CAPÍTULO 1

Exercícios 1.1

1. Seja f: $[0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin \left\{0, \dfrac{1}{2}, 1\right\} \\ 1 & \text{se } x \in \left\{0, \dfrac{1}{2}, 1\right\} \end{cases}$$

Seja P uma partição qualquer de $[0, 1]$

$P: 0 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = 1$ e seja $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$ uma soma de Riemann de f relativa a esta partição.

Se nenhum dos $c_1, c_2, ..., c_n$ pertencer ao conjunto $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, então a soma de Riemann será zero.

Admitindo que algum ou alguns (um, dois ou três) c_i pertença ao conjunto $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, então $f(c_i) = 1$ e $f(c_i)\,\Delta x_i = \Delta x_i$ (para cada $c_i \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$). Portanto,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \right| < 3 \text{ máx } \Delta x_i.$$

Dado $\varepsilon > 0$, existirá $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ (que só depende de ε) tal que:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \right| < \varepsilon \text{ sempre que máx } \Delta x_i < \delta.$$

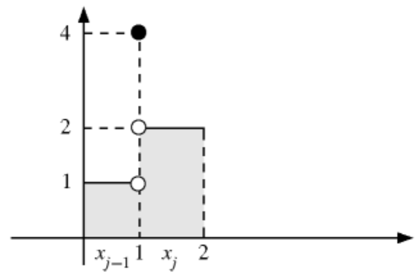
Em qualquer caso, temos, independentemente da escolha dos c_i e para toda partição P de $[0, 1]$, com máx $\Delta x_i < \delta$, que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i - 0 \right| < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{\text{máx } \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = 0 = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

3.



a) Seja $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 4 & \text{se} \quad x = 1 \\ 2 & \text{se} \quad 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$

Seja P uma partição qualquer de $[0, 2]$:

$P: 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{j-1} < x_j < \ldots < x_n = 2$

Suponhamos que $1 \in [x_{j-1}, x_j]$. Temos

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{j-1} \underbrace{f(c_i)}_{1}\,\Delta x_i + f(c_j)\,\Delta x_j + \sum_{i=j+1}^{n} \underbrace{f(c_i)}_{2}\,\Delta x_i, \text{ onde } f(c_j) \in \{1, 2, 4\}$$

$$= x_{j-1} + f(c_j)\,(x_j - x_{j-1}) + 2(2 - x_j) = 3 - (x_j - x_{j-1}) + f(c_j)\,(x_j - x_{j-1}) + (1 - x_j).$$

Segue que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i - 3\right| \leqslant |x_j - x_{j-1}| + 4\,|x_j - x_{j-1}| + |1 - x_j| \leqslant 6 \text{ máx } \Delta x_i.$$

Dado $\varepsilon > 0$ e tomando-se $\delta = \dfrac{\varepsilon}{6}$ tem-se

$$\text{máx } \Delta x_i < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i - 3\right| < \varepsilon.$$

Então, $\lim\limits_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = 3$ independentemente da escolha de c_i.

Logo, f é integrável e $\int_0^2 f(x)\,dx = 3.$

d) Seja $f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Seja $P: -1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = 1$ uma partição qualquer de $[-1, 1]$ e $\dfrac{1}{2}$ seja um ponto dessa partição. Escolhamos $c_i \neq 0$ da seguinte forma: c_i irracional se $c_i < 0$ e c_i racional se $c_i > 0$. Desse modo, $f(c_i) > 0$ para todo i. Segue que a soma de Riemann será maior que a área do retângulo de vértices $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right), \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $(1, 0)$ e $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$, ou seja, $\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i > \dfrac{1}{4}$. (Concorda?) Por outro lado, escolhendo c_i racional se $c_i < 0$ e c_i irracional se $c_i > 0$ teremos $f(c_i) < 0$, para todo i, e portanto, $\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i < 0.$

Logo, não existe L tal que $\lim\limits_{\text{máx } \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i = L$, independentemente da escolha dos c_i. Ou seja, a função não é integrável.

Exercícios 1.2

1.

a) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2} \quad -1 \leqslant x \leqslant 2.$

A função $f(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$. Logo, f é contínua em $[-1, 2]$.
Pelo teorema 1, se f é contínua em $[-1, 2]$, então f é integrável.

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad -2 \leqslant x < 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{se} \quad 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$

f é limitada em $[-2, 2]$, pois, para todo x em $[-2, 2]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 4$; f é descontínua apenas em $x = 1$. Pelo teorema 2, como f é limitada em $[-2, 2]$ e descontínua apenas em $x = 1$, então f é integrável em $[-2, 2]$.

e) $f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{se} \quad x = 0 \\ \text{sen} \quad \dfrac{1}{x}, \; 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$

A função é limitada e descontínua apenas em $x = 0$. Logo, pelo teorema 2, a função é integrável.

g) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad -1 \leqslant x < 0 \\ 5 & \text{se} \quad x = 0 \\ 2 & \text{se} \quad 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$

f é limitada em $[-1, 1]$; f só é descontínua em $x = 0$. Portanto, f é integrável.

CAPÍTULO 2

Exercícios 2.1

1.

a) $\int_0^2 f(x)\,dx$, onde $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

f é integrável em [0, 2], pois é limitada e descontínua apenas em $x = 1$.

Temos $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx$

Em [0, 1], $f(x)$ difere de 2 apenas em $x = 1$. Daí,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 2\,dx = [2x]_0^1 = 2$$

Em [1, 2], $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Logo,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^2 = \ln 2$$

Portanto, $\int_0^2 f(x)\,dx = 2 + \ln 2.$

c) $\int_{-1}^3 f(x)\,dx$, onde $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x^2} & \text{se} \quad x \neq 1 \\ 5 & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$

f é integrável em $[-1, 3]$, pois é limitada e descontínua apenas em $x = 1$.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 f(x)\,dx &= \int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx + \int_1^3 \frac{x}{1+x^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_{-1}^1 + \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_1^3 \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln 2 - \ln 2\right] + \frac{1}{2}\left[\ln 10 - \ln 2\right] \\ &= \frac{1}{2}\ln 5. \end{aligned}$$

d) $\int_{-2}^{2} g(u)\,du$, onde $g(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{u^2} & \text{se } |u| \geqslant 1 \\ u & \text{se } |u| < 1 \end{cases}$

g é integrável em $[-2, 2]$ pois g é contínua em $[-2, 2]$.

Temos $g(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{u^2} & \text{se } u \leqslant -1 \\ u & \text{se } -1 < u < 1 \\ \dfrac{1}{u^2} & \text{se } u \geqslant 1 \end{cases}$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} g(u)\,du &= \int_{-2}^{-1} \frac{du}{u^2} + \int_{-1}^{1} u\,du + \int_{1}^{2} \frac{du}{u^2} \\ &= \left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{u^2}{2}\right]_{-1}^{1} + \left[-\frac{1}{u}\right]_{1}^{2} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 1.\end{aligned}$$

2.

b) $\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$, onde $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{se } -1 \leqslant t \leqslant 1 \\ 2 & \text{se } t > 1 \end{cases}$

Para todo $x \geqslant -1$, f é integrável em $[-1, x]$, pois, neste intervalo, f é limitada e descontínua no máximo em um ponto. Temos:

$$\int_{-1}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{x} t^2\,dt & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} t^2\,dt + \int_{1}^{x} 2\,dt & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Como $\int_{-1}^{x} t^2\,dt = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{3}$; $\int_{-1}^{1} t^2\,dt = \dfrac{2}{3}$ e $\int_{1}^{x} 2\,dt = 2x - 2$

segue que:

$$\int_{-1}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{3} & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2x - \dfrac{4}{3} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

c) $\int_{0}^{x} f(t)\,dt$, onde $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{se } -1 \leqslant t \leqslant 1 \\ 2 & \text{se } t > 1 \end{cases}$

Para todo $x \geqslant -1$ f é integrável em $[x, 0]$, se $x \leqslant 0$, e em $[0, x]$, se $x > 0$, pois nestes intervalos f é limitada e descontínua no máximo em um ponto.

$$\int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} \int_0^x t^2\,dt & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ \int_0^1 t^2\,dt + \int_1^x 2\,dt & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Temos $\int_0^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3}$; $\int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}$; $\int_1^x 2\,dt = 2x - 2$.

Logo,

$$\int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} \frac{x^3}{3} & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2x - \frac{5}{3} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Exercícios 2.2

1.

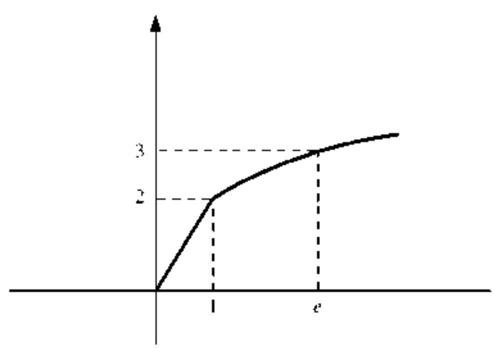
a) $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, onde $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leqslant t < 1 \\ \frac{1}{t} & \text{se } t \geqslant 1 \end{cases}$

O domínio de F é intervalo $[0, +\infty[$. Temos:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} \int_0^x 2\,dt & \text{se } 0 \leqslant x < 1 \\ \int_0^1 2\,dt + \int_1^x \frac{dt}{t} & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

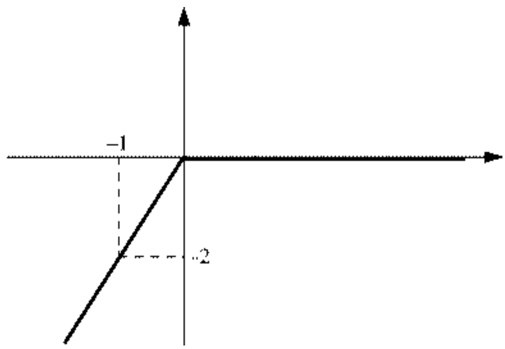
Então,

$$F(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leqslant x < 1 \\ 2 + \ln x & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$



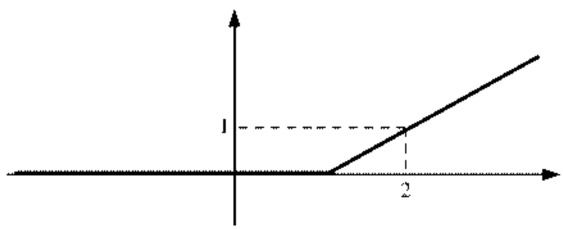
c) $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$, onde $f(t)=\begin{cases}2 & \text{se } t\leqslant 0\\ 0 & \text{se } t>0.\end{cases}$

$F(x)=\begin{cases}\int_0^x 2\,dt & \text{se } x\leqslant 0\\ 0 & \text{se } x>0\end{cases}$ ou $F(x)=\begin{cases}2x & \text{se } x\leqslant 0\\ 0 & \text{se } x>0\end{cases}$



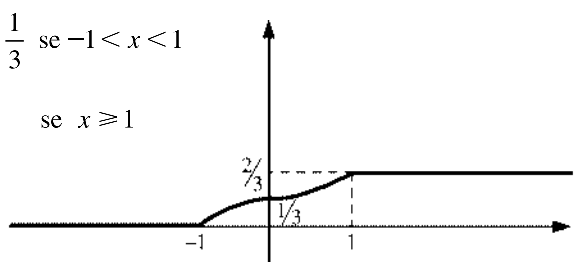
d) $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$ onde $f(t)=\begin{cases}0 & \text{se } t\leqslant 1\\ 1 & \text{se } t>1\end{cases}$

$F(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x\leqslant 1\\ \int_1^x dt = x-1 & \text{se } x>1\end{cases}$



f) $F(x)=\int_{-5}^x f(t)\,dt$, onde $f(t)=\begin{cases}0 & \text{se } t\leqslant -1\\ t^2 & \text{se } -1<t<1\\ 0 & \text{se } t>1\end{cases}$

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x\leqslant -1\\ \int_{-1}^x t^2\,dt=\left[\dfrac{t^3}{3}\right]_{-1}^x=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{3} & \text{se } -1<x<1\\ \int_{-1}^1 t^2\,dt+\int_1^x 0\,dt=\dfrac{2}{3} & \text{se } x\geqslant 1\end{cases}$$

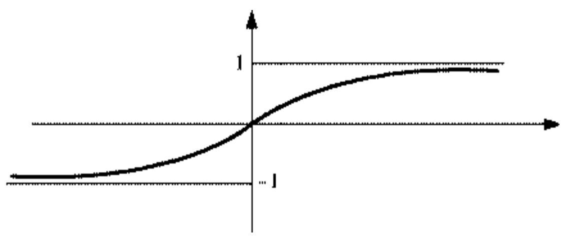


g) $F(x)=\int_0^x e^{-|t|}\,dt$ $\qquad |t|=\begin{cases} t & \text{se } t \geqslant 0 \\ -t & \text{se } t<0. \end{cases}$

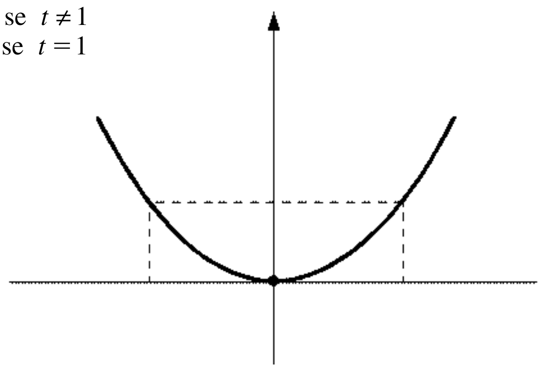
$$F(x)=\begin{cases} \int_0^x e^t\,dt & \text{se } x<0 \\ \int_0^x e^{-t}\,dt & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Como $\int_0^x e^t\,dt = e^x - 1$ e $\int_0^x e^{-t}\,dt = -e^{-x}+1$, temos:

$$F(x)=\begin{cases} e^x-1 & \text{se } x<0 \\ -e^{-x}+1 & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$$



2. $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$, onde $f(t)=\begin{cases} t & \text{se } t \neq 1 \\ 2 & \text{se } t=1 \end{cases}$



a) $F(x)=\int_0^1 t\,dt+\int_1^x t\,dt$

$F(x)=\left[\dfrac{t^2}{2}\right]_0^1+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}$

$F(x)=\dfrac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

b) $F'(x)=x \in \mathbb{R}$. (Observe: F é derivável em $x=1$, embora f não seja contínua neste ponto.)

3.

a) $F(x)=\int_2^x \underbrace{\frac{1}{t-1}}_{f(t)}\,dt$

$\int_2^x f(t)\,dt$ existe para todo $x>1$.

Se $x \leqslant 1$ $\int_2^x f(t)\,dt$ não existe.
Logo, $D_F =]1, +\infty[$

d) $F(x) = \int_3^x \underbrace{\frac{1}{t^2 - 4}}_{f(t)}\,dt$

$\int_3^x f(t)\,dt$ existe para todo $x > 2$.
$D_F =]2, +\infty[$.

4. $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, onde $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{se } t < 1 \\ \frac{2}{t} & \text{se } t \geqslant 1 \end{cases}$

(f não é contínua em $t = 1$)

a)

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x t^2\,dt & \text{se } x < 1 \\ \int_0^1 t^2\,dt + \int_1^x \frac{2}{t}\,dt & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{3} + 2\ln x & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

$$F'(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ \frac{2}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

b) $F(x)$ não é derivável em $x = 1$, pois

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = 1 \text{ e } \lim_{x \to 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = 2.$$

Exercícios 2.4

1.

a) $F(x) = \int_{-2}^x \frac{3t}{1 + t^6}\,dt.$

O domínio de F é $\mathbb{R}$, pois $f(t) = \dfrac{3t}{1+t^6}$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Pelo teorema fundamental do cálculo, temos:

$$F'(x) = \left[\int_{-2}^{x} f(t)\, dt\right]' = f(x)$$

$$F'(x) = \frac{3x}{1+x^6}$$

Na notação de Leibniz, $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_{-2}^{x} \frac{3t}{1+t^6}\, dt\right) = \dfrac{3x}{1+x^6}$.

c) $F(x) = \displaystyle\int_{x}^{2} \cos t^4\, dt = -\int_{2}^{x} \cos t^4\, dt$

$$F'(x) = \left[-\int_{2}^{x} \cos t^4\, dt\right]' = -f(x)$$

$$F'(x) = -\cos x^4$$

e) $F(x) = \displaystyle\int_{0}^{2x} \cos t^2\, dt$

Seja $u = 2x$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{du}\left(\int_{0}^{u} \cos t^2\, dt\right)\frac{du}{dx} = f(u)\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dF}{dx} = \cos u^2 \cdot 2$$

$$\frac{dF}{dx} = 2\cos 4x^2$$

$F'(x) = 2\cos 4x^2$**.**

f) $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{5+t^4}\, dt$

$$F(x) = \int_{x^2}^{1} \frac{1}{5+t^4}\, dt + \int_{1}^{x^3} \frac{1}{5+t^4}\, dt$$

$$F(x) = \int_{1}^{x^3} \frac{1}{5+t^4}\, dt - \int_{1}^{x^2} \frac{1}{5+t^4}\, dt$$

$$F'(x) = \frac{1}{5+(x^3)^4}\,(x^3)' - \frac{1}{5+(x^2)^4}\,(x^2)'$$

$$F'(x) = \frac{3x^2}{5+x^{12}} - \frac{2x}{5+x^8}.$$

De outra forma:

$F(x) = G(x^3) - G(x^2)$

$F'(x) = G'(x^3) \cdot 3x^2 - G'(x^2) \cdot 2x$ onde $G'(t) = \dfrac{1}{5+t^4}$

$$F'(x) = \frac{3x^2}{5+x^{12}} - \frac{2x}{5+x^8}.$$

j) $F(x) = \displaystyle\int_0^x (x-t)\, e^{-t^2}\; dt = \underbrace{\int_0^x xe^{-t^2}\; dt}_{F_1(x)} - \underbrace{\int_0^x te^{-t^2}\; dt}_{F_2(x)}$

$$F_1(x) = \int_0^x x \cdot e^{-t^2}\; dt = x\int_0^x e^{-t^2}\; dt$$

$$F_1'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x x \cdot e^{-t^2}\; dt\right) = xe^{-x^2} + \int_0^x e^{-t^2}\; dt$$

$$F_2'(x) = xe^{-x^2}$$

$$F'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = xe^{-x^2} + \int_0^x e^{-t^2}\; dt - xe^{-x^2}$$

$$F'(x) = \int_0^x e^{-t^2}\; dt.$$

2. Seja $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^3+3x^2} f(t)\, dt$

$F'(x) = \dfrac{d}{du}\left(\displaystyle\int_1^u f(t)\, dt\right)\dfrac{du}{dx} = f(u)\,\dfrac{du}{dx}$ onde $u = x^3 + 3x^2$.

$F'(x) = f(x^3 + 3x^2) \cdot (3x^2 + 6x)$.

Supondo $f(t) \geqslant 0$ e contínua em $\mathbb{R}$, temos $f(x^3 + 3x^2) \geqslant 0$ em $\mathbb{R}$.
O sinal de $F'(x)$ depende de $3x^2 + 6x$.

Assim: $3x^2 + 6x \geqslant 0$ em $]-\infty, -2]$ e $[0, +\infty[$.
$3x^2 + 6x \leqslant 0$ em $[-2, 0]$.

Daí,

$F'(x) \geqslant 0$ em $]-\infty, -2]$ e $[0, +\infty[$ $\Rightarrow$ $F(x)$ é crescente em $]-\infty, -2]$ e $[0, +\infty[$.
$F'(x) \leqslant 0$ em $[-2, 0]$ $\Rightarrow$ $F(x)$ é decrescente em $[-2, 0]$.

3. $\varphi(x) = 1 + \int_0^x t\, \varphi(t)\, dt$ ①

$$\varphi'(x) = x\, \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi(x)}{dx} = x\, \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = x\, dx$$

Então, $\ln \varphi(x) = \dfrac{x^2}{2} + c$

$$\varphi(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^c \quad ②$$

De ① vem $\varphi(0) = 1$. Comparando com ②: $\varphi(0) = e^c$. Temos $e^c = 1$. Logo, $\varphi(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$

6. Seja $F(x) = \int_1^x e^{-t^2}\, dt$

Para calcular $\int_0^1 F(x)\, dx$ vamos integrar por partes, considerando $f(x) = F(x)$ e $g'(x) = 1$. Então,

$$\int_0^1 F(x)\, dx = [x\, F(x)]_0^1 - \int_0^1 x\, F'(x)\, dx$$

$$\int_0^1 F(x)\, dx = \left[x \int_1^x e^{-t^2}\, dt \right]_0^1 - \int_0^1 x\, F'(x)\, dx$$

Temos $\left[x \int_1^x e^{-t^2}\, dt \right]_0^1 = 0$ $\left(\text{pois} \int_1^1 e^{-t^2}\, dt = 0 \text{ e } x \int_1^x e^{-t^2}\, dt = 0 \text{ se } x = 0 \right)$.

Como $F'(x) = e^{-x^2}$, segue que

$$\int_0^1 F(x)\, dx = -\int_0^1 x\, e^{-x^2}\, dx = \left[\frac{e^{-x^2}}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2e} - \frac{1}{2}$$

7. $G(x) = \int_\pi^x \operatorname{sen} t^2\, dt$

$$G'(x) = \left(\int_\pi^x \operatorname{sen} t^2\, dt \right)' = \operatorname{sen} x^2$$

Para calcular $\int_0^{\pi} G(x)\,dx$ vamos integrar por partes:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} G(x)\,dx &= \left[x\,G(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x\,G'(x)\,dx \\
&= \underbrace{\left[x\int_{\pi}^{x} \operatorname{sen} t^2\,dt\right]_0^{\pi}}_{} - \int_0^{\pi} x \cdot \operatorname{sen} x^2\,dx \\
&= \qquad 0 \qquad - \left(-\frac{1}{2}\right)\left[\cos x^2\right]_0^{\pi}
\end{aligned}
$$

Logo, $\int_0^{\pi} G(x)\,dx = \dfrac{1}{2}\left[\cos \pi^2 - 1\right]$.

CAPÍTULO 3

Exercícios 3.1

1.

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^3}\, dx = \lim_{t\to\infty} \left\{\left[-\frac{x^{-2}}{2}\right]_1^t\right\}$

$\displaystyle = \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-sx}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-sx}\, dx = \lim_{t\to\infty} \left\{\left[-\frac{e^{-sx}}{s}\right]_0^t\right\}$

$\displaystyle = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{se^{st}} + \frac{1}{s}\right] = \frac{1}{s},\ \text{pois}\ \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-st}}{s} = 0.$

d) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \lim_{t\to\infty} \left\{\left[2\sqrt{x}\right]_1^t\right\}$

$\displaystyle = \lim_{t\to\infty} = \left[2\sqrt{x} - 2\right] = \infty.$

e) $\displaystyle\int_1^{\infty} te^{-t}\, dt = \lim_{s\to\infty} \int_0^s te^{-t}\, dt$

$\displaystyle = \lim_{s\to\infty} \left[te^{-t} + \int_0^s e^{-t}\, dt\right]_0^s = \lim_{s\to\infty} \left[se^{-s} - e^{-s} + 1\right] = 1,$

pois $\displaystyle\lim_{s\to\infty} se^{-s} = 0$ e $\displaystyle\lim_{s\to\infty} e^{-s} = 0$

n) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^4}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{x}{1+x^4}\, dx.$

Façamos a mudança de variável

$x^2 = \text{tg}\, y \Rightarrow 2x\, dx = \sec^2 y\, dy \Rightarrow x\, dx = \dfrac{\sec^2 y\, dy}{2}$

$1 + x^4 = 1 + \text{tg}^2\, y = \sec^2 y$

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$
$x = t \quad \Rightarrow \quad y = \operatorname{arctg} t^2$

Logo, $\displaystyle\int_0^t \frac{x}{1+x^4}\,dx = \int_0^{\operatorname{arctg} t^2} \frac{\sec^2 y\,dy}{2\sec^2 y} = \left[\frac{1}{2}\,y\right]_0^{\operatorname{arctg} t^2}$
$\displaystyle = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t^2.$

Portanto,

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^4}\,dx = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

q) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3+x}\,dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x(x^2+1)} = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{dx}{x(x^2+1)}$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\int_1^t \frac{dx}{x} - \int_1^t \frac{x\,dx}{x^2+1}\right] = \lim_{t\to\infty}\left\{[\ln x]_1^t - \left[\ln\sqrt{x^2+1}\right]_1^t\right\}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left\{\ln t - \ln\sqrt{t^2+1} + \ln\sqrt{2}\right\} = \lim_{t\to\infty}\left(\ln\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} + \ln\sqrt{2}\right)$$

$$= \ln 1 + \ln\sqrt{2} = \ln\sqrt{2} \qquad \left(\text{pois } \ln\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \ln 1 = 0\right).$$

2. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right] (\alpha \neq 1).$

Se $1 - \alpha = 0$, temos $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{dx}{x} = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty.$
$(\alpha = 1)$

Se $(1-\alpha) < 0$, temos $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t\to\infty}\left[\cancelto{0}{\frac{1}{(1-\alpha)t^{|1-\alpha|}}} - \frac{1}{1-\alpha}\right] = \frac{1}{\alpha-1}.$
$(\alpha > 1)$

Se $(1 - \alpha) > 0$, temos $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right] = \infty.$
$(\alpha < 1)$

Portanto,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \\ \infty & \text{se } \alpha \leqslant 1. \end{cases}$$

3.

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^5}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^{-1} x^{-5}\,dx$

$\displaystyle = \lim_{t\to-\infty}\left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{4t^4}\right] = -\frac{1}{4}.$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^{-1} x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\left\{\left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_t^{-1}\right\} = \lim_{t\to-\infty}\left[\frac{3}{2}-\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}\right] = -\infty.$

h) Temos

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x < -1 \\ 1 & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Então,

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{-1}^{1} dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

$\displaystyle = \lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right) + 2 + \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t}+1\right) = 1+2+1 = 4.$

4. Temos

$$f(x) = \begin{cases} m & \text{se } -3 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & \text{se } x < -3 \\ 0 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Então,

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-3}^{3} m\,dx = [mx]_{-3}^{3} = 3m + 3m = 6m.$

De $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, segue $6m = 1$ ou $m = \dfrac{1}{6}.$

5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{k|t|}\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{k|t|}\,dt + \int_0^{\infty} e^{k|t|}\,dt$ ①

$\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{k|t|}\,dt = \lim_{s\to-\infty} \int_s^0 e^{-kt}\,dt = \lim_{s\to-\infty}\left\{\left[-\frac{e^{-kt}}{k}\right]_s^0\right\}$

$\displaystyle = \lim_{s\to-\infty}\left[-\frac{1}{k}+\underbrace{\cancel{\frac{e^{-ks}}{k}}}_{0\ (\text{se } k<0)}\right] = -\frac{1}{k}$ (se $k < 0$) ②

0 (se $k < 0$) (se $k \geqslant 0$ a integral diverge)

$$\int_0^{\infty} e^{k|t|}\, dt = \lim_{s\to\infty} \int_0^{s} e^{kt}\, dt = \lim_{s\to\infty} \left\{ \left[\frac{e^{kt}}{k} \right]_0^{s} \right\}$$

$$= \lim_{s\to\infty} \left[\frac{e^{ks}}{k} - \frac{1}{k} \right] = -\frac{1}{k} \quad (\text{se } k<0) \quad ③$$

$\to 0$ (se $k < 0$)

Portanto, substituindo ② e ③ em ①:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{k|t|}\, dt = -\frac{1}{k} - \frac{1}{k} \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{k} = 1 \quad \Rightarrow \; k = -2.$$

7.

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st}\, t^n\, dt = \lim_{u\to\infty} \int_0^{u} e^{-st}\, t^n\, dt$

Integrando por partes (considerando $f(t) = t^n$ e $g'(t) = e^{-st}$)

$$\lim_{u\to\infty} \int_0^{u} \underset{\substack{\uparrow \\ f}}{t^n}\, \underset{\substack{\uparrow \\ g'}}{e^{-st}}\, dt = \lim_{u\to\infty} \left\{ \left[-\frac{1}{s} t^n\, e^{-st} \right]_0^{u} + \frac{n}{s} \int_0^{u} t^{n-1}\, e^{-st}\, dt \right\}$$

$$= \lim_{u\to\infty} \left[-\frac{1}{s} u^n\, e^{-su} \right] + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} t^{n-1}\, e^{-st}\, dt.$$

$\to 0$

Portanto,

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\, t^n\, dt = \frac{n}{s} \int_0^{\infty} e^{-st}\, t^{n-1}\, dt.$$

b) Consideremos $\displaystyle\int_0^{\infty} t^{n-1}\, e^{-st}\, dt$ obtida em (a).

Integrando novamente por partes.

$$\int_0^{u} \underset{\substack{\uparrow \\ f}}{t^{n-1}}\, \underset{\substack{\uparrow \\ g'}}{e^{-st}}\, dt = \left[-\frac{t^{n-1}}{s}\, e^{-st} \right] + \frac{n-1}{s} \int_0^{u} t^{n-2}\, e^{-st}\, dt.$$

Daí, $\displaystyle\lim_{u\to\infty} \int_0^{u} t^{n-1}\, e^{-st}\, dt = \frac{n-1}{s} \int_0^{\infty} t^{n-2}\, e^{-st}\, dt.$

Portanto,

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\, t^n\, dt = \frac{n\,(n-1)}{s^2} \int_0^{\infty} e^{-st}\, t^{n-2}\, dt.$$

Integrando n vezes por partes, temos:

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\ t^n\ dt = \frac{n\,(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 1}{s^n} \cdot \int_0^{\infty} e^{-st}\ dt \cdot$$

Mas

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\ dt = \lim_{u\to\infty} \int_0^{u} e^{-st}\ dt = \lim_{u\to\infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^u = \lim_{u\to\infty} \left[\frac{e^{-su}}{s} + \frac{1}{s}\right] = \frac{1}{s}.$$

Então,

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\ t^n\ dt = \frac{n!}{s^n} \cdot \frac{1}{s} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

8.

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st} \operatorname{sen} \alpha t\ dt = \lim_{u\to\infty} \int_0^{u} e^{-st} \operatorname{sen} \alpha t\ dt$

$$\int_0^{u} \underset{\substack{\uparrow\\ f}}{e^{-st}}\ \underset{\substack{\uparrow\\ g'}}{\operatorname{sen} \alpha t}\, dt = \left[-e^{-st}\ \frac{\cos \alpha t}{\alpha}\right]_0^u - \int_0^u \frac{s}{\alpha} \cos \alpha t\ e^{-st}\ dt$$

$$= -\frac{e^{-su}}{\alpha} \cos \alpha u + \frac{1}{\alpha} - \frac{s}{\alpha} \int_0^u e^{-st} \cos \alpha t\ dt.$$

Assim,

$$\int_0^{u} e^{-st} \operatorname{sen} \alpha t\ dt = -\frac{e^{su}}{\alpha} \cos \alpha u + \frac{1}{\alpha} - \frac{s}{\alpha} \int_0^u e^{-st} \cos \alpha t\ dt. \quad ①$$

Por outro lado,

$$\int_0^{u} \underset{\substack{\uparrow\\ f}}{e^{-st}}\ \underset{\substack{\uparrow\\ g'}}{\cos \alpha t}\, dt = \left[\frac{e^{-st}}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha t\right]_0^u + \int_0^u \frac{s}{\alpha}\, e^{-st} \operatorname{sen} \alpha t\ dt$$

$$= \frac{e^{-su}}{a} \operatorname{sen} \alpha u + \frac{s}{\alpha} \int_0^u e^{-st} \operatorname{sen} \alpha t\ dt.$$

Então, $\displaystyle\int_0^{u} e^{-st} \cos \alpha t\ dt = \frac{e^{-su}}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha t + \frac{s}{\alpha} \int_0^u e^{-st} \operatorname{sen} \alpha t\ dt \quad ②$

Substituindo ② em ①:

$$\int_0^{u} e^{-st} \operatorname{sen} \alpha t\ dt = -\frac{e^{-su}}{\alpha} \cos \alpha u + \frac{1}{\alpha} - \frac{s}{\alpha^2}\, e^{-su} \operatorname{sen} \alpha u - \frac{s^2}{\alpha^2} \int_0^u e^{-st} \operatorname{sen} \alpha t\ dt$$

$$\underbrace{\left(1 + \frac{s^2}{\alpha^2}\right)}_{\left(\frac{\alpha^2 + s^2}{\alpha^2}\right)} \int_0^{u} e^{-st} \operatorname{sen} \alpha t\ dt = -\frac{e^{-su}}{\alpha} \cos \alpha u + \frac{1}{\alpha} - \frac{s}{\alpha^2}\, e^{-su} \operatorname{sen} \alpha u\,.$$

Sendo sen αu e cos αu limitadas e $\lim\limits_{u \to \infty} \dfrac{e^{-su}}{\alpha} = 0 \quad (s > 0)$ resulta

$$\lim_{u \to \infty} \frac{e^{-su}}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha u = 0 \ \text{ e } \ \lim_{u \to \infty} \frac{e^{-su}}{\alpha} \cos \alpha u = 0.$$

Daí,

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \operatorname{sen} \alpha t \, dt = \lim_{u \to \infty} \int_0^{u} e^{-st} \operatorname{sen} \alpha t \, dt = \left[\lim_{u \to \infty} \left(-\cancelto{0}{\frac{e^{-su}}{\alpha}} \cos \alpha u \right) \right.$$

$$\left. + \lim_{u \to \infty} \frac{1}{\alpha} - \lim_{u \to \infty} \cancelto{0}{\frac{s}{\alpha^2}} e^{-su} \operatorname{sen} \alpha u \right] \cdot \left(\frac{\alpha^2}{s^2 + \alpha^2} \right)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \operatorname{sen} \alpha t \, dt = \left(\frac{1}{\alpha} \right) \left(\frac{\alpha^2}{s^2 + \alpha^2} \right) = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}.$$

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st} e^{\alpha t} \, dt = \lim_{u \to \infty} \int_0^{u} e^{-(s - \alpha)t} \, dt$

$$= \lim_{u \to \infty} \left[-\frac{e^{-(s - \alpha)t}}{(s - \alpha)} \right]_0^u = \lim_{u \to \infty} \left[-\frac{e^{-(s - \alpha)u}}{(s - \alpha)} + \frac{1}{s - \alpha} \right]$$

$$\lim_{u \to \infty} \frac{e^{-(s - \alpha)t}}{s - \alpha} = 0, \quad \text{pois } s > \alpha$$

Então,

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \, e^{\alpha t} \, dt = \frac{1}{s - \alpha}$$

9.

a) $f(t) = \operatorname{sen} t + 3 \cos 2t$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \, f(t) \, dt = \int_0^{\infty} e^{-st} \, (\operatorname{sen} t + 3 \cos 2t) \, dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st} \operatorname{sen} t \, dt + 3 \int_0^{\infty} e^{-st} \cos 2t \, dt.$$

De 8.*a*, resulta

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \operatorname{sen} t \, dt = \frac{1}{s^2 + 1} \cdot$$

De 8.*b*, resulta

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cos 2t \, dt = \frac{s}{s^2 + 4}$$

Logo,

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\ (\text{sen } t + 3 \cos 2t)\ dt = \frac{1}{s^2+1} + \frac{3s}{s^2+4}\cdot$$

Exercícios 3.3

1.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\ dx$

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ é não-limitada em]0, 1] e integrável (segundo Riemann) em $[t, 1]$ para $0 < t < 1$.

