Polytech Nice Sophia – MAM3 / MI1 **2022/2023**

FEUILLE DE T.D. 4

Exercice 1.

1. Déterminer les limites suivantes :

   $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n}\, dx$; $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sin\frac{1}{nx}\, dx$

2. Montrer que : $\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\, dx = 0$

3. Soit $u_n = \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cos x \ dx$

   Calculer $\lim_{n\to\infty} u_n$

Exercice 2.

Soit à calculer la limite :

$$L_\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} dx.$$

1. Pour $\alpha = 1/2$, calculer, par le théorème de convergence dominée la valeur de L_α.
2. On se propose à présent de déterminer L_α en utilisant le résultat de convergence monotone. On pose alors :

$$h_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x}$$

   En calculant la quantité $\ln\left(\frac{h_{n+1}}{h_n}\right)$, montrer qu'il s'agit d'une suite monotone. Conclure.