

方法精讲-数量 4

主讲教师：高照

授课时间：2017.05.30



粉笔公考·官方微信

方法精讲-数量 4（笔记）

第八节 容斥原理

【知识点】上节课程的内容进行梳理：

1. 经济利润问题：

（1）例 1. 经济利润问题要从问题着手，看题干信息，问销售额，销售额=单价*数量，单价分成上午下午。

（2）例 2 问比盈利增长了+百分号，问比例；例 3 问利润率增长+百分号，问的也是比例；例 4 打折也是比例问题。一旦给比例问比例，可以采用赋值法。

（3）例 2 减少 40%可以赋值为 1 变成 0.6，赋值 10 变成 6，赋值 100 变成 60，问比例都是可以约分的。利润率=利润/成本，总盈利=单个盈利*数量。盈利下降 40%，数量增加 80%，赋值单个盈利今年为 x ，那么去年为 $0.6x$ ，数量为 y ，那么去年数量为 $1.8y$ ，总盈利分别为 xy 和 $1.8*0.6xy=1.08xy$ ， xy 都可以约掉。总盈利上升 8%。

（4）例 3 成本下降 15%，成本赋值为 100，下降 15%变成 85。利润率=利润*成本，都可以消掉。百分点是由百分号加减而来的。今年利润率是 10%，去年利润率是 3%，今年比去年增长 7 个百分点。题目中利润率比去年增长 24 个百分点，说明 $(x+15)/85-x/100=24\%$ 。

（5）例 4 利润是原价的 40%，赋值原价为 100，数量售出 80%，100 件的 80%为 80 件，10 件的 80%为 8 件，1 件的 80%为 0.8 件，但不是整数，不建议这么设。

2. 排列问题：

（1）什么时候去重复：只分组（不牵扯排序）：①例如例 3 先红再蓝色，无需去重。

②分子是相同的，都是蓝色的，假设 1 号、5 号位，或者 5 号和 1 号位，这两个都是蓝色没有任何关系。

③分组，分成多少人这种情况，10 个人分成 55 组合，10 个里面挑 5 个， $C(10, 5)$ ，剩下 5 个人不需要用挑，直接 $C(10, 5) * C(5, 5)$ 。如果第一次是

ABCDE，第二次是 JHGNL。反过来，第一次是 JHGNL，第二次是 ABCDE，情况相同需要在除以 $A(2, 2)$ 。

④注意：有几组人数相同就直接除以 A 几几。10 个人分成 2, 2, 2, 4, C $(10, 2) * C(8, 2) * C(6, 2) * C(4, 4) / A(3, 3)$ ；10 个人分成 2, 2, 3, 3，为 $C(10, 2) * C(8, 2) * C(6, 3) * C(3, 3) / A(2, 2) * A(2, 2)$

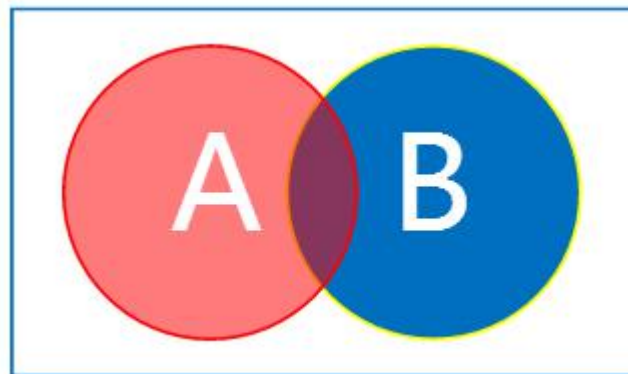
(2) 九宫格问题，建议：把所有的九宫格向里面填数字，看看到底有多少种结果。

(3) 162 页例 7. 题目说至少 3 项，先每人先两项， $2*3=6$ ，剩下 $20-6=14$ 个，14 个分给 3 个人，每人至少 1 个，14 个人 13 个空，分给 3 个人，插 2 板， $A(13, 2)$ 。如果是至少 4 项，每人先 3 本，剩下的至少再一本。特征：至少 1 本/至少 n 本，适用于插空法。

(4) 捆绑法是适用于排相邻的、在一起的。插板法问的是分配的方式。分东西默认为是相同的。

【知识点】本节课授课内容为容斥原理和最值问题。工作中会有最坏的情况。转化为最值问题，考察的是一种能力。

容斥问题：两集合和三集合。



1. 在一张玻璃上放了一片纸 A，再放一张蓝色的纸 B，问两片纸覆盖的面积？

答： $A+B$ 部分大于覆盖的面积，需要去掉 $A \cap B$ 的部分， \cap 很显然 $A \cap B$ 是两层，减去一层 $A \cap B$ ，空白的来说，属于既不喜欢 A 也不喜欢 B，叫做都不满足。

2. 两集合标准型公式： $A+B-A \cap B = \text{总数} - A、B \text{ 都不满足的个数}$ 。

【例 1】（2015 天津）某高校大学生数学建模竞赛协会共有 240 名会员，今欲调查参加过国家级竞赛和省级竞赛会员的人数，发现每个会员至少参加过一个级别的竞赛。调查结果显示：有的会员参加过国家级竞赛，有的会员两个级别的竞赛都参加过。问参加过省级竞赛的会员人数是多少人？（ ）

