TD5 : Intégrales à paramètre

Ex 1 : On pose

$$I(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} \, dx \qquad t > 0$$

1. Mq on définit ainsi une fonction sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. La calculer

Soit $t > 0$ fixé

Comme $(\forall x \in \mathbb{R}) : e^{-tx} \geq 0$ (et mesurable), l'intégrale $I(t)$ est bien définie (et $\in \overline{\mathbb{R}_+}$). Montrons qu'on a

$$\underline{x \mapsto e^{-tx} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)} \; (= \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}, \mu_L))$$

$$\overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \int_{\mathbb{R}_+} |e^{-tx}| \, dx < \infty$$

On a, $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-tx} \, dx = \lim_{A \to \infty} \int_0^A e^{-tx} \, dx$

soit $A > 0$

$$\int_0^A e^{-tx}\,dx = \left[-\frac{1}{t}e^{-tx}\right]_0^A$$

$$= -\frac{1}{t}e^{-tA} + \frac{1}{t}$$

$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-tx}\,dx = \frac{1}{t}$$

Rq : $I(0)$ bien définie et $\int_0^{\infty} \underbrace{e^{-0.x}}_{1}\,dx = +\infty$

2. Mq I est dérivable à tout ordre sur $\mathbb{R}_+^*$

C'est clair :

$$I'(t) = -\frac{1}{t^2}$$

$I''(t) = \frac{2}{t^3}$ | $I'''(t) = -\frac{6}{t^4}$

$$I^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n n!}{t^{n+1}} \quad (*)$$

En effet :

- $n=0$: $I^{(0)}(t) = \frac{1}{t} = \frac{(-1)^0 0!}{t^{0+1}}$

- si $(*)$ est vraie au rang n,

i.e. si $I^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n n!}{t^{n+1}}$ alors

$$I^{(n+1)}(t) = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{t^{n+2}}$$

On, $I^{(n+1)}(t) = \left(I^{(n)}\right)'(t)$

$$= \left(\frac{(-1)^n n!}{t^{n+1}}\right)'$$

$$= -(n+1)(-1)^n n! \, t^{\overbrace{-(n+1)-1}^{-(n+2)}}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{t^{n+2}}$$

3. Calculer $I'(t)$, $I''(t)$, ..., $I^{(n)}(t)$ en utilisant le résultat de dérivation d'une intégrale à paramètre

On, $I(t) = \int_0^\infty \underbrace{e^{-tx}}_{f(t,x)} dx$

Soit $t_0 > 0$, mq I est dérivable en t_0

et $\frac{d}{dt} I(t_0) = \frac{d}{dt} \int_0^\infty f(t,x)\, dx \Big|_{t=t_0}$

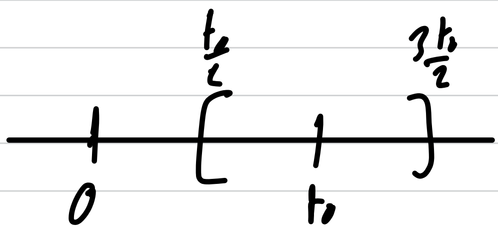
$$= \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)\, dx$$

Ici, $(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{-tx}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$

(car elle possède des dérivées en t et en x

à n'importe quel ordre cf MI1)

En particulier, $(\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2)$; $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = -x e^{-tx}$



$(\varepsilon = \frac{t_0}{2} > 0)$

De plus, soit $t \in [\frac{t_0}{2}, \frac{3t_0}{2}]$, soit $x \geq 0$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \right| = |-x e^{-tx}| = x e^{-tx} \leq \underbrace{x e^{-\frac{t_0}{2} x}}_{\in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)}$$

Donc le théorème s'applique :

