Ex 1 :

Déterminer si elles existent les limites suivantes

a. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n} \, dx \qquad (n \geq 1)$

$$" \int_{[0,1]} \frac{1+nx}{(1+x)^n} \, d\mu_L(x) "$$

Soit $f_n(x) = \frac{1+nx}{(1+x)^n}$

Soit $x \in [0,1]$, $(f_n(x))_n$ CV ?

* si $x = 0$, $f_n(0) = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

* si $x \in]0,1]$, $\frac{1+nx}{e^{n \underbrace{\ln(1+x)}_{>0}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$\Rightarrow \lim_n f_n$ (limite "simple") existe et

vaut $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f = 0$ $\quad \mu_L$ // sur $[0,1]$

cf $\{x \in [0,1] \mid f(x) \neq 0\} = \{0\}$, $\mu_L(\{0\}) = 0$

$$\Rightarrow \int_{[0,1]} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{étagée}}}{f} \, d\mu_L = \text{"} \int_0^1 f(x)\, dx \text{"} = 0$$

$$\left(= 1\, \underbrace{\mu_L(\{0\})}_{0} + 0 \cdot \underbrace{\mu_L(]0,1])}_{1} = 0 \right)$$

s'il existe $g \in \mathcal{L}^1([0,1])$ tq $|f_n| \leq g$ p.p. sur $[0,1]$

$\left(\text{i.e. } \int_{[0,1]} |g|\, dx < \infty \right)$ alors

par CV dominée

$$\lim_n \int_{[0,1]} f_n \, d\mu_L = \int_{[0,1]} \lim_n f_n \, d\mu_L = 0$$

On soit $n \geq 0$, soit $x \in [0,1]$

indépendant de n

$$|f_n(x)| = \frac{1+nx}{(1+x)^n} = \frac{1+nx}{1+nx+\underbrace{\dots + x^n}_{\geq 0}} \leq \frac{1+nx}{1+nx} = 1$$

Il suffit donc de prendre :

$g(x) = 1$ car $\int_0^1 |g|\, dx = 1 < \infty$

b. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) dx$ $(n \geq 1$

Définissons: $(n \geq 1)$

signe quelconque

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{nx} & \text{si } x \in]0,1] \\ 15 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

ce qu'on veut car ne change pas la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 \overbrace{\underbrace{\left|\sin\left(\frac{1}{nx}\right)\right|}_{\leq 1}}^{\geq 0} dx \leq 1 < \infty$$

$$\Rightarrow f_n \in \mathcal{L}^1([0,1]) = \mathcal{L}^1\left([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \mu_L\right)$$

$\Rightarrow \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) dx$ bien définie, $n \geq 1$

Soit $x \in [0,1]$, f_n CV ?

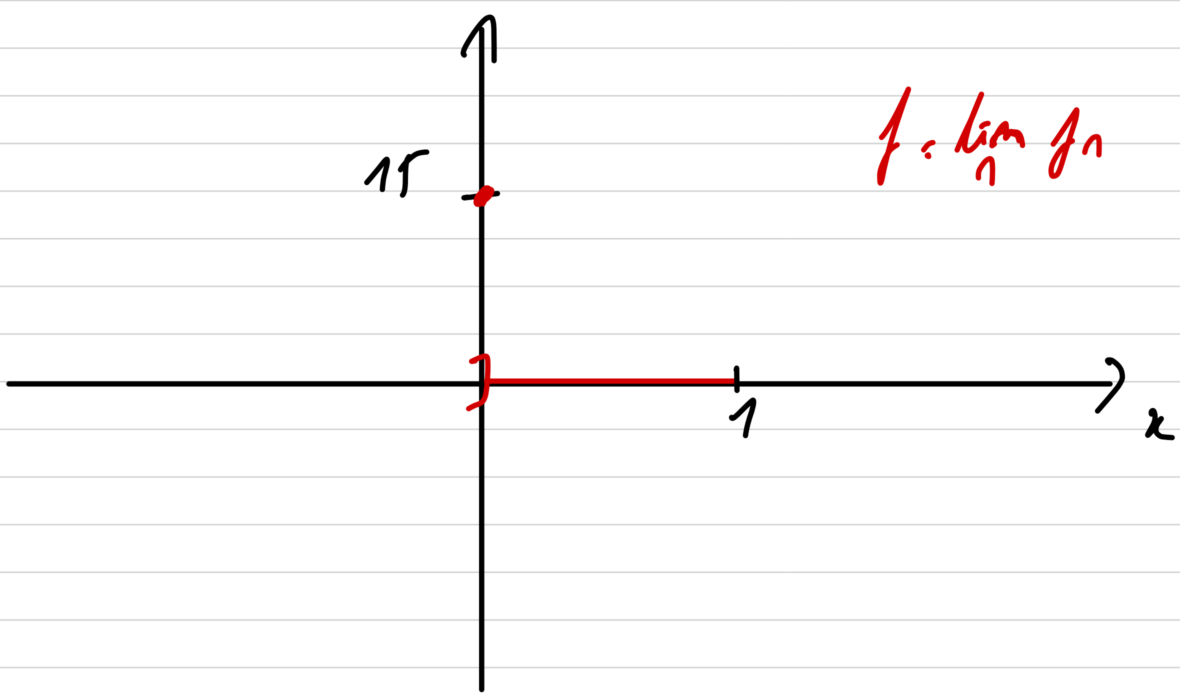
* si $x = 0$, $f_n(x) = 15 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 15$

