PAGE NO.
DATE: / /

**Graph :-** माना V एक अरिक्त समुच्चय है। तथा E, V के अक्रमित युग्मों का समुच्चय हो तब संरचना G=(V,E) को ग्राफ कहते हैं।

⇒ यहाँ समुच्चय V शीर्षों का समुच्चय कहलाता है तथा समुच्चय E, कोरों का समुच्चय कहलाता है।

⇒ ~~यदि एक~~

# समांतर कोर :- यदि एक से ज्यादा कोर के दोनो अंतीय शीर्ष समान हो।

# Loop
⇒ यदि किसी कोर के दोनों अंतीय शीर्ष संपाती हो तो ऐसी कोर को loop कहते हैं।

Types of Graph on the basis of edges

# सरल ग्राफ - ऐसा ग्राफ जिसमें ना तो समांतर कोर उप० हो और ना ही लूप उप० हो। सरल ग्राफ कहलाता है।

PAGE NO.
DATE: / /

# Multi Graph :- ऐसा ग्राफ जिसमें समांतर कोर उप० हो लेकिन लूप नहीं हो

# छद्म Graph :- (Pseudo)
⇒ ऐसा ग्राफ जिसमें समांतर कोर और लूप दोनों हो।

# तुच्छ ग्राफ (Trivial Graph)
⇒ जिसमें केवल एक शीर्ष हो। और कोर ना हो।

* रिक्त ग्राफ : ऐसा ग्राफ जिसमें कोई edge नहीं हो।

**Ex.** 5 शीर्षों पर कुल कितने सरल ग्राफ बनाए जा सकते हैं

n शीर्ष पर कुल सरल ग्राफ की सं०
$= 2^{\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{\frac{5\times4}{2}} = 2^{10} = 1024$

* शीर्ष की कोटि : किसी ग्राफ G में शीर्ष v की कोटि उस पर आपतित कोरों की सं० के बराबर होती है।

= निलंबी शीर्ष :- ग्राफ G का ऐसा शीर्ष जिसकी कोटि एक हो
$deg(v) = 1$

One plus+

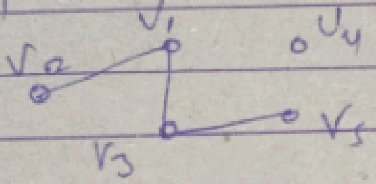
# वियुक्त शीर्ष :- ग्राफ G का ऐसा शीर्ष जिसकी कोटि शून्य हो $deg.(v)=0$

# समशीर्ष :- ग्राफ के वो शीर्ष जिसकी कोटि सम सं० हो।

# विषम शीर्ष :- ग्राफ के वो शीर्ष जिसकी कोटि विषम सं० हो

Q. निम्न ग्राफ समु० रूप लिखे, प्रत्येक शीर्ष की कोटि लिखो

हल:-




$G=(V,E)$

$V=\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$

$E=\{(V_1,V_2), (V_1,V_3), (V_3,V_5)\}$

$deg.(V_1)=2$, $deg(V_2)=1$, $deg(V_3)=2$, $deg(V_4)=0$

$deg.(V_5)=1$

# हेण्डशेकिंग प्रमेय :- किसी ग्राफ G में शीर्षों की कोटियों का योग उस ग्राफ में कोरों की सं० का दुगुना होता है

अर्थात्

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2e$$

जहाँ e = ग्राफ में कोरों की सं०

माना एक G ग्राफ है जिसमें कोरों की सं. e है या $|E|=e$

∴ किसी भी कोर में दो अंत: शीर्ष होते हैं अतः जब graph के सभी शीर्षों की कोटियों का योग करते हैं तो एक कोर की गणना दो बार हो जाती है

PAGE NO.
DATE: / /

Ex. कोटि = 2

इसलिए ग्राफ G में सभी शीर्षों की कोटियों का योग उस ग्राफ में किनारों की सं. का दुगुना होता है।

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2e$$

⇒ प्रमेय :- किसी ग्राफ G में विषम कोटि के शीर्षों की सं. हमेशा सम होती है।

Proof :- माना $G = (V, E)$ एक ग्राफ इस प्रकार है कि $|E| = e$
तब हैण्डशेकिंग प्रमेय से -
$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2e \quad \text{— (1)}$$

