

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики»

ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

КУРСОВАЯ РАБОТА, ЧАСТЬ 1

по дисциплине

‘Дискретная математика’

Вариант № 20

Выполнил:

Студент группы Р3109

Суханкин Дмитрий

Юрьевич

Преподаватель:

Поляков Владимир

Иванович

Санкт-Петербург, 2022

Функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принимает значение 1 при $5 \leq x_1x_2x_3 + x_4x_5 < 9$ и неопределенное значение при $x_3x_4x_5 = 7$.

Таблица истинности

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$x_1x_2x_3$	x_4x_5	$x_3x_4x_5$	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	1	1	0
2	0	0	0	1	0	0	2	2	0
3	0	0	0	1	1	0	3	3	0
4	0	0	1	0	0	1	0	4	0
5	0	0	1	0	1	1	1	5	0
6	0	0	1	1	0	1	2	6	0
7	0	0	1	1	1	1	3	7	d
8	0	1	0	0	0	2	0	0	0
9	0	1	0	0	1	2	1	1	0
10	0	1	0	1	0	2	2	2	0
11	0	1	0	1	1	2	3	3	1
12	0	1	1	0	0	3	0	4	0
13	0	1	1	0	1	3	1	5	0
14	0	1	1	1	0	3	2	6	1
15	0	1	1	1	1	3	3	7	d
16	1	0	0	0	0	4	0	0	0
17	1	0	0	0	1	4	1	1	1
18	1	0	0	1	0	4	2	2	1
19	1	0	0	1	1	4	3	3	1
20	1	0	1	0	0	5	0	4	1
21	1	0	1	0	1	5	1	5	1
22	1	0	1	1	0	5	2	6	1
23	1	0	1	1	1	5	3	7	d
24	1	1	0	0	0	6	0	0	1
25	1	1	0	0	1	6	1	1	1
26	1	1	0	1	0	6	2	2	1
27	1	1	0	1	1	6	3	3	0
28	1	1	1	0	0	7	0	4	1
29	1	1	1	0	1	7	1	5	1
30	1	1	1	1	0	7	2	6	0
31	1	1	1	1	1	7	3	7	d

Аналитический вид

Каноническая ДНФ:

$$f = \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4x_5 \vee \overline{x_1}x_2x_3x_4\overline{x_5} \vee x_1\overline{x_2}\overline{x_3}\overline{x_4}x_5 \vee x_1\overline{x_2}\overline{x_3}x_4\overline{x_5} \vee x_1\overline{x_2}\overline{x_3}x_4x_5 \vee x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4}\overline{x_5} \vee x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4}x_5 \vee x_1\overline{x_2}x_3x_4\overline{x_5} \vee x_1\overline{x_2}x_3x_4x_5 \vee x_1x_2\overline{x_3}\overline{x_4}\overline{x_5} \vee x_1x_2\overline{x_3}\overline{x_4}x_5 \vee x_1x_2\overline{x_3}x_4\overline{x_5} \vee x_1x_2\overline{x_3}x_4x_5 \vee x_1x_2x_3\overline{x_4}\overline{x_5} \vee x_1x_2x_3\overline{x_4}x_5 \vee x_1x_2x_3x_4\overline{x_5} \vee x_1x_2x_3x_4x_5$$

Каноническая КНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5)(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5})(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$

Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

Кубы различной размерности и простые импликанты

$K^0(f)$			$K^1(f)$			$K^2(f)$		$Z(f)$
m_{17}	10001	✓	$m_{18}-m_{19}$	1001X	✓	$m_{20}-m_{21}-m_{22}-m_{23}$	101XX	110X0
m_{18}	10010	✓	$m_{17}-m_{19}$	100X1	✓	$m_{18}-m_{19}-m_{22}-m_{23}$	10X1X	1X010
m_{20}	10100	✓	$m_{20}-m_{21}$	1010X	✓	$m_{17}-m_{19}-m_{21}-m_{23}$	10XX1	0111X
m_{24}	11000	✓	$m_{20}-m_{22}$	101X0	✓	$m_{24}-m_{25}-m_{28}-m_{29}$	11X0X	01X11
m_{11}	01011	✓	$m_{17}-m_{21}$	10X01	✓	$m_{20}-m_{21}-m_{28}-m_{29}$	1X10X	101XX
m_{14}	01110	✓	$m_{18}-m_{22}$	10X10	✓	$m_{17}-m_{21}-m_{25}-m_{29}$	1XX01	10X1X
m_{19}	10011	✓	$m_{24}-m_{25}$	1100X	✓	$m_{21}-m_{23}-m_{29}-m_{31}$	1X1X1	10XX1
m_{21}	10101	✓	$m_{24}-m_{26}$	110X0		$m_7-m_{15}-m_{23}-m_{31}$	XX111	11X0X
m_{22}	10110	✓	$m_{24}-m_{28}$	11X00	✓			1X10X
m_{25}	11001	✓	$m_{17}-m_{25}$	1X001	✓			1XX01
m_{26}	11010	✓	$m_{18}-m_{26}$	1X010				1X1X1
m_{28}	11100	✓	$m_{20}-m_{28}$	1X100	✓			XX111
m_7	00111	✓	$m_{14}-m_{15}$	0111X				
m_{29}	11101	✓	$m_{11}-m_{15}$	01X11				
m_{15}	01111	✓	m_7-m_{15}	0X111	✓			
m_{23}	10111	✓	$m_{22}-m_{23}$	1011X	✓			
m_{31}	11111	✓	$m_{21}-m_{23}$	101X1	✓			
			$m_{19}-m_{23}$	10X11	✓			
			$m_{28}-m_{29}$	1110X	✓			
			$m_{25}-m_{29}$	11X01	✓			
			$m_{21}-m_{29}$	1X101	✓			
			m_7-m_{23}	X0111	✓			
			$m_{29}-m_{31}$	111X1	✓			
			$m_{23}-m_{31}$	1X111	✓			
			$m_{15}-m_{31}$	X1111	✓			

Таблица импликант

Вычеркнем строки, соответствующие существенным импликантам (это те, которые покрывают вершины, не покрытые другими импликантами), а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами. Затем вычеркнем импликанты, не покрывающие ни одной вершины.

Простые импликанты		0-кубы													
		0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
		0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
		1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
		1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		11	14	17	18	19	20	21	22	24	25	26	28	29	
A	110X0									X		X			
B	1X010				X							X			
	0111X		X												
	01X11	X													
C	101XX						X	X	X						
D	10X1X				X	X			X						
E	10XX1			X		X		X							
F	11X0X									X	X		X	X	
G	1X10X						X	X					X	X	
H	1XX01			X				X			X			X	
I	1X1X1							X						X	
	XX111														

Ядро покрытия:

$$T = \left\{ \begin{matrix} 01X11 \\ 0111X \end{matrix} \right\}$$

Получим следующую упрощенную импликантную таблицу:

Простые импликанты		0-кубы										
		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
		0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
		0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
		1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1
		17	18	19	20	21	22	24	25	26	28	29
A	110X0							X		X		
B	1X010		X							X		
C	101XX				X	X	X					
D	10X1X		X	X			X					
E	10XX1	X		X		X						
F	11X0X							X	X		X	X
G	1X10X				X	X					X	X
H	1XX01	X				X			X			X
I	1X1X1					X						X

Метод Петрика:

Запишем булево выражение, определяющее условие покрытия всех вершин:

$$Y = (E \vee H) (B \vee D) (D \vee E) (C \vee G) (C \vee E \vee G \vee H \vee I) (C \vee D) (A \vee F) (F \vee H) \\ (A \vee B) (F \vee G) (F \vee G \vee H \vee I)$$

Приведем выражение в ДНФ:

$$Y = ADGH \vee BCEF \vee ACDEF \vee ACDFH \vee ADEFG \vee BCDFH \vee BDEFG \vee BDFGH \vee \\ ABCEGH$$

Возможны следующие покрытия:

$$C_1 = \left\{ \begin{matrix} T \\ A \\ D \\ G \\ H \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 01X11 \\ 0111X \\ 110X0 \\ 10X1X \\ 1X10X \\ 1XX01 \end{matrix} \right\} \quad C_2 = \left\{ \begin{matrix} T \\ B \\ C \\ E \\ F \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 01X11 \\ 0111X \\ 1X010 \\ 101XX \\ 10XX1 \\ 11X0X \end{matrix} \right\} \quad C_3 = \left\{ \begin{matrix} T \\ A \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 01X11 \\ 0111X \\ 110X0 \\ 101XX \\ 10X1X \\ 10XX1 \\ 11X0X \end{matrix} \right\}$$