Portanto,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\ dx = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\ dx = \lim_{t \to 0^+} \left[\frac{3}{2}\, x^{\frac{2}{3}}\right]_t^1 = \lim_{t \to 0^+} \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\, t^{\frac{2}{3}}\right] = \frac{3}{2}.$$

c) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}\ dx$ (A função integranda é não-limitada em]1, 3].)

$$\int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}\ dx = \lim_{t \to 1^+} \int_t^3 \frac{x^2}{(x^3-1)^{\frac{1}{2}}}\ dx = \lim_{t \to 1^+} \left[\frac{2}{3}(x^3-1)^{\frac{1}{2}}\right]_t^3$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{26}.$$

3.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$ (A função integranda é não-limitada em [0, 1[.)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \lim_{t \to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t \to 1^-} \left[\text{arcsen } x\right]_0^t$$
$$= \frac{\pi}{2}.$$

Exercícios 3.4

1.

a) Para $x \geqslant 1$, temos $\dfrac{1}{x^5+3x+1} \leqslant \dfrac{1}{x^5}.$

Segue, pelo critério de comparação, que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^5+3x+1}$ é convergente, pois $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^5}$ é convergente.

c) Para $x \geqslant 2$, temos $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4 + 2x + 1}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$.

Como $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}$ converge, segue, pelo critério de comparação, que $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 2x + 1}}$ converge.

e) Temos $0 \leqslant \left|\dfrac{\cos 3x}{x^3}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^3}$ (para $x \geqslant 1$).

Como $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$ converge, segue, pelo critério de comparação, que $\displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{\cos 3x}{x^3}\right| dx$ converge.

Pelo exemplo 3, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos 3x}{x^3}\, dx$ converge.

j) $0 \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \cdot e^{-x} \leqslant e^{-x}, x \geqslant 0$.

Como $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\, dx$ é convergente, pelo critério de comparação $\displaystyle\int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{\sqrt{x^2 + x + 1}}\, dx$ converge.

m) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}\, dx = 2\int_0^\infty \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}\, dx$, pois o integrando é função par.

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}\, dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}\, dx$. A convergência da última integral segue do critério de comparação, pois $\dfrac{1}{x^4 + x^2 + 1} \leqslant \dfrac{1}{x^4}$ para $x \geqslant 1$.

(Observe que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}\, dx$ existe, pois a integranda é contínua em [0, 1].)

Portanto, $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}\, dx$ converge.

2. Da hipótese, existe $b > 0$ tal que $\dfrac{L}{2} \leqslant x^\alpha\ f(x) \leqslant \dfrac{3L}{2}$, para $x \geqslant b$. Daí, $\dfrac{L}{2x^\alpha} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{3L}{2x^\alpha}$, para $x \geqslant b$. Sendo $f(x)$ integrável em $[a, t]$, para $t \geqslant a$, temos $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^\infty f(x)\, dx$. Já sabemos que $\displaystyle\int_b^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx$, $b > 0$, é convergente para $\alpha > 1$ e divergente para $\alpha \leqslant 1$. Pelo critério de comparação, temos:

a) $\alpha > 1 \Rightarrow \int_b^\infty f(x)\,dx$ convergente $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ convergente;

b) $\alpha \leqslant 1 \Rightarrow \int_b^\infty f(x)\,dx$ divergente $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ divergente.

3.

a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x^6 - x + 1}{x^7 - 2x^2 + 3}\,dx$

Seja $\displaystyle\underbrace{\frac{x^6 - x + 1}{x^7 - 2x^2 + 3}}_{f(x)} = \frac{1}{x}\underbrace{\left(\frac{1 - \dfrac{1}{x^5} - \dfrac{1}{x^6}}{1 - \dfrac{2}{x^5} + \dfrac{3}{x^7}}\right)}_{g(x)}$

Logo, $f(x) = \dfrac{1}{x}\, g(x)$, $f(x) \geqslant 0$ em $[2, +\infty[$ e $\lim_{x\to\infty} g(x) = 1$.

Por (2),

$$\alpha = 1 \;\Rightarrow\; \int_2^\infty \frac{x^6 - x + 1}{x^7 - 2x^2 + 3}\,dx \text{ é divergente.}$$

b) $\displaystyle\int_{10}^\infty \frac{x^5 - 3}{\sqrt{x^{20} + x^{10} - 1}}\,dx$

Temos $\displaystyle\underbrace{\frac{x^5 - 3}{\sqrt{x^{20} + x^{10} - 1}}}_{f(x)} = \frac{1}{x^5}\underbrace{\frac{1 - \dfrac{3}{x^5}}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^{10}} - \dfrac{1}{x^{20}}}}}_{g(x)}.$

Assim $f(x) = \dfrac{1}{x^5}\, g(x)$ com $\lim_{x\to\infty} g(x) = 1$.

Por (2),

$$\alpha = 5 \;\Rightarrow\; \alpha > 1 \;\Rightarrow\; \int_{10}^\infty \frac{x^5 - 3}{\sqrt{x^{20} + x^{10} - 1}}\,dx \text{ converge.}$$

d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x \ln(x+1)}\,dx$

Seja $\displaystyle\underbrace{\frac{\ln x}{x \ln(x+1)}}_{f(x)} = \frac{1}{x}\underbrace{\frac{\ln x}{\ln(x+1)}}_{g(x)}$. Temos $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\underbrace{\frac{\ln x}{\ln(x+1)}}_{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x+1}}$.

Então, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1.$

Por (2), $\alpha = 1 \;\Rightarrow\; \displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x\ln(x+1)}\,dx$ diverge.

5. Integrando por partes, $\displaystyle\int_0^u e^{-st} f'(t)\,dt = e^{-su} f(u) - f(0) + s\int_0^u e^{-st} f(t)\,dt.$ Sendo f de ordem exponencial, existem $\gamma > 0$ e $M > 0$ tais que, para $t \geqslant 0$, $|e^{-su} f(u)| \leqslant Me^{-(s-\gamma)u}$. Daí, para $s > \gamma$, $\lim_{u\to\infty} e^{-su} f(u) = 0$ e da convergência da integral $\displaystyle\int_0^\infty e^{-(s-\gamma)t}\,dt$, segue a convergência de $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt.$ Portanto, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt$ é convergente e $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt = s\int_0^u e^{-st} f(t)\,dt - f(0).$

6. Seja $f'(t) + 3f(t) = t,$ para todo t real.

Daí, $f'(t) = t - 3f(t)$ ①

Supondo f de ordem exponencial γ, temos, de (5), para todo $s > \gamma$,

$$\int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt = s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt - f(0).$$

De ①: $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}(t - 3f(t))\,dt = s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt - f(0)$

$$\int_0^\infty te^{-st}\,dt - 3\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt = s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt - f(0)$$

$$(s+3)\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty te^{-st}\,dt + f(0). \quad ②$$

Agora, $\displaystyle\int_0^\infty te^{-st}\,dt = \frac{1}{s^2}.$ ③ (Do Exercício 8, Seção 3.1.)

Substituindo ③ em ②:

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \frac{1}{s^2(s+3)} + \frac{f(0)}{(s+3)}$$

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+3} + \frac{f(0)}{s+3}$$

De $\dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s^2} + \dfrac{C}{s+3} = \dfrac{1}{s^2(s+3)}$, segue:

$\dfrac{(A+C)\,s^2 + (3A+B)\,s + 3B}{s^2(s+3)} = \dfrac{1}{s^2(s+3)}$. Donde $3B = 1$;

$B = \dfrac{1}{3}\,; 3A + B = 0; A = -\dfrac{1}{9}\,; A + C = 0\,; C = \dfrac{1}{9}.$

Portanto,

$$\int_0^\infty e^{-st}\ f(t)\ dt = -\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s^2}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{s+3}+\frac{f(0)}{s+3}.$$

Supondo $f(0) = 1$, temos

$$\int_0^\infty e^{-st}\ f(t)\ dt = \frac{10}{9}\cdot\frac{1}{s+3}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s^2}.$$

Utilizando o Exercício 8, Seção 3.1, resulta:

$$f(t) = \frac{10}{9}\ e^{-3t}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\ t.$$

7.

a) $f'(t) - 2f(t) = \cos t$ e $f(0) = 2$

$$\int_0^\infty e^{-st}\ f'(t)\ dt = s\int_0^\infty e^{-st}\ f(t)\ dt - f(0)$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\left[2f(t)+\cos t\right]dt = s\int_0^\infty e^{-st}\ f(t)\ dt - 2$$

$$(s-2)\int_0^\infty e^{-st}\ f(t)\ dt = \int_0^\infty e^{-st}\cos t\ dt + 2$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\ f(t)\ dt = \frac{1}{s-2}\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}\cos t\ dt}_{\frac{s}{s^2+1}\ \text{(do Exercício 8, Seção 3.1)}}+\frac{2}{s-2}$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\ f(t)\ dt = \frac{s}{(s-2)(s^2+1)}+\frac{2}{s-2}$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\ f(t)\ dt = \frac{A}{s-2}+\frac{Bs+C}{s^2+1}+\frac{2}{s-2}$$

$$\frac{(A+B)s^2-(2B-C)s+A-2C}{(s-2)(s^2+1)} = \frac{s}{(s-2)(s^2+1)}$$

De $\begin{cases} A+B=0 \\ 2B-C=-1 \\ A-2C=0 \end{cases}$ temos $A=\frac{2}{5}$; $B=-\frac{2}{5}$ e $C=\frac{1}{5}$

Portanto,

$$\int_0^\infty e^{-st}\ f(t)\ dt = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{s-2}+\frac{-\frac{2}{5}s+\frac{1}{5}}{s^2+1}+\frac{2}{s-2}$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\ f(t)\ dt = \frac{12}{5}\cdot\frac{1}{s-2}-\frac{2}{5}\ \frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

$$f(t) = \frac{12}{5}\ e^{2t}-\frac{2}{5}\cos t+\frac{1}{5}\ \text{sen}\ t.$$

b) $f'(t) + f(t) = e^{2t}$, $f(0) = -1$

$f'(t) = e^{2t} - f(t)$

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\ f'(t) = s\int_0^{\infty} e^{-st}\ f(t)\,dt - f(0)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\left[e^{2t} - f(t)\right]dt = s\int_0^{\infty} e^{-st}\ f(t)\,dt - \underbrace{f(0)}_{(-1)}$$

$$(s+1)\int_0^{\infty} e^{-st}\ f(t)\,dt = \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-st}\cdot e^{2t}\ dt}_{\frac{1}{s-2}\ \text{(do Exercício 8, Seção 3.1)}} - 1$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\ f(t)\,dt = \frac{1}{(s+1)(s-2)} - \frac{1}{s+1}$$

$$\frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} = \frac{1}{(s+1)(s-2)} \quad \Rightarrow \quad \frac{(A+B)s + (B-2A)}{(s+1)(s-2)} = \frac{1}{(s+1)(s-2)}$$

$$\Rightarrow A + B = 0 \ \text{ e } \ B - 2A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{3} \text{ e } B = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\ f(t)\,dt = -\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{s-2}$$

Portanto, utilizando o Exercício 8, Seção 3.1 temos

$$f(t) = -\frac{4}{3}\,e^{-t} + \frac{1}{3}\,e^{2t},$$

pois, $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st}\ e^{\alpha t}\ dt = \frac{1}{s-\alpha} \qquad (s > \alpha).$

CAPÍTULO 4

Exercícios 4.1

1.
a) Dizemos que *f* é uma função densidade de probabilidade se
i) $f(x) \geqslant 0, \forall x$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$

Seja $f(x) = k\, e^{-x^2}$ para $x \geqslant 0$ e $f(x) = 0$, para $x < 0$.
De *i* segue que $k > 0$.

Agora $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} kxe^{-x^2}\, dx = \left[-\frac{ke^{-x^2}}{2}\right]_0^{\infty} = \frac{k}{2}$

De *ii* segue: $\frac{k}{2} = 1 \Rightarrow k = 2.$

c) De *i* segue que $kx\,(x - 5) \geqslant 0$.
Como $0 \leqslant x \leqslant 5$, temos $x - 5 \leqslant 0$ e $k \leqslant 0$.

De *ii* segue $\int_0^5 kx(x-5)\, dx = 1.$

Agora, $\int_0^5 kx(x-5)\, dx = \int_0^5 kx^2\, dx - \int_0^5 5k\, dx = k\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^5 - 5k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^5$

Logo, $\frac{125k}{3} - \frac{125k}{2} = 6 \Rightarrow -125k = 6 \Rightarrow k = -\frac{6}{125}$

d) De *i*, como $1 + 4x^2 \geqslant 0$, devemos ter $k \geqslant 0$.

De *ii* vem $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{1+4x^2}\, dx = 1 \Rightarrow k\left[\text{arctg}\, 2x\right]_{-\infty}^{\infty} = 2.$

Mas $k\left[\text{arctg}\, 2x\right]_{-\infty}^{\infty} = k\pi$, logo $k\pi = 2$ e $k = \frac{2}{\pi}$.

2. ***a***)

$\int_{400}^{\infty} kx^{-2} = 1 \Rightarrow \left[-kx^{-1}\right]_{400}^{\infty} = 1 \Rightarrow \frac{k}{400} = \quad \Rightarrow k = 400$

$b)$ $\displaystyle\int_{400}^{1000} 400\,x^{-2} = -400\,x^{-1}\Big]_{400}^{1000} = -\frac{400}{1000} + 1 = 0{,}6$

$d)$ $\displaystyle\int_{2000}^{5000} 400\,x^{-2} = -400\,x^{-1}\Big]_{2000}^{5000} = -\frac{400}{5000} + \frac{400}{2000} = \frac{3}{25}$

Logo, $\dfrac{3}{25} \cdot 3200 = 384.$

Exercícios 4.2

1.

a) De $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ (função de distribuição) segue que

$$
\begin{array}{lll}
F(x) = 0 & \text{se} & x < 0 \\
F(x) = \dfrac{x}{5} & \text{se} & 0 \leqslant x \leqslant 5 \\
F(x) = 1 & \text{se} & x > 5
\end{array}
$$

Observamos que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

c) Seja a função de densidade de probabilidade

$f(x) = \dfrac{1}{2}\,e^{-|x|}$ para todo x real.

Temos

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} e^{x} & \text{se} \quad x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2} e^{-x} & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

Logo,

$F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}\,e^{t}\,dt = \frac{1}{2} \lim_{S\to-\infty} \int_{S}^{x} e^{t}\,dt = \frac{1}{2}\,e^{x}$ se $x \leqslant 0$

e

$F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}\,e^{t}\,dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}\,e^{-t}\,dt = \frac{1}{2} - \frac{e^{-x}}{2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{e^{-x}}{2}$ se $x > 0$.

Portanto,

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} e^{x} & \text{se} \quad x \leqslant 0 \\ 1 - \dfrac{e^{-x}}{2} & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

2. $f(x) = F'(x) = \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{2x} \dfrac{1}{1+t^2}\, dt\right] = \dfrac{1}{\pi(1+4x^2)}\,(2x)' = \dfrac{2x}{\pi(1+4x^2)}.$

Então, $f(x) = \dfrac{2}{\pi(1+4x^2)}$ é a função densidade de probabilidade.

Exercícios 4.3

1.

a) $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, dx.$

Sendo $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{se } x < a \text{ e } x > b \end{cases}$

Temos

$$E(X) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \int_a^b x^2 f(x)\, dx - [E(x)]^2 = \int_a^b \frac{x}{b-a}\, dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{4(b^2 + ab + a^2) - 3(a+b)^2}{12}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

c) Seja a função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^\infty x\, f(x)\, dx = \int_0^\infty x^2 e^{-x}\, dx$$

Integrando duas vezes por partes:

$$\int_0^s x^2 e^{-x}\, dx = \left[-x^2 e^{-x}\right]_0^s + 2\int_0^s xe^{-x}\, dx$$

$$= \left[x^2 e^{-x}\right]_0^s + 2\left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^s = \left[s^2 e^{-s}\right] + 2\left[-se^{-s} - e^{-s} + 1\right]$$

De $\displaystyle\lim_{s\to\infty} s^2 e^{-s} = 0$; $\displaystyle\lim_{s\to\infty} se^{-s} = 0$ e $\displaystyle\lim_{s\to\infty} e^{-s} = 0$

resulta

$$E(X) = \int_0^\infty x^2 e^{-x}\ dx = 2$$

$$\text{Var}(X) = \int_0^\infty x^2\ f(x)\ dx - [E(X)]^2$$

$$\text{Var}(X) = \int_0^\infty x^3 e^{-x}\ dx - 4$$

Integrando quatro vezes por partes obtemos:

$$\int_0^s x^3\ e^{-x}\ dx = \left[-x^3 e^{-x}\right]_0^s + 3\int_0^s x^2 e^{-x}\ dx$$

De $\lim\limits_{s\to\infty} s^3 e^{-s} = 0$ e de $\lim\limits_{s\to\infty}\int_0^s x^2 e^{-x}\ dx = E(X) = 2$ resulta

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x}\ dx = 6$$

Var $(X) = 6 - 4 = 2$.

Exercícios 4.4

1. Seja $X : N(\mu, \sigma^2)$ (isto é, a variável aleatória X tem distribuição normal, com média μ e variância σ^2).

Portanto, a sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad x \text{ real.}$$

Temos, considerando $r > 0$ um número qualquer:

$$P(\mu - r\sigma \leqslant X \leqslant \mu + r\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\mu - r\sigma}^{\mu + r\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ dx$$

Fazendo a mudança de variável

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad dx = \sigma\ dz$$
$$x = \mu - r\sigma \quad \Rightarrow \quad z = -r$$
$$x = \mu + r\sigma \quad \Rightarrow \quad z = r$$

Logo,

$$P(\mu - r\sigma \leqslant X \leqslant \mu + r\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-r}^{r} e^{\frac{-z^2}{2}}\ \sigma\ dz, \text{ ou seja,}$$

$$P(\mu - r\sigma \leqslant X \leqslant \mu + r\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-r}^{r} e^{\frac{-z^2}{2}}\ dz.$$

Logo, a probabilidade de X estar entre $\mu - r\sigma$ e $\mu + r\sigma$ só depende de r.

2. Seja $X : N(\mu, \sigma^2)$
Temos

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx.$$

Fazendo a mudança de variável: $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}, \;\; dx = \sigma\, dz$

$x = a \;\Rightarrow\; z = \dfrac{a-\mu}{\sigma}$ e $x = b \;\Rightarrow\; z = \dfrac{b-\mu}{\sigma}$

Logo,

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz.$$

3. Sejam $X : N(50, 16)$ e $Y: N(60, 25)$

a) $P\,(X \leqslant x) = P(Y \leqslant x)$.

Temos $P(X \leqslant x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{x-50}{5}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$ (pois $\mu = 50$ e $\sigma = 4$) e

$P(Y \leqslant x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{x-60}{5}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$ (pois $\mu = 60$ e $\sigma = 5$).

Comparando, resulta:

$$\frac{x-50}{4} = \frac{x-60}{5} \quad \Rightarrow \quad x = 10$$

b) $P(X \leqslant x) \;<\; P(Y \leqslant x)$.

Temos

$$\frac{x-50}{4} < \frac{x-60}{5} \quad \Rightarrow \quad x < 10$$

5.

a) Seja $\varphi(\mu) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_a^b e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx.$

Fazendo a mudança de variável

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad dx = \sigma\, dz$$

$$x = a \quad \Rightarrow \quad z = \frac{a-\mu}{\sigma}$$

$$x = b \quad \Rightarrow \quad z = \frac{b-\mu}{\sigma}.$$

Portanto,

$$\varphi(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma\, dz$$

ou seja,

$$\varphi(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz.$$

b) Seja $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ (função contínua).

$$\frac{d\varphi}{d\mu} = f\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) \frac{d}{d\mu}\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - f\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \frac{d}{d\mu}\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\frac{d\varphi}{d\mu} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{(b-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{1}{\sigma}\right) - e^{-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{1}{\sigma}\right) \right]$$

$$\frac{d\varphi}{d\mu} = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) \left[e^{-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(b-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right].$$

De outra forma, para se obter $\frac{d\varphi}{d\mu}$, consideremos

$$\varphi(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

$$\varphi(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{1} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz + \int_{1}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz \right]$$

$$\varphi(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{1}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz - \int_{1}^{\frac{a-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz \right]$$

$$\varphi'(\mu) = \frac{d\varphi}{d\mu} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{(b-\mu)^2}{2\sigma^2}} \underbrace{\frac{d}{d\mu}\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)}_{\left(-\frac{1}{\sigma}\right)} - e^{-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}} \underbrace{\frac{d}{d\mu}\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}_{\left(-\frac{1}{\sigma}\right)} \right]$$

Então,

$$\frac{d\varphi}{d\mu} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(b-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right].$$

Exercícios 4.5

2. Seja $X : N(\mu, \sigma^2)$

$X = \ln Y$ (distribuição logonormal) $(Y > 0)$.

$$P(a < Y < b) = P(\ln a < X < \ln b) = \int_{\ln a}^{\ln b} f(x)\, dx.$$

Fazendo a mudança de variável $x = \ln y$ temos

$P(a < Y < b) = \displaystyle\int_a^b \frac{f(\ln y)\, dy}{y}$, para quaisquer a, b *reais* com $0 \leqslant a < b$.

Assim, a função densidade de probabilidade g da variável aleatória Y é dada por:

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{f(\ln y)}{y} & \text{se } y > 0 \\ 0 & \text{se } y \leqslant 0 \end{cases}$$

onde $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

Exercícios 4.6

1. $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{-\frac{1}{2}}\, dx$

Fazendo $x = u^2$, $dx = 2u\, du$ temos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2}\, du = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

$$\left(\text{pois} \int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right).$$

3. Como $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$ (Exemplo 4, *b*)

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$

4. $$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{2n-1}{2}+1\right) = \frac{2n-1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)$$

$$= \frac{2n-1}{2}\,\Gamma\left(\frac{2n-3}{2}+1\right) = \frac{(2n-1)}{2}\cdot\frac{(2n-3)}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{2n-3}{2}\right)$$

$$= \frac{(2n-1)}{2}\cdot\frac{(2n-3)}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{2n-5}{2}+1\right) = \frac{(2n-1)}{2}\cdot\frac{(2n-3)}{2}\cdot\frac{(2n-5)}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{2n-5}{2}\right)$$

$$= \ldots = \frac{(2n-1)}{2}\cdot\frac{\overset{2(n-1)}{(2n-3)}}{2}\cdot\frac{\overset{2(n-2)}{(2n-5)}}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)\,(2n-4)\,(2n-5)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}{\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{2^{2n-1}}\ \underbrace{(n-1)\,(n-2)\cdot\ldots\cdot 1}_{(n-1)!}}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}\,(n-1)!}\sqrt{\pi}.$$

Exercícios 4.7

3.

***b*)** $$f(x) = \begin{cases} \beta x^{\beta-1}\, e^{-x^{\beta}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leqslant 0. \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} x\,\beta x^{\beta-1}\, e^{-x^{\beta}}\,dx.$$

Integrando por partes:

$$E(X) = \lim_{s\to\infty}\left\{\left[-x\cdot e^{-x^{\beta}}\right]_0^s + \int_0^s e^{-x^{\beta}}\,dx\right\}.$$

Como $\lim\limits_{s\to\infty} s e^{-s^{\beta}} = 0$, resulta

$$E(X) = \int_0^{\infty} e^{-x^{\beta}}\,dx.$$

$$\text{Var}\,(X) = \int_0^{\infty} x^2\, f(x)\,dx - [E(X)]^2$$

$$\text{Var}\,(X) = \int_0^{\infty} x^2\,\beta x^{\beta-1} e^{-x^{\beta}}\,dx - [E(X)]^2$$

Integrando por partes:

$$\text{Var}\,(X) = \lim_{s\to\infty}\left\{\left[-x^2e^{-x^\beta}\right]_0^s + 2\int_0^s e^{-x^\beta}\,x\,dx\right\} - [E(X)]^2$$

Como $\lim\limits_{s\to\infty} -s^2e^{-s^\beta} = 0$, resulta

$$\text{Var}\,(X) = 2\int_0^\infty xe^{-x^\beta}\,dx - [E(X)]^2.$$

4.

b) Seja $f(x)=\begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x\leqslant 0. \end{cases}$

$$E(X)=\int_0^\infty x\,f(x)\,dx=\int_0^\infty x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=\int_0^{+\infty}\underbrace{x}_{f}\,\underbrace{(xe^{-\frac{x^2}{2}})}_{g'}\,dx.$$

Integrando por partes:

$$E(X) = \lim_{s\to\infty}\cancelto{0}{\left[-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^s} + \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

Fazendo a mudança de variável:

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = u, \quad dx = \sqrt{2}\,du$$

$$E(X)=\int_0^\infty e^{-u^2}\sqrt{2}\,du=\sqrt{2}\int_0^\infty e^{-u^2}\,du=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

$\text{Var}\,(X) = \displaystyle\int_0^\infty x^2\,f(x)\,dx - [E(X)]^2$, ou seja,

$$\text{Var}\,(X) = \int_0^\infty x^3e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx - [E\,(X)]^2.$$

Integrando por partes:

$$\text{Var}\,(X) = \lim_{s\to\infty}\left\{\left[-x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^s + 2\int_0^s e^{-\frac{x^2}{2}}x\,dx\right\} - [E(X)]^2$$

$$\text{Var}\,(X) = \lim_{s\to\infty}\left\{\left[-x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^s - 2\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^s\right\} - \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right)^2$$

Como $\lim_{s \to \infty} s^2 e^{-\frac{s^2}{2}} = 0$ e $\lim_{s \to \infty} e^{-\frac{s^2}{2}} = 0$, temos:

$$\text{Var}(X) = 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{4 - \pi}{2}.$$

CAPÍTULO 5

Exercícios 5.1

1.

c) $\dfrac{dx}{dt} - x = \cos t \qquad (a = -1 \text{ e } f(t) = \cos t)$

$x = ke^t + e^t \displaystyle\int e^{-t} \cos t \, dt.$

Como $\displaystyle\int e^{-t} \cos t \, dt = \frac{1}{2}\left[e^{-t} \operatorname{sen} t - e^{-t} \cos t\right]$ segue

$x = ke^t + \dfrac{e^t}{2}\left[e^{-t} \operatorname{sen} t - e^{-t} \cos t\right]$ e, portanto,

$x = ke^t + \dfrac{\operatorname{sen} t}{2} - \dfrac{\cos t}{2}\cdot$

q) $\dfrac{dT}{dt} - 3T = 2 \ (a = -3 \ \text{ e } \ f(t) = 2) \iff T = ke^{3t} + e^{3t} \underbrace{\displaystyle\int e^{-3t} \cdot 2 \, dt}_{-\frac{2}{3}e^{-3t}}.$

Logo, $T = k\, e^{3t} - \dfrac{2}{3}.$

2. $\dfrac{dp}{dt} = kp,$ pois a taxa de aumento é proporcional ao número presente.

$\dfrac{dp}{dt} = kp$ e $p(0) = p_0 \iff p = p_0 \ p_0 e^{kt}.$

Quando $t = 2$, temos $p = 2\,p_0$.

Então, $2p_0 = p_0\, e^{2k} \Rightarrow \qquad k = \ln\sqrt{2}$. Portanto, $p = p_0 e^{t\ln\sqrt{2}} = p_0\,(\sqrt{2}\,)^t.$

Ao final de 6 horas, temos:

$p = p_0\,(\sqrt{2}\,)^6 \qquad \Rightarrow \quad p = 8p_0.$

4.

a) $\dfrac{di}{dt} + \dfrac{R}{L}\, i = \dfrac{E(t)}{L} \left(a = \dfrac{R}{L} \quad \text{e} \quad f(t) = \dfrac{E(t)}{L}\right).$

$$i = ke^{-\frac{R}{L}t} + e^{-\frac{R}{L}t} \int e^{\frac{R}{L}t} \frac{\overbrace{E(t)}^{E_0}}{L}\, dt, \text{ daí}$$

$$i = ke^{-\frac{R}{L}t} + e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \frac{E_0}{R} \cdot e^{\frac{R}{L}t} \text{ e, portanto,}$$

$$i = ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{R}.$$

De $i = 0$ para $t = 0$, segue $k = -\frac{E_0}{R}$. Portanto, $i = -\frac{E_0}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$.

***b*)** Consideremos $L = 2$; $R = 10$; $E(t) = 110 \text{ sen } 120\pi t$ e $i = 0$ para $t = 0$.

$$\frac{di}{dt} + 5i = 55 \text{ sen } 120\pi t \quad (a = 5 \text{ e } f(t) = 55 \text{ sen } 120\pi t)$$

$$i = ke^{-5t} + e^{-5t} \int e^{5t}\, 55 \text{ sen } 120\pi t\, dt.$$

Integrando por partes, temos

$$i = ke^{-5t} + \left(\frac{1}{1 + 576\pi^2}\right)\left(-264\pi \cos 120\pi t + 11 \text{ sen } 120\pi t\right).$$

Como $i = 0$ para $t = 0$, $k = \frac{264\pi}{1 + 576\pi^2}$. Portanto,

$$i = \left(\frac{1}{1 + 576\pi^2}\right)\left(264\pi e^{-5t} - 264\pi \cos 120\pi t + 11 \text{ sen } 120\pi t\right).$$

Exercícios 5.2

1.

***a*)** $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = 0$

Equação característica: $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$. Raízes: $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$.

Solução geral: $x = Ae^{3t} + Be^{-t}$.

***e*)** $\frac{d^2x}{dt^2} - 3x = 0$

Equação característica: $\lambda^2 - 3 = 0$. Raízes: $\lambda_1 = +\sqrt{3}$ e $\lambda_2 = -\sqrt{3}$.

Solução geral: $x = Ae^{\sqrt{3}t} + Be^{-\sqrt{3}t}$.

g) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$

Equação característica: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. Raízes: $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$.
Solução geral: $y = Ae^{2x} + Be^{-x}$**.**

h) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = 0$

Equação característica: $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$. Raízes $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$.
Solução geral: $y = Ae^{-3x} + B\,xe^{-3x}$ ou $y = e^{-3x}(A + Bx)$.

m) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$
Equação característica: $\lambda^2 = 0$. Raízes: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
Solução geral: $x = A + Bt$.

Exercícios 5.3

1.
b) $(2 + 3i)^2 = a + bi \iff 4 + 12\mathrm{i} - 9 = a + bi$. Logo,
$a = -5$ e $b = 12$.

e) $(i - 1)^4 = a + bi$
$[(i - 1)^2]^2 = (i^2 - 2i + 1)^2 = (-2i)^2 = 4i^2 = -4$.
Logo, $a = -4$ e $b = 0$.

h) $\dfrac{2+i}{3-i} = a + bi$

$$\frac{(2+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{6+5i-1}{10} = \frac{5i+5}{10} = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}.$$
Logo, $a = \dfrac{1}{2}$ e $b = \dfrac{1}{2}$.

2.

b) $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$

e) $\lambda^2 = -w^2, \quad w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{-w^2} = \pm w\sqrt{-1}$, ou seja, $\lambda = \pm w\,i$.

Exercícios 5.4

1.

a) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\dfrac{dx}{dt}+5x=0$

Equação característica: $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$. Raízes: $\lambda = -1 \pm 2i$ ($\alpha = 1$ e $\beta = 2$).

Solução geral: $x = e^{-t}\,[A \cos 2t + B \text{ sen } 2t]$.

b) $\ddot{x}+5x=0$

Equação característica: $\lambda^2 + 5 = 0$. Raízes $\lambda = \pm\sqrt{5}i$ ($\alpha=0$ e $\beta=\sqrt{5}$).

Solução geral: $x = A \cos \sqrt{5}t + B \text{ sen } \sqrt{5}t$.

f) $\ddot{y}-2\dot{y}+2y=0$

Equação característica: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$. Raízes: $\lambda = 1 \pm i$ ($\alpha = 1$ e $\beta = 2$).

Solução geral: $y = e^{t}\,[A \cos t + B \text{ sen } t]$.

p) $\ddot{y}+ay=0$, onde $a > 0$ é constante.

Equação característica: $\lambda^2 + a = 0$. Raízes: $\lambda = \pm\sqrt{a}\,i$ ($\alpha=0$ e $\beta=\sqrt{a}$).

