POLYTECH NICE SOPHIA

MAM3

Mathématiques de l'ingénieur.e 1

2022-2023

Exam CC2

Durée 2H. Documents non autorisés. Rendre sur deux copies séparées les exos 1 et 2 d'une part, 3 et 4 d'autre part.

Exo 1 (3 points)

Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable. Soit A une partie de X. Montrer que A appartient à la tribu $\mathscr{T}$ si et seulement si l'application caractéristique $\chi_A : X \to \mathbf{R}$ est $(\mathscr{T}, \mathscr{B}_\mathbf{R})$-mesurable, où $\mathscr{B}_\mathbf{R}$ désigne la tribu des boréliens.
(On rappelle que, par définition, $\chi_A(x)$ vaut 1 si $x \in A$, 0 sinon.)
Réponse. Si A appartient à la tribu, soit $B \subset X$ (partie borélienne ou non !) On a quatre cas :

- $0 \notin B, 1 \notin B : \chi_A^{-1}(B) = \emptyset$,
- $0 \in B, 1 \notin B : \chi_A^{-1}(B) = X \setminus A$,
- $0 \notin B, 1 \in B : \chi_A^{-1}(B) = A$,
- $0 \in B, 1 \in B : \chi_A^{-1}(B) = X$.

Dans chacun des cas, on voit que l'image réciproque appartient à la tribu. Réciproquement, si χ_A est mesurable, comme $\{1\}$ est une partie fermée, c'est un borélien, donc $A = \chi_A^{-1}(\{1\}) \in \mathscr{T}$.

Exo 2 (6 points)

Pour chacune des expressions ci-dessous (où $n \geq 1$) dire si la limite quand $n \to \infty$ existe et, le cas échéant, déterminer cette limite.

2.1

$$\int_0^\infty e^{-nx}\cos(nx)\,\mathrm{d}x$$

Réponse. Soit $x > 0$, on voit que $f_n(x) := e^{-nx}\cos(nx)$ converge vers 0 quand $n \to \infty$. Comme, pour tout $x > 0$ et $n \geq 1$,

$$|f_n(x)| \leq e^{-x},$$

on a domination par une fonction intégrable : le théorème de CV dominée implique que la limite existe et vaut 0.

2.2

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+x/n)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Réponse. Soit $x > 0$, on voit que

$$f_n(x) := \frac{\ln(1+x/n)}{1+x^2} \sim \frac{x}{n(1+x^2)}$$

converge vers 0 quand $n \to \infty$. Comme, pour tout $x > 0$ et $n \geq 1$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{\ln(1+x)}{1+x^2},$$

on a domination par une fonction intégrable (critère de Riemann) : le théorème de CV dominée implique que la limite existe et vaut 0.

2.3

$$\int_0^n \frac{nx}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$$

Réponse. Soit $x > 0$, on voit que $f_n(x) := nx\chi_{[0,n]}(x)/(1+e^x)$, mesurable et positive, converge en croissant vers ∞ quand $n \to \infty$. Le théorème de CV monotone implique que la limite existe et vaut ∞.

Exo 3 (6 points)

3.1

Montrer que la fonction

$$F(t) := \int_0^\infty e^{-tx} \cos x\,\mathrm{d}x$$

est bien définie pour $t > 0$.
Réponse. Pour $t > 0$, $|e^{-tx} \cos x| \leq e^{-tx}$, d'où l'intégrabilité (et le caractère bien défini de $F(t)$).

3.2

Soit $t_0 > 0$; montrer que F est continue en t_0.
Réponse. Posons $f(t,x) := e^{-tx} \cos x$; pour $t \in [t_0/2, t_0+1]$ et $x \geq 0$, on a

$$|f(t,x)| \leq e^{-t_0 x/2},$$

d'où la domination par une fonction intégrable. Comme $ t \mapsto f(t,x)$ est continue en t_0 pour tout $x \geq 0$, l'intégrale à paramètre est continue en t_0.

3.3

Soit $t_0 > 0$; montrer que F est dérivable en t_0 et donner l'expression de sa dérivée.
Réponse. La fonction $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable en tout $t \in]t_0/2, t_0+1[$, quel que soit $x \geq 0$, et

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| = |-xe^{-tx}\cos x| \leq xe^{-t_0x/2},$$

d'où la domination par une fonction intégrable. L'intégrale à paramètre est dérivable en t_0 et

$$F'(t_0) = -\int_0^\infty xe^{-t_0x}\cos x\,\mathrm{d}x.$$

3.4

Calculer $F(t)$ pour tout $t > 0$.
Réponse. On peut par exemple écrire

$$F(t) = \mathrm{Re}\int_0^\infty e^{(i-t)x}\,\mathrm{d}x = \frac{t}{t^2+1}.$$

3.5

En déduire, pour $t > 0$, la valeur de

$$\int_0^\infty xe^{-tx}\cos x\,\mathrm{d}x.$$

Réponse. D'après les questions 3.3 et 3.4,

$$\int_0^\infty xe^{-tx}\cos x\,\mathrm{d}x = -F'(t) = \frac{t^2-1}{(t^2+1)^2}.$$

Exo 4 (5 points)

Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < \infty$.

4.1

Montrer que $L^\infty(X, \mathscr{T}, \mu) \subset L^1(X, \mathscr{T}, \mu)$.
Réponse. Soit f dans $L^\infty(X, \mathscr{T}, \mu)$, on a

$$\int_X |f|\,\mathrm{d}\mu \leq \|f\|_\infty \int_X 1\,\mathrm{d}\mu = \mu(X)\|f\|_\infty < \infty.$$

4.2

Montrer que $L^2(X, \mathscr{T}, \mu) \subset L^1(X, \mathscr{T}, \mu)$.
(Indication : si f appartient à $L^2(X, \mathscr{T}, \mu)$, on pourra écrire $|f| = |f| \cdot 1$ et utiliser l'inégalité de Hölder.)
Réponse. Soit f dans $L^2(X, \mathscr{T}, \mu)$; comme $\mu(X) < \infty$, la fonction constante $g \equiv 1$ est aussi dans $L^2(X, \mathscr{T}, \mu)$, et d'après l'inégalité de Hölder

$$\int_X |f| \cdot 1 \, \mathrm{d}\mu \leq \|f\|_2 \|g\|_2 = \sqrt{\mu(X)} \|f\|_2 < \infty.$$

4.3

Donner un contrexemple à chacune des inclusions précédentes quand $\mu(X) = \infty$.
Réponse. On prend $X = [1, \infty[$, $\mu = \mu_L$ et on voit que :

- la fonction constante égale à 1 est dans $L^\infty(X)$, pas dans $L^1(X)$,
- la fonction $x \mapsto 1/x$ est dans $L^2(X)$, pas dans $L^1(X)$ (Riemann).