$$S_1^a = 21 \\ S_1^b = 27$$

$$S_2^a = 21 \\ S_2^b = 27$$

$$S_3^a = 24 \\ S_3^b = 31$$

$$C_4 = \left\{ \begin{matrix} T \\ A \\ C \\ D \\ F \\ H \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 01X11 \\ 0111X \\ 110X0 \\ 101XX \\ 10X1X \\ 11X0X \\ 1XX01 \end{matrix} \right\} \quad C_5 = \left\{ \begin{matrix} T \\ A \\ D \\ E \\ F \\ G \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 01X11 \\ 0111X \\ 110X0 \\ 10X1X \\ 10XX1 \\ 11X0X \\ 1X10X \end{matrix} \right\} \quad C_6 = \left\{ \begin{matrix} T \\ B \\ C \\ D \\ F \\ H \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 01X11 \\ 0111X \\ 1X010 \\ 101XX \\ 10X1X \\ 11X0X \\ 1XX01 \end{matrix} \right\}$$

$$S_4^a = 24 \\ S_4^b = 31$$

$$S_5^a = 24 \\ S_5^b = 31$$

$$S_6^a = 24 \\ S_6^b = 31$$

$$\begin{aligned} S_9^a &= 28 \\ S_9^b &= 36 \end{aligned}$$

Рассмотрим следующее минимальное покрытие:

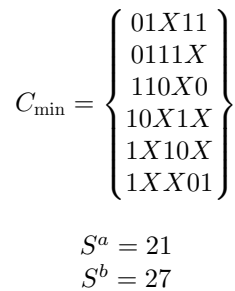
$$\begin{aligned} S^a &= 21 \\ S^b &= 27 \end{aligned}$$

Этому покрытию соответствует следующая МДНФ:

$$f = \overline{x_1} x_2 x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} x_4 \vee x_1 x_3 \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_4} x_5$$

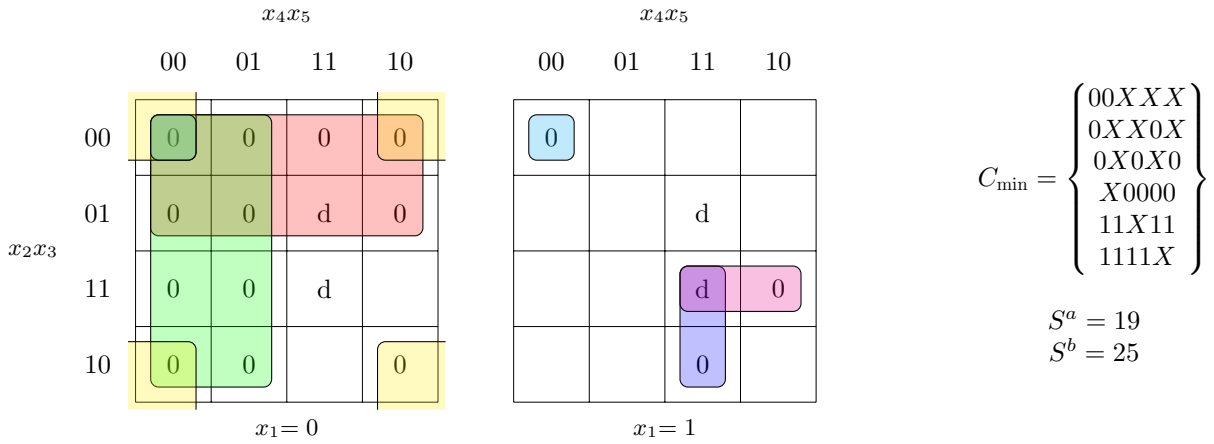
Минимизация булевой функции на картах Карно

Определение МДНФ



$$f = \overline{x_1} x_2 x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} x_4 \vee x_1 x_3 \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_4} x_5$$

Определение МКНФ



$$f = (x_1 \vee x_2) (x_1 \vee x_4) (x_1 \vee x_3 \vee x_5) (x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})$$

Преобразование минимальных форм булевой функции

Факторизация и декомпозиция МДНФ

$$f = \overline{x_1} x_2 x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} x_4 \vee x_1 x_3 \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_4} x_5 \quad S_Q = 27 \quad \tau = 2$$

$$f = x_1 \overline{x_4} (x_3 \vee x_5) \vee x_1 \overline{x_2} x_4 \vee \overline{x_1} x_2 x_4 (x_3 \vee x_5) \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_5} \quad S_Q = 22 \quad \tau = 3$$

$$\varphi = \overline{x_3} \overline{x_5}$$

$$\overline{\varphi} = x_3 \vee x_5$$

$$f = x_1 \overline{x_4} \overline{\varphi} \vee x_1 \overline{x_2} x_4 \vee \overline{x_1} x_2 x_4 \overline{\varphi} \vee \varphi x_1 x_2 \quad S_Q = 20 \quad \tau = 4$$