Solução geral: $y = A \cos \sqrt{a}t + B \text{ sen } \sqrt{a}t$.

q) $\ddot{y}+ay=0$, onde $a < 0$ é uma constante.

As raízes da equação característica são reais: $\lambda_1 = +\sqrt{-a}$ e $\lambda_2 = -\sqrt{-a}$.
Solução geral: $y = Ae^{\sqrt{-a}t} + Be^{-\sqrt{-a}t}$.

2.
b) $\ddot{x}+2\dot{x}+2x=0$, $x(0)=-1$ e $\dot{x}(0)=0$.

Equação característica: $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$. Raízes: $\lambda = -1 \pm i$ ($\alpha = -1$ e $\beta = 1$).

Solução geral: $x = e^{-t}\,[A \cos t + B \text{ sen } t]$.

$x(0) = A \quad \Rightarrow \quad A = -1$.
$\dot{x}(t) = -e^{-t}\,(-\cos t + B \text{ sen } t) + e^{-t}(\text{sen } t + B \cos t)$.
$\dot{x}(0) = B+1 \quad \Rightarrow \quad B+1=0 \quad \Rightarrow \quad B=-1$.

Solução particular que satisfaz às condições iniciais:

$x = e^{-t}\,(-\cos t - \text{sen}\, t)$ ou seja, $x = -e^{-t}\,(\cos t + \text{sen}\, t)$.

3. O movimento é regido pela equação
$\ddot{x} + 4x = 0$.
Equação característica: $\lambda^2 + 4 = 0$. Raízes: $\lambda = \pm\, 2i$ ($\alpha = 0$ e $\beta = 2$).

Solução geral: $x = A \cos 2t + B \,\text{sen}\, 2t$.

$x(0) = A \;\Rightarrow\; A = 1$.
$\dot{x} = -2\,\text{sen}\, 2t + 2B\cos 2t$.

$\dot{x}(0) = 2B \;\Rightarrow\; 2B = -1 \;\Rightarrow\; B = -\dfrac{1}{2}$.

Logo, $\dot{x} = -2\,\text{sen}\, 2t - \cos 2t$.

5. $\dfrac{d^2 f}{dt^2} = \dfrac{df}{dt} - f$, $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$.

Equação característica: $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. Raízes: $\lambda = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} i \;\left(\alpha = \dfrac{1}{2} \text{ e } \beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Solução geral: $f = e^{\frac{t}{2}}\left(A\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + B\,\text{sen}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

$f(0) = A \;\Rightarrow\; A = 0$

$f(t) = e^{\frac{t}{2}}\left(B\,\text{sen}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

$f'(t) = \dfrac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}\left(B\,\text{sen}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + e^{\frac{t}{2}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}B\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

$f'(0) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}B \;\Rightarrow\; B = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Logo, $f(t) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}e^{\frac{t}{2}}\,\text{sen}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$.

6. Temos $\ddot{x} = k(\dot{x} - x)$ com $\ddot{x}(0) = 2$; $\dot{x}(0) = 1$ e $x(0) = 0$. Logo,
$2 = k(1 - 0) \;\Rightarrow\; k = 2$.

Daí $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0$ cuja solução geral é
$x = e^t\,(A\cos t + B\,\text{sen}\, t)$.
Tendo em vista as condições iniciais, resulta $x(t) = e^t\,\text{sen}\, t$.

7. Pela lei de Newton:

$$\ddot{x} = -x - c\dot{x}, \text{ ou seja, } \ddot{x} + c\dot{x} + x = 0.$$

Equação característica: $\lambda^2 + c\lambda + 1 = 0$. Raízes: $\lambda = -\dfrac{c \pm \sqrt{c^2 - 4}}{2}$.

a) As raízes devem ser reais e distintas para que o movimento seja fortemente amortecido. Logo,
$c^2 - 4 > 0 \;\Rightarrow\; c > 2$ ($c > 0$).

b) As raízes devem ser reais e iguais para que o movimento seja criticamente amortecido. Logo,
$c^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; c = 2$ (pois $c > 0$).

c) As raízes devem ser complexas. Logo,
$c^2 - 4 < 0 \;\Rightarrow\; 0 < c < 2$

Exercícios 5.5

1.

b) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 2t + 1$.

A homogênea associada é $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$.
Equação característica: $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$. Raízes: $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$.
Solução geral da homogênea: $x_h = A\,e^{-2t} + B\,t\,e^{-2t}$.

Vamos procurar uma solução particular da equação dada.
Tentaremos $x_p = m + nt$.

Assim,

$$(m + nt)'' + 4(m + nt)' + 4(m + nt) = 2t + 1, \text{ ou seja,}$$
$$4n + 4m + 4nt = 2t + 1.$$

Devemos ter: $\begin{cases} 4n = 2 \\ 4(m + n) = 1 \end{cases}$

ou seja, $n = \dfrac{1}{2}$ e $m = -\dfrac{1}{4}$.

Logo, $x_p = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}t$ é uma solução particular.

A solução geral será: $x = Ae^{-2t} + Bte^{-2t} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}t$.

d) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = 8e^{2t}$.

Equação característica: $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$. Raízes: $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -3$.
Solução geral da homogênea: $x_h = Ae^{-t} + Be^{-3t}$.

Vamos procurar a solução particular da equação dada.
Tentaremos $x_p = me^{2t}$.

$(me^{2t})'' + 4\,(me^{2t})' + 3\,(me^{2t}) = 8e^{2t}$

$4me^{2t} + 8me^{2t} + 3me^{2t} = 8e^{2t} \quad \Rightarrow \quad 15m = 8 \Rightarrow m = \dfrac{8}{15}$.

Assim, $x_p = \dfrac{8}{15}e^{2t}$.

A solução geral é: $x = Ae^{-t} + Be^{-3t} + \dfrac{8}{15}e^{2t}$.

f) $\ddot{y} + 2\dot{y} = 4$.

Equação característica: $\lambda^2 + 2\lambda = 0$. Raízes: $\lambda = 0$ e $\lambda = -2$.
Solução geral da homogênea: $x_h = A + Be^{-2t}$.

Seja $x_p = mt$. Devemos ter: $(mt)'' + 2(mt)' = 4$ e, portanto, $m = 2$.

Logo, $x_p = 2t$ é solução particular.
Solução geral: $x = A + Be^{-2t} + 2t$.

l) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \cos 2t$.

Equação característica: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$. Raízes: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.
Solução geral da homogênea: $x_h = Ae^{-t} + Bte^{-t}$.

Seja $x_p = m \cos 2t + n \operatorname{sen} 2t$.
Devemos ter:
$(m \cos 2t + n \operatorname{sen} 2t)'' + 2(m \cos 2t + n \operatorname{sen} 2t)' + (m \cos 2t + n \operatorname{sen} 2t) = \cos 2t$
$-4m \cos 2t - 4n \operatorname{sen} 2t - 4m \operatorname{sen} 2t + 4n \cos 2t + m \cos 2t + n \operatorname{sen} 2t = \cos 2t$
$(-3m + 4n) \cos 2t + (-3n - 4m) \operatorname{sen} 2t = \cos 2t$

Portanto: $\begin{cases} -3m + 4n = 1, \text{ daí } m = -\dfrac{3}{25} \text{ e } n = \dfrac{4}{25}. \\ -3n - 4m = 0 \end{cases}$

Solução particular: $x_p = -\dfrac{3}{25}\cos 2t + \dfrac{4}{25}\operatorname{sen} 2t$.

Solução geral: $x = Ae^{-t} + Bte^{-t} - \dfrac{3}{25}\cos 2t + \dfrac{4}{25}\operatorname{sen} 2t$.

$\boldsymbol{m)}$ $\ddot{x} + 9x = \text{sen } 3t$.

Equação característica: $\lambda^2 + 9 = 0$. Raízes: $\lambda = \pm 3i$
$(\alpha = 0$ e $\beta = 3)$.
Solução geral da homogênea: $x_h = A \cos 3t + B \text{ sen } 3t$.

Vamos procurar uma solução particular da equação dada. Como $b = 0$ e sen $3t$ é solução da homogênea, tentaremos $x_p = mt \text{ sen } 3t + nt \cos 3t$.
Assim,
$(mt \text{ sen } 3t + nt \cos 3t)'' + 9(mt \text{ sen } 3t + nt \cos 3t) = \text{sen } 3t$
Temos:
$(mt \text{ sen } 3t + nt \cos 3t)' = m \text{ sen } 3t + 3mt \cos 3t + n \cos 3t - 3nt \text{ sen } 3t$
$(mt \text{ sen } 3t + nt \cos 3t)'' = 6m \cos 3t - 6n \text{ sen } 3t - 9mt \text{ sen } 3t - 9nt \cos 3t$

Substituindo na equação dada, resulta:

$6m \cos 3t - 6n \text{ sen } 3t = \text{sen } 3t \Rightarrow 6m = 0 \ (m = 0)$ e $-6n = 1 \left(n = -\dfrac{1}{6} \right)$.

Logo, $x_p = -\dfrac{1}{6} t \cos 3t$.

Solução geral: $x = A \cos 3t + B \text{ sen } 3t - \dfrac{1}{6} t \cos 3t$.

2. $\ddot{x} + w^2 x = \text{sen } wt$, onde $w \neq 0$ é um real dado.

Equação característica: $\lambda^2 + w^2 = 0$; Raízes: $\lambda = \pm wi$
$(\alpha = 0$ e $\beta = w)$.

Solução geral da homogênea: $x_h = A \cos wt + B \text{ sen } wt$.
Seja $x_p = mt \text{ sen } wt + nt \cos wt$ uma solução particular da equação dada (pois $b = 0$ e sen wt é solução da homogênea).
Temos:
$(mt \text{ sen } wt + nt \cos wt)' = m \text{ sen } wt + wmt \cos wt + n \cos wt - wnt \text{ sen } wt$
$(mt \text{ sen } wt + nt \cos wt)'' = 2\,wm \cos wt - 2wn \text{ sen } wt - w^2 mt \text{ sen } wt - w^2 nt \cos wt$

Substituindo na equação dada, resulta:

$2\,wm \cos wt - 2wn \text{ sen } wt = \text{sen } wt$, daí
$2\,wm = 0 \ (m = 0)$ e $-2w\,n = 1 \quad \left(n = -\dfrac{1}{2w} \right)$.

Portanto, $x_p = -\dfrac{1}{2w} t \cos wt$.

Solução geral: $x = A\cos wt + B\,\text{sen}\,wt - \dfrac{1}{2w}\,t\cos wt$.

3.

a) $\ddot{x} + 4x = \cos t$, $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = -1$.

Solução geral da homogênea: $x_h = A\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t$

Seja $x_p = m\cos t$ (pois $b = 0$ e $\cos t$ não é solução da homogênea).
Temos $(m\cos t)' = -m\,\text{sen}\,t$ e $(m\cos t)'' = -m\cos t$

Substituindo na equação dada:

$-m\cos t + 4m\cos t = \cos t$ e, portanto, $m = \dfrac{1}{3}$.

Solução geral: $x = A\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t + \dfrac{1}{3}\cos t$.

$x(0) = A + \dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad A + \dfrac{1}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \dfrac{2}{3}$.

$\dot{x} = -\dfrac{4}{3}\,\text{sen}\,2t + 2B\cos 2t - \dfrac{1}{3}\,\text{sen}\,t$.

$\dot{x}(0) = 2B \quad \Rightarrow \; 2B = -1 \quad \Rightarrow \quad B = -\dfrac{1}{2}$.

Solução do problema: $x = \dfrac{2}{3}\cos 2t - \dfrac{1}{2}\,\text{sen}\,2t + \dfrac{1}{3}\cos t$.

d) $\ddot{x} + 4x = 5e^{3t}$; $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$.

Solução da homogênea: $x_h = A\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t$.

Seja $x_p = me^{3t}$. Temos $(me^{3t})' = 3me^{3t}$; $(me^{3t})'' = 9\,me^{3t}$. Daí

$9me^{3t} + 4me^{3t} = 5e^{3t} \quad \Rightarrow \quad 13\,m = 5 \quad \Rightarrow m = \dfrac{5}{13}$.

Solução geral da equação: $x = A\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t + \dfrac{5}{13}e^{3t}$.

$x(0) = A + \dfrac{5}{13} \quad \Rightarrow \quad A = -\dfrac{5}{13}$. De

$\dot{x} = \dfrac{10}{13}\,\text{sen}\,2t + 2B\cos 2t + \dfrac{15}{13}\,e^{3t}$ segue $\dot{x}(0) = 2B + \dfrac{15}{13} \quad \Rightarrow \quad B = -\dfrac{15}{26}$.

Solução do problema: $x = -\dfrac{5}{13}\cos 2t - \dfrac{15}{26}\,\text{sen}\,2t + \dfrac{5}{13}\,e^{3t}$.

4. Seja $x_p = m \text{ sen } wt + n \cos wt.$ ①

Temos:
$(m \text{ sen } wt + n \cos wt)' = wm \cos wt - wn \text{ sen } wt$ ②

$(m \text{ sen } wt + n \cos wt)'' = -w^2 m \text{ sen } wt - w^2 n \cos wt.$ ③

Substituindo ①, ② e ③ na equação $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + w_0^2 x = b \text{ sen } wt$, resulta:
$-w^2 m \text{ sen } wt - w^2 n \cos wt + 2\gamma wm \cos wt - 2\gamma wn \text{ sen } wt$
$+ w_0^2 m \text{ sen } wt + w_0^2 n \cos wt = b \text{ sen } wt$, ou seja,

$\left[\left(w_0^2 - w^2\right)m - 2\gamma wn\right] \text{sen } wt + \left[\left(w^2 - w_0^2\right)n + 2\gamma wm\right] \cos wt = b \text{ sen } wt.$ Daí

$$\begin{cases} \left(w_0^2 - w^2\right)m - 2\gamma wn & = b \\ 2\gamma wm + \left(w_0^2 - w^2\right)n & = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$m = \frac{b\left(w_0^2 - w^2\right)}{\left(w_0^2 - w^2\right)^2 + 4\gamma^2 w^2} \quad \text{e} \quad n = -\frac{2b\gamma w}{\left(w_0^2 - w^2\right) + 4\gamma^2 w^2}.$$

Portanto,

$$x_p = \frac{b\left(w_0^2 - w^2\right)}{\left(w_0^2 - w^2\right)^2 + 4\gamma^2 w^2} \text{ sen } wt - \frac{2b\gamma w}{\left(w_0^2 - w^2\right) + 4\gamma^2 w^2} \cos wt,$$

ou seja,

$$x_p = \frac{b}{\left(w_0^2 - w^2\right)^2 + 4\gamma^2 w^2}\left[-2\gamma w \cos wt + \left(w_0^2 - w^2\right) \text{sen } wt\right].$$

*C*APÍTULO 6

Exercícios 6.3

1. Em notação vetorial:
$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(a, b)$ $\lambda \in \mathbb{R}$ é a equação da reta que passa pelo ponto (x_0, y_0) e é paralela à direção do vetor $\vec{v} = (a, b)$.

Portanto,
$(x, y) = (1, 2) + \lambda(-1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ é a equação procurada.

3. $3x + 2y = 2$. Então, $\vec{u} = (-2, 3)$, por ser ortogonal a $\vec{n} = (3, 2)$, é paralelo à reta dada.

6. ***b***) $3x - y = 3$ é perpendicular à direção do vetor $\vec{n} = (3, -1)$.

7. Equação vetorial da reta que passa pelo ponto $(1, -2)$ e é paralela à reta $2x + y = 3$, é perpendicular à direção do vetor $\vec{n} = (2, 1)$. Logo, é paralela à direção do vetor $\vec{u} = (-1, 2)$.

Logo, $(x, y) = (1, -2) + \lambda(-1, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

8. A reta $2x + y = 3$ é perpendicular à direção do vetor $\vec{n} = (2, 1)$.

Logo, a reta procurada é paralela à direção do vetor $\vec{n} = (2, 1)$.
Então, $(x, y) = (1, 2) + \lambda(2, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, é a reta procurada.

9. ***a***) Equação do plano que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e que é perpendicular à direção do vetor $\vec{n} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ é $(a, b, c) \cdot [(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)] = 0$.
Portanto:
$(2, 1, 3) \cdot [(x, y, z) - (1, 1, 1)] = 0$, ou seja,
$(2, 1, 3) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) = 0 \Rightarrow 2x - 2 + y - 1 + 3z - 3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x + y + 3z = 6$.

10. ***a***) O vetor $\vec{n} = (1, 2, -1)$ é perpendicular ao plano $x + 2y - z = 3$. Logo a equação vetorial da reta que passa por $(0, 1, -1)$ e é perpendicular ao plano $x + 2y - z = 3$ é $(x, y, z) = (0, 1, -1) + \lambda(1, 2, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

12. $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$, daí

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 3\vec{k}$$

A equação vetorial da reta que passa pelo ponto (1, 2, −1) e é paralela à direção do vetor

$\vec{u} \wedge \vec{v} = 3\vec{i} - 3\vec{k}$ é

$(x, y, z) = (1, 2, -1) + \lambda(3, 0, -3), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

13. ***a***) $\vec{u} = (1, 2, -1)$ e $\vec{v} = (2, 1, 2)$. Temos

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - 4\vec{k} - 3\vec{k}.$$

$\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.

Logo, $\vec{u} \wedge \vec{v} = (5, -4, -3)$ é o vetor procurado.

14. ***b***) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}.$

$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot [(x, y, z) - (0, 1, 2)] = 0 \Rightarrow (-4, 1, 3)\,(x, y - 1, z - 2) = 0$
$\Rightarrow -4x + y - 1 + 3z - 6 = 0 \Rightarrow -4x + y + 3z = 7.$

Exercícios 6.4

2.

a) $\|\vec{u}\| = \|(1, 2)\| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

d) $\|\vec{v}\| = \left\| \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \right\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{6}$

3. Seja $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$.

$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ e $|u_i| = \sqrt{u_i^2} \quad i = 1, 2, 3.$

Temos $u_2^2 + u_3^2 \geqslant 0 \Rightarrow u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \geqslant u_1^2$

$\Rightarrow \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \geqslant \sqrt{u_1^2} \Rightarrow \|\vec{u}\| \geqslant |u_1|$ ①

$u_1^2 + u_3^2 \geqslant 0 \Rightarrow u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \geqslant u_2^2$

$\Rightarrow \sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2} \geqslant \sqrt{u_2^2} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{u}\| \geqslant |u_2|$ ②

$u_1^2+u_2^2 \geqslant 0 \Rightarrow u_1^2+u_2^2+u_3^2 \geqslant u_3^2$

$\Rightarrow \sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2} \geqslant \sqrt{u_2^2} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{u}\| \geqslant |u_3|$ ③

De ①, ② e ③ segue:

$\|\vec{u}\| \geqslant |u_i|, \; i=1,2,3.$

5.

a) $\|\vec{u}\| = \|(\vec{u}-\vec{v})+\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}-\vec{v}\|+\|\vec{v}\|$

$\Rightarrow \|\vec{u}\| \leqslant \|\vec{u}-\vec{v}\|+\|\vec{v}\|$

$\Rightarrow \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}-\vec{v}\|$

$\Rightarrow \|\vec{u}-\vec{v}\| \geqslant \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|$

b) $\|\vec{v}\| = \|(\vec{v}-\vec{u})+\vec{u}\| \leqslant \|\vec{v}-\vec{u}\|+\|u\| = \|\vec{u}-\vec{v}\|+\|\vec{u}\|$

$\Rightarrow \|\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}-\vec{v}\| + \|\vec{u}\| \Rightarrow \|\vec{u}-\vec{v}\| \geqslant \|\vec{v}\|-\|\vec{u}\|$

c) Tendo em vista ***a***) e ***b***), $\|\vec{u}-\vec{v}\| \geq \big|\|\vec{u}\|-\|\vec{v}\|\big|$, pois,

$\big|\|\vec{u}\|-\|\vec{v}\|\big| = \|\vec{u}\|-\|\vec{v}\|$ ou $\big|\|\vec{u}\|-\|\vec{v}\|\big| = \|\vec{v}\|-\|\vec{u}\|$.

8. Sejam $\vec{u}=(u_1,u_2,...,u_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\vec{v}=(v_1,v_2,...,v_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \sqrt{u_1v_1+u_2v_2+...+u_nv_n}$.

Se $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{0}$, para todo $\vec{v}$, em particular, teremos $\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{0}$, logo, $\vec{u}=\vec{0}$, pois, se pelo menos uma das coordenadas de $\vec{u}$ fosse diferente de zero, teríamos $\vec{u}\cdot\vec{u}=u_1^2+u_2^2+...+u_n^2>0$.

9. Seja $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$.

Então,

$\vec{u}\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})=\alpha(\vec{u}\cdot\vec{u})+\beta(\vec{u}\cdot\vec{v})$

$=\alpha\|\vec{u}\|^2 + \beta\cdot 0 = \alpha$ (pois $\|\vec{u}\|=1$ e

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ ortogonais).

Logo, $\alpha=\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Analogamente,

$\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{v}\cdot(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})=\alpha(\vec{v}\cdot\vec{u})+\beta(\vec{v}\cdot\vec{v})$

$= \alpha \cdot 0 \; + \; \beta \; \| \vec{v} \|^2 = \beta$ (pois $\| \vec{v} \| = 1$ e $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$).

Logo, $\beta = \vec{v} \cdot \vec{w}$

11. Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2)$ vetores do $\mathbb{R}^2$.

$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ é equivalente ao sistema $\begin{cases} \alpha u_1 + \beta v_1 = w_1 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 = w_2 \end{cases}$.

De $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0$, pois, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente independentes (Exercício 10), segue que o sistema admite uma e apenas uma solução (α, β).

13. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores unitários e ortogonais do $\mathbb{R}^2$.

$(\| \vec{u} \| = \| \vec{v} \| = 1 \quad \text{e} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0)$

Consideremos a combinação linear nula $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$. Façamos:

$\vec{u} \cdot (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = u \cdot \vec{0} = 0$. Daí,

$$\alpha\underbrace{\vec{u} \cdot \vec{u}}_{\| u \|^2} + \beta\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\underbrace{\| u \|^2}_{1} + \beta \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \text{ e}$$

$$\vec{v} \cdot (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\underbrace{\vec{v} \cdot \vec{u}}_{0} + \beta\underbrace{\vec{v} \cdot \vec{v}}_{\|v\|^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta\underbrace{\| v \|^2}_{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = 0.$$

Logo, se $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$, então $\alpha = \beta = 0$. Portanto, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são l.i.
Do Exercício 11: se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são l.i. então existem dois únicos reais a e b tais que
$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ ①

Agora,

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = (a\vec{u} + b\vec{v}) \cdot \vec{u} = a \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{u}}_{\| u \|^2 = 1} + b\underbrace{\vec{v} \cdot \vec{u}}_{0} = a \;\Rightarrow\; a = \vec{w} \cdot \vec{u} \text{ e}$$

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = (a\vec{u} + b\vec{v}) \cdot \vec{v} = a\underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}}_{0} + b \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{v}}_{\| v \|^2 = 1} = b \;\Rightarrow\; b = \vec{w} \cdot \vec{v}.$$

Substituindo em ①: $\vec{w} = (\vec{w} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u} + (\vec{w} \cdot \vec{v})\, \vec{v}$.

14. Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3); \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ vetores l. i. do $\mathbb{R}^3$.
Dizemos que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.i. se, quaisquer que sejam os reais α, β e γ, se
$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$, então, $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

De $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$, segue:

$\alpha(u_1, u_2, u_3) + \beta(v_1, v_2, v_3) + \gamma(w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 0)$ e daí

$(\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1, \alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2, \alpha u_3 + \beta v_3 + \gamma w_3) = (0, 0, 0)$.
Recaímos no sistema linear homogêneo:

$\begin{cases} \alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 = 0 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2 = 0 \\ \alpha u_3 + \beta v_3 + \gamma w_3 = 0 \end{cases}$ que admite somente a solução trivial $\alpha = \beta = \gamma = 0$, se e somente se

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

18. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$= (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$. Daí

$\| \vec{u} \wedge \vec{v} \|^2 = (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2$
$= u_2^2v_3^2 + u_3^2v_2^2 + u_3^2v_1^2 + u_1^2v_3^2 + u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 + u_1^2v_1^2$
$+ u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 - u_1^2v_1^2 - u_2^2v_2^2 - u_3^2v_3^2 - 2u_1u_2v_1v_2$
$- 2u_1u_3v_1v_3 - 2u_2u_3v_2v_3 = u_1^2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)$
$+ u_2^2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + u_3^2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2$
$= \underbrace{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)}_{\| \vec{u} \|^2}\underbrace{(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}_{\| \vec{v} \|^2} - \underbrace{(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2}_{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$

Logo,
$\| \vec{u} \wedge \vec{v} \|^2 = \| u \|^2 \cdot \| v \|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$ (identidade de Lagrange).

Resulta:
$\| \vec{u} \wedge \vec{v} \|^2 \leqslant \| \vec{u} \|^2 \cdot \| \vec{v} \|^2$

e, portanto,
$\| \vec{u} \wedge \vec{v} \| \leqslant \| \vec{u} \| \cdot \| \vec{v} \|$. (Um outro modo mais rápido de resolver o problema é utilizando o Exercício 17.)

CAPÍTULO 7

Exercícios 7.3

1. Sejam $\vec{F}(t) = (t, \text{sen}\, t, 2)$ e $\vec{G}(t) = (3, t, t^2)$.

a) $\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) = (t, \text{sen}\, t, 2) \cdot (3, t, t^2) = 3t + t\, \text{sen}\, t + 2t^2.$

d) $\vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t & \text{sen}\, t & 2 \\ 3 & t & t^2 \end{vmatrix} = (t^2\, \text{sen}\, t - 2t)\, \vec{i} + (6 - t^3)\, \vec{j} + (t^2 - 3\, \text{sen}\, t)\, \vec{k}\, .$

$\vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t) = (t^2\, \text{sen}\, t - 2t, 6 - t^3, t^2 - 3\, \text{sen}\, t).$

2. Sejam $\vec{r}(t) = t\vec{i} + 2\vec{j} + t^2\vec{k}$ e $\vec{x}(t) = t\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

$$\vec{r}(t) \wedge \vec{x}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t & 2 & t^2 \\ t & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2 + t^2)\, \vec{i} + (t^3 - t)\, \vec{j} + (-3t)\, \vec{k}\, .$$

3. Sejam $\vec{u}(t) = \text{sen}\, t\, \vec{i} + \cos t\, \vec{j} + t\, \vec{k}$ e
$\vec{v}(t) = \text{sen}\, t\, \vec{i} + \cos t\, \vec{j} + \vec{k}$

$\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t) = \text{sen}^2\, t + \cos^2\, t + t = 1 + t\, .$

Exercícios 7.4

1. ***c***) $\displaystyle\lim_{t \to 2} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t \to 2} \frac{t^3 - 8}{t^2 - 4} \right) \vec{i} + \left(\lim_{t \to 2} \frac{\cos \frac{\pi}{t}}{t - 2} \right) \vec{j} + \left(\lim_{t \to 2} 2t \right) \vec{k}\, .$

$$\lim_{t \to 2} \frac{t^3 - 8}{t^2 - 4} = \lim_{t \to 2} \frac{\cancel{(t - 2)}\,(t^2 + 2t + 4)}{\cancel{(t - 2)}\,(t + 2)} = \frac{12}{4} = 3,$$

$$\lim_{t \to 2} \frac{\cos \frac{\pi}{t}}{t - 2} = \lim_{t \to 2} \frac{(-\text{sen}\, \frac{\pi}{t})\,(-\frac{\pi}{t^2})}{1} = \frac{\pi}{4} \cdot \text{sen}\, \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \ \text{e}$$

$$\lim_{t \to 2} 2t = 4\, .$$

Portanto,

$$\lim_{t\to 2} \vec{r}(t) = 3\vec{i} + \frac{\pi}{4}\vec{j} + 4\vec{k}.$$

2. *b*) $f(t)\cdot\vec{F}(t) = \underbrace{f(t)}_{\in\mathbb{R}}\cdot\underbrace{(F_1(t), F_2(t), ..., F_n(t))}_{\in\mathbb{R}^n}$. Temos

$f(t)\cdot\vec{F}(t) = (f(t)\,F_1(t), f(t)\,F_2(t), ..., f(t)\,F_n(t))$. Segue que

$$\lim_{t\to t_0} f(t)\,\vec{F}(t) = (\lim_{t\to t_0} f(t)\,F_1(t), \lim_{t\to t_0} f(t)\,F_2(t), ..., \lim_{t\to t_0} f(t)\,F_n(t))$$

$$= (\lim_{t\to t_0} f(t)\cdot\lim_{t\to t_0} F_1(t), \lim_{t\to t_0} f(t)\lim_{t\to t_0} F_2(t), ..., \lim_{t\to t_0} f(t)\cdot\lim_{t\to t_0} F_n(t)).$$

De $\lim_{t\to t_0} \vec{F}(t) = \vec{a}$ segue que $\lim_{t\to t_0} \| F(t) - \vec{a} \| = 0$.

Por outro lado, para todo $i = 1, 2, ..., n$

$| F_i(t) - a_i | \leqslant \| F(t) - a \|$.

Pelo Teorema do Confronto:

$\lim_{t\to t_0} F_i(t) = a_i$ para $i = 1, 2, ..., n$.

Portanto, usando $\lim_{t\to t_0} f(t) = L$ e $\lim_{t\to t_0} F_i(t) = a_i$, segue:

$$\lim_{t\to t_0} f(t)\,\vec{F}(t) = (La_1, La_2, ..., La_n) = L(a_1, a_2, ..., a_n) = L\vec{a}.$$

***c*)** Sejam $\vec{F}(t) = (F_1(t), F_2(t), F_3(t))$ e $\lim_{t\to t_0} \vec{F}(t) = \vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$\vec{G}(t) = (G_1(t), G_2(t), G_3(t))$ e $\lim_{t\to t_0} \vec{G}(t) = \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

$$\vec{F}(t)\wedge\vec{G}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_1(t) & F_2(t) & F_3(t) \\ G_1(t) & G_2(t) & G_3(t) \end{vmatrix}$$

$$\vec{F}(t)\wedge\vec{G}(t) = (F_2(t)\,G_3(t) - F_3(t)(G_2(t))\,\vec{i} + (F_3(t)\,G_1(t) - F_1(t)\,G_3(t))\,\vec{j}$$

$$+ (F_1(t)\,G_2(t) - F_2(t)\,G_2(t))\,\vec{k}.$$

De $\lim_{t\to t_0} \vec{F}(t) = \vec{a}$ segue que $\lim_{t\to t_0} F_i(t) = a_i$ para $i = 1, 2, 3$.

De $\lim_{t\to t_0} G(t) = \vec{b}$ segue que $\lim_{t\to t_0} G_i(t) = b_i$ para $i = 1, 2, 3$.

Temos

$$\lim_{t\to t_0} \vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t) = \left[\lim_{t\to t_0} (F_2(t)\, G_3(t) - F_3(t)\, G_2(t)\right] \vec{i}$$

$$+ \left[\lim_{t\to t_0} (F_3(t)\, G_1(t) - F_1(t)\, G_3(t))\right] \vec{j} + \left[\lim_{t\to t_0} (F_1(t)\, G_2(t) - F_2(t)\, G_1(t))\right] \vec{k}$$

$$= \left(\lim_{t\to t_0} F_2(t) \lim_{t\to t_0} G_3(t) - \lim_{t\to t_0} F_3(t) \lim_{t\to t_0} G_2(t)\right) \vec{i} + \left(\lim_{t\to t_0} F_3(t) \lim_{t\to t_0} G_1(t)\right.$$

$$\left. - \lim_{t\to t_0} F_1(t) \lim_{t\to t_0} G_3(t)\right) \vec{j} + \left(\lim_{t\to t_0} F_1(t) \lim_{t\to t_0} G_2(t) - \lim_{t\to t_0} F_2(t) \lim_{t\to t_0} G_1(t)\right) \vec{k}$$

$$= (a_2\, b_3 - a_3\, b_2)\vec{i} + (a_3\, b_1 - a_1\, b_3)\vec{j} + (a_1\, b_2 - a_2\, b_1)\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{a} \wedge \vec{b}.$$

3. *b*) Seja $F(t) = \sqrt{t-1}\,\vec{i} + \sqrt{t+1}\,\vec{j} + e^t\,\vec{k}$
onde $F(t) = (F_1(t), F_2(t), F_3(t))$.

Componentes de F: $\begin{cases} F_1(t) = \sqrt{t-1} \\ F_2(t) = \sqrt{t+1} \\ F_3(t) = e^t. \end{cases}$

F é contínua em $t_0 \Leftrightarrow F_i$ é contínua em t_0 para $i = 1, 2, 3$.
$F_1(t)$ é contínua para $t - 1 \geqslant 0 \Rightarrow t \geqslant 1$,
$F_2(t)$ é contínua para $t + 1 \geqslant 0 \Rightarrow t \geqslant -1$ e
$F_3(t)$ é contínua para todo $t \in \mathbb{R}$.
Portanto,
F é contínua no conjunto $\{t \in \mathbb{R} \mid t \geqslant 1\}$.

