anotações de Cálculo π

P1
- função implícita
- função inversa
- multiplicadores de Lag.

Funções diferenciáveis

Os espaços $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ (números reais)

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \,/\, x, y \in \mathbb{R}\}$ (pares ordenados)

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y,z) \,/\, x,y,z \in \mathbb{R}\}$ (três coordenadas)

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \,/\, x_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1, \dots, n\}$

exemplos:

i) $(2, \frac{1}{2}, \pi) \in \mathbb{R}^3$

ii) $(0, -2, \sqrt[3]{2}) \in \mathbb{R}^3$

iii) $(0, 0, -1, \frac{1}{3}) \in \mathbb{R}^4$

Notação $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

se $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é linear, escrevemos

$$T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

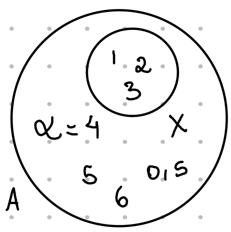
recordemos que $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong M_{m \times n}(\mathbb{R})$

isomorfismo linear

matriz

Supremo

Um supremo é um número α de um conjunto A no qual um conjunto X está contido. Esse número é o menor número possível no qual é maior que outro número $x \in X$ para $\forall x \in X$.



4 é o menor número maior que todos do conjunto X.

Desigualdade de Cauchy-Schwarz

vale a desigualdade

$$|x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|$$

quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Desigualdade triangular

dados $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^n$, temos

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

2ª desigualdade triangular

$$|x + y| \geq |x| - |y|$$

Função diferenciável

Uma função $F: \Omega \to \mathbb{R}^m$, com Ω um aberto em $\mathbb{R}^n$, é diferenciável no ponto p em Ω se existe uma aplicação linear $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(p+h) - F(p) - T(h)}{|h|} = 0$$

Regra da Cadeia (em várias variáveis)

Sejam uma função $G: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, diferenciável no ponto x, e uma função $F: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, diferenciável no ponto $y = G(x)$. Então, a função composta $F \circ G: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto x e

$$D(F \circ G)(x) = T \circ S, \text{ onde } T = DF(G(x)) \text{ e } S = DG(x).$$

Matriz Jacobiana

Temos funções vetoriais com várias variáveis, portanto a derivada dessa f vai ser uma matriz, que chamamos de Matriz Jacobiana.

Essa matriz nada mais é do que uma matriz onde:

- na mesma linha teremos as derivadas parciais da mesma função em relação a cada uma das variáveis.
- na mesma coluna teremos as derivadas parciais em relação a mesma variável de cada uma das diferentes variáveis que compõe nossa função vetorial.

Exemplo: $F(x, y, z) = (x^2 + e^y, x + y\,\text{sen}\,z)$

as funções são:

$$f_1(x, y, z) = x^2 + e^y \quad \text{e} \quad f_2(x, y, z) = x + y\,\text{sen}\,z$$

então a jacobiana vai ser uma matriz com todas as derivadas possíveis de f_1 e f_2 em função de x, y e z

$$JF = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$F'(x,y,z) = J_F = \begin{bmatrix} 2x & e^y & 0 \\ 1 & \operatorname{sen} z & y\cos z \end{bmatrix}$$

se quisermos saber o valor dessa derivada num ponto específico, por exemplo $(1, 0, \frac{\pi}{2})$, é só substituir esse ponto na matriz jacobiana

$$F'(1,0,\tfrac{\pi}{2}) = JF(1,0,\tfrac{\pi}{2}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema do Valor Médio em $\mathbb{R}^n$

Seja $F: \Omega \to \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável, com Ω um aberto em $\mathbb{R}^n$. Sejam a e b dois pontos em Ω tais que o segmento linear $\overline{ab}$ está contido em Ω. Então, existe um ponto p em $\overline{ab}$ tal que

$$F(b) - F(a) = \vec{\nabla} F(p) \cdot (b-a)$$

$F \in C^1$ implica F diferenciável

- Se $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, então F é diferenciável

Sejam $F: \Omega \to \mathbb{R}^m$, com Ω um aberto em $\mathbb{R}^n$, e p em Ω.