Факторизация и декомпозиция МКНФ

$$f = (x_1 \vee x_2) (x_1 \vee x_4) (x_1 \vee x_3 \vee x_5) (x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \quad S_Q = 25 \quad \tau = 2$$

$$f = (x_1 \vee x_2 x_4 (x_3 \vee x_5)) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_3} \overline{x_5}) (x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) \quad S_Q = 20 \quad \tau = 4$$

$$\varphi = x_3 \vee x_5$$

$$\overline{\varphi} = \overline{x_3} \overline{x_5}$$

$$f = (x_1 \vee x_2 x_4 \varphi) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4} \vee \overline{\varphi}) (\varphi \vee x_2 \vee x_4) \quad S_Q = 18 \quad \tau = 4$$

Синтез комбинационных схем

Будем анализировать схемы на следующих наборах аргументов:

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 1]) = 1$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 0]) = 1$$

Булев базис

Схема по упрощенной МДНФ:

$$f = x_1 \overline{x_4} \overline{\varphi} \vee x_1 \overline{x_2} x_4 \vee \overline{x_1} x_2 x_4 \overline{\varphi} \vee \varphi x_1 x_2 \quad (S_Q = 20, \tau = 4)$$

$$\varphi = \overline{x_3} \overline{x_5}$$

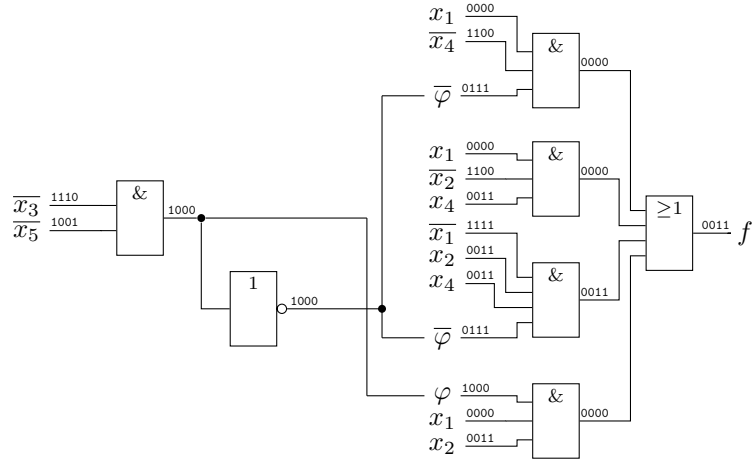
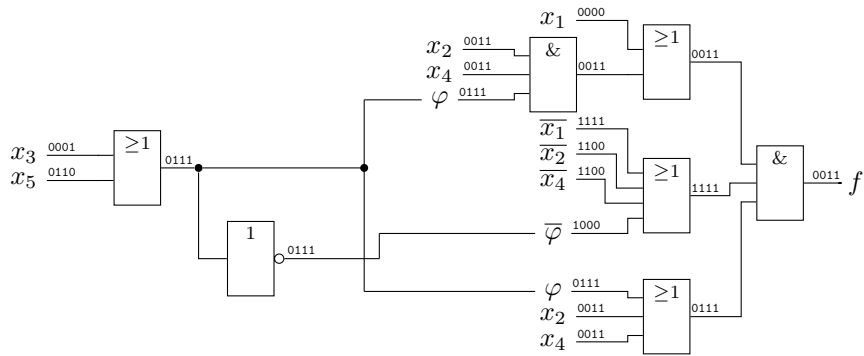


Схема по упрощенной МКНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2 x_4 \varphi) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4} \vee \overline{\varphi}) (\varphi \vee x_2 \vee x_4) \quad (S_Q = 18, \tau = 4)$$

$$\varphi = x_3 \vee x_5$$



Сокращенный булев базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{x_1 \overline{x_4} \overline{\varphi} x_1 \overline{x_2} x_4 \overline{x_1} x_2 x_4 \overline{\varphi} \varphi x_1 x_2}} \quad (S_Q = 25, \tau = 6)$$