Exercícios 7.5

1. *a*) $\vec{F}(t) = (3t^2, e^{-t}, \ln(t^2+1))$.

$$\frac{d\vec{F}}{dt}(t) = ((3t^2)', (e^{-t})', (\ln(t^2+1))'),\text{ ou seja,}$$

$$\frac{d\vec{F}}{dt}(t) = \left(6t, -e^{-t}, \frac{2t}{t^2+1}\right).$$

$$\frac{d^2F}{dt^2}(t)=\left((6t)',\,(-e^{-t})',\,\left(\frac{2t}{t^2+1}\right)'\right),\text{ ou seja,}$$

$$\frac{d^2F}{dt^2}(t)=\left(6,\,e^{-t},\,\frac{2-2t^2}{(t^2+1)^2}\right).$$

c) $\vec{F}(t)=\text{sen}\,5t\,\vec{i}+\cos 4t\,\vec{j}-e^{-2t}\,\vec{k}$.

$$\frac{d\vec{F}}{dt}(t)=\frac{d}{dt}(\text{sen}\,5t)\,\vec{i}+\frac{d}{dt}(\cos 4t)\,\vec{j}-\frac{d}{dt}(e^{-2t})\,\vec{k}\text{, ou seja,}$$

$$\frac{d\vec{F}}{dt}(t)=5\cos 5t\,\vec{i}-4\,\text{sen}\,4t\,\vec{j}+2e^{-2t}\,\vec{k}.$$

$$\frac{d^2F}{dt^2}(t)=\frac{d}{dt}(5\cos 5t)\,\vec{i}-\frac{d}{dt}(4\,\text{sen}\,4t)\,\vec{j}+\frac{d}{dt}(2e^{-2t})\,\vec{k}\text{, ou seja,}$$

$$\frac{d^2F}{dt^2}(t)=-\,25\,\text{sen}\,5t\,\vec{i}-16\cos 4t\,\vec{j}-4\,e^{-2t}\,\vec{k}.$$

2. ***b***) Sejam $G(t)=(t^2,\,t)$ e $G(1)$.

$\dfrac{dG}{dt}(t)=(2t,\,1)\ \Rightarrow\ (2,\,1)$ é o vetor tangente à trajetória de G, em $G(1)$.

Então, $X=G(1)+\lambda\dfrac{dG}{dt}(1)$ é a reta tangente à trajetória de G no ponto $G(1)=(1,\,1)$.
Logo $(x,\,y)=(1,\,1)+\lambda\,(2,\,1);\ \lambda\in\mathbb{R}$, é a reta procurada.

c) Seja $F(t)=\left(\dfrac{1}{t},\dfrac{1}{t},t^2\right)$.

$\dfrac{dF}{dt}(t)=\left(-\dfrac{1}{t^2},-\dfrac{1}{t^2},2t\right)$, daí

$\dfrac{dF}{dt}(2)=\left(-\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{4},4\right)$ é o vetor tangente à trajetória de F no ponto $F(2)$.

Reta tangente:

$(x,\,y,\,z)=F(2)+\lambda\dfrac{dF}{dt}(2)$, ou seja,

$$(x,\,y,\,z)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},4\right)+\lambda\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},4\right).$$

4. Como $\vec{F}:I\to\mathbb{R}^3$ é derivável até 2.ª ordem em I, temos:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{F}(t)\wedge\frac{d\vec{F}}{dt}(t)\right)=\underbrace{\frac{d\vec{F}}{dt}(t)\wedge\frac{d\vec{F}}{dt}(t)}_{0}+\vec{F}(t)\wedge\frac{d^2F}{dt^2}(t).$$

Por hipótese: $\dfrac{d^2F}{dt^2}(t) = \lambda\vec{F}(t)$.

Então $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{F}(t) \wedge \dfrac{d\vec{F}}{dt}(t)\right) = \vec{F}(t) \wedge \lambda\vec{F}(t) = \vec{0}$, para todo t em I.

Logo, $\vec{F}(t) \wedge \dfrac{d\vec{F}}{dt}(t) = k$ (constante) em I.

6. $\vec{r}(t) \wedge \dfrac{d\vec{r}}{dt}(t) = k$. Daí

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\vec{r}(t) \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right)} = \frac{d}{dt}(k), \text{ ou seja,}$$

$$\vec{r}(t) \wedge \frac{d^2r}{dt^2}(t) + \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}(t) \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}(t)}_{0} = \vec{0}$$

Logo $r(t) \wedge \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) = \vec{0}$ em $\mathbb{R}$.

Exercícios 7.6

1. *b*) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left[\text{sen } 3t\,\vec{i} + \frac{1}{1+t^2}\,\vec{j} + \vec{k}\right]dt$

$$= \left[\int_{-1}^{1}\text{sen } 3t\,dt\right]\vec{i} + \left[\int_{-1}^{1}\frac{dt}{1+t^2}\right]\vec{j} + \left[\int_{-1}^{1}dt\right]\vec{k}$$

$$= \left[-\frac{1}{3}\cos 3t\right]_{-1}^{1}\vec{i} + \left[\text{arctg } t\right]_{-1}^{1}\vec{j} + [t]_{-1}^{1}\,\vec{k}$$

$$= \left[-\frac{1}{3}\cos 3 + \frac{1}{3}\underbrace{\cos(-3)}_{\cos 3}\right]\vec{i} + [\text{arctg } 1 - \text{arctg }(-1)]\,\vec{j}$$

$$+ [1-(-1)]\,\vec{k} = \left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\vec{j} + 2\vec{k} = \frac{\pi}{2}\,\vec{j} + 2\vec{k}.$$

2. *a*) $\vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t & 1 & e^t \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-e^t)\vec{i} + (e^t - t)\vec{j} + (t-1)\,\vec{k}$.

$$\int_0^1(\vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t))\,dt = \left[\int_0^1(1-e^t)\,dt\right]\vec{i} + \left[\int_0^1(e^t - t)\,dt\right]\vec{j} + \left[\int_0^1(t-1)\,dt\right]\vec{k}$$

$$= \left[t - e^t\right]_0^1 \vec{i} + \left[e^t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 \vec{j} + \left[\frac{t^2}{2} - t\right]_0^1 \vec{k}$$

$$= (2 - e)\vec{i} + \left(e - \frac{3}{2}\right)\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}.$$

3. Seja $\vec{F} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ contínua,
$\vec{F}(t) = (F_1(t), F_2(t), ..., F_n(t))$.

Seja $\vec{G}(t) = \int_0^t \vec{F}(s)\, ds,\ t \in [a, b]$. Temos

$$\vec{G}(t) = \left(\underbrace{\int_0^t F_1(s)\, ds}_{G_1(t)}, \underbrace{\int_0^t F_2(s)\, ds}_{G_2(t)}, ..., \underbrace{\int_0^t F_n(s)\, ds}_{G_n(t)}\right)$$

Se $\vec{F} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é contínua, então cada componente F_i de F é contínua.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, sendo F_i definida e contínua no intervalo $[a, b]$, a função G_i dada por $G_i(t) = \int_0^t F_i(s)\, ds,\ t \in [a, b]$ $(i = 1, 2, ..., n)$ é uma primitiva de F_i em $[a, b]$, isto é, $G_i'(t) = F_i(t)$ para todo t em $[a, b]$.

Assim:

$$\frac{d\vec{G}}{dt}(t) = (\underbrace{G_1'(t)}_{F_1(t)}, \underbrace{G_2'(t)}_{F_2(t)}, ..., \underbrace{G_n'(t)}_{F_n(t)}) = F(t).$$

4. *a*) $I = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\, dt$. Temos

$$I = \int_0^2 (t\vec{i} + \vec{j} + t^2\vec{k})\, dt = \left[\int_0^2 t\, dt\right]\vec{i} + \left[\int_0^2 dt\right]\vec{j} + \left[\int_0^2 t^2\, dt\right]\vec{k}$$

$$= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 \vec{i} + [t]_0^2\, \vec{j} + \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 \vec{k} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \frac{8}{3}\vec{k}.$$

Exercícios 7.7

1. *a*) $\gamma(t) = (t \cos t,\ t \operatorname{sen} t) \quad t \in [0, 2\pi]$. Daí

$\gamma'(t) = (-t \operatorname{sen} t + \cos t,\ t \cos t + \operatorname{sen} t)$ e, portanto,

$$\| \gamma'(t) \| = \sqrt{(-t \operatorname{sen} t + \cos t)^2 + (t \cos t + \operatorname{sen} t)^2}$$

$$= \sqrt{t^2(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) + (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)} = \sqrt{t^2 + 1}.$$

O comprimento da curva é:

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{t^2+1}\; dt.$$

Façamos a mudança de variável:

$t = \operatorname{tg} u$; $dt = \sec^2 u\, du$
$t = 0$; $u = 0$
$t = 2\pi$; $u = \operatorname{arctg} 2\pi$

$$L(\gamma) = \int_0^{\operatorname{arctg} 2\pi} \underbrace{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}}_{\sec u}\, \sec^2 u\, du = \int_0^{\operatorname{arctg} 2\pi} \sec^3 u\, du$$

$$= \int_0^{\operatorname{arctg} 2\pi} \underset{\substack{\uparrow \\ f}}{\sec u} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ g'}}{\sec^2 u}\, du = \Big[\sec u \operatorname{tg} u\Big]_0^{\operatorname{arctg} 2\pi} - \int_0^{\operatorname{arctg} 2\pi} \underbrace{\sec u \operatorname{tg} u}_{f'}\, \underset{g}{\operatorname{tg} u}\, du$$

$$= \Big[\sec u \operatorname{tg} u\Big]_0^{\operatorname{arctg} 2\pi} - \int_0^{\operatorname{arctg} 2\pi} \sec u\,(\sec^2 u - 1)\, du$$

ou seja $2 \displaystyle\int_0^{\operatorname{arctg} 2\pi} \sec^3 u\, du = \Big[\sec u \operatorname{tg} u\Big]_0^{\operatorname{arctg} 2\pi} + \int_0^{\operatorname{arctg} 2\pi} \sec u\, du$

Portanto:

$$L(\gamma) = \int_0^{\operatorname{arctg} 2\pi} \sec^3 u\, du = \frac{1}{2}\Big[\sec u \operatorname{tg} u\Big]_0^{\operatorname{arctg} 2\pi} + \frac{1}{2}\Big[\ln(\sec u + \operatorname{tg} u)\Big]_0^{\operatorname{arctg} 2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{\sec(\operatorname{arctg} 2\pi)}_{\sqrt{1+4\pi^2}} \cdot 2\pi - \cancelto{1}{\sec 0}\, \cancelto{0}{\operatorname{tg} 0}\right] + \frac{1}{2}\left[\ln\big(\underbrace{\sec(\operatorname{arctg} 2\pi)}_{\sqrt{1+4\pi^2}} + 2\pi\big) - \underbrace{\ln(\cancelto{1}{\sec 0} + \cancelto{0}{\operatorname{tg} 0})}_{0}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1+4\pi^2} \cdot 2\pi + \frac{1}{2}\left(\ln\left(\sqrt{1+4\pi^2} + 2\pi\right)\right), \text{ ou seja,}$$

$$L(\gamma) = \pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right).$$

c) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, e^{-t})$ $t \in [0, \pi]$.

$\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, -e^{-t})$.

$\|\gamma'(t)\|^2 = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + e^{-2t} = 1 + e^{-2t}$.

$$L(\gamma) = \int_0^{\pi} \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{\pi} (1+e^{-2t})^{\frac{1}{2}}\, dt.$$

Façamos a mudança de variável

$e^{-t} = \text{tg }\theta; \quad -e^{-t}\,dt = \sec^2\theta\,d\theta; \quad dt = -\dfrac{\sec^2\theta}{\text{tg }\theta}\,d\theta$

$t = 0; \;\; \theta = \dfrac{\pi}{4} \; 1 + \text{tg}^2\,\theta = \sec^2\,\theta$

$t = \pi; \;\; \theta = \text{arctg } e^{-\pi}.$

Temos:

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1+e^{-2t}}\;dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\text{arctg } e^{-\pi}} -\frac{\sec^3\theta}{\text{tg }\theta}\,d\theta = \int_{\text{arctg } e^{-\pi}}^{\pi/4} \text{cossec }\theta\; \overbrace{\sec^2\theta}^{(1+\text{tg}^2\,\theta)}\;d\theta$$

$$= \int_{\text{arctg } e^{-\pi}}^{\pi/4} \text{cossec }\theta\,d\theta + \int_{\text{arctg } e^{-\pi}}^{\pi/4} \text{cossec }\theta\,\text{tg}^2\,\theta\,d\theta$$

$$= \int_{\text{arctg } e^{-\pi}}^{\pi/4} \text{cossec }\theta\,d\theta + \int_{\text{arctg } e^{-\pi}}^{\pi/4} (\cos\theta)^{-2}\,\text{sen }\theta\,d\theta$$

$$= \Big[\ln(\text{cossec }\theta - \cot\theta)\Big]_{\text{arctg } e^{-\pi}}^{\pi/4} + \left[-\frac{(\cos\theta)^{-1}}{(-1)}\right]_{\text{arctg } e^{-\pi}}^{\pi/4} \qquad ①$$

Agora:

$$\text{cossec }\theta - \cot\theta = \frac{1}{\text{sen }\theta} - \frac{\cos\theta}{\text{sen }\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\text{sen }\theta}$$

$$\frac{1-\cos{}^{\pi}\!/_{4}}{\text{sen }{}^{\pi}\!/_{4}} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}-1 \qquad ②$$

$$\frac{1-\cos(\text{arctg } e^{-\pi})}{\text{sen}(\text{arctg } e^{-\pi})} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{1+e^{-2\pi}}}}{\frac{e^{-\pi}}{\sqrt{1+e^{-2\pi}}}} = \frac{\sqrt{1+e^{-2\pi}}-1}{e^{-\pi}}\,\frac{(\sqrt{1+e^{-2\pi}}+1)}{(\sqrt{1+e^{-2\pi}}+1)}$$

$$= \frac{1+e^{-2\pi}-1}{e^{-\pi}(\sqrt{1+e^{-2\pi}}+1)} = \frac{e^{-\pi}}{\sqrt{1+e^{-2\pi}}+1} \qquad ③$$

$$\Big[(\cos\theta)^{-1}\Big]_{\text{arctg } e^{-\pi}}^{\pi/4} = \left[\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^{-1} - (\cos \text{arctg } e^{-\pi})^{-1}\right]$$

$$= \left[\sqrt{2} - \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{-2\pi}}}\right)^{-1}\right] = \sqrt{2} - \sqrt{1+e^{-2\pi}} \qquad ④$$

Substituindo ②, ③ e ④ em ①:

$$L(\gamma) = \ln(\sqrt{2}-1) - \ln\frac{e^{-2\pi}}{\sqrt{1+e^{-2\pi}}+1} + \sqrt{2} - \sqrt{1+e^{-2\pi}},$$

$$L(\gamma) = \ln(\sqrt{2}-1) - (-\pi)\underbrace{\ln e}_{1} + \ln(\sqrt{1+e^{-2\pi}}+1) + \sqrt{2} - \sqrt{1+e^{-2\pi}},$$

$$L(\gamma) = \ln(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{1+e^{-2\pi}}+1) + \pi + \sqrt{2} - \sqrt{1+e^{-2\pi}}$$

ou seja

$$L(\gamma) = \ln\frac{\sqrt{1+e^{-2\pi}}+1}{\sqrt{2}+1} + \pi + \sqrt{2} - \sqrt{1+e^{-2\pi}}.$$

***f*)** Seja $\gamma:[0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ tal que $x(t) = 1 - \cos t$ e $y(t) = t - \operatorname{sen} t$

$x'(t) = \operatorname{sen} t$ e $y'(t) = 1 - \cos t$

$\gamma'(t) = (\operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$

$\|\gamma'(t)\|^2 = \operatorname{sen}^2 t + (1-\cos t)^2 = 2(1-\cos t) = 2\cdot 2\operatorname{sen}^2\frac{t}{2} = 4\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}$

$$L(\gamma) = \int_0^\pi \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^\pi 2\operatorname{sen}\frac{t}{2}\,dt = 4\left[-\cos\frac{t}{2}\right]_0^\pi$$

$$= 4\left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0\right) = 4.$$

6. *a*) Seja $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$, com derivada contínua e tal que $\|\gamma'(t)\| \neq 0$ em $[a,b]$.

Seja $s: [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $s(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\|\,du.$

Nestas condições a função $s = s(t)$ é inversível. Seja $t = t(s)$ sua inversa.

A curva $\delta: [0, L] \to \mathbb{R}^n$ dada por $\delta(s) = \gamma(t(s))$ está parametrizada pelo comprimento de arco (reparametrização de γ pelo comprimento de arco).

Portanto, $\gamma(t) = (2t+1, 3t-1)$ $t \geqslant 0$. Temos

$\gamma'(t) = (2, 3)$ e daí

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$. Segue

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{13}\,du = \sqrt{13}\,t \Rightarrow t(s) = \frac{1}{\sqrt{13}}\,s. \text{ Daí}$$

$$\delta(s) = \gamma(t(s)) = \left(\frac{2s}{\sqrt{13}}+1, \frac{3s}{\sqrt{13}}-1\right).$$

***b*)** $\gamma(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t)$, $t \geqslant 0$.

$\gamma'(t) = (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t)$ e daí

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4\operatorname{sen}^2 t + 4\cos^2 t} = 2$. Segue que

$$s(t) = \int_0^t 2\,du = 2t \quad\Rightarrow\quad t(s) = \frac{1}{2}s \text{ e, portanto,}$$

$$\delta(t) = \gamma(t(s)) = \left(2\cos\frac{s}{2}, 2\operatorname{sen}\frac{s}{2}\right).$$

d) $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t)$, $t \geqslant 0$. Temos

$\gamma'(t) = (e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t, e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t)$ e daí

$\| \gamma'(t) \|^2 = e^{2t} [(\cos t - \operatorname{sen} t)^2 + (\operatorname{sen} t + \cos t)^2] = 2e^{2t}$, ou seja,

$\| \gamma'(t) \| = e^t \sqrt{2}$. Então

$s(t) = \int_0^t e^u \sqrt{2}\, du = \sqrt{2}\, e^t - \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad e^t = \frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \Rightarrow t(s) = \ln \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, ou seja,

$$\delta(s) = \gamma(t(s)) = \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \left(\cos\left(\ln \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right), \operatorname{sen}\left(\ln \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right).$$

CAPÍTULO 8

Exercícios 8.1

1.

Seja $f(x, y) = 3x + 2y$.

a) $f(1, -1) = 3 \cdot 1 + 2\,(-1) = 1.$

d) $\dfrac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} = \dfrac{3x + 2y + 2k - 3x - 2y}{k} = 2$

2. Seja $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + 2y}$.

a) $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y \neq 0\}$, ou seja,

$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq -2y\}$.

4. $f(x, y) = ax + by$. Temos
$f(1, 0) = a \quad \Rightarrow \quad a = 2$ e
$f(0, 1) = b \quad \Rightarrow \quad b = 3$
Logo, $f(x, y) = 2a + 3b$.

5.

a) $f(x, y) = \dfrac{x^3 + 2xy^2}{x^3 - y^3}$. Temos

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^3 x^3 + 2\lambda^3 xy^2}{\lambda^3 x^3 - \lambda^3 y^3} = \lambda^0\ \frac{x^3 + 2xy^2}{x^3 - y^3}, \text{ ou seja,}$$

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y)$. Logo,
f é homogênea de grau zero.

d) $f(x, y) = \dfrac{2}{x^2 + y^2}$. Temos

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{2}{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} = \lambda^{-2} \cdot \frac{2}{x^2 + y^2}.$$

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{-2} f(x, y) \ \Rightarrow\ f$ é homogênea de grau -2.

6. $f(a, b) = a$ para todo (a, b) com $a^2 + b^2 = 1$ e
f é homogênea de grau 2.

a) $f(4\sqrt{3}, 4) = f \cdot \left(8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, 8 \cdot \frac{1}{2}\right).$

Como f é homogênea de grau 2, segue:

$$f\left(8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, 8 \cdot \frac{1}{2}\right) = 8^2\ f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 64 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3},$$

pois $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$ e $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

c) $f(x, y) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$

Como f é homogênea de grau 2 segue:

$$f(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 f\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Desde que $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 = 1,$ segue:

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = x\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exercícios 8.2

4.

a) Seja $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 3$ e $A = \mathbb{R}^2$.

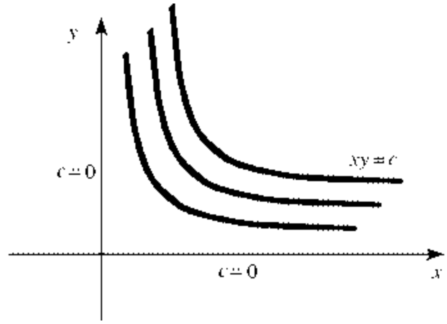
Para cada c real, a curva de nível de f correspondente a $z = c$ é $f(x, y) = c$, ou seja:
$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 3 = c \ \Rightarrow\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = c - 3.$

As curvas de nível de f são circunferências concêntricas de centro $(1, 1)$ e raio $\sqrt{c - 3}$.
Logo, $c \geqslant 3$. Temos $c_{\text{mín}} = 3$ e $f(1, 1) = 3$ o valor mínimo de f em $A = \mathbb{R}^2$.
Não admite valor máximo.

($f(x, y) \geqslant f(1, 1)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, logo, $f(1, 1)$ é valor mínimo de f)

c) Seja $f(x, y) = xy$ e $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 \text{ e } y \geqslant 0\}$.

Para cada c real, a curva de nível correspondente a $z = c$ é $xy = c$ (hipérboles).
Se $c = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$
Observamos que o valor mínimo de f é atingido quando $c = 0$ (nos eixos coordenados).
Logo, $f(x, y) = 0$ é valor mínimo atingido nos pontos $(x, 0)$, $x \geqslant 0$, ou $(0, y)$, $y \geqslant 0$. Não há valor máximo.



g) Sejam $f(x, y) = xy$ e $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 = 1, y \geqslant 0\}$.

Vamos considerar os valores de f sobre A. Então,

$$4x^2 + y^2 = 1, y \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{1 - 4x^2}.$$

Definimos $g(x) = f(x, \sqrt{1 - 4x^2})$

Assim, $g(x) = x. \sqrt{1 - 4x^2}$ e $D_g = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$.

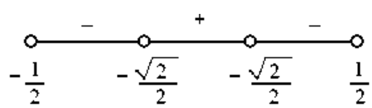
Temos

$$g'(x) = \frac{1 - 8x^2}{\sqrt{1 - 4x}}.$$

$g'(x) < 0$ em $\left]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right[$ e

em $\left]\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right[$;

$g'(x) > 0$ em $\left]-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right[$.

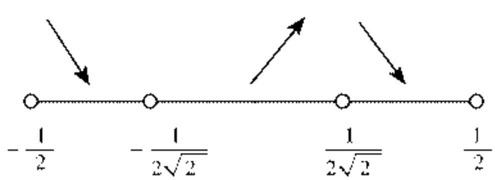


VARIAÇÃO DO SINAL DE g'

Como g é contínua no intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ segue que

g é estritamente crescente em $\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right]$ e estritamente decrescente em $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right]$ e em $\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right]$.

Assim,



Portanto, $g\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{1}{4}$ é valor mínimo de g e

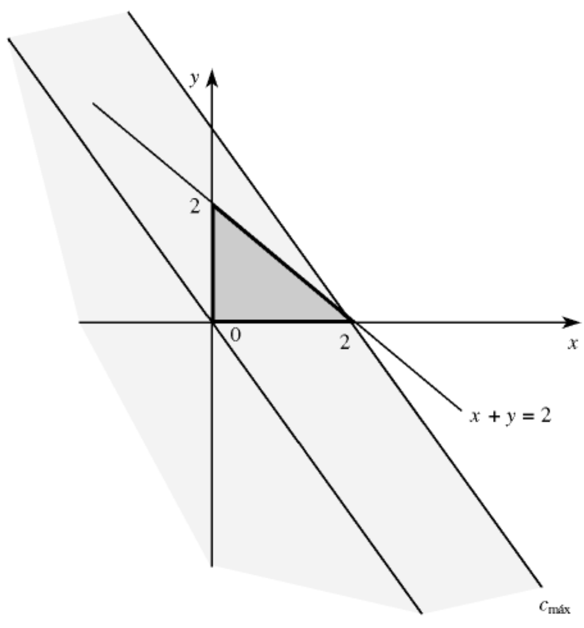
$g\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{4}$ é valor máximo de g.

(Observe que $g\left(-\dfrac{1}{2}\right) = g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0.$)

5.

a) Sejam $f(x, y) = 2x + y + 3$ e $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0 \text{ e } x + y \leqslant 2\}$.

Para cada real c, a curva de nível correspondente a $z = c$ é a reta $2x + y + 3 = c$. Assim, as curvas de nível são retas paralelas. Atendendo às condições impostas por A, indicando por $c_{\text{mín}}$ o valor mínimo de f em A, a reta para $z = c_{\text{mín}}$ deve ser aquela que passa por (0, 0). Portanto, $f(0, 0) = 3$ é o valor mínimo de f em A. A reta para $z = c_{\text{máx}}$ deve ser aquela que passa por (2, 0). Portanto, $f(2, 0) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$ é o valor máximo de f em A.



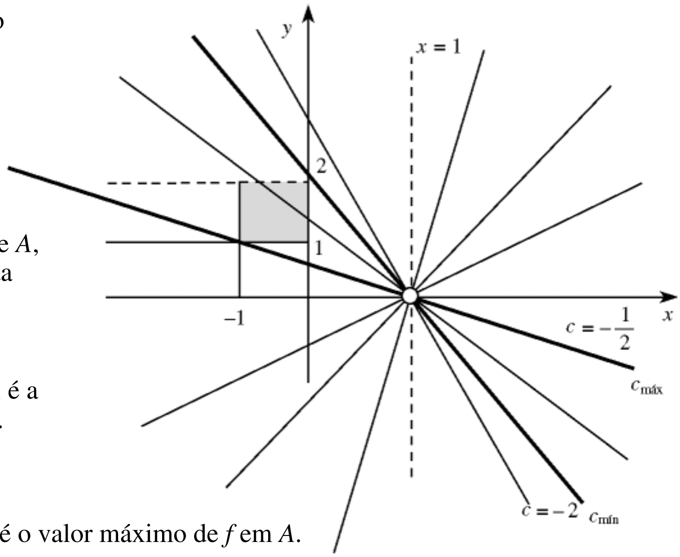
c) Sejam $f(x, y) = \dfrac{y}{x-1}$ e $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 0 \text{ e } 1 \leqslant y \leqslant 2\}$

As curvas de nível de *f* são as retas

$$\frac{y}{x-1} = c \quad x \neq 1$$

$y = c(x - 1)$

Atendendo às condições de *A*, o valor mínimo de *f* é a reta que passa por (0, 2)
Portanto, $f(0, 2) = -2$ é o valor mínimo de *f* em *A*.
O valor máximo de *f* em *A* é a reta que passa por $(-1, 1)$.



Portanto, $f(-1, 1) = -\dfrac{1}{2}$ é o valor máximo de *f* em *A*.

6. Seja $z = xy$ onde $x = 5 - t$ e $y = t^2 + 3$, $t \in [0, 4]$.
Considerando
$z(t) = (5 - t)(t^2 + 3)$.
Vamos achar os valores máximo e mínimo de z em [0, 4].

$$z'(t) = (5 - t)(2t) + (t^2 + 3)(-1)$$
$$= -3t^2 + 10t - 3.$$

$z'(t) = 0 \Rightarrow t = 3$ ou $t = \dfrac{1}{3}$.

$z''(t) = -6t + 10$.
$z''(3) = -8 < 0$ (3 é máximo local).

$z''\left(\dfrac{1}{3}\right) = +8 > 0 \left(\dfrac{1}{3} \text{ é mínimo local}\right)$.

Como $z(0) = 15$ e $z(4) = 19$, segue que
$z(3) = (5 - 3)(9 + 3) = 24 \Rightarrow z(3) = 24$ é a altura máxima e

$z\left(\dfrac{1}{3}\right) = \left(5 - \dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{9} + 3\right) = \dfrac{14}{3} \cdot \dfrac{28}{9} = \dfrac{392}{27} \Rightarrow z\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{392}{27}$ é a altura mínima.

7. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$.
$x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$.
Vamos minimizar $z(x) = f(x, 1 - x)$.
De $z(x) = f(x, 1 - x) = x^2 + (1 - x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$, segue
$z'(x) = 4x - 2$.

$z'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

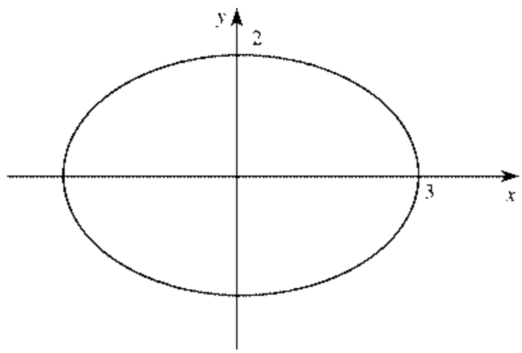
De $z''(x) = 4 > 0$, para todo x, segue que $x = \dfrac{1}{2}$ é ponto de mínimo global.

Portanto, $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ é a solução procurada.

12.

a) $\underbrace{T(x, y)}_{z\,=\,36°} = 4x^2 + 9y^2.$

Logo, $4x^2 + 9y^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \quad$ (elipse)



b) $y = x - 1$

$z(x) = T(x, x - 1) = 4x^2 + 9(x - 1)^2$, ou seja,

$z(x) = 13x^2 - 18x + 9.$

$z'(x) = 26x - 18.$

$z'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{18}{26} = \dfrac{9}{13}.$

De $z''(x) = 26 > 0$, para todo x, segue que $x = \dfrac{9}{13}$ é ponto de mínimo global de $z = z(x)$.

$y = x - 1 = \dfrac{9}{13} - 1 = -\dfrac{4}{13}$

Logo, $\left(\dfrac{9}{13}, -\dfrac{4}{13}\right)$ é o ponto de mais baixa temperatura em $x + y = 1$. (Observe que a isoterma que passa por este ponto é tangente, neste ponto, à reta $x + y = 1$. Faça uma figura e confira.)

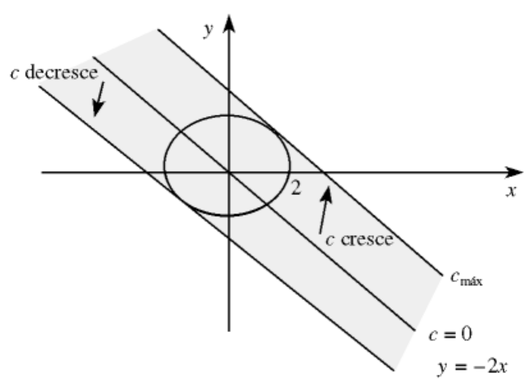
13.

b) Sejam $T(x, y) = 2x + y$ e $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

As curvas de nível (isotermas) de $T(x, y)$ são as retas $2x + y = c$.

Indicando por $c_{\text{máx}}$ a mais alta temperatura em A, a reta para $z = c_{\text{máx}}$ deve ser a tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 4$.

Da mesma forma, para $z = c_{\text{mín}}$, a reta deve ser tangente à circunferência



$x^2 + y^2 = 4$. Vamos determinar c para que a reta $2x + y = c$ seja tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 4$. Logo, devemos determinar c para que o sistema

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 2x + y = c \end{cases}$ tenha solução única.

Assim, $y = c - 2x$,

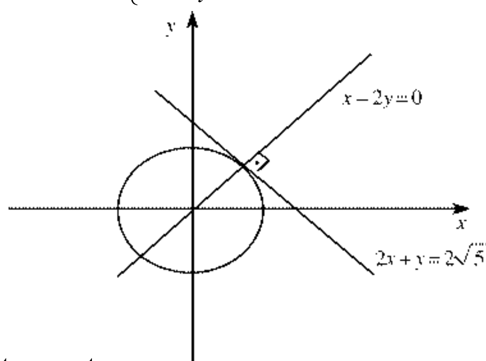
$x^2 + (c - 2x)^2 = 4$ e

$5x^2 - 4\,cx + c^2 - 4 = 0$.

Para que o sistema tenha solução única, o discriminante deve ser igual a zero.

$\Delta = 16c^2 - 20\,(c^2 - 4) \;\Rightarrow\; 24c^2 + 80 = 0 \;\Rightarrow\; c = \pm 2\sqrt{5}$.

Logo, $c = 2\sqrt{5}\,°\mathrm{C}$ é a temperatura mais alta em A e $c = -2\sqrt{5}\,°\mathrm{C}$ é a temperatura mais baixa em A. O ponto de mais alta temperatura é o ponto em que a reta $2x + y = 2\sqrt{5}$ tangencia à circunferência, que é a solução do sistema $\begin{cases} 2x + y = 2\sqrt{5} \\ x - 2y = 0 \end{cases}$



onde $x - 2y = 0$ é a reta que passa pela origem e é perpendicular a $2x + y = 2\sqrt{5}$.

Resolvendo o sistema $\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5}, \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ é o ponto de mais alta temperatura.

Analogamente, resolvendo o sistema

$\begin{cases} 2x + y = -2\sqrt{5} \\ x - 2y = 0 \end{cases}$, verificamos que

$\left(-\dfrac{4\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ é o ponto de mais baixa temperatura.

Exercícios 8.3

3. Sejam C_1 e C_2 duas superfícies de nível de uma função $f(x, y, z)$. O gráfico de $f = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid w = f(x, y, z)\ (x, y, z) \in A\}$. Assim, $f(x, y, z) = c_1$ é a superfície de nível correspondente ao nível $w = c_1$ e

$f(x, y, z) = c_2$ é a superfície de nível correspondente ao nível $w = c_2$.

Então, C_1 e C_2 não podem ter ponto comum (não se interceptam).

De fato, se $(x, y, z) \in C_1$ temos $f(x, y, z) = c_1$; se $(x, y, z) \in C_2$ temos $f(x, y, z) = c_2$ o que é um absurdo se $c_1 \neq c_2$, pois f teria, num mesmo ponto (x, y, z), dois valores distintos.

