Polytech Nice Sophia - 2022/2023

DS1 – MAM3 - MI1

12/10/22 - Durée 1h30

Les notations sont celles du cours. Calculatrices et documents non autorisés.

Exercice 1 . (5 points)

Calculer l'intégrale double suivante:

$$I = \iint_D (1 + xy)dx\,dy$$

Où D désigne le disque de centre $O(0,0)$ et de rayon $R = 1$.

On passe en polaires :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad r \in [0,1], \ \theta \in [0, 2\pi]$$

L'application $\varphi(r,\theta) = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix}$ a pour dérivée ("matrice jacobienne", cf. MI2...)

$$\varphi'(r,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

de sorte que $|\det \varphi'(r,\theta)| = r$. Donc,

$$\int_D (1+xy)\,dx\,dy$$

$$= \int_{[0,1]\times[0,2\pi]} (1 + r^2 \underbrace{\cos\theta\sin\theta}_{\frac{1}{2}\sin 2\theta})\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^1 \Big(\underbrace{\int_0^{2\pi} (1 + \frac{r^2}{2}\sin 2\theta)\,d\theta}_{[\theta - \frac{r^2}{4}\cos 2\theta]_0^{2\pi} = 2\pi} \Big) r\,dr \quad \text{(Fubini)}$$

$$= 2\pi \underbrace{\int_0^1 r\,dr}_{[\frac{r^2}{2}]_0^1 = \frac{1}{2}} = \pi.$$

Exercice 2. (7 points)

1. Calculer la matrice Jacobienne du changement de variables sphériques :

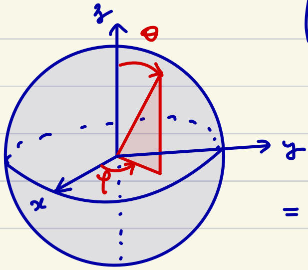
$$\begin{cases} x = r\,sin\theta\,cos\varphi \\ y = r\,sin\theta\,sin\varphi \\ z = r\,cos\theta \end{cases} \quad ; \quad r > 0\,;\ \theta \in [0,\pi]\,;\ \varphi \in [0,2\pi]$$

2. Calculer le jacobien (déterminant de la matrice jacobienne) de la question 1 .
3. Soit V la boule de centre $O(0,0,0)$ et de rayon $R = 3$.

   Calculer :

$$I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz$$

2.1. Soit $\psi(r,\theta,\varphi) := \begin{bmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{bmatrix}$



$$\psi'(r,\theta,\varphi) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial r} & \frac{\partial\psi}{\partial\theta} & \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \end{bmatrix}}_{(3\times3)}(r,\theta,\varphi)$$

$$= \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

2.2. $|\det\psi'(r,\theta,\varphi)| = r^2\sin\theta$

2.3. $\int_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$

$$= \int_{[0,3]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} r \,.\, r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\Big(\underbrace{\int_0^3 r^3\,dr}_{\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^3 = \frac{81}{4}}\Big)\sin\theta\,d\theta\right)d\varphi \quad (\text{Fubini})$$

$$= \frac{81}{4}\int_0^{2\pi}\Big(\underbrace{\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta}_{[-\cos\theta]_0^{\pi} = 2}\Big)\,d\varphi = \frac{81}{2}\times 2\pi = 81\pi.$$

Exercice 3 . (8 points)

Soit à étudier la nature de l'intégrale : $K = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$

1. Montrer que la fonction $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ est *localement intégrable* sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
2. Montrer que : $I = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t}{t} dt$ est une intégrale convergente.
3. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t} dt$ est convergente.
4. Vérifier que pour tout $t \geq 1$, $0 \leq sin^2 t = \frac{1-cos\ 2t}{2} \leq |sin\ t|$.
5. En déduire que $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ est divergente.
6. Conclure.

Voir TD 1.