Ex 1 :

Soit E un ensemble $\neq \emptyset$ et soit $A \subsetneq E$,

$A \neq \emptyset$ $\quad (\emptyset \subsetneq A \subsetneq E)$

1. Déterminer $\mathcal{B}(\{A\})$, la tribu engendrée par

$\mathcal{A} = \{A\} \subset \mathcal{P}(E)$

Comme $\mathcal{B}(\{A\})$ est une tribu contenant $\{A\}$,

nécessairement $\emptyset, E, A, {}^cA \in \underbrace{\mathcal{B}(\{A\})}_{\mathcal{B}(\mathcal{A})}$

$\Rightarrow \underbrace{\{\emptyset, A, {}^cA, E\}}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{B}(\mathcal{A})$

Or $\mathcal{F}$ contient $\mathcal{A}$ (i.e. $A \in \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}$

est une tribu)

i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

ii) $\mathcal{F}$ est stable par complémentaire

iii) $\mathcal{F}$ stable par réunion dénombrable

(fini, ici, cf card $\mathcal{F} = 4$)

* $\emptyset \cup A = A \in \mathcal{F}$

$\emptyset \cup {}^cA = {}^cA \in \mathcal{F}$

$\emptyset \cup E = E \in \mathcal{F}$

$A \cup {}^cA = E \in \mathcal{F}$

$A \cup E = E \in \mathcal{F}$

${}^cA \cup E = E \in \mathcal{F}$

* $$\left.\begin{array}{l} \emptyset \cup A \cup {}^cA = E \\ \emptyset \cup {}^cA \cup E = E \\ \emptyset \cup A \cup E = E \\ A \cup {}^cA \cup E = E \end{array}\right\} \in \mathcal{F}$$

* $\emptyset \cup A \cup {}^cA \cup E = E \in \mathcal{F}$

Donc $\mathcal{F}$ qui est une tribu contenant $\mathcal{A}$ contient

$\mathcal{B}(\mathcal{A})$ = la plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{B}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathcal{A})$$

2. Soit $E = \underbrace{A \cup B \cup C}_{\text{partition de } E}$ (i.e. A, B et C 2 à 2 disjoints)

Déterminer $\mathcal{B}(\mathcal{A})$, $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$

$$\mathcal{B}(A) \subset \{\emptyset, E, A, B, C, A \cup B, A \cup C, B \cup C\}$$

car $\mathcal{F}$ tribu qui contient $\mathcal{A}$

i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

ii) ${}^cA = B \cup C \in \mathcal{F}$

${}^cB = A \cup C \in \mathcal{F}$

${}^cC = A \cup B \in \mathcal{F}$

${}^c(A \cup B) = C \quad \in \mathcal{F}$

${}^c(A \cup C) = B \quad \in \mathcal{F}$

${}^c(B \cup C) = A \quad \in \mathcal{F}$

iii) Par construction, on a stabilité par réunion des éléments 2 à 2, 3 à 3

"$\supset$" On a : • $\emptyset, E \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$ car $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ est une tribu

• $A, B, C \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$ car $A, B, C \in \mathcal{A}$

• $A \cup B, A \cup C, B \cup C \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$ car c'est une tribu

Conclusion, $\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$

3. $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \{ [0,1[, [1,2],]2,3] \}$