CAPÍTULO 9

Exercícios 9.1

1. ***a***) $$\lim_{(x,\, y) \to (0,\, 0)} \overset{\nearrow 0}{x} \cdot \underbrace{\text{sen}\, \frac{1}{x^2 + y^2}}_{\text{limitada}} = 0$$

f) $$\lim_{(x,\, y) \to (0,\, 0)} \frac{x + y}{x - y} \cdot$$

Seja $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y} \cdot$

Tomemos γ_1 e γ_2 tais que $\gamma_1(t) = (t, 0)$ e $\gamma_2(t) = (0, t)$. Segue que:

$$\lim_{t \to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{t}{t} = 1 \text{ e}$$

$$\lim_{t \to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{t}{-t} = -1.$$

Como $\lim\limits_{t \to 0} f(\gamma_1(t)) \neq \lim\limits_{t \to 0} f(\gamma_2(t))$ temos que

$$\lim_{(x,\, y) \to (0,\, 0)} \frac{x + y}{x - y} \text{ não existe.}$$

g) $\lim\limits_{(x,\, y) \to (0,\, 0)} \dfrac{xy}{y - x^3}$. Seja $f(x, y) = \dfrac{xy}{y - x^3}$.

Tomemos $\gamma_1(t) = (0, t)$ e $\gamma_2(t) = \left(\sqrt[3]{t - t^2},\, t\right)$.

Segue que

$$\lim_{t \to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0 \text{ e}$$

$$\lim_{t \to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{t \sqrt[3]{t - t^2}}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 - t}}{\sqrt[3]{t^2}} = \infty$$

Logo, o limite dado não existe. (**Outro modo**. Se o limite fosse L, L real, existiria $r > 0$ tal que para todo (x, y) no domínio da função teríamos

① $$0 < \|(x, y)\| < r \Rightarrow L - 1 < f(x, y) < L + 1.$$

Porém, para todo $x_0 > 0$, $f(x_0, y) = \dfrac{x_0 y}{y - x_0^3}$ tende a $+\infty$ quando y tende a x_0^3 pela esquerda e isto contradiz ①.)

h) *Sugestão*: considere as curvas $\gamma_1(t) = (0, t)$ e $\gamma_2(t) = \left(\sqrt{t^4 + t^2}, t\right)$, $t > 0$.

4. Seja $f(x, y) = x^2 + y$. Temos

$f(x + h, y + k) = (x + h)^2 + y + k = x^2 + 2xh + h^2 + y + k$ e

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{f(x + h, y + k) - f(x, y) - 2xh - k}{\|(h, k)\|}$$

$$= \lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{h^2}{\sqrt{h^2 + k^2}}.$$

De $\dfrac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leqslant 1$ para $(h, k) \neq (0, 0)$ e $\displaystyle\lim_{(h, k) \to (0, 0)} h = 0$

segue

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{h^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h, k) \to (0, 0)} \overset{\nearrow 0}{h} \cdot \underbrace{\frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}}}_{\text{limitada}} = 0.$$

5. $f(x, y) = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$. Temos

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{f(h, k)}{\|(h, k)\|} = \lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{h^3}{(h^2 + k^2)^{3/2}}.$$

Seja $\varphi(h, k) = \dfrac{h^3}{(h^2 + k^2)^{3/2}}$.

Tomemos $\gamma_1(t) = (t, 0)$ e $\gamma_2(t) = (t, t)$.

$$\lim_{t \to 0} \varphi(\gamma_1(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{t^3}{t^3} = 1 \qquad ①$$

$$\lim_{t \to 0} \varphi(\gamma_2(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{t^3}{(2t^2)^{3/2}} = \lim_{t \to 0} \frac{t^3}{2\sqrt{2}\, t^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad ②$$

① é diferente de ②, portanto não existe $\displaystyle\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{f(h, k)}{\|(h, k)\|}$.

7. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{\text{sen}\,(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

Seja $u = x^2 + y^2$. Se $(x, y) \to (0, 0)$, então $u \to 0$.

Logo,

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{\text{sen}\,(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{\text{sen}\, u}{u} = 1.$$

Exercícios 9.2

1. *a*) A função $f(x, y) = 3x^2 y^2 - 5xy + 6$ é contínua em $\mathbb{R}^2$ pois $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = 3x_0^2 y_0^2 - 5x_0 y_0 + 6 = f(x_0, y_0)$ para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Logo uma função polinomial de duas variáveis é contínua em $\mathbb{R}^2$.

***c*)** A função $f(x, y) = \ln \dfrac{x - y}{x^2 + y^2}$ é composta das funções $g(x, y) = \dfrac{x - y}{x^2 + y^2}$ e $h(u) = \ln u$.

A função g é uma função racional contínua em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

A função h é contínua para $u > 0$. Portanto, $h(g(x, y))$ é contínua quando $g(x, y) > 0$, ou seja, $x - y > 0$.

Então, $f(x, y) = \ln \dfrac{x - y}{x^2 + y^2}$ é contínua no conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$.

e) Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x - 3y}{x^2 + y^2} & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ \\ 0 & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Nos pontos $(x, y) \neq (0, 0)$, a função $f(x, y)$ é contínua pois é quociente de funções contínuas. ($x - y$ e $x^2 + y^2$ são contínuas e $x^2 + y^2$ não se anula nos pontos $(x, y) \neq (0, 0)$).

A composta de f com a reta $\gamma(t) = (t, t)$ é

$$f(\gamma(t)) = \begin{cases} -\dfrac{1}{t} & \text{se} \quad t \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se} \quad t = 0 \end{cases}$$

Como γ é contínua em $t = 0$ e a composta $f(\gamma(t))$ não é contínua em $t = 0$ $\left(\lim\limits_{t \to 0} f(\gamma(t)) \neq f(\gamma(0))\right)$ resulta que f não é contínua em $(0, 0)$.

Portanto, f é contínua no conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$.

g) Seja $f(x, y) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{r^2 - 1}\right)} & \text{se } r < 1 \text{ onde } r = \|(x, y)\| \\ \\ 0 & \text{se } r \geqslant 1 \end{cases}$

Essa função é contínua em todos os pontos $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x_0^2 + y_0^2 < 1$ ou $x_0^2 + y_0^2 > 1$ ($r < 1$ e $r > 1$) pois nesses casos $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Vamos analisar como fica $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ quando $x_0^2 + y_0^2 = 1$.

Para que o $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ exista, seja qual for a forma pela qual nos aproximamos de (x_0, y_0) através de pontos do domínio de f, $f(x, y)$ deve se aproximar do mesmo valor. Assim:

$$\lim_{\substack{(x, y) \to (x_0, y_0) \\ x^2 + y^2 < 1}} f(x, y) = \lim_{r \to 1^-} e^{\frac{1}{r^2 - 1}}. \text{ Mas } \frac{1}{r^2 - 1} \to -\infty \text{ e } e^{\frac{1}{r^2 - 1}} \to 0,$$

logo $\lim\limits_{\substack{(x,\, y) \to (x_0,\, y_0) \\ x^2 + y^2 < 1}} f\,(x,\, y) = 0$ e $\lim\limits_{\substack{(x,\, y) \to (x_0,\, y_0) \\ x^2 + y^2 > 1}} f\,(x,\, y) = \lim 0 = 0.$

Portanto, f é contínua em todo $\mathbb{R}^2$.

2. Seja $f\,(x,\, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{se} \quad (x,\, y) \neq (0,\, 0) \\ \\ 0 & \text{se} \quad (x,\, y) = (0,\, 0) \end{cases}$

Nos pontos $(x,\, y) \neq (0,\, 0)$ a função $f\,(x,\, y)$ é contínua pois xy^2 e $x^2 + y^2$ são funções contínuas e $x^2 + y^2$ não se anula nos pontos $(x,\, y) \neq (0,\, 0)$. Logo, $f\,(x,\, y)$ é um quociente de funções contínuas com denominador diferente de zero.

Vamos estudar a continuidade no ponto (0, 0). Temos:

$$\lim_{(x,\, y) \to (0,\, 0)} f\,(x,\, y) = \lim_{(x,\, y) \to (0,\, 0)} x \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\left(\lim_{(x,\, y) \to (0,\, 0)} x = 0 \text{ e } \left| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right| \leqslant 1 \text{ para todo } (x,\, y) \neq (0,\, 0). \right.$$

Assim, $\lim\limits_{(x,\, y) \to (0,\, 0)} f\,(x,\, y) = 0 = f\,(0,\, 0)$ e f é contínua em (0, 0).

Portanto, f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

5. Veja respostas da Seção 9.2 na página 447.

Capítulo 10

Exercícios 10.1

1. *a*) $f(x, y) = 5x^4y^2 + xy^3 + 4$.

Devemos olhar y como constante e derivar em relação a x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 20x^3y^2 + y^3.$$

Devemos olhar x como constante e derivar em relação a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 10x^4y + 3xy^2.$$

***c*)**

Nos pontos $(x, y) \neq (0, 0)$ aplicamos a regra do quociente:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2}\right) = \frac{(x^2 + y^2)(3x^2) - (x^3 + y^2)(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \text{ e}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2}\right) = \frac{(x^2 + y^2)(2y) - (x^3 + y^2)\,2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^2y(1 - x)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

No ponto $(x, y) = (0, 0)$ (supondo $z(0, 0) = 0$).

$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0)$ é a derivada, em $x = 0$, de $g(x) = z(x, 0) = x$, $x \neq 0$.

Assim $g(x) = z(x, 0) = \begin{cases} x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$. Segue que $\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = g'(0) = 1$.

$\frac{\partial z}{\partial y}(0, 0)$ é (caso exista) a derivada, em $y = 0$, de $h(y) = z(0, y) = 1$, $y \neq 0$.

Assim $h(y) =$

$\begin{cases} 1 & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$. Então $h(y)$ não é contínua em 0 e $h'(0) = \frac{\partial z}{\partial y}(0, 0)$ não existe.

d) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(e^{-x^2-y^2}) = e^{-x^2-y^2} \cdot (-2x) = -2x\, e^{-x^2-y^2} \text{ e}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(e^{-x^2-y^2}) = e^{-x^2-y^2} \cdot (-2y) = -2y\, e^{-x^2-y^2}$$

l) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^2 + 3} = (x^3 + y^2 + 3)^{\frac{1}{3}}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}((x^3 + y^2 + 3)^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3}(x^3 + y^2 + 3)^{-\frac{2}{3}}(3x^2) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^2 + 3)^2}} \text{ e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}((x^3 + y^2 + 3)^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3}(x^3 + y^2 + 3)^{-\frac{2}{3}}(2y) = \frac{2y}{3\sqrt[3]{(x^3 + y^2 + 3)^2}}.$$

m) $z = \dfrac{x \text{ sen } y}{\cos(x^2 + y^2)}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x \text{ sen } y}{\cos(x^2 + y^2)}\right) = \frac{\cos(x^2 + y^2) \text{ sen } y - (x \text{ sen } y)[-\text{sen}(x^2 + y^2)(2x)]}{[\cos(x^2 + y^2)]^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\text{sen } y\,[\cos(x^2 + y^2) + 2x^2 \text{ sen}(x^2 + y^2)]}{[\cos(x^2 + y^2)]^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x \text{ sen } y}{\cos(x^2 + y^2)}\right) = \frac{\cos(x^2 + y^2)\, x \cos y - x \text{ sen } y\,[-\text{sen}(x^2 + y^2)(2y)]}{[\cos(x^2 + y^2)]^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x \cos y \cos(x^2 + y^2) + 2xy \text{ sen } y \text{ sen}(x^2 + y^2)}{[\cos(x^2 + y^2)]^2}.$$

3. Seja $g(x, y) = \phi\left(\dfrac{x}{y}\right)$, onde $\phi\colon\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável e $\phi'(1) = 4$.

a) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\phi\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{1}{y}\phi'\left(\dfrac{x}{y}\right)$

$\dfrac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = \phi'(1) = 4.$

b) $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\phi\left(\dfrac{x}{y}\right) = -\dfrac{x}{y^2}\phi'\left(\dfrac{x}{y}\right)$

$\dfrac{\partial g}{\partial y}(1, 1) = -\phi'(1) = -4.$

6. $pV = nRT \quad \Rightarrow \quad p = nR\dfrac{T}{V}.$

$\dfrac{\partial p}{\partial V} = nRT\,\dfrac{\partial}{\partial V}\left(\dfrac{1}{V}\right) = nRT\left(-\dfrac{1}{V^2}\right)$ (olhando n, R e T como constante e derivando em relação a V)

$$\frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{nRT}{V^2}.$$

$\dfrac{\partial p}{\partial T} = \dfrac{nR}{V}\,\dfrac{\partial}{\partial T}(T) = \dfrac{nR}{V}$ (olhando n, R e V como constantes e derivando em relação a T).

7. Seja $z = e^y\,\phi(x-y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(e^y\,\phi(x-y)) = e^y\,\phi'(x-y). \quad ①$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^y\,\phi(x-y)) = e^y\,\phi'(x-y)\cdot \underbrace{(-1)}_{\frac{\partial}{\partial y}(x-y)} + \phi(x-y)\,e^y. \quad ②$$

Somando ① e ②:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = e^y\,\phi'(x-y)) - e^y\,\phi'(x-y) + \underbrace{e^y\,\phi(x-y)}_{z}$$

Logo,

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z\cdot$$

10. Seja a equação $xyz + z^3 = x$. Derivando em relação a x (mantendo y constante):

$$xy\,\frac{\partial z}{\partial x} + yz + 3z^2\,\frac{\partial z}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(xy + 3z^2) = 1 - yz$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 - yz}{xy + 3z^2}.$$

Derivando em relação a y (olhando x como constante)

$$xy\frac{\partial z}{\partial y} + xz + 3z^2\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(xy + 3z^2) = -xz$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz}{xy + 3z^2}.$$

13. Sejam $w = xy + z^4$, $z(1, 1) = 1$ e $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = 4$,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y + 4z^3 \frac{\partial z}{\partial x}, \text{ daí}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = 1 + 4 \cdot 4 = 17.$$

15. Seja $f(x, y) = \int_0^{x^2+y^2} e^{-t^2}\, dt$. Considerando $F(t) = e^{-t^2}$ e $u(x, y) = x^2 + y^2$, temos

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^{u(x,\, y)} F(t)\, dt\right) = F(u)\frac{\partial u}{\partial x} \text{ e, portanto,}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x, y) = e^{-(x^2+y^2)^2} \cdot 2x = 2x\, e^{-(x^2+y^2)^2}.$$

Analogamente:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = F(u)\frac{\partial u}{\partial y}, \text{ ou seja,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y\, e^{-(x^2+y^2)^2}.$$

16. $f(x, y) = \int_{x^2}^{y^2} e^{-t^2}\, dt = \int_{x^2}^{0} e^{-t^2}\, dt + \int_0^{y^2} e^{-t^2}\, dt$

$$= -\int_0^{x^2} e^{-t^2}\, dt + \int_0^{y^2} e^{-t^2}\, dt.$$

Considerando $F(t) = e^{-t^2}$, $u(x) = x^2$ e $v(y) = y^2$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\int_0^{x^2} e^{-t^2}\, dt\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^{y^2} e^{-t^2}\, dt\right)$$

$$= -F(u)\frac{du}{dx} + F(v)\frac{dv}{dx}. \text{ Portanto,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x\, e^{-x^4}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[-\int_0^{x^2} e^{-t^2}\, dt\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_0^{y^2} e^{-t^2}\, dt\right] =$$

$= -F(u)\,\dfrac{du}{dy} + F(v)\,\dfrac{dv}{dy}$. Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y\, e^{-y^4}$$

18. Seja $f(x, y) = x^3y^2 - 6\,xy + \phi(y)$. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - 6x + \phi'(y)$$

Comparando com $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - 6x + \dfrac{y}{y^2+1}$, resulta

$\phi'(y) = \dfrac{y}{y^2+1}$. Daí

$$\phi(y) = \int \frac{y\,dy}{y^2+1} = \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + c.$$

Portanto,

$$\phi(y) = \frac{1}{2}\ln(1+y^2).$$

21. *b*) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}\right) = e^{\left(\frac{1}{x^2+y^2-1}\right)} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2-1}\right)$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\dfrac{2x}{(x^2+y^2-1)^2}\, e^{\left(\frac{1}{x^2+y^2-1}\right)}$, se $x^2 + y^2 < 1$ e

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ se $x^2 + y^2 > 1$. Para $x^2 + y^2 = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ tem que ser calculado pela definição. Lembrando que $f(x, y) = 0$ para $x^2 + y^2 = 1$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{u \to x} \frac{f(u, y) - f(x, y)}{u - x}$$

$= \lim\limits_{u \to x} \dfrac{f(u, y)}{u - x}$. Para $|u| > |x|$, $f(u, y) = 0$, logo tal limite é zero. Para $|u| < |x|$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{u \to x} \frac{e^{\frac{1}{u^2 + y^2 - 1}}}{u - x} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Aplicando L'Hospital,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{u \to x} e^{\frac{1}{u^2 + y^2 - 1}}\, \frac{-2u}{(u^2 + y^2 - 1)^2}.$$

Fazendo $s = \dfrac{1}{u^2 + y^2 - 1}$, para $u \to x$, $s \to -\infty$, temos

$$\lim_{u \to x} e^{\frac{1}{u^2 + y^2 - 1}} \frac{1}{(u^2 + y^2 - 1)^2} = \lim_{s \to -\infty} e^s s^2$$

$$= \lim_{s \to -\infty} \frac{s^2}{e^{-s}} = 0.$$

Daí, para $|u| < |x|$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\lim_{u \to x} e^{\frac{1}{u^2 + y^2 - 1}} \frac{1}{(u^2 + y^2 - 1)^2} \lim_{u \to x} 2u = 0.$$

Assim, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ para $x^2 + y^2 = 1$.

Conclusão:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{-2x}{(x^2 + y^2 - 1)} e^{\frac{1}{x^2 + y^2 - 1}} & \text{se } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 \geqslant 1 \end{cases}$$

Do mesmo modo mostra-se que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{-2y}{(x^2 + y^2 - 1)^2} e^{\frac{1}{x^2 + y^2 - 1}} & \text{se } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 \geqslant 1 \end{cases}$$

23.

a) $z(t) = f(t, t) = t^2 + t^2 = 2t^2$

c) $\gamma(t) = (t, t, 2t^2)$.

$\gamma'(t) = (1, 1, 4t) \Rightarrow \gamma'(1) = (1, 1, 4)$

Reta tangente a γ no ponto $(1, 1, 2)$

$(x, y, z) = (1, 1, 2) + \lambda(1, 1, 4)$.

d) Seja o plano $z - f(1, 1) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1)$.

O ponto $(1, 1, 2)$ pertence ao plano.

O vetor $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1), \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1), -1\right) = (2, 2, -1)$ é normal ao plano. Agora $(1, 1, 4) \cdot (2, 2, -1) = 0$. Portanto, o vetor $\gamma'(1) = (1, 1, 4)$ é ortogonal ao vetor $(2, 2, -1)$

normal ao plano. Logo, a reta tangente T: $(x, y, z) = (1, 1, 2) + \lambda(1, 1, 4)$ está contida no plano de equação

$$z - f(1,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1).$$

29. ***a***) $f(x, y) = x^2 + y^2$. Temos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x, y) = (0, 0) \text{ é ponto crítico ou estacionário}.$$

f) $f(x, y) = x^4 + 4xy + y^4$. Temos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 4y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4x. \end{cases} \qquad \begin{cases} x^3 + y = 0 \\ y^3 + x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = -x^3.$$

Portanto,

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1. \end{cases}$$

Daí $\begin{cases} y = 0 \\ y = \mp 1. \end{cases}$

Pontos críticos $(0, 0)$; $(1, -1)$; $(-1, 1)$.

Exercícios 10.2

1. ***a***) Seja $f(x, y, z) = x\,e^{x - y - z}$. Temos

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = xe^{x - y - z} + e^{x - y - z} = (x + 1)\,e^{x - y - z}$ (y e z são olhadas como constantes),

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -xe^{x - y - z}$ (x e z são olhadas como constantes) e

$\dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\,x\,e^{x-y-z}$ (x e y são olhadas como constantes).

c) $w = \dfrac{xyz}{x + y + z}$.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{(x+y+z)\,yz - xyz}{(x+y+z)^2} = \frac{y+z}{(x+y+z)^2},$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{(x+y+z)\,xz - xyz}{(x+y+z)^2} = \frac{x+z}{(x+y+z)^2} \text{ e}$$
$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{(x+y+z)\,xy - xyz}{(x+y+z)^2} = \frac{x+y}{(x+y+z)^2}.$$

e)

$s = xw \ln(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)$

$\frac{\partial s}{\partial x} = w\left[\ln(x^2+y^2+z^2+w^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2+z^2+w^2}\right]$ (y, z, w são olhadas como constantes),

$$\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{2xyw}{x^2+y^2+z^2+w^2},$$
$$\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{2xzw}{x^2+y^2+z^2+w^2} \text{ e}$$
$$\frac{\partial s}{\partial w} = x\left[\ln(x^2+y^2+z^2+w^2) + \frac{2w^2}{x^2+y^2+z^2+w^2}\right].$$

4. Sejam $g(x, y, z) = \int_0^{x+y^2+z^4} f(t)\,dt$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua com $f(3) = 4$.

c) $\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = f(u)\,\frac{du}{dz}$ onde $u = x + y^2 + z^4$. Assim,

$\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = f(x + y^2 + z^4)\cdot 4z^3$. Daí

$$\frac{\partial g}{\partial z}(1, 1, 1) = f(3)\cdot 4 = 4\cdot 4 = 16.$$

6. Sejam ϕ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que $\phi'(3) = 4$ e $g(x, y, z) = \phi(x^2 + y^2 + z^2)$

a) $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = \phi'(x^2 + y^2 + z^2)\cdot 2x$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1, 1) = \phi'(3)\cdot 2 = 4\cdot 2 = 8.$$

b) $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = \phi'(x^2+y^2+z^2)\cdot 2y$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(1, 1, 1) = \phi'(3)\cdot 2 = 8.$$

c) $\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = \phi'(x^2 + y^2 + z^2)\cdot 2z$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(1, 1, 1) = \phi'(3)\cdot 2 = 8.$$

CAPÍTULO 11

Exercícios 11.1

1. *d*) $f(x, y) = \dfrac{1}{xy}$.

Nos pontos (x, y), $x = 0$ ou $y = 0$, $f(x, y)$ não está definida, logo nestes pontos f não é diferenciável. Seja, então, (x, y), com $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

$$f \text{ é diferenciável em } (x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} a)\ f \text{ admite derivadas parciais em } (x, y) \\[2ex] b)\ \displaystyle\lim_{(h,\ k) \to (0,\, 0)} \frac{E\,(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0 \end{cases}$$

onde:

$$E(h, k) = f\,(x + h, y + k) - f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot h - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot k\,.$$

$$E(h, k) = \frac{1}{(x + k)(y + k)} - \frac{1}{xy} + \frac{h}{x^2 y} + \frac{k}{xy^2}$$

pois $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{1}{x^2 y}$ e $\dfrac{df}{dy} = -\dfrac{1}{xy^2}$.

$$E(h, k) = \frac{h^2 y^2 + h^2 ky + k^2 x^2 + hkxy + hk^2 x}{(x + h)(y + k)\, x^2 y^2}\text{. Temos}$$

$$\lim_{(h,\, k) \to (0,\, 0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = \lim_{(h,\, k) \to (0,\, 0)} \frac{1}{(x + h)(y + k)\, x^2 y^2} \cdot \frac{h^2 y^2 + h^2 ky + k^2 x^2 + hkxy + hk^2 x}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$\lim_{(h,\, k) \to (0,\, 0)} \frac{1}{(x + h)(y + k)\, x^2 y^2} = \frac{1}{x^3 y^3}$$

$$\lim_{(h,\, k) \to (0,\, 0)} \frac{h^2 y^2}{\sqrt{h^2 + y^2}} = \lim_{(h,\, k) \to (0,\, 0)} \overset{0}{h y^2}\ \underbrace{\frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}}}_{\text{limitada}} = 0$$

$$\lim_{(h,\,k)\to(0,\,0)} \overset{0}{\cancel{h^2 y}}\ \underbrace{\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\text{limitada}} = 0$$

$$\lim_{(h,\,k)\to(0,\,0)} \overset{0}{\cancel{kx^2}}\ \underbrace{\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\text{limitada}} = 0 \qquad \lim_{(h,\,k)\to(0,\,0)} \overset{0}{\cancel{hxy}}\ \underbrace{\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\text{limitada}} = 0$$

$$\lim_{(h,\,k)\to(0,\,0)} \overset{0}{\cancel{k^2 x}}\ \underbrace{\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\text{limitada}} = 0. \quad \text{Logo} \lim_{(h,\,k)\to(0,\,0)} \frac{E(h,\,k)}{\|(h,\,k)\|} = 0.$$

$f(x,\,y) = \dfrac{1}{xy}$ é uma função diferenciável em todo $(x,\,y)$, com $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

***f*)** $f(x,\,y) = x^2 + y^2$

Vamos provar que f é diferenciável em todo $(x,\,y)$ de $\mathbb{R}^2$. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\,y) = 2x \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,\,y) = 2y.$$

Além disso:

$$\begin{aligned}
E(h,\,k) &= f(x+h,\,y+k) - f(x,\,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,\,y)\cdot h - \frac{\partial f}{\partial y}(x,\,y)\cdot k \\
&= (x+h)^2 + (y+k)^2 - x^2 - y^2 - 2xh - 2yk \\
&= h^2 + k^2
\end{aligned}$$

$$\text{e} \lim_{(h,\,k)\to(0,\,0)} \frac{E(h,\,k)}{\underbrace{\|(h,\,k)\|}_{\neq}} = \lim_{(h,\,k)\to(0,\,0)} \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,\,k)\to(0,\,0)} \left[h\,\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} + k\,\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} \right] = 0.$$

Como f admite derivadas parciais em todo $(x,\,y) \in D_f = \mathbb{R}^2$ e $\displaystyle\lim_{(h,\,k)\to(0,\,0)} \frac{E(h,\,k)}{\|(h,\,k)\|} = 0$ então f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Exercícios 11.2

1. ***f*)** Seja $f(x, y) = \text{arctg } xy$. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{1 + x^2 y^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 y^2}.$$

Então $f(x, y)$ é uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, isto é, $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$.

Logo $f(x, y) = \text{arctg } xy$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Exercícios 11.3

1. ***e*)** Seja $f(x, y) = \text{arctg } (x - 2y)$.

Para que f admita plano tangente no ponto $(2, \frac{1}{2}, f(2, \frac{1}{2}))$ f deve ser diferenciável em $(2, \frac{1}{2})$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1 + (x - 2y)^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-2}{1 + (x - 2y)^2}.$$

Da continuidade de $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ em $\mathbb{R}^2$, segue que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, logo f é diferenciável em $(2, \frac{1}{2})$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2, \frac{1}{2}) = -1$$

Equação do plano tangente:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

$$z - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x - 2) - (y - \frac{1}{2}) \text{ e, portanto,}$$

$$z = \frac{x}{2} - y - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

Equação da reta normal:

$$(x, y, z) = (2, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}) + \lambda\,(\frac{1}{2}, -1, -1).$$

***f*)** Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Plano tangente:

$$z - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\,(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\,(y - \frac{1}{2}) \text{ ou seja, } z = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}.$$

Reta normal:

$$(x, y, z) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}) + \lambda\,(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

5. ***a***) Plano tangente em (1, 1, 1)

$$2x + y + 3z = 6 \text{ ou seja, } z = -\frac{2}{3}\,x - \frac{1}{3}\,y + 2.$$

Por outro lado:

$$z - 1 = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)\,(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)\,(y - 1)$$

e daí

$$z = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)}_{-\frac{2}{3}} \cdot x + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)}_{-\frac{1}{3}} \cdot y - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) - \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) + 1}_{2}.$$

Portanto, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = -\frac{2}{3}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = -\frac{1}{3}$.

b) Reta normal:

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

ou seja,
$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda\,(2, 1, 3)$.

7. Seja $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$. O plano tangente em (x_0, y_0, z_0), $z_0 = f(x_0, y_0)$, é

$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\,(x_0, y_0)\,(y - y_0)$. Para que tal plano passe pela origem, devemos ter

$$f(x_0, y_0) = x_0\,\frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0, y_0) + y_0\,\frac{\partial f}{\partial y}\,(x_0, y_0).$$

De

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^4 + 3\,x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2}$$

segue

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^5 + x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3}{x^2+y^2} = f(x, y).$$

Logo, o plano tangente em (x_0, y_0, z_0) passa pela origem.

10. Sejam $f(x, y) = 2 + x^2 + y^2$ e

$$g(x, y) = -x^2 - y^2.$$

Equação do plano tangente β em $(a, b, f(a, b))$:

$$z - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,(y-b)$$
$$z = 2 + a^2 + b^2 + 2a(x-a) + 2b(y-b)$$
$$z = 2 - a^2 - b^2 + 2ax + 2by. \quad ①$$

Reta normal ao gráfico de f em $(a, b, f(a, b))$

$(x, y, z) = (a, b, f(a, b)) + \lambda(2a, 2b, -1)$.

Seja $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ o ponto em que β tangencia o gráfico de g.

Reta normal ao gráfico de g em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(-2x_0, -2y_0, -1)$.

Os vetores $(2a, 2b, -1)$ e $(-2x_0, -2y_0, -1)$ são paralelos. Logo o produto vetorial é nulo.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2a & 2b & -1 \\ -2x_0 & -2y_0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow (-2b - 2y_0)\,\vec{i} + (2x_0 + 2a)\,\vec{j} + (4bx_0 - 4ay_0)\,\vec{k} = 0$$

Daí $x_0 = -a$ e $y_0 = -b$.

$(-a, -b, g(-a, -b)) = (-a, -b, -a^2 - b^2) \in \beta$ (plano tangente)

Substituindo em ①:

$$-a^2 - b^2 = 2 - a^2 - b^2 + 2a(-a) + 2b(-b) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 1.$$

13. Considere $f(x, y) = x \cdot g(\underbrace{x^2 - y^2}_{u})$ onde $g(u)$ é função derivável de uma variável.

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x \cdot g'(u) \cdot 2x + g(u) = 2x^2\, g'(u) + g(u)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot g'(u) \cdot (-2y) = -2xy\, g'(u).$$

Daí

$$f(a, a) = a \frac{\partial f}{\partial x}(a, a) + a \frac{\partial f}{\partial y}(a, a)$$

que é a condição para que o plano tangente em $(a, a, f(a, a))$

$$z - f(a, a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, a)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, a)(y - a)$$

passe pela origem.

15. $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} E(x, y) = 0$, pois, para $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, tem-se

$$E(x, y) = \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \cdot \frac{E(x, y)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|}.$$

Sendo $f(x, y)$ diferenciável em (x_0, y_0), será também contínua neste ponto. Segue que

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} \underbrace{[f(x, y) - a(x - x_0) - b(y - y_0) - c]}_{E(x, y)} = f(x_0, y_0) - c = 0,$$

logo, $c = f(x_0, y_0)$. Fazendo $y = y_0$ em $\dfrac{E(x, y)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|}$ resulta

$$\frac{E(x, y)}{\|(x, y_0) - (x_0, y_0)\|} = \frac{E(x, y_0)}{|x - x_0|} = \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0) - a(x - x_0)}{|x - x_0|}.$$

De $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} \dfrac{E(x, y)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0$ resulta $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{E(x, y_0)}{|x - x_0|} = 0$ que é equivalente a

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{E(x, y_0)}{x - x_0} = 0.$ Segue que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0) - a(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Daí, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = a$ e, portanto, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = a.$ Com raciocínio análogo, verifica-se que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = b.$

Exercícios 11.4

6. $P = \dfrac{V^2}{R}$. Temos

$\Delta P \cong dP.$

$$dP = \frac{2\,VRdV - V^2 dR}{R^2}.$$

$dV = -0{,}2$ volt e
$dR = 0{,}01$ ohm.

Substituindo

$$dP = \frac{2 \times 100 \times 10 \times (-0,2) - 10^4 \times 0,01}{10^2} = -5. \text{ Logo } \Delta P \cong -5\text{W}.$$

Exercícios 11.5

1.

a) $f(x, y) = x^2y$. Temos

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \Rightarrow \nabla f(x, y) = (2xy, x^2)$$

ou $\nabla f(x, y) = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$.

b) $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$. Temos

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2xe^{x^2-y^2}, -2y\, e^{x^2-y^2})$$

ou

$$\nabla f(x, y) = e^{x^2-y^2}\ (2x\vec{i} - 2y\vec{j}).$$

c) $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$. Temos

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}\right)$$

ou $\nabla f(x, y) = \dfrac{1}{y}\vec{i} - \dfrac{x}{y^2}\vec{j}$.

d) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$. Temos

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2}\right)$$

ou

$$\nabla f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}\vec{i} - \frac{x}{x^2 + y^2}\vec{j}.$$

6. Como estamos admitindo que a imagem de γ está contida na superfície de nível $f(x, y, z) = 1$, teremos $(x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2 = 1$, para todo t no domínio de γ. Derivando em relação a t, resulta

$2x(t)\,x'(t) + 2y(t)\,y'(t) + 2z(t)\,z'(t) = 0.$

Para $t = t_0$,
$(2x_0, 2y_0, 2z_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0$
e, portanto,
$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0.$
Como a curva γ é qualquer, podemos interpretar $\nabla f(x_0, y_0)$ como um vetor normal em (x_0, y_0, z_0) à superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

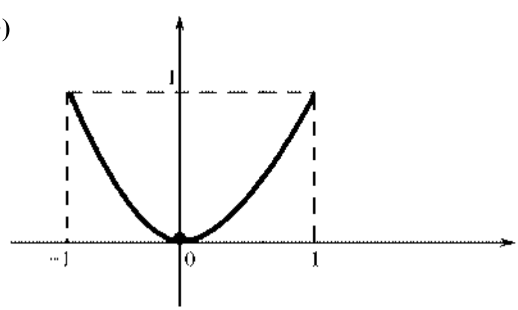
8. Seja $f(x, y) = xy$.
$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I$, é diferenciável e sua imagem está contida na curva de nível $f(x, y) = 2$.
Assim, para todo t em I, temos
$x(t)\,y(t) = 2.$
Derivando em relação a t, resulta
$x'(t)\,y(t) + x(t)\,y'(t) = 0,$
ou seja,
$(y(t), x(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) = 0$
e, portanto, para todo t em I,
$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0.$
A imagem da curva $\gamma(t) = \left(t, \dfrac{2}{t}\right), t > 0,$ está contida na curva de nível $xy = 2$.

