FEUILLE DE T.D. 1

Exercice 1.

Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes et en donner la valeur dans le cas où elles sont convergentes :

$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$; $I_2 = \int_0^1 \ln x \, dx$; $I_3 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$

Exercice 2.

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)} dt$; $J_2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$; $J_3 = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\, dt$

Exercice 3.

On considère l'intégrale généralisée : $K = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t}{t} dt$

1. Montrer que K est une intégrale convergente.
2. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t} dt$ est convergente.
3. En déduire que $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ est divergente.
   (Indication : Vérifier que pour tout $t \geq 1$, $0 \leq sin^2 t = \frac{1-cos\, 2t}{2} \leq |sin\, t|$)
4. Conclure.