Suponha que as derivadas parciais de primeira ordem de F existam em todo ponto de uma bola aberta $B(p, r)$, centrada em p e contida em Ω e com $r > 0$, e que tais derivadas sejam contínuas em p. Então F é diferenciável no ponto p.

Definição: um conjunto $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo se dados a e b distintos e em I, digamos $a < b$, e um número c tal que $a < c < b$, então c pertence a I.

Teorema de Darboux: Teorema do Valor Intermediário para Derivadas

Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável. Então, a imagem da função derivada $f': [a,b] \to \mathbb{R}$ é um intervalo. Isto é, o conjunto

$$f'([a,b]) = \{f'(x) : x \in [a,b]\} \text{ é um intervalo}$$

Tópicos principais

(1) teorema da função implícita

(2) teorema da função inversa

(3) multiplicadores de Lagrange

1. Teorema da função implícita

Seja F em $C^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$, com Ω um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, e (a,b) um ponto em Ω tal que $F(a,b) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ é inversível.

Então existem um aberto X, contido em $\mathbb{R}^n$ e contendo a e um conjunto aberto Y, contido em $\mathbb{R}^m$ e contendo b, satisfazendo o que segue:

- Para cada x em X, existe um único $y = f(x)$ em Y tal que $F(x, f(x)) = 0$.
- Temos $f(a) = b$. Ainda mais, $f: X \to Y$ é de classe C^1 e

$$Jf(x) = -\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right]^{-1}_{m \times m} \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))\right]_{m \times n}$$

para todo x em X.

Funções definidas implicitamente

Uma função $Y = f(x)$ está definida implicitamente na equação $F(X,Y) = 0$ se $F(X, f(x)) = 0$

- em (X,Y) o Y são as funções que são definidas implicitamente e o X são as variáveis dessas funções.
- equações que definem funções implicitamente são representadas na forma $F(X,Y) = 0$.

Passo a passo

1. Achar a equação $F(X,Y) = 0$ e verificar se $F(X_0, Y_0) = 0$ Condição 1 do TF Implícita
2. Identificar Y, que são as funções definidas implicitamente, e X que são as variáveis dessas funções.

3. Calcular a matriz

$$F_Y(X,Y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & & \frac{\partial f_2}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}_{m \times m}$$

para inverter uma matriz

$$\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

e verificar se ela é inversível, ou seja, se

$$\text{Det}\,[F_Y(X_0, Y_0)] \neq 0$$

condição 2 do TF Implícita

- se (1) e (3) acontecerem, então podemos garantir que as variáveis de Y podem ser definidas implicitamente em função de X próximo do ponto (X_0, Y_0).

4. calcular a matriz

$$F_X(X,Y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{vmatrix}_{m \times n}$$

5. A derivada das funções implícitas será:

$$f'(x) = Jf(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{vmatrix}_{m \times n} = -(F_Y(X,Y))^{-1} \times F_X(X,Y)$$

$$= -\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right]^{-1}_{m \times m} \cdot \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))\right]_{m \times n}$$

2. Teorema da função inversa

Seja $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$, com Ω aberto em $\mathbb{R}^n$, de classe C^1 e p em Ω tal que $JF(p)$ é inversível.

Existem um aberto X contendo p, um aberto Y contendo $F(p)$, e uma função $G: Y \to X$ de classe C^1 satisfazendo $F(G(y)) = y$ para todo y em Y, e $G(F(x)) = x$, para todo x em X.

Ainda mais,

$$JG(y) = JF(G(y))^{-1}, \text{ para todo } y \text{ em } Y$$

mais simplificado:

Se uma função vetorial F é diferenciável e se $F'(x_0)$ tem inversa, então ali pertinho de x_0 a função F também tem inversa e essa inversa também é diferenciável. Além disso, a derivada da inversa no ponto $y_0 = F(x_0)$ é o inverso da derivada de F no ponto x_0.

$$(F^{-1})'(y_0) = (F'(x_0))^{-1}$$

Conhecemos como **função inversa** aquela $f(x)^{-1}$ que faz o oposto do que a **função** f(x) faz, de forma geral, seja f(x) uma **função** f: A→ B, em que f(a) = b, então, a **função inversa** f^{-1}: B → A, tal que f(b) = a.