9. Sejam $f(x, y) = y - x^2$ e $\gamma(t) = (\text{sen}\, t, \text{sen}^2\, t)$.

a) De $x(t) = \text{sen}\, t$ e $y(t) = \text{sen}^2\, t$ resulta
$y(t) - x^2(t) = \text{sen}^2\, t - \text{sen}^2\, t = 0$ para todo t. Logo,

$Im\gamma$ está contida na curva de nível $f(x, y) = 0$.

b)



A imagem de γ é o arco da parábola $y = x^2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

c) $\gamma'(t) \cdot \nabla f(\gamma(t)) = (\cos t, 2\,\text{sen}\, t \cos t)\cdot(-2\,\text{sen}\, t, 1)$
$= -2\,\text{sen}\, t \cos t + 2\,\text{sen}\, t \cos t = 0$

pois $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 1,\ \gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = (\cos t, 2 \operatorname{sen} t \cos t)$ e

$\nabla f(\gamma(t)) = (-2 \operatorname{sen} t, 1)$.

10. Seja $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$.

a) A imagem de $\gamma(t) = \left(\operatorname{sen} t, \dfrac{1}{2} \cos t, 0\right)$ está contida na superfície, pois

$x^2(t) + 4\,y^2(t) + 9\,z^2(t) = \operatorname{sen}^2 t + \dfrac{1}{4} \cos^2 t + 9 \cdot 0 = 1$, para todo t.

b) Sendo $\gamma(t)$ a curva do item ***a***), temos

$\nabla f(\gamma(t)) = (2 \operatorname{sen} t, 4 \cos t, 0)$

e

$\gamma'(t) = \left(\cos t, -\dfrac{1}{2} \operatorname{sen} t, 0\right)$.

Segue que

$$\begin{aligned}\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= (2 \operatorname{sen} t, 4 \cos t, 0) \cdot \left(\cos t, -\frac{1}{2} \operatorname{sen} t, 0\right)\\ &= 2 \operatorname{sen} t \cos t - 2 \operatorname{sen} t \cos t = 0.\end{aligned}$$

O gradiente é normal em $\left(\operatorname{sen} t, \dfrac{1}{2} \cos t, 0\right)$ à curva $\gamma(t)$.

CAPÍTULO 12

Exercícios 12.1

1. ***a***) $z = \text{sen}\, xy,\ x = 3t$ e $y = t^2$.

1.º Processo:

$z = \text{sen}\,(3t^3)$ e daí

$$\frac{dz}{dt} = 9t^2 \cos(3t^3).$$

2.º Processo:

$\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$. Temos

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = y \cos xy;\ \dfrac{dx}{dt} = 3;\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x \cos xy;\ \dfrac{dy}{dt} = 2t$ e daí

$\dfrac{dz}{dt} = 3\,y \cos xy + x\,(\cos xy)\cdot 2t$, ou seja,

$\dfrac{dz}{dt} = 3t^2 \cos 3t^3 + 6t^2 \cos 3t^3$ e, portanto,

$\dfrac{dz}{dt} = 9t^2 \cos 3t^3.$

b) $z = x^2 + 3y^2,\ x = \text{sen}\, t$ e $y = \cos t$.

1.º Processo:

$z = \text{sen}^2\, t + 3\cos^2 t$ e daí

$$\frac{dz}{dt} = 2\,\text{sen}\, t \cos t - 6\,\text{sen}\, t \cos t = -\,4\,\text{sen}\, t \cos t.$$

2.º Processo:

$\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$. Temos

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x;\ \dfrac{dx}{dt} = \cos t;\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 6y;\ \dfrac{dy}{dt} = -\text{sen}\, t.$ Segue que

$$\frac{dz}{dt} = 2x \cos t - 6y \text{ sen } t, \text{ ou seja,}$$

$$\frac{dz}{dt} = 2 \text{ sen } t \cos t - 6 \text{ sen } t \cos t \text{ e, portanto,}$$

$$\frac{dz}{dt} = -4 \text{ sen } t \cos t.$$

4. $f(t^2, 2t) = t^3 - 3t,$

$x = t^2$ e $y = 2t.$

$\dfrac{dx}{dt} = 2t;\ \dfrac{dy}{dt} = 2$ e $\dfrac{df}{dt} = 3t^2 - 3$. Temos

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Em $(x, y) = (1, 2)$, $t^2 = 1$ e $2t = 2$. Portanto, $t = 1$.

$$3t^2 - 3 = 2t\,\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) + 2\,\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$$

$$0 = 2\,\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) + 2\,\frac{\partial f}{\partial y}(1,2).$$

Ou seja: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2).$

5.

a) $f(3x,\ x^3) = \text{arctg } x$, para todo x. Segue que, para todo t, temos, também, $f(3t,\ t^3) = \text{arctg } t$. Derivando em relação a t,

$$\frac{d}{dt}\left[f(x,\ y)\right] = \frac{d}{dt}\left[\text{arctg } x\right], \text{ onde } x = 3t \text{ e } y = t^3.$$

Daí,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\ y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{dy}(x,\ y)\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1 + t^2}, \text{ para todo } t.$$

Para $t = 1$,

$$3\,\frac{\partial f}{\partial x}(3,\ 1) + 3\,\frac{\partial f}{dy}(3,\ 1) = \frac{1}{2}.$$

Tendo em vista que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3,\ 1) = 2$, resulta $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3,\ 1) = \dfrac{-11}{6}.$

b) Equação do plano tangente

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Em $(3, 1, f(3, 1))$, $x_0 = 3$, $y_0 = 1$ e $f(3, 1) = \text{arctg } 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

Substituindo:

$z - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(3, 1)\,(x - 3) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(3, 1)\,(y - 1)$ e, portanto,

$$z - \frac{\pi}{4} = -\frac{11}{6}\,(x - 3) + 2\,(y - 1).$$

9. Seja $g(t) = f\left(t, \dfrac{2}{t}\right), t > 0$. Considerando $x = t$ e $y = \dfrac{2}{t}$, temos

$g'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\dfrac{dy}{dt}$, onde $\dfrac{dx}{dt} = 1$ e $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{2}{t^2}$, ou seja,

$g'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\ y) - \dfrac{2}{t^2}\,\dfrac{\partial f}{\partial y}\,(x,\ y)$. Daí, para todo $t > 0$,

$$g'(t) = \frac{1}{t}\left[t\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{2}{t}\,\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \frac{1}{t}\underbrace{\left[x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right]}_{0 \text{ (por hipótese)}} = 0.$$

Logo, $g\,(t)$, $t > 0$ é constante.

12. Consideremos $F(x, y) = f\left(\underbrace{\dfrac{x}{y}}_{u}, \underbrace{\dfrac{y}{x}}_{v}\right)$.

$u(x, y) = \dfrac{x}{y}$; $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{y}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}$.

$v(x, y) = \dfrac{y}{x}$; $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2}$; $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{1}{x}$.

Pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{y}\,\frac{\partial f}{\partial u} + \left(-\frac{y}{x^2}\right)\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dy} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(-\frac{x}{y^2}\right)\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{x}\,\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Substituindo:

$$x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}=x\left[\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial f}{\partial v}\right]+y\left[-\frac{x}{y^2}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial v}\right].$$

Logo, $x\dfrac{\partial F}{\partial x}+y\dfrac{\partial F}{\partial y}=0$.

13. $u=f(w,z)$, onde $w=x+at$ e $z=y+bt$. Pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial w}\,\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial t}=a\,\frac{\partial f}{\partial w}+b\,\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial w}\,\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial w}=\frac{\partial f}{\partial w},\ \text{pois, }\ \frac{\partial w}{\partial x}=1\ \text{ e }\ \frac{\partial w}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial w}\,\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Segue que

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}.$$

17. Seja $g(x,y)=(x^2+y^2)f(u,v)$ onde $u=2x-y$ e $v=x+2y$.

$$\frac{\partial g}{\partial x}=2x\,f(u,v)+(x^2+y^2)\,\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x}\ \text{ onde }\ \frac{\partial u}{\partial x}=2\ \text{ e }\ \frac{\partial v}{\partial x}=1.$$

Logo, $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2\dfrac{\partial f}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial v}$.

Substituindo em $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ vem:

$$\frac{\partial g}{\partial x}=2x\,f(u,v)+(x^2+y^2)\left[2\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\right].$$

23. Seja $f(x,y,\underbrace{x^2+y^2}_{z})=0$ para todo (x, y).

Derivando em relação a x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x)}_{1}+\frac{\partial f}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(y)}_{0}+\frac{\partial f}{\partial z}\underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{2x}=0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}+2x\frac{\partial f}{\partial z}=0\ \Rightarrow\ \frac{\partial f}{\partial x}=-2x\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Derivando em relação a y:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(x)+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+2y\frac{\partial f}{\partial z}=0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial y}=-2y\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Em (1, 1, 2):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,2)=-2\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,2) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,2)=-2\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,2).$$

Portanto, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1,2)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,2)$.

24. Seja $F(x, y, z) = f\left(\underbrace{\frac{x}{y}}_{u}, \underbrace{\frac{y}{z}}_{v}, \underbrace{\frac{z}{x}}_{w}\right)$.

$$u(x,y,z)=\frac{x}{y};\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y};\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2};\ \frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

$$v(x,y,z)=\frac{y}{z};\ \frac{\partial v}{\partial x}=0;\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{z};\ \frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}.$$

$$w(x,y,z)=\frac{z}{x};\ \frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{z}{x^2};\ \frac{\partial w}{\partial y}=0;\ \frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{x}.$$

Aplicando a regra da cadeia e fazendo as substituições convenientes, segue:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{z}{x^2}\frac{\partial f}{\partial w},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{z}\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial w}.$$

Então:

$$x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}+z\frac{\partial F}{\partial z}=x\left[\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{z}{x^2}\frac{\partial f}{\partial w}\right]$$

$$+\,y\left[-\frac{x}{y^2}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{z}\frac{\partial f}{\partial v}\right]+z\left[-\frac{y}{z^2}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial w}\right]$$

e daí

$$x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}+z\frac{\partial F}{\partial z}=0.$$

25. Seja $F(xy,\ t) = 0$, onde $z = (x,\ y)$.

Fazendo $u = xy$ e $v = z$, sabemos que $\frac{\partial F}{\partial v}(u,\ v)\neq 0.$

Logo $\frac{\partial F}{\partial z}(xy,\ z)\neq 0.$

$\frac{\partial}{\partial x}[F(xy,\ z)]=0,$ pois $F(xy,\ z) = 0$.

Pela regra da cadeia

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\,[F\ (u,\ v)]}_{0}=\frac{\partial F}{\partial u}\cancelto{y}{\frac{\partial u}{\partial x}}+\frac{\partial F}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x}=y\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Daí, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-y\,\dfrac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$ $\qquad\qquad\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\neq 0\right)$

Analogamente:

$\frac{\partial}{\partial y}[F(xy,\ z)]=0,$ pois $F(xy,\ z) = 0$.

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\,[F\ (u,\ v)]}_{0}=\frac{\partial F}{\partial u}\cancelto{x}{\frac{\partial u}{\partial y}}+\frac{\partial F}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y}=x\frac{\partial F}{\partial u}+\underbrace{\frac{\partial F}{\partial z}}_{\neq 0}\,\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Daí, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\,x\,\dfrac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$

Substituindo:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=-\,xy\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial z}}+xy\,\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=0.$$

26. ***a***) $f(x,\ y)$ é homogênea de grau λ, em A, se $f\,(at,\ bt) = t^{\lambda} f\,(a,\ b)$ para todo $t > 0$ e para todo $(a,\ b) \in A$, com $(at,\ bt) \in A$.

Sejam $x = at$ e $y = bt$.

Derivando em relação a t os dois membros de $f(at, bt) = t^{\lambda} f(a, b)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{a} + \frac{\partial f}{\partial y}\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{b} = \lambda\, t^{\lambda-1}\, f(a, b).$$

Logo, $a\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(at, bt) + b\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(at, bt) = \lambda\, t^{\lambda-1}\, f(a,\ b)\ (t > 0)$, $(at, bt) \in$ A.

b) Na relação anterior fazendo $t = 1$, $a = x$ e $b = y$, obtemos a relação de Euler:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda f(x, y).$$

27. Para cada (a, b) em A, consideremos o maior intervalo aberto $I =]\ r, s\ ]$, com $r > 0$, tal que (at, bt) pertença a A para todo t em I; tal intervalo existe, pois A é uma bola aberta. Observe que $t = 1$ pertence a este intervalo. Para cada (a, b) em A, consideremos a função

$$g(t) = \frac{f(at,\ bt)}{t^{\lambda}},\ r < t < s.$$

Vamos mostrar que $g(t)$ é constante e igual a $f(a, b)$, para todo t em I. Daí seguirá $f(at, bt) = t^{\lambda} f(a, b)$, para todo $t > 0$ e para todo (a, b) em A, com (at, bt) em A. Para concluir que $g(t)$ é constante em I, e pelo fato de I ser um intervalo, basta mostrar que $g'(t) = 0$ em I. Temos

$$g'(t) = \frac{\dfrac{d}{dt}\left[f\ (at,\ bt)\right]t^{\lambda} - \lambda t^{\lambda-1}\ f(at,\ bt)}{t^{2\lambda}},\ \text{para } t \text{ em } I.$$

Pela regra da cadeia

$$\frac{d}{dt}\left[f(at,\ bt)\right] = \frac{\partial f}{\partial x}\ (at,\ bt)\ a + \frac{\partial f}{\partial y}(at,\ bt)\,b.$$

Substituindo na derivada acima, simplificando e lembrando da hipótese $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\ y) +\ y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\ y)\ =\ \lambda\, f(x, y)$, obtemos ($x = at$ e $y = bt$)

$$g'(t) = \frac{at\dfrac{\partial f}{\partial x}(at,\ bt) + bt\dfrac{\partial f}{\partial y}(at,\ bt) - \lambda\, f(at,\ bt)}{t^{\lambda+1}} = 0,\ \text{para todo } t \text{ em } I.$$

Logo, $g(t)$ é constante no intervalo I. Como $g(1) = f(a, b)$ e 1 pertence a I, resulta $g(t) = \dfrac{f(at,\ bt)}{t^{\lambda}}\ f(a, b)$, para todo t em I. Temos então

$f(at, bt) = t^{\lambda} f(a, b)$,

para todo $t > 0$ e para todo (a, b) em A, com (at, bt) em A. Ou seja, $f(x, y)$ é homogênea de grau λ em A.

29. A função dada verifica a equação $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = -f$ (relação de Euler) porque trata-se de função homogênea de grau (-1).

31. Supondo f diferenciável no aberto A e homogênea de grau λ, tem-se:

$f(tx, ty) = t^{\lambda} f(x, y)$

Derivando em relação a x os dois membros:

$$t\,\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^{\lambda}\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \qquad (t > 0)$$

Logo, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^{\lambda - 1}\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$.

Portanto, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é função homogênea de grau $\lambda - 1$.

Exercícios 12.2

3. ***a***) $e^{x+y+z} + xyz = 1$.
Seja $F(x, y, z) = e^{x+y+z} + xyz - 1$.

F é de classe C^1 no aberto $A = \mathbb{R}^3$. Observe que

$F(0, 0, 0) = 0$ e $\dfrac{\partial F}{\partial z}(0,0,0) = e^{x+y+z} + yx = 1 \neq 0$.

Pelo teorema das funções implícitas, a equação define uma função $z = g(x, y)$ de classe C^1 num aberto B do $\mathbb{R}^2$, com $(0, 0) \in B$.

A função $z = g(x, y)$ é diferenciável.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)} = -\frac{e^{x+y+z} + yz}{e^{x+y+z} + xy} \text{ e}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)} = -\frac{e^{x+y+z} + xz}{e^{x+y+z} + xy}.$$

b) $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - x - y - z$

F é de classe C^1 no aberto A $= \mathbb{R}^3$.

$F(1, 1, 1) = 0$ e $\dfrac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 1) = 2 \neq 0$.

Pelo teorema das funções implícitas, existirá uma bola aberta B de centro (1, 1) e um intervalo I, com $z_0 = 1 \in I$, tais que, para cada $(x, y) \in B$, existe um único $g(x, y) \in I$ com $F(x, y, g(x\ y)) = 0$.

A função $z = g(x, y)$ é diferenciável e

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)} = -\frac{3x^2 - 1}{3z^2 - 1} \text{ e}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)} = -\frac{3y^2 - 1}{3z^2 - 1}.$$

4. $x = F(x^2 + y, y^2)$, onde $y = y(x)$ e $F(u, v)$ são diferenciáveis.

Derivando em relação a x:

$$\frac{d}{dx}[x] = \frac{d}{dx}\left[F(x^2 + y, y^2\right], \text{ ou seja,}$$

$$1 = \frac{\partial F}{\partial u}(x^2 + y, y^2)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}(x^2 + y, y^2)\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$1 = \frac{\partial F}{\partial u}(x^2 + y, y^2)\left[2x + \frac{dy}{dx}\right] + \frac{\partial F}{\partial v}(x^2 + y, y^2)\, 2y\frac{dy}{dx}$$

$$1 - 2x\frac{\partial F}{\partial u}(x^2 + y, y^2) = \left[\frac{\partial F}{\partial u}(x^2 + y, y^2) + 2y\frac{\partial F}{\partial v}(x^2 + y, y^2)\right]\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x\dfrac{\partial F}{\partial u}(x^2 + y, y^2)}{\dfrac{\partial F}{\partial u}(x^2 + y, y^2) + 2y\dfrac{\partial F}{\partial v}(x^2 + y, y^2)}$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x\dfrac{\partial F}{\partial u}(u, v)}{\dfrac{\partial F}{\partial u}(u, v) + 2y\dfrac{\partial F}{\partial v}(u, v)}, \ u = x^2 + y \text{ e } v = y^2.$$

5. *a*) $y = g(x)$ é diferenciável no intervalo aberto I e dada implicitamente por $f(x, y) = 0$ com $f(x, y)$ de classe C^2. Uma condição necessária para que x_0 seja ponto de máximo local de g é que $g'(x_0) = 0$. Derivando em relação a x, $f(x, y) = 0$ (utilizando a regra da cadeia) temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, g'(x) = 0 \text{ e daí } g'(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)}, \text{ pois, por hipótese,}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$ em D_f. Como

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$$

resulta que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ é condição necessária para que x_0 seja ponto de máximo local de g.

b) $g'(x) = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)}$.

Derivando novamente, utilizando regra da cadeia, segue:

$$g''(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot g'(x)\right) - \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot g'(x)\right)}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

Substituindo $g'(x)$ por seu valor:

$$g''(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2 y}\cdot\left(-\dfrac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}\right)\right] - \dfrac{\partial f}{\partial x}\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\left(-\dfrac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}\right)\right]}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

$$g''(x) = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,\dfrac{\partial f}{\partial x}\,\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^3}.$$

Como $f(x, y)$ é suposta de classe C^2, f admite derivadas parciais de ordem 1 e 2 contínuas. Então $g''(x)$ é um quociente de funções contínuas $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y} \neq 0 \text{ em } D_f\right)$, logo, g'' é uma função contínua.

c) Uma condição suficiente para que x_0 seja ponto de máximo local de g é que $g'(x_0) = 0$ e $g''(x_0) < 0$.

Segue então dos itens (***a***) e (***b***) e que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e}$$

$$\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,\dfrac{\partial f}{\partial x}\,\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^3} > 0 \text{ em } (x_0, y_0)$$

é uma condição suficiente para x_0 ser ponto máximo local de $g(x)$.

7. São dados $f(u, v) = 0$, $u = \dfrac{x}{y}$, $v = \dfrac{z}{x^{\lambda}}$, $\lambda \neq 0$ constante, com $z = z(x, y)$ e $f(u, v)$ diferenciáveis e $\dfrac{\partial f}{\partial x}(u, v) \neq 0$. Queremos mostrar que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \lambda z$.
Derivando em relação a x e depois em relação a y os dois membros da equação $f(u, v) = 0$, obtemos

$$\frac{1}{y}\,\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\left(x^{-\lambda}\,\frac{\partial z}{\partial x} - \lambda x^{-\lambda-1}\, z\right) = 0$$

e

$$-\frac{x}{y^2}\,\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\left(x^{-\lambda}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Multiplicando a primeira equação por x, a segunda por y, somando membro as equações obtidas e lembrando que $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u, v) \neq 0$, resulta

$$x^{-\lambda}\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - \lambda z\right) = 0$$

e, portanto,

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} = \lambda z.$$

(Observe que pelos dados devemos ter obrigatoriamente $x \neq 0$.)

11. ***a***) $\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}$ é o determinante jacobiano de F e G em relação a x e y.

Sendo $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ e $G(x, y, z) = x + y + z$, temos

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 2y = 2(x - y).$$

b) Sendo $u = xyz$ e $v = x^3 + y^2$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} xz & xy \\ 2y & 0 \end{vmatrix} = -\,2xy^2.$$

c) Sendo $x = r + 3s + t^2$ e $y = r^2 - s^2 - 3t^2$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial s} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2r & -2s \end{vmatrix} = -\,2s - 6r = -\,2(s + 3r).$$

d) Sendo $x = r + 3s + t^2$ e $y = r^2 - s^2 - 3t^2$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2t \\ -2s & -6t \end{vmatrix} = -\,18t + 4st = -\,2t(9 - 2s).$$

Capítulo 14

Exercícios 14.1

1. ***b***) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x\, e^{x^2 - y^2}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y\, e^{x^2 - y^2}$. Temos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2xe^{x^2-y^2}) = 4x^2e^{x^2-y^2} + 2e^{x^2-y^2} = 2e^{x^2-y^2}(2x^2+1),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-2ye^{x^2-y^2}) = 4y^2e^{x^2-y^2} - 2e^{x^2-y^2} = 2e^{x^2-y^2}(2y^2-1),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-2ye^{x^2-y^2}) = -4xye^{x^2-y^2} \text{ e}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2xe^{x^2-y^2}) = -4xye^{x^2-y^2}.$$

c) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{1+x^2+y^2}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2y}{1+x^2+y^2}$. Temos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}\right) = \frac{(1+x^2+y^2)\cdot 2 - 2x\cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2+2y^2-2x^2}{(1+x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{1+x^2+y^2}\right) = \frac{2+2x^2-2y^2}{(1+x^2+y^2)^2} \text{ e}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{1+x^2+y^2}\right) = -\frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

2. Seja $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{(x^2+y^2)^2\cdot(-2) + 2x\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4}$, ou seja,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{6x^4+4x^2y^2-2y^4}{(x^2+y^2)^4}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{2x \cdot 2(x^2+y^2) \cdot 2y}{(x^2+y^2)^4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{8xy(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}.$$

Substituindo,

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,\ y) + y\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,\ y)$$

$$= \frac{6x^5 + 4x^3y^2 - 2xy^4 + 8x^3y^2 + 8xy^4}{(x^2+y^2)^4} = \frac{6x^5 + 12x^3y^2 + 6xy^4}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{6x(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{6x(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^4} = \frac{6x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= (-3) \cdot -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} = -3\frac{\partial f}{\partial x}(x,\ y).$$

Logo, $x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{y\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -3\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$. (**Observação.** Poderíamos ter chegado a este resultado sem fazer contas: é só observar que $\frac{\partial f}{\partial x}$ é homogênea de grau -3 e usar a relação de Euler.)

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{6x^4 + 4x^2y^2 - 2y^4}{(x^2+y^2)^4}$ e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{(x^2+y^2)^2 \cdot (-2) + 2y\, 2(x^2+y^2) \cdot 2y}{(x^2+y^2)^4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2x^4 - 4x^2y^2 - 2y^4 + 8x^2y^2 + 8y^4}{(x^2+y^2)^4} = \frac{-2x^4 + 4x^2y^2 + 6y^4}{(x^2+y^2)^4}.$$

Substituindo,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,\ y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,\ y) = \frac{6x^4 + 4x^2y^2 - 2y^4 - 2x^4 + 4x^2y^2 + 6y^4}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{4x^4 + 8x^2y^2 + 4y^4}{(x^2+y^2)^4} = \frac{4(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^4} = \frac{4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Portanto, a identidade se verifica:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,\ y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,\ y) = \frac{4}{(x^2+y^2)^2}.$$

3. $f(x,\ y) = \ln(x^2 + y^2)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{(x^2 + y^2) \cdot 2 - 2x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \text{ e daí}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2y^2 - 2x^2 + 2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

5. Como f, g: $A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, são funções de classe C^2**,** conclui-se que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \text{ e}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial g}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 0.$$

Analogamente,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ e}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

6. Como f: $A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 no aberto A (f e todas as derivadas parciais de 1.ª e 2.ª ordens são contínuas), pelo teorema de Schwarz, temos:

a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$

c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$

8. Seja $f(x, y) = \begin{cases} xy \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Devemos, inicialmente, determinar as derivadas parciais de 1.ª ordem de *f*.
Para $(x, y) \neq (0, 0)$ temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4x^2y^3 + x^4y - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-4x^3y^2 - xy^4 + x^5}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Em $(0, 0)$ temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0 \text{ e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$$

Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2y^3 + x^4y - y^5}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{-4x^3y^2 - xy^4 + x^5}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Continuando, calculando agora:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x^5}{x^4} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{y - 0}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{-\dfrac{y^5}{y^4} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} -\frac{y}{y} = -1.$$

Logo, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$. ($f(x, y)$ é de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$? Por quê?)

9. Seja $u(x, t) = A \text{ sen}(a\lambda t + \varphi) \text{ sen } \lambda x$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A \text{ sen } \lambda x \cdot \cos(a\lambda t + \varphi) \cdot (a\lambda)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -A\,(a\lambda) \text{ sen } \lambda x \cdot (-\text{sen}\,(a\lambda t + \varphi))\, a\lambda.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -Aa^2\lambda^2 \text{ sen } \lambda x \cdot \text{sen}(a\lambda t + \varphi). \qquad ①$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A \text{ sen}\,(a\lambda t + \varphi)(\cos \lambda x) \cdot \lambda$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -A\lambda^2 \text{ sen}\,(a\lambda t + \varphi) \cdot \text{sen } \lambda x. \quad ②$$

Comparando ① e ②:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

10. Seja $u = f(x - at) + g(x + at)$.
Considerando $y = x - at$ e $z = x + at$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df}{dy}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{dg}{dz}\frac{\partial z}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{dy}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{dg}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a\frac{df}{dy} + a\frac{dg}{dz} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{dy} + \frac{dg}{dz}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{d^2 f}{dy^2} + a^2\frac{d^2 g}{dz^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{d^2 g}{dz^2}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

11. Sejam $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ com $x(1, 1) > 0$,
$x^3 + y^3 = u - v$ e
$xy = u - 2v$.

Calculando as derivadas parciais,

$$\begin{cases} 3x^2 \dfrac{\partial x}{\partial u} + 3y^2 \dfrac{\partial y}{\partial u} = 1 \\ x \dfrac{\partial y}{\partial u} + y \dfrac{\partial x}{\partial u} = 1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{x - 3y^2}{3x^3 - 3y^3}$$

Se $xy = u - 2v$, então $(x(1,\,1)) \cdot (y(1,\,1)) = 1 - 2 = -1$.

Mas $x(1,\,1) > 0$. Logo, $y(1,\,1) < 0$ e $y(1,\,1) = -\dfrac{1}{x(1,\,1)}$ ①

Se $x^3 + y^3 = u - v$, então $(x(1,\,1))^3 + (y(1,\,1))^3 = 0$.
Logo, $y(1,\,1) = -x(1,\,1)$ ②
De ① e ② concluímos que $x(1,\,1) = 1$ e $y(1,\,1) = -1$.

Portanto, $\dfrac{\partial x}{\partial u}(1{,}1) = \dfrac{x(1,1) - 3[y(1,1)]^2}{3[x(1,1)]^3 - 3[y(1,1)]^3} = \dfrac{1-3}{3+3} = -\dfrac{2}{6} = -\dfrac{1}{3}$.

14. Seja $z = \displaystyle\int_1^{x^2-y^2} \left[\int_0^u \text{sen}\, t^2 \, dt \right] du.$

Pelo teorema fundamental do Cálculo temos:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left[\int_0^{x^2-y^2} \text{sen}\, t^2 \, dt \right] (-2y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = (-2y)\,\text{sen}(x^2 - y^2)^2 \cdot 2x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xy\,\text{sen}(x^2 - y^2)^2.$$

b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x} \right)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \int_0^{x^2-y^2} \text{sen}\, t^2 \, dt$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4x^2\,\text{sen}\,(x^2 - y^2)^2 + 2\int_0^{x^2-y^2} \text{sen}\, t^2 \, dt$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,1) = 4\cdot 1\cdot \underbrace{\operatorname{sen} 0}_{0} + 2\underbrace{\int_0^0 \operatorname{sen} t^2\, dt}_{0}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,1) = 0.$$

Exercícios 14.2

1.

a) $g(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ com $x = t^2$ e $y = \operatorname{sen} t$. Temos

$$\frac{dx}{dt} = 2t \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = \cos t.$$

$$g'(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dy}{dt}, \text{ ou seja,}$$

$$g'(t) = 2t\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \cos t\,\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

b) $g(t) = t^3\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, com $x = 3t$ e $y = 2t$. Temos

$$\frac{dx}{dt} = 3 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = 2.$$

$$g'(t) = \frac{d}{dt}\left[t^3\,\frac{\partial f}{\partial x}(3t, 2t)\right],$$

$$g'(t) = 3t^2\,\frac{\partial f}{\partial x}(3t, 2t) + t^3\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(3t, 2t)\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(3t, 2t)\right)\frac{dy}{dt}\right], \text{ ou seja,}$$

$$g'(t) = 3t^2\,\frac{\partial f}{\partial x}(3t, 2t) + 3t^3\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3t, 2t) + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(3t, 2t).$$

c) $g(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t^2, 2t) + 5\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(\operatorname{sen} 3t, t)$ daí

$$g'(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 2t)\right] + 5\,\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(\operatorname{sen} 3t, t)\right], \text{ ou seja,}$$

$$g'(t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 2t)\right)\cdot 2t + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 2t)\right)\cdot 2 + 5\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(\operatorname{sen} 3t, t)\right)\right] 3\cos 3t$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(\operatorname{sen} 3t, t)\right) = 2t\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t^2, 2t) + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(t^2, 2t)$$

$$+ 15\cos 3t\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\operatorname{sen} 3t, t) + 5\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\operatorname{sen} 3t, t).$$

3. Seja $g(t) = f(a + ht, b + kt)$.

a) $f(x, y)$ é de classe C^2 (f admite as derivadas parciais de 1.ª ordem e 2.ª ordem contínuas).

$g'(t) = \dfrac{d}{dt}\left[f(x, y)\right]$, com $x = a + ht$ e $y = b + kt$. Temos

$\dfrac{dx}{dt} = h$ e $\dfrac{dy}{dt} = k$. Segue que

$g'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\dfrac{dy}{dt}$, ou seja,

$g'(t) = h\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + k\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Temos

$g''(t) = \dfrac{d}{dt}\left[h\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + k\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right]$, ou seja,

$$g''(t) = h\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)\frac{dy}{dt}\right]$$

$+\, k\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)\dfrac{dy}{dt}\right]$. Assim,

$g''(t) = h\left[h\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + k\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x, y)\right] + k\left[h\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x, y) + k\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)\right]$, ou seja,

$$g''(t) = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + hk\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x, y) + hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x, y) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

Pelo teorema de Schwarz (f é de classe C^2),

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x, y).$$

Portanto,

$$g''(t) = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x, y) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

b) Supondo $f(x, y)$ de classe C^3 num aberto de $\mathbb{R}^2$ (f admite todas as derivadas de ordem 3 contínuas no aberto de $\mathbb{R}^2$).

$g'''(t) = \dfrac{d}{dt}\left[h^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2hk\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x, y) + k^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)\right]$, ou seja,

$$g'''(t) = h^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)\right) + 2hk\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x, y)\right) + k^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)\right). \quad ①$$

Temos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)\right)\frac{dy}{dt}, \text{ ou seja,}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)\right) = h\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) + k\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x, y). \quad ②$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\right)\frac{dy}{dt}, \text{ ou seja,}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\right) = h\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y) + k\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x, y). \quad ③$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)\right)\frac{dy}{dt}, \text{ ou seja,}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)\right) = h\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y) + k\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y). \quad ④$$

Substituindo ②, ③ e ④ em ①,

$$g'''(t) = h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) + h^2 k\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x, y) + 2h^2 k\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y)$$
$$+ 2hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y) + hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y) + k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y).$$

Como f é de classe C^3, temos: $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 y}$; $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$.

Portanto,

$$g'''(t) = h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) + 3h^2 k\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y) + 3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y) + k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y).$$

5. $z = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, onde $y = \text{sen } 3x$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, \text{sen } 3x)\right)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \text{sen } 3x)\frac{dx}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, \text{sen } 3x)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \text{sen } 3x) + 3\cos 3x\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, \text{sen } 3x).$$

7. $g(u, v) = f(x, y)$, com $x = 2u + v$ e $y = u - 2v$.

$\dfrac{dg}{\partial u} = \dfrac{\partial}{\partial u}[f(x, y)] = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\dfrac{\partial y}{\partial u}$, ou seja,

$\dfrac{dg}{\partial u} = 2\dfrac{\partial}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}$. Segue que

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} = \dfrac{\partial}{\partial u}\left[2\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\right] = 2\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$. Temos

$\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\dfrac{\partial y}{\partial u}$, ou seja,

$\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$;

$\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\dfrac{\partial y}{\partial u}$, ou seja,

$\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y}$.