$$\varphi = \overline{x_3} \overline{x_5}$$

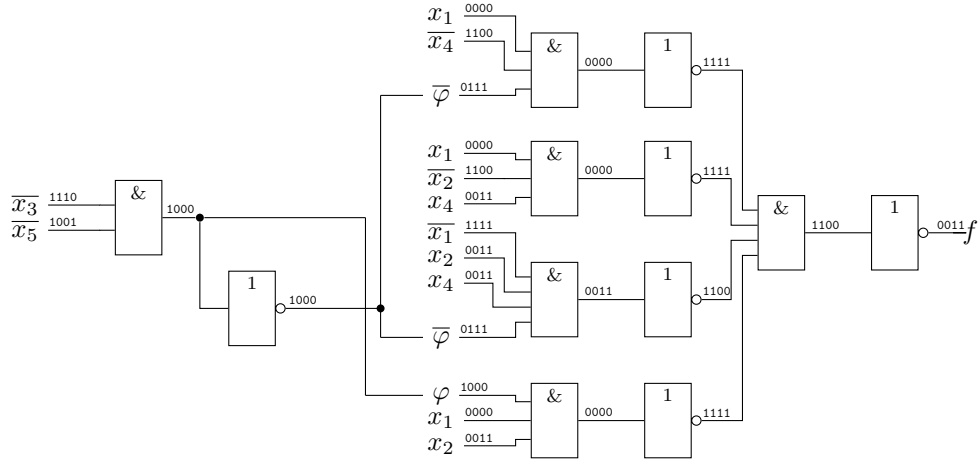
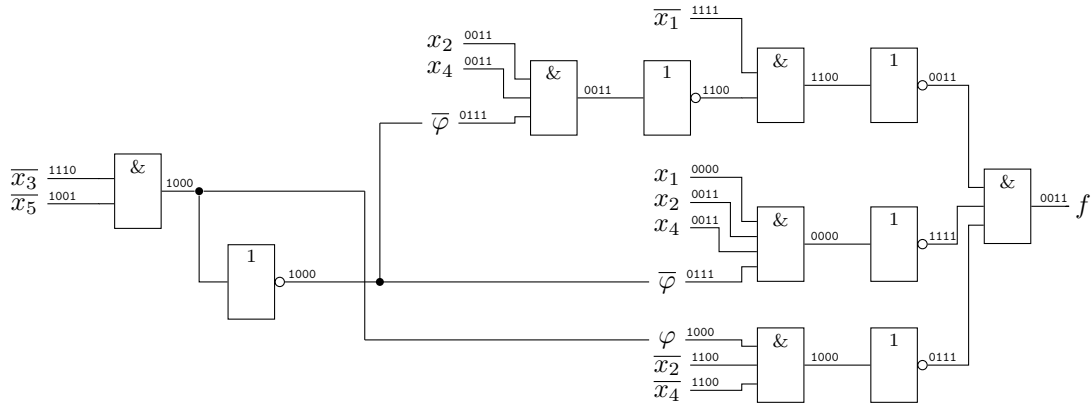


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{x_1 \overline{x_2} x_4 \overline{\varphi} x_1 \overline{x_2} x_4 \overline{\varphi} \varphi \overline{x_2} x_4}} \quad (S_Q = 22, \tau = 7)$$

$$\varphi = \overline{x_3} \overline{x_5}$$



Универсальный базис (И-НЕ, 2 входа)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_4} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_5} \overline{x_3} \overline{x_5} \overline{x_1} \overline{x_4} \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_4} \quad (S_Q = 28, \tau = 6)$$

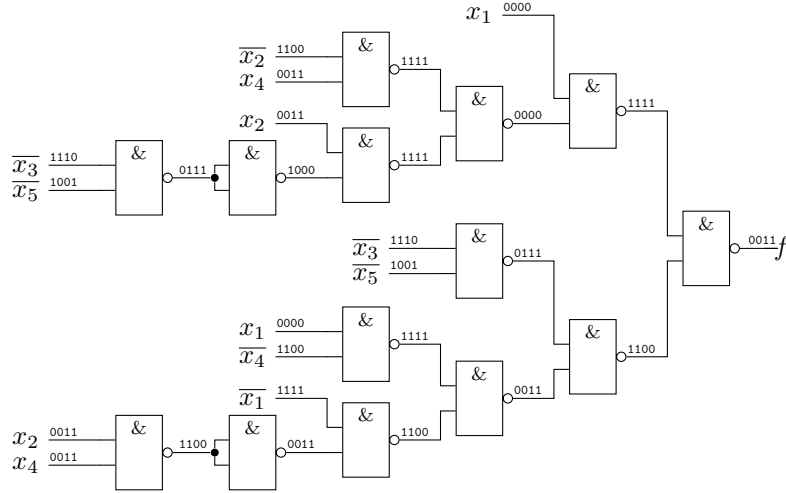


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_5} \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_4} \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_5} \quad (S_Q = 34, \tau = 9)$$

