28 de junho

CORREÇÃO P2

1) tirei foto

2) a) expandimos $f(x_0 \pm h)$ até ordem 6

$$\dots + f(\xi_\pm)\frac{h^6}{720}, \text{ onde } \xi_+ \in [x_0, x_0+h] \text{ e } \xi_- \in [x_0-h, x_0]$$

somando $f(x_0-h)$ e $f(x_0+h)$ para eliminar os termos de ordem ímpar temos:

$$(*)_1 \quad \dots + \frac{h^6}{360}\left(\frac{f^{VI}(\xi_+) + f^{VI}(\xi_-)}{2}\right) \quad = f^{VI}(\bar{\xi}) \text{ pelo TVI}$$

fazendo a mesma coisa com $f(x_0-2h)$ e $f(x_0+2h)$ temos:

$$(*)_2 \quad \dots \frac{64h^6}{360} f^{VI}(\bar{\bar{\xi}}), \text{ com } \bar{\bar{\xi}} \in [x_0-2h, x_0+2h]$$

fazendo $(*)_2 - 4(*)_1$ para eliminar a derivada segunda temos:

$$\dots + \frac{h^6}{360}\left(64 f^{VI}(\bar{\bar{\xi}}) - 4 f^{VI}(\bar{\xi})\right)$$

isolando $f^{IV}(x_0)$

$$f^{IV}(x_0) = \dots -\frac{h^2}{360}\left(64 f^{VI}(\bar{\bar{\xi}}) - 4 f^{VI}(\bar{\xi})\right)$$

b) do item a), o termo do erro é dado por

$$-\frac{h^2}{360}\left(64 f^{VI}(\bar{\bar{\xi}}) - 4 f^{VI}(\bar{\xi})\right) \quad \text{com } \bar{\xi} \in [x_0-h, x_0+h] \text{ e } \bar{\bar{\xi}} \in [x_0-2h, x_0+2h]$$

expandindo:

$$f^{VI}(\bar{\bar{\xi}}) = f^{VI}(\bar{\xi}) + f^{VII}(\bar{\bar{\bar{\xi}}})(\bar{\bar{\xi}} - \bar{\xi}), \text{ com } \bar{\bar{\bar{\xi}}} \in [x_0-2h, x_0+2h]$$

logo, o erro pode ser escrito como

$$-\frac{h^2}{360}\left(64\left[f^{VI}(\bar{\xi}) + f^{VII}(\bar{\bar{\bar{\xi}}})(\bar{\bar{\xi}} - \bar{\xi})\right] - 4 f^{VI}(\bar{\xi})\right)$$

$$= -\frac{h^2}{6} f^{VI}(\bar{\xi}) + O(h^3) \text{ com } \bar{\xi} \in [x_0-2h, x_0+2h]$$

o erro é de ordem 2

3) as regras de quadratura podem ser deduzidas calculando um polinômio interpolador p da f e aproximando $\int_a^b f(x)\,dx$ por $\int_a^b p(x)\,dx$
no caso da regra do ponto médio p tem grau 0 e interpola f no ponto médio do intervalo $[a,b]$, quer dizer em $\frac{a+b}{2}$. Assim, na regra do ponto médio

$$If \approx \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx = (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

b) $Ef = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p(x)\,dx =$ expandindo $f(x)$ ao redor de $\frac{a+b}{2}$

$$= \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \left(\frac{a+b}{2}\right)\right) + f''(\xi_x)\left(x - \left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 - f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx$$

$$= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx + \int_a^b f''(\xi_x)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx$$

↳ 0, pois $\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$ é simétrica em $[a,b]$

$$= f''(\xi) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{24}$$

↳ pelo TVI para integrais, para $\xi \in [a,b]$