Logo, substituindo e aplicando o teorema de Schwarz,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \quad ①$$

Procedendo de forma análoga, obtém-se

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \quad ②$$

Somando ① e ② segue:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 5\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

8. *Sugestão*. Calcule

$$\frac{\partial v}{\partial r}\left(\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right), \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}, \frac{\partial v}{\partial \theta}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) \text{ e } \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2},$$

em seguida, calcule a soma

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}.$$

10.
a) Seja $g(u, v) = f(x, t)$, onde $x = u + v$ e $t = u - v$.
Temos $\dfrac{\partial x}{\partial u} = 1$; $\dfrac{\partial x}{\partial v} = 1$; $\dfrac{\partial t}{\partial u} = 1$ e $\dfrac{\partial t}{\partial v} = -1$.

E mais: $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial t}$,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}\frac{\partial t}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial v}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}\right).$$

Como $f(x, t)$ satisfaz à equação $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$

Além disso, f é de classe C^2, logo vale o teorema de Schwarz.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} = 0.$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}\right) = 0.$$

b) De $\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\right) = 0$ segue que $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ não depende de v, assim, deveremos ter $g(u, v) = \theta(u) + \varphi(v)$, com $\theta(u)$ e $\varphi(v)$ deriváveis até a segunda ordem.
Assim, $f(x, t) = \theta(x + t) + \varphi(x - t)$ satisfaz ①. Por exemplo,
$f(x, t) = \cos(x + t) + \text{sen}(x - t)$ é solução da equação;
$f(x, t) = (x + t)^3 - 5(x + t)^2 + e^{(x - t)^3}$ é, também, solução etc.

11.
a) Seja $g(u, v) = f(x, t)$, onde $x = mu + nv$ e $t = pu + qv$.
Temos

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(n\frac{\partial f}{\partial x} + q\frac{\partial f}{\partial t}\right)$$

$$= n\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}\frac{\partial x}{\partial u} + n\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}\frac{\partial t}{\partial u} + q\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial u}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = mn\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + pq\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + np\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} + mq\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}.$$

De $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ $(c \neq 0)$. Segue

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = (mn + pqc^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (np + mq)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}.$$

Para que ocorra $mn + pqc^2 = 0$ e $np + mq = 0$, basta tomar $m = c$, $n = c$, $p = 1$ e $q = 1$.

b) $f(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$, com $F(u)$ e $G(v)$ deriváveis até a 2.ª ordem resolve o problema.

13. Sejam $z = z(x, y)$; $x = e^u \cos v$ e $y = e^u$ sen v.

Logo, $\dfrac{\partial x}{\partial u} = e^u \cos v$; $\dfrac{\partial x}{\partial v} = -\, e^u \operatorname{sen} v$; $\dfrac{\partial y}{\partial u} = e^u \operatorname{sen} v$; $\dfrac{\partial y}{\partial v} = e^u \cos v$

Temos, $\dfrac{\partial z}{\partial u} = e^u \cos v \dfrac{\partial z}{\partial x} + e^u \operatorname{sen} v \dfrac{\partial z}{\partial y}$ e

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = e^u \cos v \frac{\partial z}{\partial x} + e^u \cos v \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + e^u \operatorname{sen} v \frac{\partial z}{\partial y} + e^u \operatorname{sen} v \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Tendo em vista que:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial u} = e^u \cos v \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + e^u \operatorname{sen} v \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \text{ e}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial u} = e^u \cos v \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + e^u \operatorname{sen} v \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

resulta:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = e^u \cos v \frac{\partial z}{\partial x} + e^{2u} \cos^2 v \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + e^{2u} \operatorname{sen} v \cos v \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$
$$+ e^u \operatorname{sen} v \frac{\partial z}{\partial y} + e^{2u} \operatorname{sen} v \cos v \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + e^{2u} \operatorname{sen}^2 v \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \quad ①$$

Procedendo de forma análoga, obtemos:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = -e^u \cos v \frac{\partial z}{\partial x} + e^{2u} \operatorname{sen}^2 v \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - e^{2u} \operatorname{sen} v \cos v \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$
$$-e^u \operatorname{sen} v \frac{\partial z}{\partial y} - e^{2u} \operatorname{sen} v \cos v \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + e^{2u} \cos^2 v \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \quad ②$$

Somando ① e ②:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = e^{2u} (\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + e^{2u} (\operatorname{sen}^2 v + \cos^2 v) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = e^{2u} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)}_{0} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0.$$

14. Seja $G(u, v) = \dfrac{F(x, y)}{x}$, com $u = x + y$ e $v = \dfrac{y}{x}$.

Derivando $u = x + y$ e $v = \dfrac{y}{x}$ em relação a v (u constante).

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ 1 = -\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema $\dfrac{\partial x}{\partial v} = -\dfrac{x^2}{x+y}$ e $\dfrac{\partial y}{\partial v} = \dfrac{x^2}{x+y}$.

Derivando $G(u, v) = \dfrac{F(x, y)}{x}$ em relação a v:

$$\frac{\partial G}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F}{x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F}{x}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F}{x}\right)\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial G}{\partial v} = \left(\frac{1}{x}\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{F}{x^2}\right)\left(-\frac{x^2}{x+y}\right) + \left(\frac{x}{x^2}\frac{\partial F}{\partial y}\right)\left(\frac{x^2}{x+y}\right)$$

$$\frac{\partial G}{\partial v} = \left(\frac{x}{x+y}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\right) + \frac{F}{x+y}.$$

Derivando novamente em relação a v:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{x}{x+y}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\right) + \frac{F}{x+y}\right]$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{x+y}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\right) + \frac{F}{x+y}\right]\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x}{x+y}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\right) + \frac{F}{x+y}\right]\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial v^2} = &\left[\frac{x}{x+y}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\right)\cdot\frac{y}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x+y)}\frac{\partial F}{\partial x}\right.\\ &\left.-\frac{F}{(x+y)^2}\right]\left(-\frac{x^2}{x+y}\right) + \left[\frac{x}{x+y}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\right)\right.\\ &\left.+\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\right)\left(-\frac{x}{(x+y)^2}\right) + \frac{1}{(x+y)}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{F}{(x+y)^2}\right]\frac{x^2}{(x+y)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial v^2} = &\frac{-x^3}{(x+y)^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{x^3}{(x+y)^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{x^2 y}{(x+y)^3}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{x^2 y}{(x+y)^3}\frac{\partial F}{\partial x}\\ &-\frac{x^2}{(x+y)^2}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{x^2 F}{(x+y)^3} + \frac{x^3}{(x+y)^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{x^3}{(x+y)^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\\ &-\frac{x^3}{(x+y)^3}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{x^3}{(x+y)^3}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{x^2}{(x+y)^2}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{x^2 F}{(x+y)^3}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial v^2} = \frac{x^3}{(x+y)^2}\underbrace{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{2\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)}_{0} + \underbrace{\frac{x^2 y + x^3 - x^2(x+y)}{(x+y)^3}}_{0}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} = 0.$$

CAPÍTULO 15

Exercícios 15.1

1. *b*) $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2 + xy\, f(4, 3) = 17$ e $f(1, 2) = -8$

$$\nabla f\ (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\ (\bar{x}, \bar{y}), \frac{\partial f}{\partial y}\ (\bar{x}, \bar{y})\right) = (4\bar{x} + \bar{y}, -6\bar{y} + \bar{x})$$

Pelo T.V.M., $f(4, 3) - f(1, 2) = \nabla f\ (\bar{x}, \bar{y})\ [(4, 3) - (1, 2)]$

Segue que $13\bar{x} - 3\bar{y} = 25$. Mas $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 2) + t(3, 1)$ com $1 < \bar{x} < 4$

Logo, $\bar{x} - 3\bar{y} = -5$. Resolvendo o sistema $\begin{cases} 13\bar{x} - 3\bar{y} = 25 \\ \bar{x} - 3\bar{y} = -5 \end{cases}$

Temos $\bar{x} = \dfrac{5}{2}$ e $\bar{y} = \dfrac{5}{2}$. Portanto, $\overline{P} = \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$.

Exercícios 15.3

1. *b*) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y \cos xy + 3x^2 - y = P$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = x \cos xy - x + 3y^2 = Q$

$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -xy \operatorname{sen} xy + \cos xy - 1 = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

Portanto, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ (condição necessária verificada: o sistema pode admitir soluções).

Integrando-se a 1.ª equação em relação a x, mantendo y constante, a função $\operatorname{sen} xy + x^3 - xy$ é solução da 1.ª equação.

Integrando-se a 2.ª equação em relação a y, mantendo-se x constante, a função $\operatorname{sen} xy - xy + y^3$ é solução da 2.ª equação.

Logo, $f(x, y) = \operatorname{sen} xy + x^3 - xy + y^3 + k$ é a solução do sistema.

2. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 - 2x = P$ ① $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + 2y - 1 = Q$ ②

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 6xy^2 \end{array}\right\} \text{condição necessária para que o sistema possa admitir solução}$$

$x^2y^3 - x^2$ é solução de ① e $x^2y^3 + y^2 - y$ é solução de ②

Portanto, $f(x, y) = x^2y^3 - x^2 + y^2 - y + k$ é a solução do sistema.

$f(1, 2) = 7 \Rightarrow 9 + k = 1 \Rightarrow k = -8.$

Logo, $f(x, y) = x^2y^3 - x^2 + y^2 - y - 8.$

4. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y^2 + 1 = P \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2y^2 + 1 = Q$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x \end{array}\right\} \neq$$

Não existe $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pois, $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

5. $\nabla \varphi_1\ (x, y) = \left(-\dfrac{y}{x^2 + y^2}, \dfrac{x}{x^2 + y^2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2 + y^2} = P \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{y} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} = Q \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{array}\right\rangle \text{(Condição necessária)}$$

Integrando-se a 1.ª equação em relação a x, mantendo y constante:

$$\int -\frac{y\,dx}{x^2 + y^2} = -\int \frac{dx}{y\left(1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2\right)} = -\text{arctg}\ \frac{x}{y} + k.$$

Analogamente $\displaystyle\int \frac{x\,dy}{x^2 + y^2} = -\int \frac{\left(-\frac{x}{y^2}\right)dy}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} = -\text{arctg}\ \frac{x}{y} + k.$

$\varphi_1\ (x,\ y) = -\text{arctg}\ \dfrac{x}{y} + k,\ y > 0.$

$$\varphi_1(1,\ 1) = \frac{\pi}{4}\ \Rightarrow\ -\text{arctg}\ 1 + k = \frac{\pi}{4}\ \Rightarrow\ -\frac{\pi}{4} + k = \frac{\pi}{4} \Rightarrow k = \frac{\pi}{2}$$

Portanto< $\varphi_1\ (x,\ y) = -\text{arctg}\ \dfrac{x}{y} + \dfrac{\pi}{2},\ y > 0.$

6. $\nabla\varphi_2\ (x,\ y) = \left(-\dfrac{y}{x^2 + y^2},\ \dfrac{x}{x^2 + y^2}\right),\ x < 0,$ e $\varphi_2\ (-1,\ 1) = \dfrac{3\pi}{4}$. Temos

$$\int -\frac{y\ dx}{x + y^2} = \int \frac{\left(-\frac{y}{x^2}\right) dx}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \text{arctg}\ \frac{y}{x} + k$$

$$\int \frac{x\ dy}{x^2 + y^2} = \int \frac{dy}{x\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)} = \text{arctg}\ \frac{y}{x} + k$$

$$\varphi_2\ (x,\ y) = \text{arctg}\ \frac{y}{x} + k$$

$$\varphi_2\ (-1,\ 1) = \underbrace{\text{arctg}\ (-1)}_{-\frac{\pi}{4}} + k = \frac{3\pi}{4}\ \Rightarrow\ k = \pi$$

Portanto, $\varphi_2\ (x,\ y) = \text{arctg}\ \dfrac{y}{x} + \pi,\ x < 0.$

7. Por **5**: $\varphi_1\ (x,\ y) = -\text{arctg}\ \dfrac{x}{y} + k_1,\ y > 0$

Por **6**: $\varphi_2\ (x,\ y) = \text{arctg}\ \dfrac{y}{x} + k_2,\ x < 0.$

Sabemos que $\varphi\ (-1,\ 1) = \dfrac{3\pi}{4}$

Então,

$$-\text{arctg}\ (-1) + k_1 = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} + k_1 = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow k_1 = \frac{\pi}{2}$$

$\operatorname{arctg}(-1) + k_2 = \dfrac{3\pi}{4} \;\Rightarrow\; k_2 = \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} \;\Rightarrow\; k_2 = \pi.$

Portanto,

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \dfrac{x}{y} + \dfrac{\pi}{2} & \text{se } \; y > 0 \\ \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + \pi & \text{se } \; x < 0 \end{cases}$$

8. ***a*)** $\vec{F}(x, y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$, onde $P(x, y) = x$ e $Q(x, y) = y$. Temos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

O campo de forças $\vec{F}$ admite a função potencial $\varphi(x, y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$. Logo $\vec{F}$ é conservativo.

***d*)** $\vec{F}(x, y) = \dfrac{x\,\vec{i} + y\,\vec{j}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \dfrac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\,\vec{i} + \dfrac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\,\vec{j}.$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = P(x, y) \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{3xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \\ \dfrac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = Q(x, y) \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\dfrac{3xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \end{array}\right\rangle \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = -(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \int \frac{y\,dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = -(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$\vec{F}$ admite a função potencial $\varphi(x, y) = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, logo é conservativo.

11. ***a*)** $\vec{F}(x, y) = -6x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j}$. Temos

$U(x, y) = 3x^2 + y^2 + k.$
$U(0, 0) = 0 \;\Rightarrow\; k = 0.$

Logo, $U(x, y) = 3x^2 + y^2$.

***d*)** $\vec{F}(x, y) = x\,\vec{i} - xy\,\vec{j}$. Temos

$\dfrac{\partial}{\partial y}(x) = 0 \quad$ e $\quad \dfrac{\partial}{\partial x}(-xy) = -y$ e daí

$$\frac{\partial}{\partial x}(x) \neq \frac{\partial}{\partial y}(-xy).$$

$\vec{F}$ não é conservativo. Portanto, não existe a função energia potencial associada ao campo $\vec{F}$.

13. *a*) Seja $U(x, y) = 2x^2 + \frac{1}{2}y^2$. Temos

$\vec{F} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}$, ou seja,

$$\vec{F} = -x\,\vec{i} - y\,\vec{j}.$$

***b*)** Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ com $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$. Temos:

$$\ddot{x} = -x \quad \text{e} \quad \ddot{y} = -y$$
$$\ddot{x} + x = 0 \quad \text{e} \quad \ddot{y} + y = 0.$$

$x(t) = A_1 \cos t + B_1 \operatorname{sen} t$ e $y(t) = A_2 \cos t + B_2 \operatorname{sen} t$. Logo,
$\gamma(t) = (A_1 \cos t + B_1 \operatorname{sen} t, A_2 \cos t + B_2 \operatorname{sen} t)$.

De $x(0) = 1$, segue que $A_1 = 1$.
De $y(0) = 1$, segue que $A_2 = 1$.

E mais,

$$\vec{v}(t) = \frac{d\gamma}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t) = (-A_1 \operatorname{sen} t + B_1 \cos t, -A_2 \operatorname{sen} t + B_2 \cos t).$$

Temos $\vec{v}_0 = (1, 1)$. Então, $B_1 = -1$ e $B_2 = 1$.
Portanto, $\gamma(t) = (\cos t - \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.
De $x(t) = \cos t - \operatorname{sen} t$ e $y(t) = \cos t + \operatorname{sen} t$ segue que $x^2 + y^2 = 2$. Logo, a trajetória é a circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{2}$:

$$\gamma(t) = \sqrt{2}\left(\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right), \operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Exercícios 15.4

1. *a*) $f(x, y) = e^{x+5y}$ e $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Temos: $f(0, 0) = 1$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+5y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 5e^{x+5y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 5.$$

Polinômio de Taylor

$$P_1(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$
$$= f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y.$$

Logo, $P_1(x, y) = 1 + x + 5y$.

2. *a*) Seja $f(x, y) = P_1(x, y) + E_1(x, y)$

onde $E_1(x, y) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y})\, x^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y})\, xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})\, y^2\right]$

com $(\bar{x}, \bar{y})$ interno ao segmento de extremidades $(0, 0)$ e (x, y).

Supondo $x + 5y < 1$ temos também $\bar{x} + 5\bar{y} < 1$. Assim, para todo (x, y), com $x + 5y < 1$, segue que $e^{\bar{x} + 5\bar{y}} < 2$. Logo, $e^{\bar{x} + 5\bar{y}} < 3$.

Temos $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x + 5y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 25e^{x + 5y}$, e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 5e^{x + 5y}$,

$\left|e^{x + 5y} - P_1(x, y)\right| = \left|E_1(x, y)\right|$ e

$$E_1(x, y) = \frac{1}{2}\left[e^{\bar{x} + 5\bar{y}}\, x^2 + 10e^{\bar{x} + 5\bar{y}}xy + 25e^{\bar{x} + 5\bar{y}}y^2\right].$$

Segue, considerando $e^{\bar{x} + 5\bar{y}} < 3$,

$$\left|E(x, y)\right| < \frac{1}{2} \cdot 3\,(x^2 + 10xy + 25y^2).$$

Logo,

$$\left|e^{x + 5y} - P_1(x, y)\right| < \frac{3}{2}(x + 5y)^2, \text{ para } x + 5y < 1.$$

***b*)** Para $x = 0{,}01$ e $y = 0{,}01$ tem-se $x + 5y < 1$.

$$\left|E_1(x, y)\right| < \frac{3}{2}(x + 5y)^2 = \frac{3}{2}(0{,}06)^2 = 0{,}54 \times 10^{-2} < 10^{-2}.$$

Portanto o erro é inferior a 10^{-2}.

3. $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$. Temos

$\left|f(x, y) - P_1(x, y)\right| = \left|E_1(x, y)\right|$, onde

$$\left|E_1\ (x,\ y)\right| = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\ (\bar{x},\ \bar{y})\ (x-1)^2 + 2\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\ (\bar{x},\ \bar{y})(x-1)(y-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\ (\bar{x},\ \bar{y})(y-1)^2\right].$$

Temos $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2x$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\ (\bar{x},\ \bar{y}) = 6\bar{x} - 2$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 4$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\ (\bar{x},\ \bar{y}) = 6\bar{y}$

$E_1\ (x,\ y) = \dfrac{1}{2}\left|(6\bar{x} - 2)\ (x-1)^2 + 6\bar{y}\ (y-1)^2\right|$

Se $|x - 1| < 1$, então $0 < x < 2$ e $0 < \bar{x} < 2$

Se $|y - 1| < 1$, então $0 < y < 2$ e $0 < \bar{y} < 2$

$|6\bar{x} - 2| \leqslant |6\bar{x}| + |-2| < 12 + 2$

Portanto,

$$|\overbrace{f\ (x,\ y) - P_1\ (x,\ y)}^{|E\ (x,\ y)|}| < \frac{1}{2}\left|14\ (x-1)^2 + 12\ (y-1)^2\right|$$

Assim, para todo $(x,\ y)$ com $|x - 1| < 1$ e $|y - 1| < 1$, temos:

$|f(x,\ y) - P_1\ (x,\ y)| < 7\ (x-1)^2 + 6\ (y-1)^2$.

4. ***a***) $P_1\ (x,\ y) = f(1,\ 1) + \dfrac{\partial f}{\partial x}\ (1, 1)\ (x-1) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\ (1, 1)\ (y-1)$,

$P_1\ (x,\ y) = 5 + (x-1) + 7\ (y-1)$. Logo,

$P_1\ (x,\ y) = x + 7y - 3$. Temos

$P_1\ (1{,}001,\ 0{,}99) = 4{,}931$ e daí

$f(x,\ y) \cong 4{,}931$.

b) $|E\ (x,\ y)| < 7\ (x-1)^2 + 6\ (y-1)^2 = 7\ (1{,}001 - 1)^2 + 6\ (0{,}99 - 1)^2$

$= 7 \cdot 10^{-6} + 6 \cdot 10^{-4} = 10^{-3}\ (0{,}7 \cdot 10^{-2} + 0{,}6) < 10^{-3}$.

6. Seja $f(x,\ y) = ax^2 + b\ xy + cy^2 + dx + ey + m$.

Temos:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\ (x_0, y_0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}\ (x_0, y_0)\ k + E\ (h,\ k)$$

onde

$$E\ (h,\ k) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\ (\bar{x},\ \bar{y})\ h^2 + 2\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\ (\bar{x},\ \bar{y})\ hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\ (\bar{x},\ \bar{y})k^2\right].$$

Como (x_0, y_0) é ponto crítico de f: $\dfrac{\partial f}{\partial x}\ (x_0,\ y_0) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}\ (x_0,\ y_0) = 0$. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}\ (x,\ y) = 2ax + by + d; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\ (x,\ y) = 2a$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\ (x,\ y) = 2cy + bx + e; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\ (x,\ y) = 2c \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = b.$$

Logo,

$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\left[2ah^2 + 2bhk + 2c\,k^2\right]$ e, portanto,

$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = ah^2 + bhk + ck^2.$

7. Do exercício ⑥ segue

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = a\,h^2 + b\,h\,k + c\,k^2$$

$$= a\left[h^2 + \frac{b}{a}\,h\,k + \frac{c}{a}\,k^2\right] = a\left[h^2 + \frac{b}{a}\,h\,k + \frac{b^2}{4a^2}\,k^2 - \frac{b^2}{4a^2}\,k^2 + \frac{c}{a}\,k^2\right]$$

$= a\left[\left(h + \frac{b}{2a}\,k\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\,k^2\right] > 0$, para todo $(h, k) \neq (0, 0)$, pois $a > 0$ e $b^2 - 4ac < 0$.

Portanto, $f(x_0 + h, y_0 + h) > f(x_0, y_0)$, para todo $(h, k) \neq (0, 0)$. Logo (x_0, y_0) é um ponto de mínimo de f.

As curvas de nível de $f(x, y)$ são dadas pela equação
$ax^2 + b\,xy + cy^2 + dx + cy + m =$ constante.

Da Geometria Analítica sabemos que a equação representa uma elipse quando
$b^2 - 4ac < 0$ e $a > 0$. Portanto, as curvas de nível são elipses e o gráfico de $f(x, y)$ é um parabolóide elíptico para cima.

Exercícios 15.5

1. *a*) $f(x, y) = x$ sen y e $(x_0, y_0) = (0, 0)$. O polinômio de Taylor de ordem 2 de f, em volta do ponto (0, 0) é dado por

$$P(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)x^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)y^2\right].$$

Temos $\frac{\partial f}{\partial x} = \text{sen } y$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos y;\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x\,\text{sen } y;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (0, 0) = 0;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos y;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1.$$

Portanto, $P(x, y) = xy$.

2. Seja $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + 3y^3 + x - y$.

Tendo em vista que as derivadas parciais de ordens 4 são identicamente nulas, segue que $f(x, y)$ coincide com o seu polinômio de Taylor de 3.ª ordem. Então,

$$f(x, y) = f(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y-1) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1)(x-1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1)(x-1)(y-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1)(y-1)^2\right] + \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1, 1)(x-1)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(1, 1)(x-1)^2(y-1) + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(1, 1)(x-1)(y-1)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(1, 1)(y-1)^3\right].$$

Temos $f(1, 1) = 6$; $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 4x + 1$; $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 8$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 9y^2 - 1$; $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 10$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 4$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 10$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4x$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) = 4$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 18y$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) = 18$; $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 6$; $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 4$; $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 0$; $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 18$.

Portanto,

$$f(x, y) = 6 + 8(x-1) + 10(y-1) + 5(x-1)^2 + 2(x-1)(y-1) + 9(y-1)^2 + (x-1)^3 + 2(x-1)^2(y-1) + 3(y-1)^3.$$

Capítulo 16

Exercícios 16.2

1. Seja $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + x - y$.

Os únicos candidatos a extremantes locais são os pontos críticos de f pois o $D_f = \mathbb{R}^2$ é aberto.

De $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x - 2y$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 2x - 1$

resulta que os candidatos a extremantes locais são as soluções do sistema: $\begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 2y - 2x - 1 = 0. \end{cases}$

A solução do sistema é $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. Temos $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(0, \dfrac{1}{2}\right) = 4 > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(0, \dfrac{1}{2}\right) = 2 > 0$.

Portanto, $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ é candidato a ponto de mínimo local.

3. $f(x, y) = x^3 - y^2 + xy + 5$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + y$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y + x$.

Resolvendo o sistema $\begin{cases} 3x^2 + y = 0 \\ -2y + x = 0 \end{cases}$

encontramos os pontos críticos $(0, 0)$ e $\left(-\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{12}\right)$.

Agora

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x, \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0 \leqslant 0$ e $\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{12}\right) = -1 < 0;$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2, \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = -2 < 0$ e $\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{12}\right) = -2 < 0.$

O ponto $\left(-\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{12}\right)$ é candidato a ponto de máximo local.

Seja $g(x) = f(x, 0) = x^3 + 5$. O ponto $x = 0$ não é extremante local de $g(x)$. Portanto, o ponto $(0, 0)$ não é extremante local de $f(x, y)$.

6. $f(x, y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 5x^4 - 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 5y^4 - 5.$$

Resolvendo o sistema: $\begin{cases} 5x^4 - 5 = 0 \\ 5y^4 - 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = \pm 1 \\ y = \pm 1. \end{matrix}$

Os pontos $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ são pontos críticos. Temos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 20x^3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 20 > 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -1) = -20 < 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 20y^3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) = 20 > 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, -1) = -20 < 0.$$

O ponto $(1, 1)$ é candidato a mínimo local, e o ponto $(-1, -1)$, máximo local.
Agora:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -1) = 20 > 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 1) = -20 < 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -1) = -20 < 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, 1) = 20 > 0.$$

Os pontos $(1, -1)$ e $(-1, 1)$ não são extremantes locais.

Exercícios 16.3

1. ***a***) $f(x, y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 3y - 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 8y + 3x + 2.$$

Resolvendo o sistema: $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 3x + 8y = -2 \end{cases}$

Ponto crítico: $\left(\dfrac{54}{7}, -\dfrac{22}{7}\right)$.

Hessiano de *f*:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 7$$

$H\left(\dfrac{54}{7}, -\dfrac{22}{7}\right) = 7 > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{54}{7}, -\dfrac{22}{7}\right) = 2 > 0$. Logo, $\left(\dfrac{54}{7}, -\dfrac{22}{7}\right)$ é ponto de mínimo local de *f*, e também mínimo global (conforme Exercício 2).

c) $f(x, y) = x^3 + 2xy + y^2 - 5x$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 2y - 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + 2x.$$

Resolvendo o sistema: $\begin{cases} 3x^2 + 2y = 5 \\ 2y + 2x = 0 \end{cases}$

Pontos críticos: $(-1, 1)$ e $\left(\dfrac{5}{3}, -\dfrac{5}{3}\right)$.

Hessiano de *f*:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12x - 4.$$

$H(-1, 1) = -16 < 0$, então, $(-1, 1)$ é ponto de sela.

$$H\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right) = 20 + \frac{20}{3} = \frac{80}{3} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right) = 10 > 0.$$

Logo, $\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ é ponto de mínimo local.

(Não é mínimo global, pois $g(x) = f(x, 0) = x^3 - 5\,x$ e $f(x, 0) \to -\infty$ para $x \to -\infty$.)

e) $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 27y$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 6xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3x^2 + 27$$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} 3x^2 - 6xy = 0 \\ -3x^2 + 27 = 0 \end{cases}$

encontramos:

$\left(3, \frac{3}{2}\right)$ e $\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$.

Hessiano de f:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x - 6y & -6x \\ -6x & 0 \end{vmatrix}$$

$$H\left(3, \frac{3}{2}\right) = \begin{vmatrix} 9 & -18 \\ -18 & 0 \end{vmatrix} = -324 < 0$$

$$H\left(-3, -\frac{3}{2}\right) = \begin{vmatrix} -9 & 18 \\ 18 & 0 \end{vmatrix} = -324 < 0$$

Logo, $\left(3, \frac{3}{2}\right)$ e $\left|-3, -\frac{3}{2}\right|$ são pontos de sela.

4. Seja $P = (0, 0, 0)$ e $P_1 = (x, y, \underbrace{x + 2y - 4}_{z})$.

Distância entre os pontos P e P_1: $d\,(P, P_1) = \sqrt{x^2 + y^2 + (x + 2y - 4)^2}$

Vamos minimizar $f(x, y) = x^2 + y^2 + (x + 2y - 4)^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\ (x, y) = 2x + 2(x + 2y - 4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\ (x, y) = 2y + 4(x + 2y - 4)$$

Resolvendo o sistema: $\begin{cases} 4x + 4y = 8 \\ 4x + 10y = 16 \end{cases}$ obtemos

$x = \dfrac{2}{3}$; $y = \dfrac{4}{3}$ e $z = -\dfrac{2}{3}$.

$H(x, y) = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 24 > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right) = 4 > 0$. Logo, $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$ é ponto de mínimo global de $f(x, y)$.

Assim, $P_1 = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$ é o ponto procurado.

7. *a*) Seja $f(x) = \alpha x + \beta$ e

$$E\ (\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{4}\ [f(a_i) - b_i]^2.$$

Consideremos:

	a_i	b_i	a_i^2	$a_i b_i$
	5	100	25	500
	6	98	36	588
	7	95	49	665
	8	94	64	752
Σ	26	387	174	2505

$$E\ (\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{4}\ [\alpha a_i + \beta - b_i]^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{4}\ 2a_i\ (\alpha a_i + \beta - b_i)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{4} 2\ (\alpha a_i + \beta - b_i).$$

Temos o sistema:

$$\begin{cases} \alpha \sum_{i=1}^{4} a_i^2 + \beta \sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{i=1}^{4} a_i b_i \\ \alpha \sum_{i=1}^{4} a_i + 4\beta = \sum_{i=1}^{4} b_i \end{cases}$$

Logo, $\begin{cases} 26\alpha + 4\beta = 387 \\ 174\alpha + 26\beta = 2505 \end{cases}$

Daí, $\alpha = -\dfrac{21}{10}$ e $\beta = \dfrac{1104}{10}$.

A reta que melhor se ajusta aos dados observados é $y = -\dfrac{21}{10}x + \dfrac{1104}{10}$.

b) Se $x = 10$, então $y = -21 + 110{,}4 = 89{,}4$.

10. $L(x, y) = x(120 - 2x) + y(200 - y) - (x^2 + 2y^2 + 2xy)$
$L(x, y) = -3x^2 - 3y^2 - 2xy + 120x + 200y$.

Para maximizar o lucro:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x, y) = -6x - 2y + 120 & \Rightarrow \\ \dfrac{\partial L}{\partial x}(x, y) = -6y - 2x + 200 & \Rightarrow \end{array}\right. \begin{cases} 3x + y = 60 \\ 3y + x = 100 \end{cases} \Rightarrow x = 10 \text{ e } y = 30.$$

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x, y) = -6 < 0 \quad \text{e} \quad H(x, y) = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 32 > 0 \right)$$

Logo, a produção que maximiza o lucro é $x = 10$ e $y = 30$.

13. Sejam $P = (x, y, 12 - 3x - 2y) \in$ plano
$O = (0, 0, 0)$
$Q = (1, 1, 1)$

Distância entre os pontos:

$$d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2 + (12 - 3x - 2y)^2} \text{ e}$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (11 - 3x - 4y)^2}.$$

Devemos minimizar a função:

$g(x, y) = x^2 + y^2 + (12 - 3x - 2y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (11 - 3x - 2y)^2$

$g(x, y) = 20x^2 + 10y^2 + 24xy - 140x - 94y + 267$

$\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 40x + 24y - 140$

$\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 20y + 24x - 94.$

Resolvendo o sistema: $\begin{cases} 40x + 24y = 140 \\ 20y + 24x = 94 \end{cases}$

temos $x = \dfrac{34}{14}, y = \dfrac{25}{14}$ e $z = \dfrac{16}{14}$.

$H(x, y) = \begin{vmatrix} 40 & 24 \\ 24 & 20 \end{vmatrix} > 0$ $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) > 0$. Logo, $x = \dfrac{34}{14}$ e $y = \dfrac{25}{14}$ é ponto de mínimo global de g.

Portanto, $P = \left(\dfrac{34}{14}, \dfrac{25}{14}, \dfrac{16}{14}\right)$.

14. Seja $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$.
Plano tangente ao gráfico de f.

$z - z_0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$, ou seja,

$z - 1 + x_0^2 + y_0^2 = -2x_0(x - x_0) - 2y_0(y - y_0)$.

Daí, $z = -2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 + 1$.

A seguir vamos determinar o volume do tetraedro determinado pelo plano tangente e pelos planos coordenados. Temos

$x = 0$ e $y = 0 \Rightarrow z = x_0^2 + y_0^2 + 1$,

$x = 0$ e $z = 0 \Rightarrow y = \dfrac{x_0^2 + y_0^2 + 1}{2y_0}$ e

$y = 0$ e $z = 0 \Rightarrow x = \dfrac{x_0^2 + y_0^2 + 1}{2x_0}$.

Da Geometria Analítica sabemos que o volume do tetraedro é $\dfrac{1}{6}$ do volume do paralelepípedo. Portanto,

$$V = \frac{1}{6}\,\frac{(x_0^2 + y_0^2 + 1)^3}{4x_0y_0} = \frac{(x_0^2 + y_0^2 + 1)^3}{24x_0y_0}.$$

Devemos minimizar a função volume:

$$V(x, y) = \frac{(x^2 + y^2 + 1)^3}{24\,xy}.$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, y) = \frac{(x^2 + y^2 + 1)^2\,(5x^2 - y^2 - 1)}{24\,x^2 y} \text{ e}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = \frac{(x^2 + y^2 + 1)^2\,(5y^2 - x^2 - 1)}{24\,x^2 y}.$$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} 5x^2 - y^2 = 1 \\ 5y^2 - x^2 = 1 \end{cases}$

temos $x = \pm\frac{1}{2}$ e $y = \pm\frac{1}{2}$.

