Polytech Nice Sophia - 2022/2023

DS1 – MAM3 - MI1

12/10/22 - Durée 1h30

Les notations sont celles du cours. Calculatrices et documents non autorisés.

Exercice 1 . (5 points)

Calculer l'intégrale double suivante:

$$I = \iint_D (1 + xy)dx\, dy$$

Où D désigne le disque de centre $O(0,0)$ et de rayon $R = 1$.

Exercice 2 . (7 points)

1. Calculer la matrice Jacobienne du changement de variables sphériques :

$$\begin{cases} x = r\, sin\theta\, cos\varphi \\ y = r\, sin\theta\, sin\varphi \\ z = r\, cos\theta \end{cases} \quad ; \quad r > 0\, ;\, \theta \in [0,\pi]\, ;\, \varphi \in [0,2\pi]$$

2. Calculer le jacobien (déterminant de la matrice jacobienne) de la question 1 .
3. Soit V la boule de centre $O(0,0,0)$ et de rayon $R = 3$.
   Calculer :

$$I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$$

Exercice 3 . (8 points)

Soit à étudier la nature de l'intégrale : $K = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$

1. Montrer que la fonction $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ est *localement intégrable* sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
2. Montrer que : $I = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t}{t} dt$ est une intégrale convergente.
3. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t} dt$ est convergente.
4. Vérifier que pour tout $t \geq 1$, $0 \leq sin^2 t = \frac{1-cos\, 2t}{2} \leq |sin\, t|$.
5. En déduire que $\int_0^{+\infty} \left|\frac{sin\, t}{t}\right| dt$ est divergente.
6. Conclure.