* si $x \in]0,1]$, $f_n(x) = \sin\left(\frac{1}{nx}\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$

$\Rightarrow$ $\lim_n f_n$ ("limite simple") existe et vaut

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 15 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \in]0,1] \end{cases}$$



$\Rightarrow$ lim simple des f_n existe et vaut 0 μ_L pp

$$\Rightarrow \int_0^1 f \, d\mu_L = 15 \cdot \mu_L(0) + 0 \cdot \mu_L(]0,1]) = 0$$

soit $n \geq 1$, soit $x \in]0,1]$,

$$|f_n(x)| = \left| \sin\left(\frac{1}{nx}\right) \right| \leq 1$$

$$\Rightarrow \left(\mu_L \text{ pp } x \in [0,1]\right) : |f_n(x)| \leq 1 = g(x)$$

$$\left(\text{cf} : \mu_L(\{0\}) = 0\right)$$

et $\displaystyle\int_{[0,1]} |g| \, d\mu = \int_0^1 g(x) \, dx = 1 < \infty$

Donc $\displaystyle\lim_n \int_{[0,1]} f_n \, d\mu_L = \int_{[0,1]} \lim_n f_n \, d\mu_L$

par CV dominée

2. Mq $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}} \underbrace{d\mu_L(x)}_{dx} = 0$

$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}$ si $x > 0$, $n \geq 0$

$(= 0$ si $x = 0)$

. existence limite simple de (f_n) ?

Soit $x \geq 0$, $(f_n(x))_n$ CV ?

si $x = 0$, $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

si $x > 0$, $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}\, e^{nx}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow (f_n)_n$ CVS vers $f = 0$ sur $\mathbb{R}_+$

donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \lim_n f_n \, d\mu_L = 0 \cdot \underbrace{\mu_L(\mathbb{R}_+)}_{\infty} = 0$

Vérifions que la CV dominée s'applique

$\left(\text{car alors } \displaystyle\lim_n \int_{\mathbb{R}_+} f_n \, d\mu_L = \int_{\mathbb{R}_+} \lim_n f_n \, d\mu_L \right)$

soit $n \geq 1$, soit $x > 0$, ($\triangle$ $n = 0$)

$$|f_n(x)| \leq \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} = g(x)$$

et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} g(x) < \infty$ cf critère de Riemann au voisinage de 0 $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^\alpha}, 0 < \alpha < 1\right)$

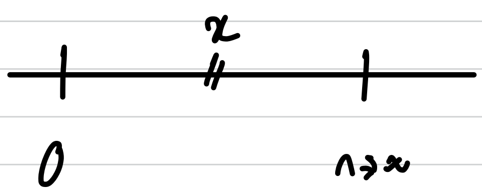
et $\dfrac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} \leq e^{-x}$ si $x \geq 1$ $\left(\text{et } \displaystyle\int_1^\infty e^{-x} < \infty\right)$

CV dominée $\Rightarrow$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\,dx$ existe et vaut

$$\int_0^{\infty} \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{0\ \mu_L\text{pp}}\, dx = 0$$