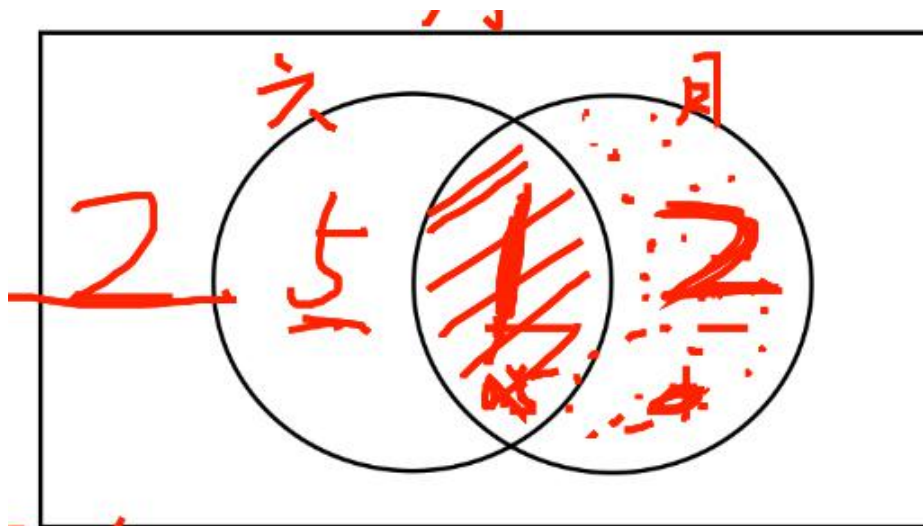
- A. 160
B. 120
C. 100
D. 140

【解析】例 1. 判定题型，两集合容斥问题。参加国家级的有 $\frac{7}{12} \times 240 = 140$ ，两个都参加有 $\frac{1}{4} \times 240 = 60$ 。设省级竞赛 x 人，利用两集合公式， $A+B-A \cap B = \text{总数} - \text{都不}$ ，代入数据， $140+x-60=240-0$ ，解得 $x=160$ 。【选 A】

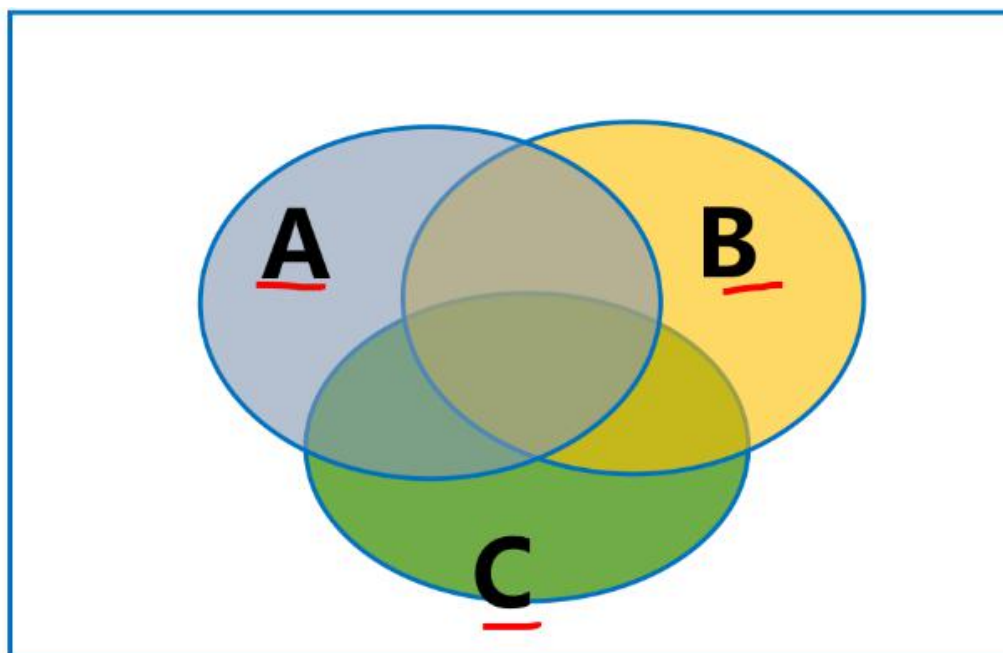
【例 2】（2014 国家）工厂组织职工参加周末公益活动，有 80% 的职工报名参加，报名参加周六活动的人数与报名参加周日活动的人数比为 2:1，两天的活动都报名参加的为只报名参加周日活动的人数的 50%，问未报名参加活动的人数是只报名参加周六活动的人数的（ ）。

- A. 20%
B. 30%
C. 40%
D. 50%

【解析】例 2. 给比例问比例，赋值法。出现只满足一个条件，只报名参加周日的，用画图法。2 天报名都参加为斜线位置。设只参加周日为 2 人，那么两天都参加的为 1 人，那么周日是 3 人参加。周六：周日是 2:1，那么周六是 6 人，那么只参加周六的为 $6-1=5$ 人。已知有 80% 的职工报名参加，共有 $5+1+2=8$ 人报名参加，那么未报名参加的占 20% 为 2 人， $2/5=40\%$ 。【选 C】