Uma função é chamada "função de **classe** C¹" quando as derivadas parciais de primeira ordem existem, e podemos garantir que todas as derivadas que vc obteve são também contínuas naquele ponto.

3. multiplicadores de Lagrange

Teorema: Sejam $F: \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$) diferenciável e $g = (g_1, \dots, g_m)$ em $C^1(\mathbb{R}^{n+m}; \mathbb{R})$.

Suponhamos que F tem um extremante local no ponto P em $S = g^{-1}(0, \dots, 0)$ e que $\{\nabla g_1, \dots, \nabla g_m\}$ é literalmente independente em todo ponto.

Então, existem m números reais $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tais que

$$\nabla F(P) = \lambda_1 \nabla g_1(P) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(P)$$

Para usar os multiplicadores de Lagrange, precisamos de duas coisas:

- uma função $f(x, y)$ para maximizar ou minimizar
- uma restrição do tipo $g(x, y) = 0$

Geometricamente, isso significa que vamos procurar o máximo (ou mínimo) de f somente em cima da curva de equação $g(x, y) = 0$, e não no domínio todo.

Para encontrar os pontos de máximo e mínimo sobre essa curva basta resolver o seguinte:

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

onde λ é uma incógnita (o multiplicador de Lagrange)

Exemplo: para achar os máximos e mínimos da função

$$f(x, y) = 1 - x - y$$

em cima da circunferência $x^2 + y^2 = 1$

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

vamos começar calculando os gradientes de f e g.

$$\nabla f(x, y) = (-1, -1) \qquad \nabla g(x, y) = (2x, 2y)$$

com o multiplicador de Lagrange, temos

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

$$(-1, -1) = \lambda (2x, 2y)$$

igualando termo a termo e adicionando a equação da curva de restrição, temos o sistema

$$\begin{cases} -1 = 2\lambda x \\ -1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

segue que $x = y$, assim

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

então, temos os pontos: (candidatos)

$$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \quad P_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}; \frac{-1}{\sqrt{2}}\right); \quad P_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \quad P_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

para saber quem é o ponto de máximo e mínimo e quem é ponto de mínimo, temos que substituir na expressão de f e ver seus valores.

$f(P_1) = 1 - \sqrt{2}$; $f(P_2) = 1 + \sqrt{2}$; $f(P_3) = 1$; $f(P_4) = 1$.

concluímos que P_2 é o ponto de máximo e P_1 é o ponto de mínimo.

para 1 restrição.

1. Calcular gradiente da função: ∇f
2. Pega a equação da curva (ou superfície) e joga tudo para o lado esquerdo e deixe zero no lado direito e chama de $g(x, y)$ (ou $g(x, y, z)$)
3. Calcular gradiente de g: ∇g
4. Utilizar multiplicador de Lagrange: $\boldsymbol{\nabla f = \lambda \nabla g}$
5. Adicionar a equação da curva (ou superfície) ao sistema encontrado acima
6. Resolver o sistema
7. Substituir pontos encontrados na função f e verificar quais são os pontos de máximo e mínimo

para 2 restrições

1. Calcular gradiente da função: ∇f
2. Pega a equação das superfícies e joga tudo para o lado esquerdo e deixe zero no lado direito e chame de $g(x, y, z)$ e $h(x, y, z)$
3. Calcular gradiente de g e h: ∇g e ∇h
4. Utilizar multiplicador de Lagrange: $\boldsymbol{\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h}$
5. Adicionar a equação das superfícies ao sistema encontrado acima
6. Resolver o sistema
7. Substituir pontos encontrados na função f e verificar quais são os pontos de máximo e mínimo