$\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \ ?$

Clairement, $\mathcal{B}(\hat{A}) = \mathcal{B}(A)$

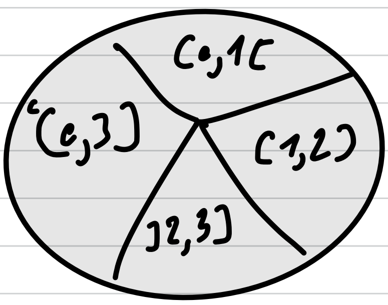
$$\hat{A} = A \cup \{ {}^c[0,3] \}$$

(cf $A \subset \hat{A} \Rightarrow \mathcal{B}(A) \subset \mathcal{B}(\hat{A})$

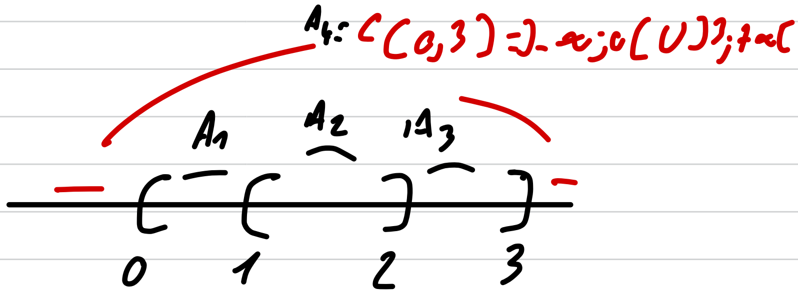
et $\hat{A} \subset \mathcal{B}(A) \Rightarrow \mathcal{B}(\hat{A}) \subset \mathcal{B}(A)$

$$\uparrow$$

$${}^c[0,3] = {}^c(\underbrace{[0,1[\cup [1,2] \cup]2,3]}_{\in \mathcal{B}(A)})$$



$\Leftrightarrow$



$$\Rightarrow \mathcal{B}(\underbrace{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}_{\text{partition de } \mathbb{R} \text{ à 4 éléments } (\neq \emptyset)}) = ?$$

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathbb{R}, A_1, A_2, A_3, A_4, \underbrace{A_1 \cup A_2, A_1 \cup A_3, \ldots, A_3 \cup A_4}_{C_4^2 = 6},$$

$$\underbrace{A_1 \cup A_2 \cup A_3, A_1 \cup A_2 \cup A_4, A_1 \cup A_3 \cup A_4, A_2 \cup A_3 \cup A_4}_{C_4^3 = C_4^1 = 4}\}$$

$\Rightarrow \mathcal{F} \subset \mathcal{B}(\hat{A})$ (car on a fait des réunions d'éléments de $\hat{A} \subset \mathcal{B}(\hat{A})$)

Réciproquement il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ est une tribu pour Mq $\mathcal{B}(\hat{A}) \subset \mathcal{F}$

(cf $\hat{A} \subset \mathcal{F}$)

i.) $\emptyset \in \mathcal{F}$

ii) Stabilité par complémentaire

$$^cA_1 = A_2 \cup A_3 \cup A_4, \ldots,$$

$^c(A_1 \cup A_2) = A_3 \cup A_4, \dots,$

$^c(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = A_4, \dots,$

iii) Stabilité par union dénombrable

par construction

donc $\mathcal{F}$ est une tribu

donc $\mathcal{B}(\hat{\mathcal{A}}) \subset \mathcal{F}$ d'où $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\hat{\mathcal{A}})$

Rq : i) le 1 se traite de la même manière

$\mathcal{B}(\{A\}) = \mathcal{B}(\{A, {}^cA\})$

$E = \underbrace{A \cup {}^cA}_{\text{partition à 2 éléments de } E}$

ii) $E = \underbrace{A_1 \cup \dots \cup A_n}_{n \text{ éléments}}$

$$\mathcal{B}(\{A_1,\dots,A_n\}) = \{\underbrace{\emptyset}_{C_n^0}, \overbrace{A_1,\dots,A_n}^{C_n^1}, \overbrace{A_1\cup A_2,\dots,A_1\cup A_n}^{C_n^2},$$

$$\underbrace{A_1\cup A_2\cup A_3,\dots}_{C_n^3}, \underbrace{A_1\cup\dots\cup A_{n-1},\dots,A_2\cup\dots\cup A_n}_{C_n^{n-1}}, \underbrace{E}_{C_n^n}\}$$

$$\Rightarrow \quad \text{card}\ \mathcal{B}(\{A_1,\dots,A_n\}) = 2^n$$

$$\begin{pmatrix} 1.\ :\ n=2 \\ 2.\ :\ n=3 \\ 3.\ :\ n=4 \end{pmatrix}$$

iii) au 3., $\quad {}^c[0,3] =]-\infty;0[\ \cup\ ]3;+\infty[\ \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$

mais $\quad]-\infty;0[\ \notin \mathcal{B}(\mathcal{A})$

Ex 2:

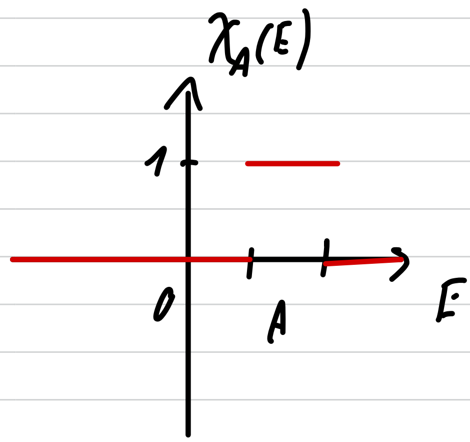
Soit (E, T) un espace mesurable, soit $A \subset E$,

on définit "l'indicatrice de A"

$$\chi_A : E \to \mathbb{R}$$

$$\| \qquad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{"} \mathbb{1}_A \text{"}$$



χ_A mesurable de $(E, T) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}) \iff A \in T$

$$\boxed{\begin{array}{l} \chi_A^{-1}(\overset{\in \mathcal{B}_\mathbb{R}}{B}) \in T \\[2em] \chi_A^{-1}(B) = \{ x \in E \mid \chi_A(x) \in B \} \end{array}}$$

$\Rightarrow$/ $\chi_A^{-1}(\{1\}) = \{x \in E \mid \chi_A(x) = 1\}$

$$= A$$

Or $\{1\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ car $\{1\}$ est un fermé

$(= {}^c \text{ouvert})$

(aussi : $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}(\{]-\infty, a[\, , a \in \mathbb{R}\})$)

$$\Rightarrow \{1\} =]-\infty, 1] \cap [1; +\infty[$$
$$= \left(\bigcap_{n=0}^{\infty}]-\infty, 1 + \frac{1}{n+1}[\right) \cap {}^c]-\infty, 1[\,)$$

$\Rightarrow$ $A \in T$

$\Leftarrow$/ On suppose $A \in T$ mq $(\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) : \chi_A^{-1}(B) \in T$

Soit $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, mq $\chi_A^{-1}(B) \in T$

On a 4 cas :

i) $0 \notin B$, $1 \notin B$: $\chi_A^{-1}(B) = \emptyset \in T$

$A \in T$ et T tribu

ii) $0 \in B$, $1 \notin B$: $\chi_A^{-1}(B) = {}^cA$ $(\mathbb{R} \setminus A) \in T$

iii) $0 \notin B$, $1 \in B$: $\chi_A^{-1}(B) = A \in T$

iv) $0 \in B$, $1 \in B$: $\chi_A^{-1}(B) = E \in T$

Ex 3 : (mesure de Dirac)

Soit $E \neq \emptyset$ et soit $a \in E$;

mq $\delta_a : \mathcal{P}(E) \to \overline{\mathbb{R}_+}$

$$A \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

définit une mesure sur $(E, \mathcal{P}(E))$

(tribu discrète)

i) mq $\delta_a(\emptyset) = 0$

$\delta_a(\emptyset) = 0$ car $a \notin \emptyset$

ii) soient $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots \subset E$, 2 à 2 disjoints, mq $\delta_a\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_a(A_n)$

On a 2 cas :

i) $a \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ $\left(\Rightarrow \delta_a\left(\bigcup_n A_n\right) = 1\right)$

ii) $a \notin$ " " $\left(\Rightarrow \delta_a\left(\bigcup_n A_n\right) = 0\right)$

---

i) $a \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, a \in A_n$

Or les A_n sont disjoints donc $\exists! n_0, a \in A_{n_0}$

$$\sum_n \delta_a(A_n) = \sum_{n \neq n_0} \delta_a(A_n) + \delta_a(A_{n_0})$$

$$= \quad 1$$

$$= \delta_a\left(\bigcup_n A_n\right)$$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \notin A_n$

$$\Rightarrow \sum_n \delta_a(A_n) = 0 = \delta_a\left(\bigcup_n A_n\right)$$

Ex 4:

$$\mu d : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \overline{\mathbb{R}_+}$$

$$A \mapsto \text{card}\, A$$

i) $\mu d(\emptyset) = \text{card}\, \emptyset = 0$

ii) $A_0, \dots, A_n, \dots \subset \mathbb{N}$, 2 à 2 disjointes,

$$\mu d\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \underbrace{\text{card}(A_n)}_{\mu d(A_n)}$$

$\uparrow$

$A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ = partition de $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$