【知识点】三集合标准型：

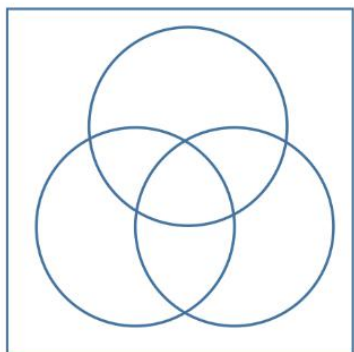


1. 例：如图， $A \cap B$ 部分、 $A \cap C$ 部分、 $B \cap C$ 部分都是 2 层，减 $A \cap B$ ，减 $B \cap C$ ，减 $A \cap C$ ，那中间减完就变成空的了，要再加上。同样的等于总个数减去都不满足。

2. 三集合标准型的公式： $A+B+C-A \cap B-B \cap C-AC+A \cap B \cap C$ =总数-都不满足的个数。

三集合

标准型： $A+B+C-A\cap B-A\cap C-B\cap C+A\cap B\cap C = \text{总数} - \text{都不满足个数}$



【例 3】（2015 陕西）针对 100 名旅游爱好者进行调查发现，28 人喜欢泰山，30 人喜欢华山，42 人喜欢黄山，8 人既喜欢黄山又喜欢华山，10 人既喜欢泰山又喜欢黄山，5 人既喜欢华山又喜欢泰山，3 人喜欢这三个景点，则不喜欢这三个景点中任何一个的有（ ）人。

- | | |
|-------|-------|
| A. 20 | B. 18 |
| C. 17 | D. 15 |
| E. 14 | F. 13 |
| G. 12 | H. 10 |

【解析】例 3. 判断题型，三集合容斥问题，有泰山、黄山、华山，出现既喜欢又喜欢，用三集合标准型公式， $A+B+C-A\cap B-B\cap C-A\cap C+A\cap B\cap C = \text{总数} - \text{都不满足的个数}$ 。设三个景点都不满足的为 x 人，代入数据， $28+30+42-8-10-5+3=100-x$ ，对于长长的式子先不要计算，先想到尾数法。观察选项尾数，选项不同的比较多，只看尾数，右边尾数为 $0-x$ ，左边尾数为 0， x 尾数为 0，只剩余 A、H 选项符合条件。陕西选项不仅多，而且限制用技巧。计算： $28+30+42-8-10-5+3=100-x$ ，整理 $100-23+3=100-x$ ， $x=20$ 。【选 A】

【拓展 1】某公司招聘员工，按规定每人至多可投考两个职位，结果共 42 人报名，甲、乙、丙三个职位报名人数分别是 22 人、16 人、25 人，其中同时报

甲、乙职位的人数为 8 人，同时报甲、丙职位的人数为 6 人，那么同时报乙、丙职位的人数为：

- A. 7 人 B. 8 人
- C. 5 人 D. 6 人

【解析】拓展 1. 三个集合有交叉，容斥问题，三集合，同时报甲乙代表甲 \cap 乙，同时报甲丙的代表甲 \cap 丙，先加和，再去重复。设同时报乙丙的为 x 人，至多投考 2 个职位，所以三者相交部分为 0，42 人报名，报名当中没有不报名的，列示： $22+16+25-8-6-x+0=42-0$ ，利用尾数法，左边尾数 $-8-6$ 尾数是 -4 ， $5-4$ 尾数是 1 ， $2+6$ 尾数是 8 ， $8+1$ 尾数为 9 ，左边尾数为 $9-x$ ，右边尾数为 2 ， x 尾数为 7 。【选 A】

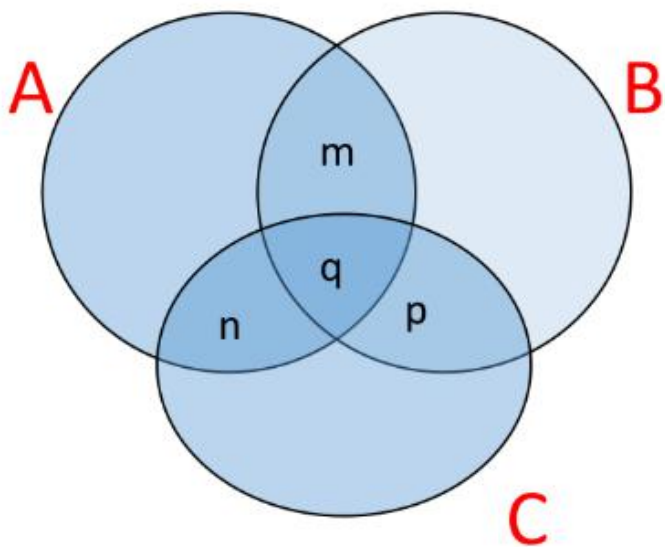
【注意】尾数法口诀：左是左，右是右，要想快，先消负。

例 1: $136+137+138-13-14-12+5=999-x$, 利用尾数法, 左是左, 右是右, 消负数, -3 与 -4 和 7 消掉了, 8 和 -2 合到一起是 6 , 那么 $6+6+5=9-x$, $7=9-x$, x 尾数为 2 。

