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)}$ sendo $u = xyz$ e $v = x^3 + y^2$.

c) $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)}$ sendo $x = r + 3s + t^2$ e $y = r^2 - s^2 - 3t^2$.

d) $\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}$ sendo $x = r + 3s + t^2$ e $y = r^2 - s^2 - 3t^2$.

12. Seja $g(u, v) = f(x, y)$, onde $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ são dadas implicitamente pelo sistema

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = xy \end{cases}$$

Suponha $x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

a) Mostre que $\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{y}{x}\frac{\partial x}{\partial u}$.

b) Calcule $\frac{\partial g}{\partial u}$.

c) Mostre que f é constante sobre as hipérboles $xy = c$.

13. Sejam $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ dadas implicitamente pelo sistema

$$\text{①} \qquad \begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = xy \end{cases}$$

a) Expresse $\frac{\partial x}{\partial u}$ e $\frac{\partial y}{\partial u}$ em termos de x e y.

b) Determine um par de funções $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ definidas implicitamente por ①.

14. Sejam $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$ e $z = z(x, y)$ definidas implicitamente pela equação $F(x, y, z) = 0$. Suponha $x_0 = x(y_0, z_0)$, $y_0 = y(x_0, z_0)$, $z_0 = z(x_0, y_0)$ e que no ponto (x_0, y_0, z_0) as derivadas parciais de F sejam diferentes de zero. Mostre que

$$\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_{\substack{y = y_0 \\ z = z_0}} \cdot \left.\frac{\partial y}{\partial z}\right|_{\substack{x = x_0 \\ z = z_0}} \cdot \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} = -1.$$

15. Sejam $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ definidas implicitamente pelo sistema

$$\begin{cases} x^2 + uy^2 = v \\ x + y^2 = u. \end{cases}$$

a) Expresse $\frac{\partial x}{\partial u}$ em termos de x, y e u.

b) Determine um par de funções $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ definidas implicitamente pelo sistema.

RESPOSTAS

12.1

1. *a)* $9t^2 \cos 3t^3$ *b)* $-4 \operatorname{sen} t \cos t$ *c)* 0

2. *a)* $3\frac{\partial f}{\partial x}(3t, 2t^2 - 1) + 4t\frac{\partial f}{\partial y}(3t, 2t^2 - 1)$ *b)* 1

3. *a)* $2t\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 3t) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(t^2, 3t)$

b) $3 \cos 3t \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - 2 \operatorname{sen} 2t \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, onde $x = \operatorname{sen} 3t$ e $y = \cos 2t$

4. $2t\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 2t) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(t^2, 2t) = 3t^2 - 3$; faça agora $t = 1$.

5. *a)* $-\frac{11}{6}$ *b)* $z - \frac{\pi}{4} = -\frac{11}{6}(x - 3) + 2(y - 1)$

6. $g'(t) = -1$.

7. $x = 2 \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ é uma parametrização da elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Basta mostrar que $g'(t) = 0$ em $\mathbb{R}$, onde $g(t) = f(2 \cos t, \operatorname{sen} t)$. Observe que a função g fornece os valores de f sobre a elipse dada.

8. $\gamma'(t) = (2, 2t, z'(t))$ e $z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\frac{dy}{dt}$; $\gamma'(1) = (2, 2, 0)$ e $\gamma(1) = (2, 1, 3)$. A reta tangente é: $(x, y, z) = (2, 1, 3) + \lambda(2, 2, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

10. $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(u + 2v, u^2 - v) + 2u\frac{\partial f}{\partial y}(u + 2v, u^2 - v)$

$\frac{\partial z}{\partial v} = 2\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, onde $x = u + 2v$ e $y = u^2 - v$.

14. $\dfrac{dz}{dt} = 2t f(t^2, t^3) + t^3 \left[2\, \dfrac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3) + 3t\, \dfrac{\partial f}{\partial y}(t^2, t^3) \right].$

16. $z = u f(x, y)$, $x = u - v$ e $y = u + v$. Então:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f(x, y) + u \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = u \left[-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right].$$

Portanto,

$$u\, \frac{\partial z}{\partial u} + u\, \frac{\partial z}{\partial v} = z + 2u^2\, \frac{\partial f}{\partial y}.$$

18. $\dfrac{d}{dx}[f(x, g(x))] = \dfrac{d}{dx}[0]$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\, g'(x) = 0.$

19. $\gamma'(t) = (1, f'(t))$ e $f'(t) = -\dfrac{\dfrac{\partial g}{\partial x}(t, f(t))}{\dfrac{\partial g}{\partial y}(t, f(t))}$. A equação da reta tangente é:

$$(x, y) = (0, 1) + \lambda \left(1, -\frac{1}{2}\right),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

20. $\dfrac{\partial}{\partial x}[f(x, y, \overbrace{g(x, y)}^{z})] = \dfrac{\partial}{\partial x}[0]$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, g(x, y)) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0$, ou seja,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, g(x, y))}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y))};\ \text{então,}\ \frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = -\frac{1}{5};\ \frac{\partial g}{\partial y}(1, 1) = -\frac{1}{2}.$$

A equação do plano tangente no ponto $(1, 1, 3)$ é: $z - 3 = -\dfrac{1}{5}(x - 1) - \dfrac{1}{2}(y - 1)$.

