MAM3

Mathématiques de l'ingénieur.e 1

2022-2023

TD 10 - Transformée de fourier (bis)

Exo 1

Soit $G_\sigma : x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ et soit $\hat{G}_\sigma$ sa transformée de Fourier.

1.1

Montrer que $\hat{G}_\sigma$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.

1.2

En déduire que $\hat{G}_\sigma$ est solution une équation différentielle linéaire et la résoudre en s'appuyant sur le problème de Cauchy $\hat{G}_\sigma(0) = 1$.

Exo 2

Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$ telle que

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s$$

avec $g \in L^1(\mathbf{R})$. On définit alors et on note $f' := g$.
Montrer que pour tout $\xi \in \mathbf{R}$,

$$\widehat{f'}(\xi) = 2i\pi\xi\hat{f}(\xi).$$

Exo 3

On considère une fonction qui à tout $(t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbf{R}$, associe $u(t, x) \in \mathbf{R}$. On suppose que pour $t \geq 0$, $u(t, \cdot), \partial_x u(t, \cdot), \partial_{xx} u(t, \cdot)$ sont toutes de classe $L^1(\mathbf{R})$ (au sens de l'exercice 2).
On cherche à décrire un tel u vérifiant l'équation de la chaleur unidimensionnelle

$$\partial_t u(t, x) = \partial_{xx} u(t, x), \qquad (t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbf{R}.$$

3.1

Pour tout $t > 0$ fixé, exprimer $\partial_{xx} \widehat{u(t, \cdot)}$ en fonction de $\widehat{u(t, \cdot)}$.

3.2

Montrer que pour tout $\xi \in \mathbf{R}$, $t \mapsto \hat{u}(t, \xi)$ satisfait une équation différentielle linéaire. En déduire la valeur de $\hat{u}(t, \xi)$ en fonction de $\hat{u}_0(\xi)$, où $u_0 = u(0, \cdot)$.

3.3

En déduire $u(t, x)$ pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbf{R}$. (Indication : on rappelle la formule $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$ pour tout $f, g \in L^1(\mathbf{R})$.)