1. Discuter de l'appartenance à $L^1(\mathbb{R})$ et/ou $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions suivantes :

- $f(t) = \frac{\sin t}{t}$

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt < \infty$$

On $\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = +\infty \Rightarrow f \notin L^1(\mathbb{R})$

Rq : i) $|\sin t| \geq \sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{|\sin t|}{t}\, dt \geq \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{2t} - \frac{\cos(2t)}{2t} \right) dt$$

" ∞ (Riemann)

soit $A \geq 1$,

$$\int_1^A \frac{\cos(2t)}{2t}\,dt = \left[\frac{\sin(2t)}{4t}\right]_1^A - \underbrace{\int_1^A -\frac{1}{2t^2}\,\frac{\sin(2t)}{2}\,dt}_{\int_1^A \frac{\sin(2t)}{4t^2}}$$

$\downarrow A\to\infty$ $\quad l \in \mathbb{R}$ $\qquad \downarrow \frac{\sin(2)}{4}$

$$\left|\frac{\sin(2t)}{4t^2}\right| \leq \frac{1}{4t^2}$$

$\Rightarrow \lim_{A\to\infty}$ existe $(\in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{|\sin t|}{t}\,dt = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{|\sin t|}{t}\,dt = \infty$$

ii) $f \notin L^1(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t}{t}\,dt$ pas définie

Néanmoins, on a

$\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^A \frac{\sin t}{t}\,dt$ existe

Par ailleurs,

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^2 dt = 2\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^2 dt$$

$$= 2\left(\underbrace{\int_0^1 \left|\frac{\sin t}{t}\right|^2 dt}_{<\infty} + \underbrace{\int_1^{\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^2 dt}_{\leq \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2} < \infty}\right)$$

$\Rightarrow f \in L^2(\mathbb{R})$

- $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}\,(1+t^2)} \chi_{]0,\infty[}(t)$, $t \neq 0$

$$\int_{\mathbb{R}} |g(t)|\, dt = \int_0^{\infty} |g(t)|\, dt < \infty$$

- au voisinage de $t = 0^+$,

$$\frac{1}{\sqrt{t}\,(1+t^2)} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \Rightarrow \text{intégrable}$$

- au voisinage de l'∞ :

$$\frac{1}{\sqrt{t}\,(1+t^2)} \underset{t \to \infty}{\sim} \frac{1}{t^{5/2}} \Rightarrow \text{intégrable par Riemann}$$

$\Rightarrow g \in L^1(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2 \, dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{t\,(1+t^2)^2} \, dt = +\infty$$

cf $\frac{1}{t(1+t^2)^2} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{t}$ en $t = 0^+$

$\Rightarrow$ DV : $g \notin L^2(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \quad L^1(\mathbb{R}) \not\subset L^2(\mathbb{R})$

$\cdot\ h(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\ ,\ t \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} |h(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$= 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = +\infty$$

cf : $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \underset{t\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$ qd $t \to \infty$ Riemann $\Rightarrow$ DV

$\Rightarrow h \notin L^1(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} |h(t)|^2\,dt = 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} < \infty$$

cf $\dfrac{1}{1+t^2} \underset{t\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ qd $t \to \infty$ Riemann $\Rightarrow$ CV

$\Rightarrow h \in L^2(\mathbb{R}) \notin L^1(\mathbb{R})$

$\cdot\ h(t) = e^{-t^2}, \quad t \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} |h(t)|\, dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt < \infty$$

(preuve directe) : $t^2 e^{-t^2} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow (\exists A \geq 0)(\forall t \geq A) : |t^2 e^{-t^2}| \leq 1$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \underbrace{\int_0^A e^{-t^2}\, dt}_{< \infty} + \underbrace{\int_A^{\infty} e^{-t^2}\, dt}_{\leq \frac{1}{t^2}}$$

$$\int_A^{\infty} \frac{dt}{t^2} < \infty$$

De même, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |h(t)|^2\, dt = 2 \int_0^{\infty} \underbrace{(e^{-t^2})^2}_{e^{-2t^2}}\, dt < \infty$