例 2: $173+137+731-120-110-119=999-x$, 尾数法, 左是左, 右是右, 要想快, 先消负。左边 0、0 删掉, $3+7$ 也是 0, $1-9=2=9-x$, x 尾数为 7。

【知识点】三集合非标准型:

三集合非标准型



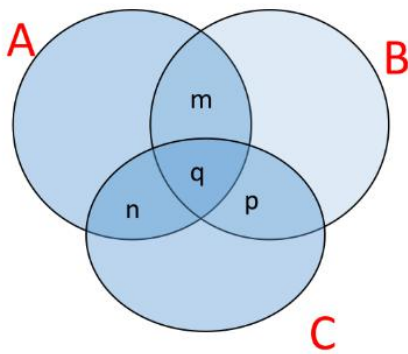
1. 计算的是一层的面积。观察图形， $m+n+p$ 是两层， q 是三层，需要减掉一层 $m+n+p$ ， q 是三层需要减掉 2 层。

2. 三集合非标准型公式： $A+B+C=$ 满足两个条件 $-2\times$ 满足三个条件 $=$ 总数 $-$ 都不满足的个数。前提：出现只满足两个条件或者满足两个条件。

3. 注意满足两个条件指的是只满足两个条件的部分。例：A 粽子是金币，B 粽子里面是人民币，C 粽子是硬币， m 是有金币和人民币的， m 表示只是两个条件的，只满足两个条件和满足两个条件意思相同。

三集合非标准型

【前提：出现只满足两个条件或者满足两个条件】



$$A+B+C - \text{满足两个条件} - 2 \times \text{满足三个条件} = \text{总数} - \text{都不满足个数}$$

【例 4】（2014 广东）为丰富职工业余文化生活，某单位组织了合唱、象棋、羽毛球三项活动。在该单位的所有职工中，参加合唱活动的有 189 人，参加象棋活动的有 152 人，参加羽毛球活动的有 135 人，参加两种活动的有 130 人，参加三种活动的有 69 人，不参加任何一种活动的有 44 人。该单位的职工人数为（ ）人。

A. 233

B. 252

C. 321

D. 520

【解析】例 4. 出现参加两项活动，属于三集合非标准型， $A+B+C=$ 满足两个条件 $-2\times$ 满足三个条件 $=$ 总数 $-$ 都不满足的个数。设员工数为 x 人， $189+152+135-130-69\times 2=x-44$ 。尾数法。左是左，右是右，先消负数。 $8=x-4$ ， x

尾数为 2。【选 B】

【拓展 2】（2015 广东）某乡镇举行运动会，共有长跑、跳远和短跑三个项目。参加长跑的有 49 人，参加跳远的有 36 人，参加短跑的有 28 人，其中只参加两个项目的有 13 人，参加全部项目的有 9 人，那么参加该次运动会的总人数为多少

- A. 75
B. 82
C. 88
D. 90

【解析】拓展 2. 出现只参加两项目的人数，三集合非标准型， $A+B+C$ =满足两个条件-2*满足三个条件=总数-都不满足的个数。设参加运动会的人数为 x ， $49+36+28-13-9*2$ =总数-0，尾数法，左是左，右是右，先消负数。 2 =总数。【选 B】

【注意】如何区分标准与非标准型：1. 非标准型出现只参加或者参加两个项目。

2. 标准型出现 $A \cap B$ ， $B \cap C$ ， $A \cap C$ 的数据。

【例 5】（2015 黑龙江）工厂组织工人参加技能培训，参加车工培训的有 17 人，参加钳工培训的有 16 人，参加铸工培训的有 14 人，参加两项及以上培训的人占参加培训总人数的 $\frac{2}{3}$ ，三项培训都参加的有 2 人，问总共有多少人参加了培训？（ ）

