Polytech Nice Sophia – MAM3 / MI1 **2022/2023**

FEUILLE DE T.D. 3

Les notations sont celles du cours.

<u>Exercice 1.</u>

Soit E un ensemble non vide.

1.1 Soit A un sous-ensemble de E distinct de $\{\ \}$ et de E. Déterminer la σ-algèbre $\mathcal{A}^*$ engendrée par A.

1.2 Soit $\mathcal{P} = \{A, B, C\}$ une partition de l'ensemble E en 3 sous-ensembles. Déterminer la σ-algèbre $\mathcal{P}^*$ engendrée par $\mathcal{P}$.

On pose $E = \mathbb{R}$.

1.3 Déterminer la σ-algèbre $\mathcal{F}^*$ engendrée par la famille d'intervalles réels :

$$\mathcal{F} = \{[0,1[, [1,2],]2,3], [0,3]^c\}$$

<u>Exercice 2.</u>

Soit E un espace mesurable et soit A une partie de E.

On note $\mathbb{1}_A$ la fonction indicatrice de A.

Montrer que : $\mathbb{1}_A$ est mesurable $\Leftrightarrow$ A est mesurable.

<u>Exercice 3</u>. Mesure de Dirac.

Soit $\mathcal{S}_E$ une σ-algèbre définie sur un ensemble E, et soit x un point fixé de E. On définit une application δ_x sur $\mathcal{S}_E$ par la formule suivante :

$$\forall A \in \mathcal{S}_E : \ \delta_x(A) = \begin{cases} 1 & si\ \ x \in A \\ 0 & \quad sinon \end{cases}$$

Montrer que δ_x définit une mesure sur $\mathcal{S}_E$.

<u>Exercice 4.</u> Mesure de comptage.

Soit E un ensemble dénombrable. On note μ l'application définie sur $\mathcal{P}(E)$ telle que, pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$:

$$\mu(A) = \begin{cases} card(A) & si\ A\ \ est\ fini \\ +\infty & \quad si\ \ A\ \ est\ \ infini \end{cases}$$

Montrer que μ définit une mesure sur $\mathcal{P}(E)$.