$\Rightarrow h \in L^2(\mathbb{R})$

Ex 2 :

$$f(t) = \frac{1}{t(1+|\ln t|)^2} \quad , \quad t>0$$

1. Mq $f \in L^1((0,1])$

$$\int_0^1 |f(t)|\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{t(1+|\ln t|)^2}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dt}{t(1+|\ln t|)^2} \quad \left(= \lim_{\substack{\varepsilon = \frac{1}{n} \to 0 \\ n\to+\infty}} \underbrace{\frac{dt}{t(1+|\ln t|)^2}\,\chi_{[\frac{1}{n},1]}}_{(f_n)_n \nearrow f} \right)$$

On a, $$\int_\varepsilon^1 \frac{dt}{t(1+|\ln t|)^2} = \int_\varepsilon^1 \frac{dt}{t(1-\ln t)^2}$$

cf : $t \in (\varepsilon, 1] \Rightarrow \ln(t) \leq 0$

$$= \left[\frac{1}{1-\ln(t)} \right]_\varepsilon^1$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{1-\ln(\varepsilon)}$$

$$\underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 1$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{t(1+|\ln t|)^2} < \infty$$

$\Rightarrow f \in L^1([0,1])$

Rq : directement,

$$\frac{1}{t(1+|\ln t|)^2} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t|\ln t|^2}$$

On Bertrand :

$$\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta t} \quad CV \iff \text{soit } \alpha < 1$$

$$\text{soit } \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1$$

$$\int_e^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha} \ln^{\beta} t} \quad CV \iff \text{Soit } \alpha > 1$$

Soit $\alpha = 1$ et $\beta > 1$

Ici, $\overset{(\alpha=1)}{\beta = 2} > 1 \Rightarrow CV$

$\Rightarrow f \in L^1([0,1])$

2. Soit $p \in]1, \infty]$

mq $f \notin L^p([0,1])$

On a, $\displaystyle\int_0^1 |f(t)|^p \, dt = \int_0^1 \frac{dt}{t^p (1 + |\ln t|)^{2p}}$

au gd $t \to 0_+$, $\displaystyle\frac{1}{t^p(1+|\ln t|)^{2p}} \sim \frac{1}{t^p |\ln t|^{2p}}$

$p > 1 \Rightarrow DV$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 |f(t)|^p \, dt = \infty$

$\Rightarrow f \notin L^p([0,1])$ si $p \in]1, \infty[$

En effet, $t(1+|\ln t|)^2 \underset{0}{\sim} t|\ln^2 t| \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0_+$

$\Rightarrow f(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \infty$

$\Rightarrow f \notin \mathcal{L}^\infty([0,1])$

i.e. $\neg\left((\exists C \geq 0)\ (\mu_{pp}\ x \in [0,1]) : |f(x)| \leq C\right)$

$\uparrow$ négation logique

i.e. $\neg\left((\exists C \geq 0) : \mu_{pp}\left(\{x \in [0,1] / |f(x)| > C\}\right) = 0\right)$

i.e. $(\forall C \geq 0) : \mu_L\left(\{x \in [0,1] / |f(x)| > C\}\right) > 0$

soit $C \geq 0$, comme $f(t) \underset{t\to 0^>}{\longrightarrow} \infty$,

$(\exists t_0 > 0)(\forall t \in]0, t_0]) : f(t) > C$

et $\mu_L(]0,t_0]) = t_0 > 0$

Rq : exo 3 $\Rightarrow$ $L^2((0,1]) \supset L^\infty((0,1])$

On a mq $f \notin L^2((0,1])$ donc $f \notin L^\infty((0,1])$

3. Mq $f \in L^p([1,\infty[)$ pour tout $p \in [1,\infty]$

- $p \in [1,\infty[$,

$$\int_1^\infty |f(t)|^p = \int_1^\infty \frac{dt}{t^p(1+|\ln t|)^{2p}}$$

En l'∞, $\frac{1}{t^p(1+|\ln t|)^{2p}} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{t^p |\ln t|^{2p}}$

