

FEUILLE DE T.D. 2

Exercice 1.

Calculer l'intégrale double :

$$I = \iint_{\Omega} \frac{1}{(x+y)^3} dx dy$$

où $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 1 < x < 3, y > 2, x + y < 5\}$

Exercice 2.

Soit

$$K = \iint_{\Omega} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy \quad ; \quad a > 0 \quad ; \quad \Omega = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$$

1. Montrer que l'intégrale double K est convergente.
2. En passant en coordonnées polaires, calculer K .
3. En déduire la valeur de $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Exercice 3.

Calculer l'intégrale triple :

$$J = \iiint_{\Omega} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz$$

où $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x^2 + y^2 < a^2, 0 < z < a; a > 0\}$

Exercice 4.

En utilisant les coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \theta \\ y = r \cos \varphi \sin \theta \\ z = r \sin \varphi \end{cases} \quad ; \quad r > 0, -\pi < \theta < \pi, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

Calculer l'intégrale :

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz$$

où $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$