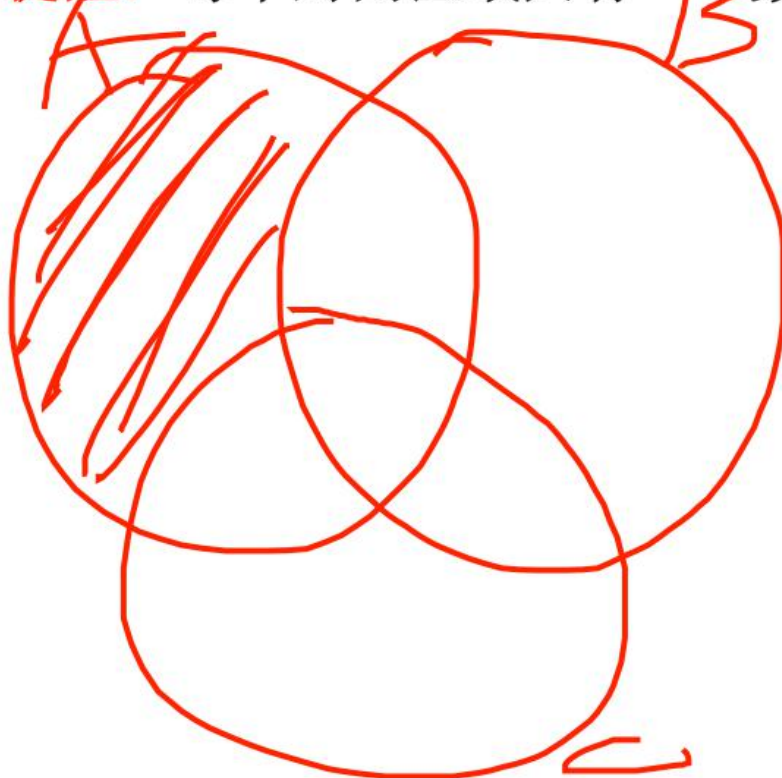
- A. 24
B. 27
C. 30
D. 33

【解析】例 5. 出现参加两项及以上的人数代表参加两项的人和参加三项的人数。设总人数为 x ，两项及以上占了 $\frac{2}{3}x$ ，三项是 2 人，参加两项的人数为 $\frac{2}{3}x-2$ 。三集合非标准型， $A+B+C$ -满足两个条件-2*满足三个条件=总数-都不满足的个数。设参加人数为 x ，代入数据， $17+16+14-(\frac{2}{3}x-2)-2*2=x$ ，整理 $47-\frac{2}{3}x+2-4=x$ ， $45=\frac{5}{3}x$ ，解得 $x=27$ 。【选 B】

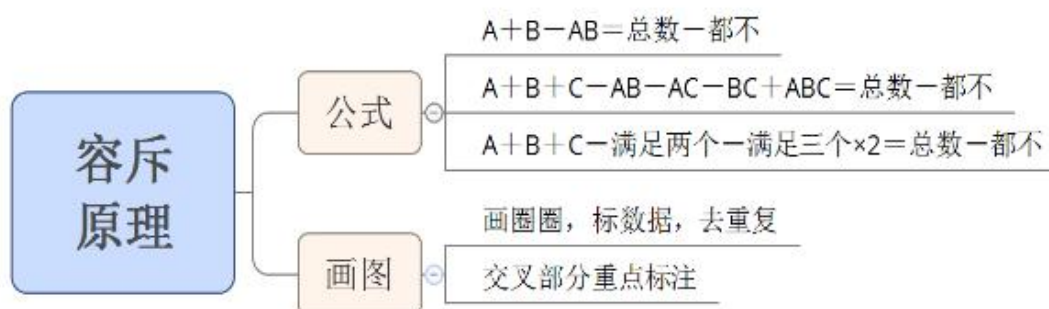
【知识点】画图法（出现：只满足一个条件）

1. 提醒：每个封闭区域只有一个数。
2. 例：ABC 三者相交，只满足一个条件代表图中阴影部分。注意每个封闭区域只有一个数。

画图法（出现：只满足一个条件）
提醒：每个封闭区域只有一个数。



【答案汇总】1-5：ACABB



【小结】容斥原理：

1. 判定题型：有交叉部分。

2. 公式：

(1) 两集合： $A+B-AB=\text{总数}-\text{都不}$ 。

(2) 三集合标准型（有 $A \cap B$ 、 $A \cap C$ 、 $B \cap C$ ）： $A+B+C-AB-AC-BC+ABC=\text{总数}-\text{都不}$ 。

(3) 三集合非标准型（出现满足两个条件）： $A+B+C-\text{满足两个}-\text{满足三个} \times 2=\text{总数}-\text{都不}$ 。

3. 画图（适用于只满足一个条件）：

(1) 画圈圈，标数据，去重复。

(2) 交叉部分重点标注。

【注意】作业：题库中容斥原理的所有题目。

要求：1. 判定题型。2. 用哪种方法。3. 计算能否用尾数法。

第九节 最值问题

【知识点】最值问题

1. 最不利构造：又叫抽屉原理。

(1) 特征：至少（最少）……保证……

(2) 方法：答案=最不利情形+1

2. 举例：

(1) 一个箱子中有 3 个红球、2 个黄球、1 个黑球，摸到红球回家休息，问高照老师至少摸多少次才能保证一定能摸到红球？

答：高照老师连续摸了 2 个黄球，还剩下 3 红 1 黑，高照老师又摸了 1 个黑球，此时再摸一个无论如何都是红球，则至少要摸 $2+1+1$ 次。

(2) 大学 60 分及格，59 分就是最坏的情况。

(3) 每天吃 10 个苹果可以很 happy，只让你吃 9 个，这就是最坏的情况。

(4) 箱子里有 5 个红球、4 个黑球，问至少摸多少次可以摸到 1 个红球？最坏的情况是 4 个黑球都摸完，此时再摸一次一定是红球，即 $4+1$ 个。问至少摸多少次可以摸到 2 个红球？则 $4+1+1=6$ 。

3. 最不利：(1) 够，那就少一个。(2) 不够，那就全给你。

例 1（2015 河北）有软件设计专业学生 90 人，市场营销专业学生 80 人，财务管理专业学生 20 人及人力资源管理专业学生 16 人参加求职招聘会。问至少有多少人找到工作就一定保证有 30 名找到工作的人专业相同？（ ）