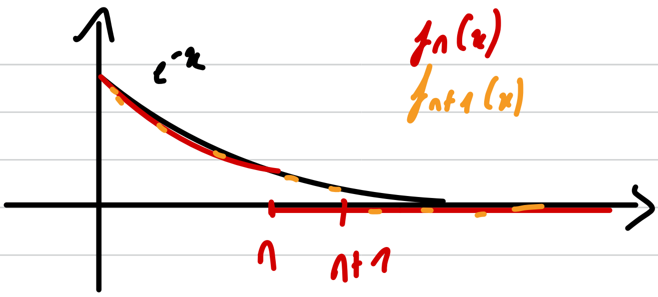
Rq : mq $\displaystyle \underbrace{\int_0^n e^{-x}\,dx}_{= \int_{\mathbb{R}_+} f_n\, d\mu_L \text{ avec } f_n(x) = e^{-x}\chi_{[0,n]}(x)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-x} \underbrace{d\mu_L(x)}_{dx}$

• $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{CVS} e^{-x}$ soit $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = e^{-x} \underbrace{\chi_{[0,n]}(x)}_{1 \text{ pour } n \text{ assez grand}}$



$f_n(x) = e^{-x}$

• $\underbrace{(f_n)_n}_{\geq 0} \nearrow$



CVM $\Rightarrow$ $$\lim_n \int_{\mathbb{R}_+} f_n \, d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} \underbrace{\lim_n f_n}_{e^{-x}} \, d\mu$$

3. Existence et valeur éventuelle de

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos x \, dx \quad , \; n \geq 1$$

$$\int_0^n \underbrace{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos x}_{} \, dx$$

f continue sur $[0,n]$: $\int$ bien définie (Riemann) avec $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos x \; \chi_{[0,n]}(x)$, $x \geq 0$

Remarquons tout d'abord que :

$$f_n \text{ CVS vers } f = e^{-x} \cos x$$

En effet, soit $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f_n(x) = \underbrace{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}_{\to e^{-x}} \cos x \; \underbrace{\chi_{[0,n]}(x)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1}$$

(cf : si $n \geq 1$, $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)}$

et $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$

$\Rightarrow \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{x}{n}$ (à $x>0$ fixé)

$\Rightarrow n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} -x$

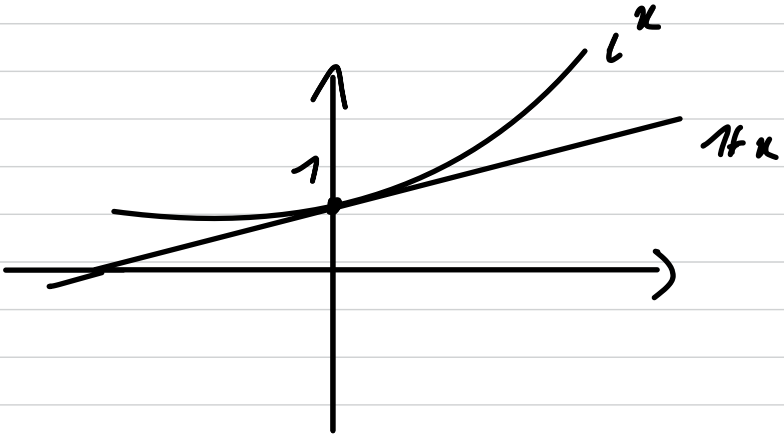
$$\Rightarrow e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-x}, \quad x>0 \ ;$$

En $x=0$, $\left(1-\frac{0}{n}\right)^n = 1^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 = e^{-0}$

$$|f_n(x)| = \left|\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cos x \ \chi_{[0,n]}(x)\right|$$

$$\leq \underbrace{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}_{\geq 0} \quad \text{si } x\in[0,n]$$

(c'est nul si $x>n$)



Mq $(\forall x\in\mathbb{R})$: $1+x \leq e^{-x}$

Or, la fonction exponentielle étant convexe

(cf $(e^x)'' = e^x \geq 0$, $x\in\mathbb{R}$) elle est au dessus de sa tangente en $x=0$ qui est la droite $y=1+x$

(<u>Aussi</u> : établir $x \mapsto e^x - (1+x)$ ...)

