Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
IME

Relatório de Laboratório e Métodos Numéricos (MAC210)
EP3 - Integração Numérica

Integrantes:
Sabrina Araújo (Nº 12566182),
Samantha Miyahira (Nº 11797261)
Professor:
Ernesto G. Birgin

Junho
2022

Parte 1 - Computando Trabalho

Interpolação por Newton

Para a interpolação utilizando o método de Newton, nos baseamos no seguinte polinômio interpolador de Newton:

$$p_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + c_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}),$$

onde n é o número de pontos conhecidos e c_i é uma constante, com i = 0, 1, 2, ..., n.

No programa, inicialmente armazenamos os valores conhecidos de x (posição) e $F(x)\cos(\theta(x))$ (força) no arrays X e y, respectivamente. Como são 7 pontos conhecidos no total, então iremos construir um polinômio interpolador $p_{n-1}(x)$ o qual interpola os n pontos:

$$p_6(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + c_6(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_5),$$

com os seguintes valores conhecidos:

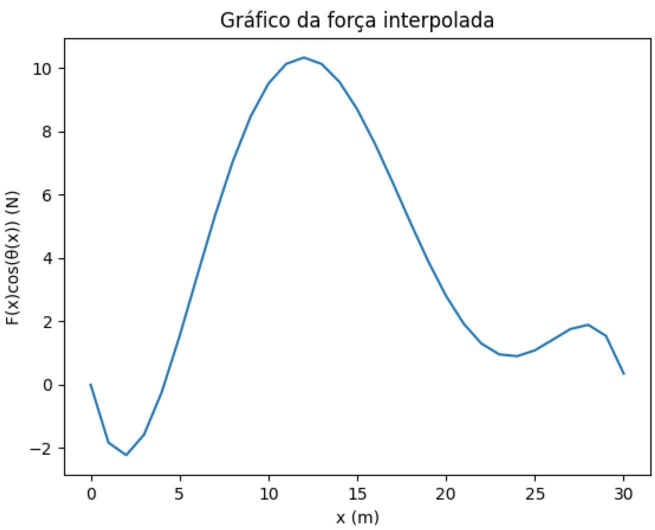
x	$F(x)\cos(\theta(x))$
0	0.0000
5	1.5297
10	9.5120
15	8.7025
20	2.8087
25	1.0881
30	0.3537

Agora, é necessário encontrar os valores das constantes no polinômio. Para isso, substituiremos o x no polinômio por $x_0 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 10$, $x_3 = 15$, $x_4 = 20$ e por fim $x_5 = 25$. Desse modo, para cada x a ser substituído terão termos que se anularão. Por exemplo:

$p_6(x_0) = c_0 = 0$
$p_6(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0) = 1.5297$ (c_0 é conhecido)
$p_6(x_2) = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = 9.5120$ (c_0 e c_1 são conhecidos)
etc...

Assim, com os coeficientes de $p(x)$ encontrados, podemos montar o polinômio de Newton.

Com este polinômio, interpolamos os 30+1 pontos, isto é, para x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 30 obtemos o seguinte gráfico:



Integração numérica utilizando a regra do trapézio composto

Dado que a regra do trapézio composto é dado por:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{r-1} f(a+ih) + f(b)\right]$$

onde $rh = b - a$ e r é um número inteiro positivo que representa o número de subintervalos de tamanho $\frac{b-a}{h}$ cada.

O valor aproximado da integração numérica utilizando a regra do trapézio composto é:

$$trabalho = \int_0^{30} F(x)\cos(\theta(x))\,dx \approx 119.089$$

Integração numérica utilizando a regra de Simpson composto

Dado que a regra de Simpson composto é dado por:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{r/2-1} f(t_{2k}) + 4\sum_{k=1}^{r/2} f(t_{2k-1}) + f(b)\right]$$

onde $rh = b - a$ e r é um número inteiro positivo que representa o número de subintervalos de tamanho $\frac{b-a}{h}$ cada.

O valor aproximado da integração numérica utilizando a regra de Simpson composto é:

$$trabalho = \int_0^{30} F(x)\cos(\theta(x))\,dx \approx 117.127$$

Parte 2 - Integração por Monte Carlo

Integrais unidimensionais

A integração por Monte Carlo utilizada consiste em inscrever a função que desejamos integrar em uma forma geométrica, nesse caso um retângulo, e depois estimar a proporção entre área abaixo da curva da função e a área total da forma.

No algoritmo, calculamos o valor máximo H que a função pode ter e a partir disso obtemos a área do retângulo em que a função está inscrita. Então, geramos n pontos x ($x[a, b]$) e y ($y[0, H]$) dentro desse retângulo com distribuição uniforme em [0,1]. Para (x,y) gerado, se $y \leq f(x)$, então o ponto está abaixo ou em $f(x)$ e somamos em um o número de pontos em/ou embaixo de $f(x)$ e o número de pontos no retângulo. Caso contrário, somente somamos o número de pontos no retângulo. Ao final da iteração, calculamos a proporção entre o número de pontos em/ou embaixo de $f(x)$ e o número de pontos no retângulo, e multiplicamos pela área do retângulo ($(b - a) \cdot H$), assim, temos o valor aproximado da integral.

$$\int_a^b dx \approx \frac{numerodepontosem/ouembaixodef(x)}{numerodepontosnoretangulo}(b-a)H$$

Temos as seguintes integrais e seus respectivos resultados analíticos:

1. $\int_0^1 sin(x)dx = \ 0.45969\ldots$

2. $\int_3^7 x^3 dx = 580$

3. $\int_0^\infty e^{-x} dx = 1$

Utilizando o método das integrais unidimensionais implementado, com n = 100, obtemos as seguintes aproximações:

1. $\int_0^1 sin(x)dx \approx 0.504883$

2. $\int_3^7 x^3 dx \approx 644.84$

3. $\int_0^\infty e^{-x} dx \approx 1$

Para n = 10000

1. $\int_0^1 sin(x)dx \approx 0.457003$

2. $\int_3^7 x^3 dx \approx 568.557$

3. $\int_0^\infty e^{-x} dx \approx 1$

Para n = 1000000

1. $\int_0^1 sin(x)dx \approx 0.459453$

2. $\int_3^7 x^3 dx \approx 573.526$

3. $\int_0^\infty e^{-x} dx \approx 1$

É possível observar que quando aumentamos o valor de n a aproximação fica mais próxima do valor analítico.

Integrais multidimensionais

Para o caso de aproximar o valor de , utilizamos o método das integrais multidimensionais. Similar à ideia das integrais unidimensionais, a ideia é gerar pontos (x,y), a partir de uma distribuição uniforme em [0,1], dentro de um quadrado no qual tem um círculo inscrito. Então, se $x^2 + y^2 \leq 1$ o algoritmo incrementa o número de pontos dentro do círculo e o número de pontos dentro do quadrado, caso contrário, incrementa somente o número de pontos no quadrado.

Temos que

$$\frac{areadocirculo}{areadoquadrado} = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4}$$

Assim, estimamos π por

$$\pi = 4 \cdot \frac{numerodepontosnocirculo}{numerodepontosnoquadrado}$$

O resultado analítico de π é

$$\pi = 3,14159...$$

Utilizando o método das integrais multidimensionais, com n = 100, obtemos a aproximação: $\pi = 3.04$

Para n = 10000: $\pi = 3.1268$

Para n = 1000000: $\pi = 3.14376$

Para n = 100000000: $\pi = 3.14173$

É possível observar que , assim como no caso das integrais unidimensionais, quando aumentamos o valor de n a aproximação fica mais próxima do valor analítico.