A. 59

B. 75

C. 79

D. 95

【解析】例 1. 出现“至少……保证……”，最不利构造=最不利+1。软件设计够 30，给 29 个，市场营销够 30，给 29 个，财务管理不够 30，20 个全给，人力资源管理不够 30，16 个全给。则 $29+29+20+16+1=95$ 。**【选 D】**

例 2（2014 山东）在 2011 年世界产权组织公布的公司全球专利申请排名中，中国中兴公司提交了 2826 项专利申请，日本松下公司申请了 2463 项，中国华为公司申请了 1831 项，分别排名前 3 位。问从这三个公司申请的专利中至少拿出多少项专利，才能保证拿出的专利一定有 2110 项是同一公司申请的专利？（ ）

A. 6049

B. 6050

C. 6327

D. 6328

【解析】例 2. 出现“至少……保证”，最不利构造问题，最不利+1。中兴够 2110 项，给 2109 项，松下够 2110 项，给 2109 项，华为不够 2110 项，1831 项全给。则 $2109+2109+1831+1$ ，尾数为 0。【选 B】

【拓展 1】一副扑克牌（共 54 张），至少从中摸出多少张牌才能确保至少有 6 张牌的花色相同？（ ）

A. 21

B. 22

C. 23

D. 24

【解析】拓展 1. 出现“至少……保证”，最不利构造。扑克牌有 4 种花色，每种颜色有 13 张，外加大小王 2 张。要确保 6 张花色相同，则每种花色给 5 张，大小王全给，则 $5+5+5+5+2+1=23$ 。【选 C】

【注意】1. 扑克牌的来源：红桃、方片、梅花、黑桃 4 种花色代表四季，每个季节有 13 个星期，全年有 52 个星期，大小王代表太阳和月亮。

2. 扑克牌很基础，而麻将普及率不高，不会考。

例 3（2016 山东）某个社区老年协会的会员都在象棋、围棋、太极拳、交谊舞和乐器五个兴趣班中报名了至少一项。如果要在老年协会中随机抽取会员进行调查，至少要调查多少个样本才能保证样本中有 4 名会员报的兴趣班完全相同？（ ）

A. 93

B. 94

C. 96

D. 97

【解析】例 3. 出现“至少……保证”，最不利构造。象棋、围棋、太极拳、交谊舞和乐器五个兴趣班中至少选 1 项，选 1 项为 $C(5, 1)=5$ 种选法，选 2 项为 $C(5, 2)=10$ 种选法，选 3 项为 $C(5, 3)=C(5, 2)=10$ 种选法，选 4 项为 $C(5, 4)=C(5, 1)=5$ 种选法，选 5 项为 $C(5, 5)=1$ 种选法，共 31 种选法。要保证 4 名完全相同，则最坏的情况为每种选法报 3 名， $31 \times 3 + 1 = 93 + 1 = 94$ 。

【选 B】

【注意】1. 考点：最不利构造（问法：至少保证）+排列组合（出现了“至少一项”）。

2. 出现“至少1项”：有可能1项，有可能2项，有可能3项……

例4（2014 联考）箱子里有大小相同的3种颜色玻璃珠各若干颗，每次从中摸出3颗为一组，问至少摸出多少组才能保证至少有2组玻璃珠的颜色组合是一样的？（ ）

A. 11

B. 15

C. 18

D. 21

【解析】例4. 出现“至少……保证”，判定为最不利构造。颜色组合情况（假设有a、b、c三种颜色）：（1）一种颜色：aaa、bbb、ccc，共3种；（2）两种颜色：aab、aac、bba、bbc、cca、ccb，共6种；（3）三种颜色：abc，共1种；或者用排列组合，共 $C(3,1)+C(3,1)*C(2,1)+C(3,3)=10$ 种情况。即颜色组合情况共10种，至少保证2组颜色组合，则每种组合先给1种，至少要 $10+1=11$ 组才能保证有2组玻璃珠的颜色组合是一样的。【选A】

【小结】最不利构造：

1. 特征：至少（最少）……保证……。

2. 方法：答案=最不利情形+1。

注意：（1）有难度的需要自己找情况数（用枚举法或者排列组合）。

（2）够，那就少一个；不够，那就全给你。

构造数列

1. 特征：某个主体……最……。

（1）最……最……。

（2）排名第几……最……。

2. 方法：（1）构造一个名次。

（2）求谁设谁。

（3）反向推其它。

(4) 加和求解。

【引例】4 个人分 100 张一元的钱，每人都能分到钱，分到的钱均为整数且互不相等。分到最多的人，最多分（ ）钱？

【解析】引例。（1）构造名次：分别为第一名、第二名、第三名、第四名（默认前面的大于后面的）。（2）求谁设谁：假设第一名为 x 。（3）反向推其它：要使最多的最多，则其它的最少为 1、2、3。（4）加和求解： $x+1+2+3=100$ ，则 $x=100-6=94$ 。

谁
其它
解

$$100 = x + 3 + 2 + 1$$

$$x = 100 - 6 = 94$$

【注意】1. 若问第二多的最多为多少？

答：设第二名为 x ，要使第二名的多，则其他的尽量少，则第一名最少为 $x+1$ ，第三名为 2 元，第四名为 1 元，列式： $x+1+x+1+2=100$ ，解出 x 即可。

() 钱?