माना ग्राफ में G में सम शीर्षों का समु. $V_1$ तथा विषम शीर्षों का समु. $V_2$ हो तो तब

$$V = V_1 \cup V_2 \quad \text{— (2)}$$

तब (1) व (2) से

$$\sum_{v \in V_1 \cup V_2} \deg(v) = 2e$$

$$\Rightarrow \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v) = 2e$$

$$\Rightarrow \text{सम सं.} + \sum_{v \in V_2} \deg(v) = \text{सम सं.}$$

$$\Rightarrow \sum_{v \in V_2} \deg(v) = \text{सम सं.}$$

$$\Rightarrow |V_2| = \text{सम सं.}$$

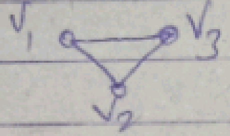
⇒ विषम कोटि के शीर्षों की सं. = सम सं.

One plus+

# नियमित ग्राफ :- एक सरल ग्राफ नियमित ग्राफ कहलाता है यदि ग्राफ के प्रत्येक शीर्ष की कोटि समान हो।

⇒ यदि किसी ग्राफ में प्रत्येक शीर्ष की कोटि k हो तो उसे k-नियमित ग्राफ कहते हैं।

Ex —

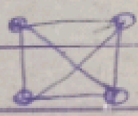



'2'-नियमित ग्राफ

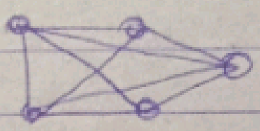
# पूर्ण ग्राफ :- n शीर्षों पर एक सरल ग्राफ, पूर्ण ग्राफ कहलाता है, यदि इसका प्रत्येक शीर्ष शेष ~~शीर्ष~~ (n-1) शीर्षों से संबद्ध हो।

⇒ पूर्ण ग्राफ को $K_n$ द्वारा निरूपित किया जाता है।

उदा० :-



$K_4$



$K_5$

# पूर्ण ग्राफ की विशेषताएँ :-

(1) पूर्ण ग्राफ को सार्वत्रिक ग्राफ भी कहते हैं; अर्थात पूर्ण ग्राफ कोरों के संदर्भ में सबसे बड़ा ग्राफ होता है।

(2) प्रत्येक पूर्ण ग्राफ नियमित ग्राफ होता है परंतु इसका विलोम सत्य होना आवश्यक नहीं है।

PAGE NO.
DATE: / /

$n$ शीर्ष पर $K_n$, $(n-1)$-नियमित ग्राफ होता है।

(3) सिद्ध करो कि पूर्ण ग्राफ $K_n$ में कोरो ~~कोरो~~ की सं० $\frac{n(n-1)}{2}$ होती है—

हल. पूर्ण ग्राफ की परिभाषा से स्पष्ट है प्रत्येक शीर्ष सभी $(n-1)$ शीर्षों से संबद्ध होता है अर्थात पूर्ण ग्राफ में प्रत्येक शीर्ष ~~(n-1)~~ की कोटि $(n-1)$ होती है

अतः सभी $n$ शीर्षों की कोटियों का योग $= n(n-1)$ होगा।

अर्थात $\Rightarrow \sum_{u \in V} \deg(u) = n(n-1)$ — समी० (1)

हैंड शेकिंग प्रमेय से

$$\sum_{u \in V} \deg(u) = 2e$$ — समी० (2)

जहाँ $e$ = कोरो की सं०

समी० (1) व (2) से

$$2e = n(n-1)$$

$$\boxed{e = \frac{n(n-1)}{2}}$$

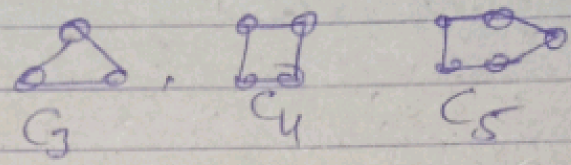
One plus+

# चक्र (cycle) :- चक्र एक ऐसा सरल ग्राफ होता है जिसमें $n$ ($n \geq 3$) शीर्ष तथा $n$ कोरें होती हैं। $(V_1, V_2), (V_2, V_3), ---, (V_{n-1}, V_n)$

⇒ denoted by $C_n$

# Properties :- (i) 2-नियमित ग्राफ होता है।

Ex




# धुरीय चक्र :- (wheel)

⇒ यदि चक्र $C_n$ में एक अतिरिक्त शीर्ष शामिल करके उस शीर्ष को सभी शेष शीर्षों से संबद्ध करने पर प्राप्त ग्राफ धुरीय चक्र कहलाता है। इसको $W_n$ से निरूपित करते हैं।