$I'(t_0)$ existe et $I'(t_0) = \int_0^\infty -x e^{-t_0 x} \, dx$

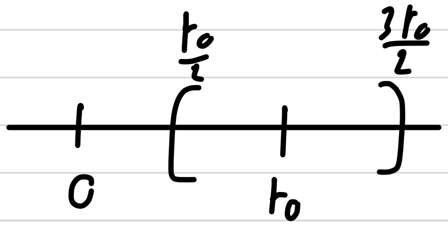
De même, $I'(t) = \int_0^\infty -x e^{-tx}\, dx$

On peut réappliquer le théorème avec $f(t,x) = -xe^{-tx}$

puisque :

i) $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = x^2 e^{-tx}$

ii) soit $t_0 > 0$,



$\varepsilon = \frac{t_0}{2} > 0$

On a $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| = x^2 e^{-tx} \leq \underbrace{x^2 e^{-\frac{t_0}{2}x}}_{=g(x)}$,

$t \in \left[\frac{t_0}{2}, \frac{3t_0}{2}\right]$, $x \geq 0$, $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$

Du coup,

$I''(t_0) = \int_0^\infty x^2 e^{-t_0 x}\, dx$, $t_0 > 0$

Récurrence immédiate :

$$I^{(n)}(t) = \int_0^{\infty} (-1)^n x^n e^{-tx}\, dx \quad , t > 0$$

4. En déduire la valeur (explicite) de $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \frac{1}{(-1)^n} \int_0^{\infty} (-1)^n x^n e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{(-1)^n} (-1)^n \frac{n!}{1^{n+1}}$$

$$= n!$$

Ex 2 : Soit $t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$F(t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(tx)}{x} e^{-x} dx$$

1. Mq on définit ainsi : $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

soit $t \in \mathbb{R}$, l'intégrale n'étant pas positive,

on doit s'assurer que $x \mapsto \frac{t}{t} \cdot \frac{\sin(tx)}{x} e^{-x} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$

$(x > 0)$

$t \,\mathrm{sinc}(tx) e^{-x}$

on, $\int_0^\infty |t \,\mathrm{sinc}(tx) e^{-x}| \, dx \leq \int_0^\infty |t| \, e^{-x} \, dx < \infty$

$|\mathrm{sinc}(u)| \leq 1, u \in \mathbb{R}$

$\left(= |t| \int_0^\infty e^{-x} dx = |t| < \infty \right)$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\int_0^\infty t \,\mathrm{sinc}(tx) e^{-x} \, dx$ est bien

définie (et $\in \mathbb{R}$)

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$

$F(t) = \int_1^{\infty} f(t,x)\, dx$ avec $f(t,x) = t \,\mathrm{sinc}(tx) e^{-x}$

On soit $x > 0$, soit $t \in \mathbb{R}$, $f(t,x) = \frac{\sin(t,x)}{x} e^{-x}$

$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \frac{\cos(tx) \times x}{x} e^{-x}$

De plus, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x > 0$,

$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| = \left|\cos(tx) e^{-x}\right| \leq e^{-x} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$

Donc, F est dérivable en t_0 et

$F'(t_0) = \int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)\, dx$

$= \int_1^{\infty} \cos(t_0 x) e^{-x}\, dx$, $t_0 \in \mathbb{R}$

3. Calculer F' puis en déduire F

soit $t \in \mathbb{R}$, $F'(t) = \int_0^\infty \cos(tx) e^{-x}$

$$= \int_0^\infty \mathrm{Re}\left(e^{(it-1)x}\right) dx$$

$$= \mathrm{Re}\left(\int_0^\infty e^{(it-1)x}\right) dx$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{it-1} e^{(it-1)x}\right]_0^\infty \quad , it-1 \neq 0$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{-1-it}{1+t^2} e^{(it-1)x}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{1+t^2}$$

donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $F'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

$\to F(t) = \arctan(t) + C$ et $C = F(0)$ (cf $\arctan(0) = 0$)

On, $F(0) = \int_0^\infty t \operatorname{sinc}(tx)\, e^{-x}\, dx \Big|_{t=0} = 0$

$$\Rightarrow F(t) = \int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{x} e^{-x}\, dx = \arctan(t), \quad t \in \mathbb{R}$$