Observe: $\dfrac{\partial}{\partial x}[f(x, y, \overbrace{g(x, y)}^{z})] = \dfrac{\partial f}{\partial x} \overset{1}{\dfrac{\partial x}{\partial x}} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \overset{0}{\dfrac{\partial}{\partial x}(y)} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\, \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\, \dfrac{\partial z}{\partial x}.$

21. *a*) $g'(t) = 6t\, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + 3t^2\, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + 2e^{2t}\, \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$ onde $x = 3t^2$, $y = t^3$ e $z = e^{2t}$

b) $g'(0) = 8$.

22. $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = f(x^2 + y, 2y, 2x - y) + x \left[2x\, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x^2 + y, 2y, 2x - y) + 2\, \dfrac{\partial f}{\partial z}(x^2 + y, 2y, 2x - y) \right].$

$\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = x \left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^2 + y, 2y, 2x - y) + 2\, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x^2 + y, 2y, 2x - y) - \dfrac{\partial f}{\partial z}(x^2 + y, 2y, 2x - y) \right].$

Observação. Poderia ter feito $g(x, y) = x f(u, v, w)$, $u = x^2 + y$, $v = 2y$ e $w = 2x - y$. Teríamos, então:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = f(u, v, w) + x \left[\frac{\partial f}{\partial u}\, \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\, \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\, \frac{\partial w}{\partial x} \right] = \ldots$$

30. $f(x, y) = \phi\left(\frac{x}{y}\right)$, onde $\phi(u)$ é uma função diferenciável qualquer.

32. Para cada (x, y) fixo, $\left.\frac{d}{dt}[f(tx, ty)]\right|_{t=0} = f(x, y)$,

ou seja,

$$x \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}_{a} + y \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}_{b} = f(x, y).$$

12.2

1. Seja $F(x, y) = y^3 + xy + x^3 - 4$; F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, $F(0, \sqrt[3]{4}) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0, \sqrt[3]{4}) \neq 0$.

Pelo teorema das funções implícitas, a equação define uma função $y = y(x)$ de classe C^1 num intervalo aberto I contendo 0. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y + 3x^2}{3y^2 + x}$.

2. ***a)*** Seja $F(x, y) = x^2y + \operatorname{sen} y - x$; observe que $F(0, 0) = 0$ e que

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) \neq 0; \frac{dy}{dx} = -\frac{2xy - 1}{x^2 + \cos y}$$

b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^2 + 4x^3}{4y^3 + 2x^2y}$

3. ***a)*** Seja $F(x, y, z) = e^{x+y+z} + xyz - 1$; note que

$F(0, 0, 0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, 0) \neq 0; \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{e^{x+y+z} + yz}{e^{x+y+z} + xy}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{e^{x+y+z} + xz}{e^{x+y+z} + xy}$

b) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2 - 1}{3z^2 - 1}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3y^2 - 1}{3z^2 - 1}$

4. $$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x\frac{\partial F}{\partial u}(x^2 + y, y^2)}{\frac{\partial F}{\partial u}(x^2 + y, y^2) + 2y\frac{\partial F}{\partial v}(x^2 + y, y^2)}$$

8. ***a)*** $\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}$ e $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ ***b)*** $y = x$ e $z = \sqrt{1 - x^2}$

10. $$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{y}{x}\right).$$

11. ***a)*** $2(x - y)$ ***b)*** $-2xy^2$ ***c)*** $-2[s + 3r]$ ***d)*** $2t[-9 + 2s]$

12. ***a)*** $\frac{\partial}{\partial u}(v) = \frac{\partial}{\partial u}(xy); 0 = y\frac{\partial x}{\partial u} + x\frac{\partial y}{\partial u}$.

b) $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial x}{\partial u} = 0$

13. ***a)*** $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{x}{2(x^2 - y^2)}$ e $\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{-y}{2(x^2 - y^2)}$

b) $x = \frac{\sqrt{u + 2v} - \sqrt{u - 2v}}{2}$ e $y = \frac{\sqrt{u + 2v} + \sqrt{u - 2v}}{2}$

15. ***a)*** $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{u + y^2}{u - 2x}$

b) $x = \frac{u - \sqrt{4v - 3u^2}}{2}$ e $y = \sqrt{\frac{u + \sqrt{4v - 3u^2}}{2}}$.