En particulier,

$$1-\frac{x}{n} \leq e^{-\frac{x}{n}}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq \underbrace{\left(e^{-\frac{x}{n}}\right)^n}_{e^{-x}} \quad \text{si } x \in [0,n]$$

$$\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}_+) : \left|\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cos x \, \chi_{[0,n]}(x)\right| \leq e^{-x}$$

Donc Th. CV dominée $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n \, d\mu_L = \int_{\mathbb{R}_+} \overbrace{\lim_n f_n}^{e^{-x}\cos x} \, d\mu_L$$

On a $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\cos x \, dx \underset{\uparrow}{=} \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-x}\cos \, dx$

(CV dominée sur $e^{-x}\cos x \, \chi_{[0,A]}(x)$ ...)

et pour $A>0$,

$$\int_0^A e^{-x}\cos x \, dx = \int_0^A e^{-x}\, \mathrm{Re}(e^{ix}) \, dx$$

$$= \mathrm{Re}\left(\int_0^A e^{x(i-1)} \, dx\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\left[\frac{1}{i-1} e^{x(i-1)}\right]_0^A\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{i-1} e^{A(i-1)} - \frac{1}{i-1}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{-1-i}{2} e^{A(i-1)} + \frac{1+i}{2}\right)$$

$$\xrightarrow[A\to\infty]{} \quad \mathrm{Re}\left(\frac{1+i}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Ex 2 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminons quand elle existe,

$$L_\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x}\,dx \quad , n \geq 1$$

1. Mq $L_{1/2}$ $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$ existe et la calculer

par CV dominée

On a, pour $n \geq 1$,

$$\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}\,dx = \int_{\mathbb{R}_+} f_n(x)\,dx$$

avec $f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} \chi_{[0,n]}(x)$, $x \geq 0$

On comme à Ex 1.3 , on a $nx \geq 0$

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-x} e^{\frac{x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}}$$

Comme à Ex 1.3 , on a :

$$0 \leq \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq \left(e^{-\frac{x}{n}}\right)^n = e^{-x} \quad \text{si } x \in [0,n]$$

$$\Rightarrow (\forall x \geq 0) : |f_n(x)| \leq e^{-x} e^{\frac{x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$$

indépendant de n

$\Rightarrow$ par CV dominée

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}_+} f_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}_+} \underbrace{\lim_n f_n(x)}_{e^{-\frac{x}{2}}}\,dx$$

$$= \left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^A$$

$$= 2$$

2. On pose

$$g_n(x) = \ln \frac{f_{n+1}(x) \leftarrow >0}{f_n(x) \leftarrow >0}, \quad x \in [0, n[$$

$$= \ln \frac{\left(1-\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \cancel{e^{2x}}}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n} \cancel{e^{2x}}}$$

$$= (n+1)\ln\left(1-\frac{x}{n+1}\right) - n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)$$

on a $g_n(0) = 0$, mq $g_n'(x) \geq 0$, $x \in [0, n[$

Auquel cas on aura $g_n \nearrow$ donc ≥ 0 sur $[0, n[$

donc $\dfrac{f_{n+1}}{f_n}(x) \geq 1$, $x \in [0, n[$

donc $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, $x \in [0, n[$

donc pour $x \in [0, \infty[$

($cf.$ $f_n(x) = 0 \leq f_{n+1}(x)$ si $x \geq n$)

Car $(\forall x \in [0, +\infty[)$:

$$g_n'(x) = (n+1) \frac{-\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{x}{n+1}} - n \frac{-\frac{1}{n}}{1 - \frac{x}{n}}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{x}{n}} - \frac{1}{1 - \frac{x}{n+1}}$$

$$= \frac{n}{n-x} - \frac{n+1}{n+1-x}$$

$$= \frac{n(n+1-x) - (n+1)(n-x)}{(n-x)(n+1-x)}$$

$$= \frac{x}{(n+1-x)(n-x)} \geq 0 \quad \text{cf. } x \in [0, n[$$

Donc $(f_n)_n \nearrow$ de fonctions mesurables ≥ 0

Th. CV monotone $\Rightarrow$

$$e^{-x} e^{\alpha x} = e^{(\alpha-1)x}$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}_+} \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{(\alpha-1)x}\,dx$$

$$= \lim_{A \to \infty} \int_0^A e^{(\alpha-1)x}\,dx$$

$$= \lim_{A \to \infty} \underbrace{\left[\frac{1}{\alpha-1} e^{(\alpha-1)x} \right]_0^A}_{\frac{1}{\alpha-1}\left(e^{(\alpha-1)A} - 1\right)} \qquad \boxed{\text{si } \alpha \neq 1}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \quad \text{quand} \quad \alpha < 1$$

$$= \infty \quad \text{quand} \quad \alpha \geq 1$$

$\alpha = 1$: $\int_0^\infty 1\,dx = \infty$