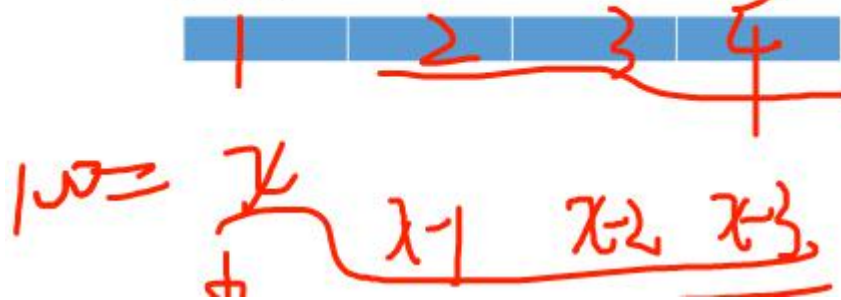
$$x + 1 + x + 1 + 2 = 100$$

注意：看条件中是否相等，是否不等。

2. 若问最多的最少分多少钱？

答：设第一名为 x ，要使第一名最少，则其它的尽量多，则 2-4 名分别为 $x-1$ 、 $x-2$ 、 $x-3$ ，则 $x+x-1+x-2+x-3=100$ 。

【引例】4个人分100张一元的钱，每人都能分到钱，分到的钱均为整数且互不相等。分到最多的人，最多分（ ）钱？



例 5（2015 广东）在一次抽奖活动中，要把 18 个奖品分成数量不等的 4 份各自放进不同的抽奖箱。则一个抽奖箱最多可以放多少个奖品？（ ）

- A. 6
B. 8
C. 12
D. 15

【解析】例5. “最……最……”，构造名次，设第一名的为x，要使第一名的多，则其它的尽量少，由于数量不等，则2-4名分别为3、2、1，加和求解： $x+3+2+1=18$ ，解得：x=12。【选C】

<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>
2	3	2	1

【注意】明确说明奖品为4份，故最少不能为0。

【答案汇总】 1-5: DBBAC

例 6（2013 国考）某单位 2011 年招聘了 65 名毕业生，拟分配到该单位的 7 个不同部门，假设行政部门分得的毕业生人数比其他部门都多，问行政部门分得的毕业生人数至少为多少名？（ ）

- A. 10
B. 11
C. 12
D. 13

【解析】例6. 行政部门的人数比其他部门都多，则行政部门的人最多，判定题型为“最……最……”。构造名次，分为1-7名，设第一名为x人，要使第一名

少，则其它人尽量多，由于题目未说明各个部门人数不等，则2-7名均为 $x-1$ 人。

列式： $7x-6=65$ ， $7x=71$ ，解得： $x=71/7=10.1428571$ ，则行政部门最少为10.14，不能到10，取11。【选B】

1	2	3	4	5	6	7
x	$x-1$	$x-1$	$x-1$	$x-$	$x+$	$x-$

例 7（2014 国考）某连锁企业在 10 个城市共有 100 家专卖店，每个城市的专卖店数量都不同。如果专卖店数量排名第五多的城市有 12 家专卖店，那么专卖店数量排名最后的城市，最多有几家专卖店？（ ）

- A. 2
B. 3
C. 4
D. 5

【解析】例7. “排名第几最……”，判定为构造数列，题目说明第五名12家，设第10名为x家，要使最少的尽量多，则其它的尽量少，故第九名为x+1，第八名为x+2，第七名为x+3，第六名为x+1，第四名为13，第三名为14，第二名为15，第一名为16，列式： $70+5x+10=100$ ，解得： $x=4$ 。【选C】

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
16	15	14	13	12	$x+4$	$x+3$	$x+2$	$x+1$	x

【注意】1. 若第六名为11家，则第六名为最多为11家，但本题要求11名尽量少，故推算为 $x+4$ ；同理，第四名最少为13人。

2. 问排名最后的最多为什么？若算出来为4.1，能否到5？

答：最多为4.1，不到5。

3. 算出非整数怎么办?

(1) 某个主体……最少：向上取整。

①常见问法：最多……最少……；最少……最少……。

②例子：若算出来为4.5，最少为4.5，不能到达4，则向上取整为5。

(2) 某个主体……最多：向下取整。

①常见问法：最多……最多……；最少……最多。

②例子：若算出来为4.5，最多为4.5，不能到达5，则向下取整为4。如例6，

问最少，则向上取整为11。

例 8（2015 陕西）植树节到来之际，120 人参加义务植树活动，共分成人数不等且每组不少于 10 人的 6 个小组，每人只能参加一个小组，则参加人数第二多的组最多有多少人？（ ）

- | | |
|-------|-------|
| A. 32 | B. 33 |
| C. 34 | D. 35 |
| E. 36 | F. 37 |
| G. 38 | H. 39 |

【解析】例8. “第二……最”，第一步：以组数构造名次：一、二、三、四、五、六。第二步：反向推其他，设第二名为 x ，第一名最少为 $x+1$ ，不少于即大于等于，则第3~6名依次为13、12、11、10。第三步：加和求解， $2x+1+46=120$ ， $2x+47=120$ ， $x=73/2=36.5$ ，问最多向下取整为36，最多36.5人到不了37人。【选E】

