MAM3 - MI1

Exam CC no. 3

Durée 2H00. Tous les exercices sont indépendants. Le barème prévisionnel est indiqué pour chaque exercice.
Rendre sur des copies séparées les exercices 1 et 2 d'une part, 3 d'autre part.

Exo 1 (5 points)

1.1

Soient f et g toutes deux dans $L^1(\mathbf{R})$. Montrer que leur produit de convolution est bien défini et appartient également à $L^1(\mathbf{R})$. En déduire une majoration de $\|f * g\|_1$.

Réponse. Comme

$$\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x-t)g(t)| \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t = \|f\|_1 \int_{\mathbf{R}} |g(t)| \, \mathrm{d}t = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty,$$

Tonelli implique que $\varphi(t,x) = f(x-t)g(t)$ appartient à $L^1(\mathbf{R}^2)$. Du coup, Fubini implique que l'intégrale

$$\int_{\mathbf{R}} f(x-t)g(t) \, \mathrm{d}t$$

est bien définie p.p. tout $x \in \mathbf{R}$. Avec Tonelli et le calcul précédent, on voit que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} |f * g(x)| \,\mathrm{d}x &\leq \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x-t)g(t)| \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x-t)g(t)| \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1.\end{aligned}$$

1.2

Soient f dans $L^1(\mathbf{R})$ et g dans $L^\infty(\mathbf{R})$. Montrer que leur produit de convolution est bien défini et appartient à $L^\infty(\mathbf{R})$. En déduire une majoration de $\|f * g\|_\infty$.

Réponse.

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x-t)g(t)| \,\mathrm{d}t \leq \|g\|_\infty \int_{\mathbf{R}} |f(x-t)| \,\mathrm{d}t = \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

ce qui montre le caractère bien défini de la convolution et donne la majoration voulue.

Exo 2 (8 points)

2.1

Soit f dans $L^1(\mathbf{R})$ une fonction paire ($f(x) = f(-x)$ presque pour tout $x \in \mathbf{R}$). Montrer que $\hat{f}$ est également paire et que

$$\hat{f}\,(\xi) = 2 \int_0^\infty f(x) \cos(2\pi\xi x) \,\mathrm{d}x.$$

Réponse.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi\xi x} f(x) \,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbf{R}_-} e^{-2i\pi\xi x} f(x) \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}_+} e^{-2i\pi\xi x} f(x) \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbf{R}_+} e^{2i\pi\xi y} f(-y) |-1| \,\mathrm{d}y + \int_{\mathbf{R}_+} e^{-2i\pi\xi x} f(x) \,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

d'où le résultat voulu en utilisant la parité de f et le fait que $\cos u = \mathrm{Re}(e^{\pm iu})$.

2.2

En déduire la transformée de Fourier de $\chi_{[-1,1]}$, la fonction caractéristique de $[-1,1]$.
Réponse.

$$\widehat{\chi_{[-1,1]}}(\xi) = 2\mathrm{sinc}(2\pi\xi)$$

2.3

Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\chi_{[0,1]}(x) = \chi_{[-1,1]}(ax+b),$$

et en déduire la transformée de Fourier de $\chi_{[0,1]}$.
Réponse. Prendre $a = 2$ et $b = -1$ (*cf.* $x \mapsto 2x-1$ envoie $[0,1]$ sur $[-1,1]$), de sorte que (effet translation / homothétie sur tranformée de Fourier)

$$\widehat{\chi_{[0,1]}}(\xi) = e^{-i\pi\xi}\mathrm{sinc}(\pi\xi)$$

2.4

Montrer que le produit de convolution $\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,2]}$ appartient à $L^1(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R})$ et le calculer.
Réponse. On a

$$\begin{aligned}\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,2]}(x) &= \int_0^1 \chi_{[0,2]}(x-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{x-1}^{x} \chi_{[0,2]}(s)|-1|\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

en posant $s = x - t \in [x-1, x]$. En étudiant les positions relatives des intervalles $[x, x+1]$ et $[0,2]$, on voit qu'on a 5 cas :

- (i) si $x \leq 0$, la convolée vaut 0
- (ii) si $x \in [0,1]$, la convolée vaut $\int_0^x \mathrm{d}s = x$
- (iii) si $x \in [1,2]$, la convolée vaut $\int_{x-1}^x \mathrm{d}s = 1$

- (iv) si $x \in [2,3]$, la convolée vaut $\int_{x-1}^{2} \mathrm{d}s = 3 - x$
- (v) si $x \geq 3$, la convolée vaut 0.

2.5

Calculer la tranformée de Fourier $\widehat{\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,2]}}$ de ce produit de convolution.

Réponse. En utilisant le fait que la transformée d'un produit de convolution est égale au produit des transformées, et que (homothétie ou translation)

$$\widehat{\chi_{[0,2]}}(\xi) = 2e^{-2i\pi\xi}\mathrm{sinc}(2\pi\xi)$$

on a

$$\widehat{\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,2]}} = 2e^{-3i\pi\xi}\mathrm{sinc}(\pi\xi)\mathrm{sinc}(2\pi\xi).$$

Exo 3 (7 points)

3.1

Soit α un réel, déterminer l'abscisse de convergence de la fonction $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $f(t) = te^{\alpha t}$, puis calculer sa transformée de Laplace.

Réponse.

$$\mathscr{L}(te^{\alpha t})(s) = -\mathscr{L}(e^{\alpha t})'(s) = \frac{1}{(s-\alpha)^2}, \quad \mathrm{Re}(s) > s_0 = \alpha.$$

3.2

On considère l'équation différentielle ordinaire suivante : trouver y deux fois dérivable telle que

$$\begin{gathered} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0, \quad t \geq 0, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{gathered}$$

On admet qu'elle possède une unique solution, notée y.
Montrer que, partout où elle est définie, la transformée de Laplace $\mathscr{L}y$ vérifie l'équation

$$\mathscr{L}y(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2}$$

avec A et B deux réels que l'on précisera.
Réponse. \(A=1\), \(B=-1\)

3.3

En déduire la solution \(y\) de l'équation différentielle.
Réponse. \(y(t)=e^t-te^t\), \(t \geq 0\)