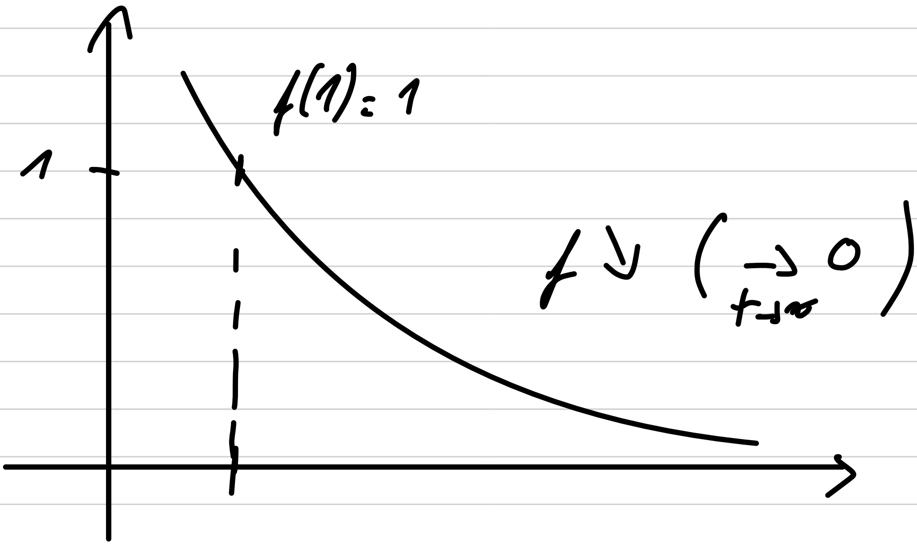
Bertrand $\Rightarrow$ CV car $p > 1$

donc $f \in L^p([1,\infty[)$ si $1 < p < \infty$

de même Bertrand sur $\frac{1}{t|\ln t|^2}$ $(p = 1)$

$\Rightarrow f \in L^1([1,\infty[)$

$- \; p = \infty$



$|f(t)| \leq f(1) = 1 \Rightarrow f \in L^\infty([1, \infty[)$

Ex 3:

1. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ espace mesuré : $\mu(X) < \infty$

Soient p et $q \in [1, \infty]$, $p < q$

Mq $L^q(X, \mathcal{B}, \mu) \subsetneq L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$

- si $q = \infty$: $p \in [1, \infty[$, soit $f \in L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$

mq $f \in L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$

$$\int_X |f|^p \, d\mu \leq \int_X \|f\|_\infty^p \, d\mu = \|f\|_\infty^p \underbrace{\underbrace{\int_X 1 \, d\mu}_{\mu(X)}}_{< \infty}$$

$|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ μpp

$\Rightarrow$ $f \in L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ et $\|f\|_p \leq (\mu(X))^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty$

- $q < \infty$: $1 \leq p < q < \infty$

soit $f \in L^q(X, \mathcal{B}, \mu)$

$$\int_X |f|^p \, d\mu = \int_X |f|^p \, 1 \, d\mu$$

Hölder : $f \in L^p$, $g \in L^q$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$\Rightarrow f \cdot g \in L^1$ et $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

or, $f \in L^q$

$\Rightarrow |f|^p \in L^r$, avec $r = \frac{q}{p} > 1$

$$\left(\text{cf} : \int_X |f|^q \, d\mu < \infty \right)$$

$$\parallel$$

$$\left(|f|^p\right)^{\frac{q}{p} > 1}$$

Comme $\mu(X) < \infty$, $g = 1 \in L^s$ avec

s conjugué de $r = \frac{q}{p}$

$$\left(s = \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{q}{q-p} > 1 \right)$$

En effet, $\int_X 1^s \, d\mu = \int_X 1 \, d\mu = \mu(X) < \infty$

Hölder $\Rightarrow$ $|f|^p \cdot 1 = |f|^p \in L^1$ ($\Rightarrow f \in L^p$)

à $\begin{cases} |f|^p \in L^r \\ 1 \in L^s \end{cases}$

de plus,

$$\| |f|^p \cdot 1 \|_1 = \underbrace{\int_X |f|^p \, d\mu}_{\|f\|_p^p} \leq \underbrace{\| |f|^p \|_{\frac{q}{p}}}_{\underbrace{\left(\int (|f|^p)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{q}}}_{\|f\|_q^p}} \times \|1\|_{\frac{q}{q-p}}$$

$$\Rightarrow \|f\|_p \leq (\mu(X))^{\frac{q-p}{pq}} \cdot \|f\|_q$$