例 9（2014 联考）某工厂有 100 名工人报名参加了 4 项专业技能课程中的一项或多项，已知 A 课程与 B 课程不能同时报名参加。如果按照报名参加的课程对工人进行分组，将报名参加的课程完全一样的工人分到同一组中，则人数最多的组最少有多少人？（ ）

- | | |
|------|-------|
| A. 7 | B. 8 |
| C. 9 | D. 10 |

【解析】例 9. “最……最”构造数列。假设有 ABCD 四项专业技能课程，只报一项为 $C(4, 1)=4$ ，报 2 项有 AC、AD、BC、BD、CD 五种，或 $C(4, 2)-1=6-1=5$ 种，报 3 项有 ACD、BCD 两种，或 $C(4, 3)-ABC-ABD=4-2=2$ ，报 4 项有 0 种，共 11 组。构成名次：1、2、3……10、11，设第一名为 x ，要想第一名少，其他尽量多，题目没有要求各不相等，第 2~11 名最多均为 x ，对照例 6，“行政……都多”，此时其他要比行政少 1。假设小学考试拿了 99 分，其他人也考了 99 分，回家会说我第一名，我的分数最高，没有人比我高，因此可以并列。列方程： $11x=100$ ，解得 $x=100/11\approx 9.1$ ，问最少向上取整为 10。【选 D】

【注意】最不利构造中，最值问题和排列组合放在一起时，可以用枚举法。本题中只说最多，没有说明比其他都多，且没有说其他主体各不相同，因此可以都为 x 。

【知识点】多集合反向构造：

1. 特征：都……至少。

2. 方法：反向-求和-做差。

例：粉笔有 100 名女老师，80 人皮肤白，70 人是富人，90 人是美人，问白富美至少多少人？

答：有“容”无“斥”，因此不能用容斥原理。反向求，“都……至少”的反向是不都是白富美至多有多少人，不白=20 人，不富=30 人，不美=10 人，尽量多则让这三者不重合， $20+30+10=60$ ，白富美= $100-60=40$ 人。

总结：给白富美，问最多，多集合反向构造，不白、不富、不美是反向，求和做差： $100-60=40$ 人。

例 10（2015 广东）阅览室有 100 本杂志，小赵借阅过其中 75 本，小王借阅过 70 本，小刘借阅过 60 本，则三人共同借阅过的杂志最少有（ ）本。

A. 5

B. 10

C. 15

D. 30

【解析】例 10. 判定题型：“都……至少”，第一步反向：25、30、40，第二步求和：95，第三步做差： $100-95=5$ 。【选 A】

【答案汇总】6-10：BCEDA

例 11（2014 政法干警）甲、乙、丙同时给 99 盆花浇水，已知甲浇了 75 盆，乙浇了 66 盆，丙浇了 58 盆，那么三人都浇过的花至少有几盆？（ ）

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【解析】例 11. 判定题型：“都……至少”。第一步反向：24、33、41，第

二步加和： $24+33+41=57+41=98$ ，第三步做差： $99-98=1$ 。【选 A】

【知识点】最值思维：此消彼长。

例：高照老师和你共 300 斤，老师重 100 斤，则你重 200 斤，老师重 10 斤，则你重 290 斤，是此消彼长的。

例 12（2013 江苏）甲、乙两种笔的单价分别为 7 元、3 元，某小学用 60 元钱买这两种笔作为学科竞赛一、二等奖奖品，钱恰好用完。则这两种笔最多可买的支数是（ ）。

A. 12

B. 13

C. 16

D. 18

【解析】例 12. “最……”最值问题。列方程： $7x+3y=60$ ， $3y$ 、60 均能被 3 整除，可知 x 能被 3 整除，要想买的多，代表贵的 x 越少越好， x 最小为 3，当 $x=3$ 时， $y=13$ ，最多买 16 支。【选 C】

【注意】模考第二季数量中第八题： $4m+5n=200$ ，问 $m+n$ 最多是多少？

答： $4m+4n+n=200$ ， $4(m+n)+n=200$ ，要想 $m+n$ 多，则 n 越少越好。

【答案汇总】11-12：AC



【小结】最值问题：

1. 最不利构造类：从问法上突破。

- （1）判定：“至少……保证”。
- （2）方法：最不利情况+1。

2. 构造数列类：要看清题目中是否有相等/比别人多，如例 6、例 9。非整数问最多向下取整，问最少向上取整。如最少是 4.5，到不了 4 向上取整。

- （1）判定：最多/少的……至多/少……
- （2）方法：①排序定位；②反向构造数；③加和求解。
- （3）提示：①主体个数是否可以并列。②非整数：问最多向下取整，问最少向上取整。

3. 多集合反向构造。

- （1）判定：都满足的至少。
- （2）方法：反向、求和、作差。

4. 复杂最值问题：此消彼长的思维。

- （1）判定：至多（少）……
- （2）方法：考虑最极端的情况，正向解题若复杂可考虑逆向思维。

【答案汇总】

容斥原理：1-5：ACABB

最值问题：1-5：DBBAC； 6-10：BCEDA； 11-12：AC

遇见不一样的自己

come to meet a different you