Mas $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$, portanto, $(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Equação do plano tangente que forma com os planos coordenados um tetraedro de volume mínimo:

$$z = -2x_0 x - 2y_0 y + x_0^2 + y_0^2 + 1, \text{ ou seja, } z + x + y = \frac{3}{2}.$$

20. Não, pois (0, 0) é o único ponto crítico de $f(x, y) = x^2(1 - y)^3 + y^2$, é ponto de mínimo local mas não é ponto de mínimo global. (**Observação.** Esta função foi sugerida pelo Professor Luiz Augusto Fernandes do IME-USP.)

Exercícios 16.4

1. ***d***) Seja $f(x, y) = xy$ em $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 x \geqslant 0, y \geqslant 0 \text{ e } 2x + y \leqslant 5\}$.

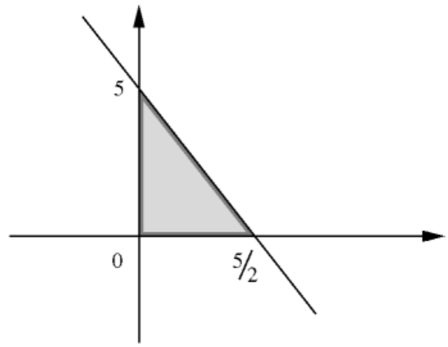
O teorema de Weierstrass garante que f assume em A valor máximo e valor mínimo pois f é contínua e A é compacto.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x$$

O único ponto crítico é (0, 0), que não pertence ao interior de A.

Portanto, os valores máximo e mínimo de f, em A, são atingidos na fronteira de A.

Análise dos pontos de fronteira:



$f(x, 0) = 0$ em $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{5}{2}$

$f(0, y) = 0$ em $0 \leqslant y \leqslant 5$

$g(x) = f(x, 5 - 2x) = x(5 - 2x) = 5x - 2x^2$

$g'(x) = 5 - 4x$. Daí, $5 - 4x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5}{4} \Rightarrow y = 5 - 2x = \dfrac{5}{2}$

$g''(x) = -4 < 0$

$f\left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{25}{8}$.

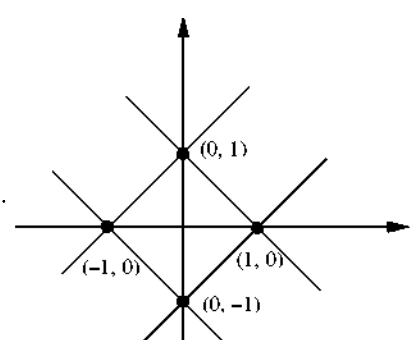
Concluímos que:

— O valor mínimo é 0 e é atingido nos pontos $(x, 0)$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{5}{2}$ e nos pontos $(0, y)$, $0 \leqslant y \leqslant 5$.

— O valor máximo é $\dfrac{25}{8}$ atingido em $\left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{5}{2}\right)$.

***f*)** Seja $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$ em $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| + |y| \leqslant 1\}$.

Como f é contínua e A compacto, f assume em A valor máximo e valor mínimo (teorema de Weierstrass).



$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2y$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 2x$. $(0, 0)$ é o único ponto crítico.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2 > 0$ e $H(0, 0) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$.

Logo, $f(0, 0) = 0$ é valor mínimo global de f. (Veja Exercício 2, Seção 16.3.)

Vamos analisar, agora, o que ocorre na fronteira. Sobre o segmento de extremidades (0, 1) e (1, 0) os valores de f são dados por $g(x) = f(x, 1 - x)$, ou seja, $g(x) = 5x^2 - 6x + 2$, com $0 \leqslant x \leqslant 1$, cujo gráfico é um arco de parábola com concavidade para cima, logo, sobre este lado o valor máximo deverá ocorrer em uma das extremidades (ou em ambas). De $g(1) = 1$ e $g(0) = 2$, segue que sobre este lado o valor máximo é 2 e ocorre em (0, 1). De forma análoga, conclui-se que sobre os outros lados o valor máximo deverá ocorrer, também, nos vértices. Calculando os valores de f nos vértices: $f(1, 0) = 1$; $f(0, 1) = 2$; $f(-1, 0) = 1$ e $f(0, -1) = 2$.

O valor máximo é 2 sendo atingido nos pontos (0, 1) e (0, −1).

3. Seja $T(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ e $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant x \text{ e } 2y + x \leqslant 4\}$.

Como T é uma função contínua e A compacto, então, T assume em A valor máximo e valor mínimo. Temos

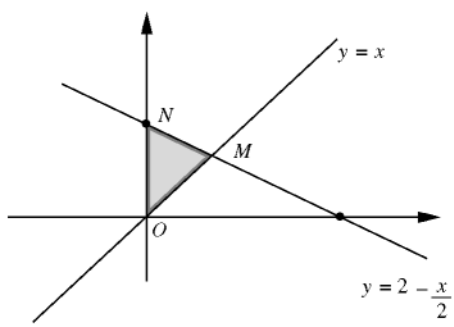
$$\frac{\partial T}{\partial x}(x, y) = -2x \text{ e}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x, y) = -2y.$$

(0, 0) é o único ponto crítico. Temos $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, y) = -2 < 0$ e $H(0, 0) = 4 > 0$, logo, (0, 0) é um ponto de temperatura máxima em A.

E mais $T(0, 0) = 4$ é a temperatura máxima.

Vamos analisar o comportamento da função na fronteira de A:



No segmento $\overline{OM}$ ($y = x$ e $0 \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}$).

$F(x) = T(x, x) = 4 - 2x^2$
$F'(x) = -4x$. O ponto (0, 0) é de máximo e $T(0, 0) = 4$.

A função é decrescente em $0 \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}$ e

$T\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{9}$ (no vértice M).

No segmento $\overline{MN}$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant x$ e $y = 2 - \frac{x}{2}$):

$$F(x) = T\left(x, 2 - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4}(-5x^2 + 8x)$$

$$F'(x) = \frac{1}{4}(-10x + 8) \Rightarrow -10x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \Rightarrow y = \frac{8}{5}.$$

$F''(x) = -\frac{5}{2} < 0$. $\quad\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ é ponto de máximo no segmento $\overline{MN}$.

$T\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right) = \frac{4}{5}$

No segmento $\overline{ON}$ ($x = 0$ e $0 \leqslant y \leqslant 2$)
$F(y) = T(0, y) = 4 - 2y^2$
$F'(y) = -8y$. $(0, 0)$ dá temperatura máxima igual a 4. A função $F'(y)$ é sempre negativa em $0 \leqslant y \leqslant 2$. Portanto a função F é estritamente decrescente em $0 \leqslant y \leqslant 2$, com valor máximo em $(0, 0)$ e valor mínimo em $(0, 2)$.

Logo, $T(0, 2) = 0$ é a menor temperatura e $P = (0, 2)$ é o ponto de menor temperatura.

Exercícios 16.5

1. *a*) Sejam $f(x, y) = 3x + y$ e $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1$
Vamos achar os extremantes de f em $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$ pelo método dos multiplicadores de Lagrange.

Como g é de classe C^1 e $\nabla g(x, y) = (2x, 4y) \neq (0, 0)$ em B, temos que os candidatos a extremantes locais são os (x, y) que tornam compatível o sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3, 1) = \lambda\ (2x, 4y) \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda x = 3 \\ 4\lambda y = 1 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

Como $\lambda \neq 0$ temos $x = \frac{3}{2\lambda}$ e $y = \frac{1}{4\lambda}$.
Substituindo em $x^2 + 2y^2 = 1$ segue:

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{2}{16\lambda^2} = 1 \Rightarrow 16\lambda^2 = 38 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{38}}{4}$$

Logo, os candidatos a extremantes locais são:

$$\left(\frac{3\sqrt{38}}{19}, \frac{\sqrt{38}}{38}\right) \text{ e } \left(-\frac{3\sqrt{38}}{19}, -\frac{\sqrt{38}}{38}\right)$$

Como B é compacto e $f\left(\frac{3\sqrt{38}}{19}, \frac{\sqrt{38}}{38}\right) > f\left(-\frac{3\sqrt{38}}{19}, -\frac{\sqrt{38}}{38}\right)$ resulta que

$\left(\frac{3\sqrt{38}}{19}, \frac{\sqrt{38}}{38}\right)$ é ponto de máximo e $\left(-\frac{3\sqrt{38}}{19}, -\frac{\sqrt{38}}{38}\right)$ é ponto de mínimo.

***d*)** Sejam $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ e $g(x, y) = xy - 1$, $x > 0$ e $y > 0$.

Vamos encontrar os extremantes de f em:

$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0, x > 0 \text{ e } y > 0\}$ utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange.

Como g é de classe C^1 e $\nabla g(x, y) = (y, x) \neq (0, 0)$ em B resulta que os extremantes possíveis são os (x, y) que tornam compatível o sistema.

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x, 8y) = \lambda(y, x) \\ xy - 1 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema $\lambda = 4;\ x = \sqrt{2}\ e\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

O único candidato é $\left(\sqrt{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e verifica-se, por inspeção, que é um ponto de mínimo.

(O valor da função f sobre a restrição é dada por $g(x) = f\left(x, \dfrac{1}{x}\right)$, ou seja, $g(x) = x^2 + \dfrac{4}{x^2}$, $x > 0$, cuja concavidade é voltada para cima, logo, para $x = \sqrt{2}$ o valor de g é mínimo. **Outro modo**. Como as curvas de nível de f são elipses com centros na origem, o valor de f aumenta à medida que se afasta da origem, então, o menor valor de f sobre a restrição $xy = 1$, $x > 0$ e $y > 0$ deverá ocorrer no ponto em que a curva de nível de f tangencia a hipérbole.)

j) Sejam $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2$ e $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1$.

$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$

Como g é de classe C^1 e $\nabla g(x, y) = (2x, 4y) \neq (0, 0)$ em B resulta que os candidatos a extremantes locais são os (x, y) que tornam compatível o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x - 2y, 6y - 2x) = \lambda(2x, 4y) \\ x^2 + 2y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y = 2\lambda x & \Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{x - y}{x} \quad (1) \\ 6y - 2x = 4\lambda y & \Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{3y - x}{2y} \quad (2) \\ x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

De (1) e (2): $\dfrac{x - y}{x} = \dfrac{3y - x}{2y} \quad \Rightarrow 2xy - 2y^2 = 3xy - x^2$

$$\Rightarrow x^2 - xy - 2y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 8y^2}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 2y \text{ ou } x = -y.$$

Substituindo em (3):

$$x^2 + 2x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = 1 \quad \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad y = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$4y^2 + 2y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 6y^2 = 1 \quad \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Como f é contínua e B compacto, basta comparar os valores de f nos pontos encontrados:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2; \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2;$$

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad f\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Portanto, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ são pontos de máximo e $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ e $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ são pontos de mínimo.

2. Sejam $f(x, y) = x^2 + 16y^2$ e $g(x, y) = xy - 1$, $x > 0$ e $y > 0$.

Resolvendo o sistema: $\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \ \nabla g(x, y) \\ xy - 1 = 0,\ x > 0 \text{ e } y > 0 \end{cases}$, ou seja,

$$\begin{cases} (2x, 32y) = \lambda(y, x) \\ xy - 1 = 0 \quad ① \end{cases} \Rightarrow 2x = \lambda y \quad \text{e} \quad 32y = \lambda x.$$

Logo, $\lambda = \frac{2x}{y}$ e $\lambda = \frac{32y}{x}$. Daí, $\frac{2x}{y} = \frac{32y}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 = 32y^2 \Rightarrow x^2 - 16y^2 = 0 \Rightarrow x = 4y.$

Substituindo em ①:

$$4y^2 = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \quad (y > 0) \Rightarrow x = 2 \ (x > 0).$$

Ponto de tangência $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ e

$$f\left(2, \frac{1}{2}\right) = 2^2 + 16\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 8.$$

Curva de nível: $x^2 + 16y^2 = 8$.

4. Vamos minimizar a função $d(x, y) = \sqrt{(x - 14)^2 + (y - 1)^2}$ que nos dá a distância de um ponto $P(x, y)$ até $(14, 1)$, sujeita à restrição $g(x, y) = y - x^2 = 0$.

Para simplificar cálculos, podemos minimizar o quadrado da distância.

Seja $f(x, y) = (x - 14)^2 + (y - 1)^2$.

$\nabla f(x, y) = (2(x - 14), 2(y - 1))$ e $\nabla g(x, y) = (-2x, 1)$.

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \nabla g(x, y) \\ y - x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x - 14) = -2\lambda x \\ 2\,(y - 1) = \lambda \\ y - x^2 = 0 \quad ① \end{cases}$$

Logo, $\frac{14 - x}{x} = 2(y - 1) \Rightarrow y = \frac{14 + x}{2x}$.

Substituindo em 1:

$$\frac{14+x}{2x} - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^3 - x - 14 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \text{ (as outras raízes são complexas)}$$
e $y = 4$.

Portanto, (2, 4) é o ponto procurado.

6. Sejam $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2$ e $g(x, y, z) = x + 2y + 3z - 4$.

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ x + 2y + 3z - 4 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (2x, 2y, 4z) = \lambda(1, 2, 3) \\ x + 2y + 3z - 4 = 0 \quad ① \end{cases}$$

Então, $2x = \lambda$; $2y = 2\lambda$; $4z = 3\lambda$.

Substituindo os valores de x, y, z, em função de λ, em 1.

$$\frac{\lambda}{2} + 2\lambda + \frac{9\lambda}{4} - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 19\lambda = 16 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{16}{19}.$$

Portanto, $x = \frac{8}{19}$; $y = \frac{16}{19}$ e $z = \frac{12}{19}$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 = \frac{64 + 256 + 288}{361} = \frac{608}{361} = \frac{32}{19}.$$

Superfície de nível: $x^2 + y^2 + 2z^2 = \frac{32}{19}$.

Ponto de tangência $\left(\frac{8}{19}, \frac{16}{19}, \frac{12}{19}\right)$.

8. Sejam $P(x, y, z)$ e $O(0, 0, 0)$.
Consideremos a distância entre P e O:

$$d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Vamos minimizar a função $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$ com a restrição $g(x, y, z) = x + 2y - 3z - 4 = 0$.

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ x + 2y - 3z - 4 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (2x, 2y, 2z) = \lambda(1, 2, -3) \\ x + 2y - 3z - 4 = 0. \quad ① \end{cases}$$

Temos $x = \frac{\lambda}{2}$; $y = \lambda$ e $z = -\frac{3\lambda}{2}$.

Substituindo em 1:

$$\frac{\lambda}{2} + 2\lambda + \frac{9\lambda}{2} - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{4}{7}$$

Então, $x = \dfrac{2}{7}$, $y = \dfrac{4}{7}$ e $z = -\dfrac{6}{7}$.

10) Sejam $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$, $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$ e $h(x, y, z) = x + y + z - 1$.

Temos:

$$\nabla g(x, y, z) \wedge \nabla h(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\nabla g(x, y, z) \wedge \nabla h(x, y, z) = (2y - 2z)\,\vec{i} + (2z - 2x)\,\vec{j} + (2x - 2y)\,\vec{k} \neq \vec{0}$$

em $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } x + y + z = 1\}$ (B compacto)

Portanto, os candidatos a extremantes locais são os (x, y, z) que tornam compatível o sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1, 2, 3) = \lambda(2x, 2y, 2z) + \mu(1, 1, 1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x + \mu & ① \\ 2 = 2\lambda y + \mu & ② \\ 3 = 2\lambda z + \mu & ③ \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 & ④ \\ x + y + z = 1 & ⑤ \end{cases}$$

De ①, ②, ③ segue: ($\lambda \neq 0$)

$$1 - \mu = 2\lambda x \Rightarrow x = \frac{1 - \mu}{2\lambda}$$

$$2 - \mu = 2\lambda y \Rightarrow y = \frac{2 - \mu}{2\lambda}$$

$$3 - \mu = 2\lambda z \Rightarrow z = \frac{3 - \mu}{2\lambda}.$$

Substituindo em ⑤ segue: $\dfrac{1 - \mu}{2\lambda} + \dfrac{2 - \mu}{2\lambda} + \dfrac{3 - \mu}{2\lambda} = 1.$

Então, $\mu = \dfrac{6 - 2\lambda}{3}$; $x = \dfrac{-3 + 2\lambda}{6\lambda}$; $y = \dfrac{1}{3}$ e $z = \dfrac{3 + 2\lambda}{6\lambda}$.

Substituindo em ④ segue: $\left(\dfrac{-3 + 2\lambda}{6\lambda}\right)^2 + \dfrac{1}{9} + \left(\dfrac{3 + 2\lambda}{6\lambda}\right)^2 = 4.$

Daí, $144\lambda^2 - 12\lambda^2 - 18 = 0 \quad \Rightarrow 132\lambda^2 = 18 \;\Rightarrow\quad \lambda = \pm\sqrt{\dfrac{3}{22}}$.

Para $\lambda = \sqrt{\dfrac{3}{22}}$, temos

$$x = \frac{-3\sqrt{22} + 2\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{66}}{6};\; z = \frac{3\sqrt{22} + 2\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{66}}{6}.$$

Para $\lambda = -\sqrt{\dfrac{3}{22}}$, temos

$x = \dfrac{2 + \sqrt{66}}{6}$, $y = \dfrac{1}{3}$ e $z = \dfrac{2 - \sqrt{66}}{6}$.

Logo, $\left(\dfrac{2 - \sqrt{66}}{6}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2 + \sqrt{66}}{6}\right)$ maximiza f.

13. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $\quad g(x, y) = x^2 - 6xy - 7y^2 + 80$.

Vamos minimizar $f(x, y)$ sujeito a restrição $g(x, y) = 0$.

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ x^2 - 6xy - 7y^2 + 80 = 0 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} (2x, 2y) = \lambda(2x - 6y, -6x - 14y) & ① \\ x^2 - 6xy - 7y^2 + 80 = 0 \quad ② \end{cases}$$

De ①: $2x = \lambda(2x - 6y) \Rightarrow \lambda = \dfrac{2x}{2x - 6y} \Rightarrow \lambda = \dfrac{x}{x - 3y} \quad (x \neq 3y)$

$2y = \lambda(-6x - 14y) \Rightarrow \lambda = \dfrac{y}{-3x - 7y} \qquad (-3x \neq 7y)$

Logo, $\dfrac{x}{x - 3y} = \dfrac{y}{-3x - 7y} \Rightarrow -3x^2 - 8xy + 3y^2 = 0$

$$x = \frac{8y \pm \sqrt{64y^2 + 36y^2}}{-6} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y}{3} \\ x = -3y \end{cases}$$

Substituindo $x = \dfrac{y}{3}$ em ②:

$$\frac{y^2}{9} - 2y^2 - 7y^2 + 80 = 0 \Rightarrow -80y^2 = -720 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3 \Rightarrow x = \pm 1$$

Se $x = -3y$, então $y \notin \mathbb{R}$.

Logo, os pontos da curva mais próximos da origem são $(1, 3)$ e $(-1, -3)$.

Agora, os vetores $(1, 3)$ e $(-3, 1)$ são ortogonais $[(1, 3) \cdot (-3, 1) = 0]$ e $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ e $\vec{v} = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ são os versores de $(1, 3)$ e $(-3, 1)$.

Fazendo uma mudança de coordenadas:

$$(x, y) = u \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)}_{\vec{u}} + v \underbrace{\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)}_{\vec{v}}$$

(o vetor (x, y) escrito em outra base).

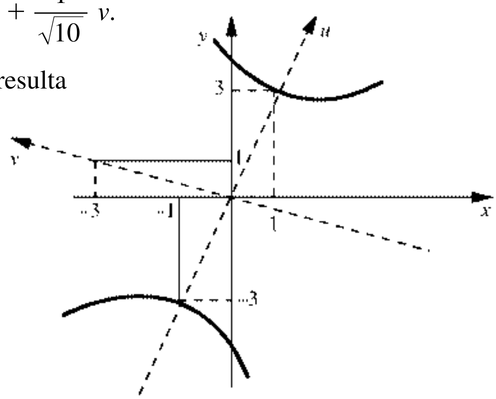
Logo,

$$x = \frac{1}{\sqrt{10}}\, u - \frac{3}{\sqrt{10}}\, v \qquad \text{e} \qquad y = \frac{3}{\sqrt{10}}\, u + \frac{1}{\sqrt{10}}\, v.$$

Substituindo em $x^2 - 6xy - 7y^2 + 80 = 0$ resulta

$$\frac{u^2}{10} - \frac{v^2}{40} = 1$$

Logo, a mudança de coordenadas proposta transforma a equação dada na equação $\frac{u^2}{10} - \frac{v^2}{40} = 1$ que é uma hipérbole.



23. Sejam $T(x, y, z) = 100\, x^2yz$ e $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$.

Os únicos pontos críticos no interior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$, que é um conjunto compacto, são os pontos $(0, y, z)$, $(x, 0, z)$ e $(x, y, 0)$ e nestes pontos a temperatura é zero. Para determinar os candidatos que estão na fronteira da esfera vamos utilizar os multiplicadores de Lagrange.

Vamos, portanto, procurar (x, y, z) que torne compatível o sistema:

$$\begin{cases} \nabla T(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (200xyz, 100x^2z, 100x^2y) = \lambda(2x, 2y, 2z) & ① \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 & ② \end{cases}$$

De ① segue:

$$200xyz = 2\lambda x \Rightarrow yz = \frac{\lambda}{100}$$

$$100x^2z = 2\lambda y \Rightarrow x^2z = \frac{\lambda y}{50} \Rightarrow y^2 = z^2 \quad \text{e} \quad x^2 = 2y^2$$

$$100x^2y = 2\lambda z \Rightarrow x^2y = \frac{\lambda z}{50}$$

Substituindo em ②,

$2y^2 + y^2 + y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad 4y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad z \pm 1$ e $\lambda = 100$. Logo:

$(\sqrt{2}, 1, 1)$ é ponto de máximo e $T(x, y, z) = 100 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 200$ é a temperatura máxima.

$(-\sqrt{2}, -1, -1)$ é ponto de mínimo e $T(x, y, z) = -200$ é a temperatura mínima.

25. Sejam $h(x, y) = x^2 + 2y^2 - 6$ e $g(x, y) = x + y - 4$

Os vetores $\nabla h(x, y)$ e $\nabla g(x, y)$ devem ser paralelos. Vamos calcular (x, y) que torne compatível o sistema:

$$\begin{cases} \nabla h(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ h(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x, 4y) = \lambda(1, 1) \\ x^2 + 2y^2 - 6 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = \lambda \\ 4y = \lambda \\ x^2 + 2y^2 - 6 = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \Rightarrow 2x = 4y \Rightarrow x = 2y \\ \text{Daí,} \\ 4y^2 + 2y^2 = 6y^2 \Rightarrow y = \pm 1 \\ \qquad\qquad\qquad\quad x = \pm 2 \end{array}$$

Logo $P(2, 1)$ pertence à elipse. ($P(-2, -1)$ não vai atender a condição do problema de minimização da distância.)

Seja $Q(x, y)$ pertencente à reta.

$$d(P, Q) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}$$

Vamos minimizar $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$. Procurando (x, y) que torne compatível o sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2(x - 2), 2(y - 1)) = \lambda(1, 1) \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 4 = \lambda \\ 2y - 2 = \lambda \\ x + y = 4 \end{cases} \begin{array}{l} \Rightarrow 2x - 4 = 2y - 2 \Rightarrow y = x - 1 \\ \text{Daí,} \\ 2x - 1 = 4 \Rightarrow x = \dfrac{5}{2} \text{ e } y = \dfrac{3}{2} \end{array}$$

Logo, $P(2, 1)$ e $Q\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ satisfazem a condição do problema.

Capítulo 17

Exercícios 17.2

1. ***a***) Sejam

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ e } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solução *LSQ*:

$$x = \frac{\vec{b} \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} = \frac{3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2}{1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2} = \frac{14}{15}$$

2. Sejam $P = (2, 1, 3)$ e r: $\begin{cases} x = 3t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$.

O ponto procurado é $(3t_1, t_1, 2t_1)$, onde t_1 é a solução *LSQ* do sistema

$$\begin{cases} 3t = 2 \\ t = 1 \\ 2t = 3. \end{cases}$$

$$t_1 = \frac{(3, 1, 2) \cdot (2, 1, 3)}{(3, 1, 2) \cdot (3, 1, 2)} = \frac{13}{14}.$$

3. Sejam $P = (1, 1, 1)$ e r: $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t \\ z = t + 2 \end{cases}$

O ponto procurado é $(t_1 + 1, 2t_1, t_1 + 2)$, onde t_1 é a solução *LSQ* do sistema

$$\begin{cases} t + 1 = 1 \\ 2t = 1 \\ t + 2 = 1 \end{cases} \quad \text{ou seja} \quad \begin{cases} t = 0 \\ 2t = 1 \\ t = -1. \end{cases}$$

$$t_1 = \frac{(1, 2, 1) \cdot (0, 1, -1)}{(1, 2, 1) \cdot (1, 2, 1)} = \frac{1}{6}.$$

Exercícios 17.3

1.

a) Sejam $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são l.i.: o sistema será compatível determinado.
Escrevendo *S* na forma vetorial:

$$x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 = \vec{b}.$$

A solução *LSQ* de *S* é a solução do sistema auxiliar:

$$\text{S.A.} \begin{cases} x\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 + y\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = \vec{b} \cdot \vec{v}_1 \\ x\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + y\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{b} \cdot \vec{v}_2 \end{cases}$$

onde $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = 3$; $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 2$; $\vec{b}\ \vec{v}_1 = 6$; $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = 6$ e $\vec{b} \cdot \vec{v}_2 = 7$

$$\text{S.A.} \begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 2x + 6y = 7 \end{cases} \qquad \text{cuja solução é } \left(\frac{11}{7}, \frac{9}{14}\right)$$

Solução *LSQ* é $\left(\frac{11}{7}, \frac{9}{14}\right)$. [Não atende ao sistema no sentido habitual.]
No sentido habitual o sistema proposto não admite solução (da Álgebra Linear: o posto da matriz dos coeficientes é diferente do posto da matriz aumentada).

b) Seja o sistema: $x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Na forma vetorial:

$$x\,\vec{v}_1 + y\,\vec{v}_2 = \vec{b}$$

$$\text{S.A.} \begin{cases} x\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 + y\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = \vec{b} \cdot \vec{v}_1 \\ x\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + y\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{b} \cdot \vec{v}_2 \end{cases}$$

onde $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = 15$; $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -3$; $\vec{b} \cdot \vec{v}_1 = 12$; $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = 10$ e $\vec{b} \cdot \vec{v}_2 = 7$.

Portanto, S.A.: $\begin{cases} 15x - 3y = 12 \\ -3x + 10y = 7 \end{cases}$, cuja solução é (1, 1).

A solução, no sentido *LSQ*, é (1, 1), que também é solução do sistema no sentido habitual.

c) Seja o sistema:

$$x\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix} \quad \text{na forma vetorial: } x\,\vec{v}_1+y\,\vec{v}_2=\vec{b}\,.$$

Os vetores v_1 e v_2 são l.d.: o sistema admite uma infinidade de soluções *LSQ* (Sistema compatível indeterminado).

Como $\vec{v}_1 = 2\,\vec{v}_2$ segue $2x\,\vec{v}_2 + y\,\vec{v}_2 = \vec{b}$

Daí, $\underbrace{(2x+y)}_{t}\vec{v}_2 = \vec{b}$. Então, $t\,\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{b}\cdot\vec{v}_2$ e daí

$t = \dfrac{\vec{b}\cdot\vec{v}_2}{\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2} = \dfrac{9}{7}$. Logo, as soluções *LSQ* são todos os pares (x, y) tais que $2x + y = \dfrac{9}{7}$.
No sentido habitual, o sistema não admite solução.

2. Sejam α: $\begin{cases} x = 2u+v \\ y = u-v \\ z = u+v \end{cases}$ e $B = (3, 0, 1)$.

O ponto procurado é $(2u_1 + v_1, u_1 - v_1, u_1 + v_1)$, onde (u_1, v_1) é a solução *LSQ* do sistema

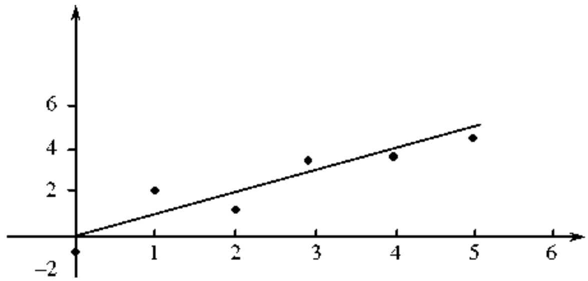
$\begin{cases} 2u+v=3 \\ u-v=0 \\ u+v=1 \end{cases}$ que é equivalente a $u\vec{v}_1 + v\vec{v}_2 = \vec{b}$.

Então, (u_1, v_1) é a solução do sistema auxiliar $\begin{cases} u\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1\ v\vec{v}_2\cdot\vec{v}_1 = \vec{b}\cdot\vec{v}_1 \\ u\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2\ v\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2 = \vec{b}\cdot\vec{v}_2 \end{cases}$, que é equivalente a $\begin{cases} 6u+2v=7 \\ 2u+3v=4 \end{cases}$. Assim, $u_1 = \dfrac{13}{14}$ e $v_1 = \dfrac{5}{7}$. O ponto procurado é $\left(\dfrac{36}{14}, \dfrac{3}{14}, \dfrac{23}{14}\right)$.
A distância do ponto ao plano é

$$\sqrt{\left(\frac{36}{14}-3\right)^2+\left(\frac{3}{14}\right)^2+\left(\frac{23}{14}-1\right)^2} = \frac{\sqrt{126}}{14} = \frac{3\sqrt{14}}{14}.$$

Exercícios 17.4

1. ***a***) O diagrama de dispersão é a representação gráfica dos pontos da tabela.



b) Reta dos mínimos quadrados.
Seja $\hat{y} = mx + q$ a reta procurada.

Temos

$$S: \begin{cases} q = -1 \\ m + q = 2 \\ 2m + q = 1{,}5 \\ 3m + q = 3{,}5 \\ 4m + q = 3{,}8 \\ 5m + q = 4{,}5 \end{cases}$$

Em forma vetorial, S: $\{m\ \vec{v}_1 + q\ \vec{v}_2 = \vec{b}$

onde $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ e $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1{,}5 \\ 3{,}5 \\ 3{,}8 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$

O sistema auxiliar é:

$$\text{S.A.: } \begin{cases} m\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 + q\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = \vec{b} \cdot \vec{v}_1 \\ m\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + q\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{b} \cdot \vec{v}_2 \end{cases}$$

Temos

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = 55;\ \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 15;$

$\vec{b} \cdot \vec{v}_1 = 53{,}2;\ \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = 6;$

$\vec{b} \cdot \vec{v}_2 = 14{,}3$

$$\begin{cases} 55m + 15q = 53{,}2 \\ 15m + 6q = 14{,}3 \end{cases}$$

Daí, $m = \dfrac{349}{350}$ e $q = -\dfrac{23}{210}$.

Portanto, $\hat{y} = \dfrac{349}{350}x - \dfrac{23}{210}$.

c) Para determinar o coeficiente de determinação

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{6} (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{6} (y_i - \bar{y})^2}$$

precisamos da seguinte tabela:

x_i	y_i	$\hat{y}_i$	$(\hat{y}_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
0	-1	$-0{,}1095$	6,2140	11,4467
1	2	0,8876	2,2371	0,1467
2	1,5	1,8847	0,2486	0,7802
3	3,5	2,8819	0,2486	1,2470
4	3,8	3,8790	2,2371	2,0070
5	4,5	4,8762	6,2145	4,4804

onde $\hat{y} = \dfrac{349}{350}x - \dfrac{23}{210}$

$$\bar{y} = \frac{-1 + 2 + 1{,}5 + 3{,}5 + 3{,}8 + 4{,}5}{6} = 2{,}3833.$$

Coeficiente de determinação:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{6} (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{6} (y_i - \bar{y})^2} = \frac{17{,}399}{20{,}1082} \cong 0{,}8653$$

2. *a*) Reta dos mínimos quadrados:

Seja $\hat{y} = mx + q$

Temos

$$S: \begin{cases} -6m + q = 2 \\ -5m + q = 2{,}4 \\ -4m + q = 1{,}9 \\ -3m + q = 1{,}8 \\ -2m + q = 2{,}1 \\ -\ \ m + q = 2{,}2 \end{cases}$$

ou

$$m \underbrace{\begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ -4 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1} + q \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}4 \\ 1{,}9 \\ 1{,}8 \\ 2{,}1 \\ 2{,}2 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Na forma vetorial $m\,\vec{v}_1 + q\,\vec{v}_2 = \vec{b}$.

O sistema auxiliar é:

S.A.: $\begin{cases} m\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 + q\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{b} \cdot \vec{v}_1 \\ m\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + q\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{b} \cdot \vec{v}_2 \end{cases}$

onde $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = 91$; $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -21$; $\vec{b} \cdot \vec{v}_1 = -43{,}4$; $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = 6$ e $\vec{b} \cdot \vec{v}_2 = 12{,}4$.

Então, S.A.: $\begin{cases} 91m - 21\,q = -43{,}4 \\ -21m + 6q = 12{,}4 \end{cases}$

A solução *LSQ* é $m = 0$ e $q = \dfrac{31}{15}$

$\hat{y} = \dfrac{31}{15}$ é a reta dos mínimos quadrados.

b) Para $x = 0$, temos $\hat{y} = \dfrac{31}{15}$.

c) $\overline{y} = \dfrac{2 + 2{,}4 + 1{,}9 + 1{,}8 + 2{,}1 + 2{,}2}{6} = \dfrac{12{,}4}{6} = \dfrac{124}{60} = \dfrac{31}{15}$.

Logo, $\hat{y}_i - \overline{y} = 0$. Portanto, $R^2 = 0$.