⇒ $W_n$ में शीर्षों की सं० $n+1$ होती है तथा कोरों की सं. $2n$ होती है।

# द्विखंडी ग्राफ (Bipartial Graph)

⇒ एक ग्राफ $G = (V, E)$ द्विखंडी ग्राफ कहलाता है यदि $V$ को दो असंयुक्त उपसमुच्चयों (disjoint subset) $V_1$ तथा $V_2$ में इस प्रकार विभाजित किया जा सके ताकि

PAGE NO.
DATE: / /

(i) ग्राफ की प्रत्येक कोर समुच्चय $V_1$ के किसी शीर्ष को समुच्चय $V_2$ के किसी शीर्ष से संबद्ध किया जा सके। करती है।

(ii) $V_1$ के किन्हीं भी 2 शीर्षों के मध्य कोई कोर नहीं हो तथा $V_2$ के किन्हीं भी दो शीर्षों के मध्य ~~कोई~~ कोई कोर नहीं हो।

पूर्ण द्विखंडी ग्राफ :- एक ग्राफ $G = (V, e)$, पूर्ण द्विखंडी ग्राफ कहलाता है यदि $V$ को दो समुच्चयों $V_1$ और $V_2$ में इस प्रकार विभक्त किया जा सके ताकि

(i) ग्राफ में $V_1$ का ~~शीर्ष~~ प्रत्येक शीर्ष $V_2$ के प्रत्येक शीर्ष से कोर द्वारा संबद्ध / आसन्न हो।

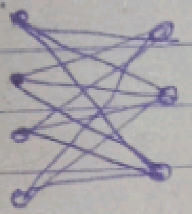
(ii) $V_1$ के कोई भी दो शीर्ष परस्पर आसन्न न हो तथा $V_2$ के भी कोई भी दो शीर्ष आसन्न न हो।

⇒ पूर्ण द्विखंडी ग्राफ को $K_{p,q}$ द्वारा denote किया जाता है, जहाँ $p = |V_1|$

$q = |V_2|$

One plus+

Ex



$K_{4,3}$

⇒ किसी भी द्विखंडी ग्राफ $K_{p,q}$ में शीर्षों की सं. $p+q$ तथा कोरों की सं. = $p \cdot q$ होगी।

~~# प्रमेय : किसी पूर्ण द्विखंडी ग्राफ को n शीर्ष G में n शीर्षों पर किसी भी द्विखंडी ग्राफ में $\frac{n^2}{4}$ से अधिक कोर नहीं हो सकती है।~~

# प्रमेय 1 - किसी पूर्ण द्विखंडी ग्राफ G में n शीर्ष हो तो इसमें $n^2/4$ से अधिक कोरे नहीं हो सकती

Proof :- ∵ हम जानते है n शीर्षों पर किसी भी द्विखंडी ग्राफ में महत्तम कोर पूर्ण द्विखंडी ग्राफ में होती है

माना $K_{p,q}$ n शीर्षों पर कोई पूर्ण द्विखंडी ग्राफ है तब

$p+q = n$ तथा $p \cdot q$ = कोरों की सं.

PAGE NO.
DATE: / /

हम यह भी जानते हैं $p.q$ का मान अधिकतम होगा यदि और केवल यदि $p=q=\frac{n}{2}$ हो

अतः $K_{p,q}$ में अधिकतम कोर $\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}=\frac{n^2}{4}$ हो सकती है

* ग्राफो पर संक्रियाऐं :-

(1) दो ग्राफो का संघ (Union of two Graphs)

⇒ माना $G_1=(V_1,E_1)$ तथा $G_2=(V_2,E_2)$ दो ग्राफ है तो इनका संघ ग्राफ $G=G_1\cup G_2$ $=(V,E)$ एक ग्राफ होता है
जहाँ $V=V_1\cup V_2$, $E=E_1\cup E_2$

(2) दो ग्राफो का सर्वनिष्ठ : माना $G_1=(V_1,E)$ तथा $G_2=(V_2,E_2)$ दो ग्राफ है तो इनका सर्वनिष्ठ ग्राफ $G=G_1\cap G_2=(V,E)$ एक ग्राफ होता है। जहाँ $V=V_1\cap V_2$ ; $E=E_1\cap E_2$

One plus+