Τεχνητη Νοημοσυνη

2η Σειρα Γραπτών Ασκήσεων

Στέφανος-Σταμάτης Αχλάτης

03116149

7ο Εξαμηνο.

Άσκηση 1η

1. Η πρώτη προταση είναι πρόταση προτασιακής λογικής

$p \Rightarrow (\neg(q \Rightarrow (r \land (s \Rightarrow t))))$

Βήμα 1: Αντικατάσταση των συνεπαγωγων

$\neg p \lor (\neg(q \Rightarrow (r \land (s \Rightarrow t))))$

$\neg p \lor (\neg(\neg q \lor (r \land (s \Rightarrow t))))$

$\neg p \lor (\neg(\neg q \lor (r \land (\neg s \lor t))))$

Βήμα 2ο: Μετακινηση αρνήσεων μπροστα στις ατομικές προτάσεις

$\neg p \lor (q \land \neg(r \land (\neg s \lor t)))$

$\neg p \lor (q \land (\neg r \lor \neg(\neg s \lor t)))$

$\neg p \lor (q \land (\neg r \lor (s \land \neg t)))$

Βήμα 3ο: Επιμερισμος διαζευξεων

$(\neg p \lor q) \land (\neg p \lor (\neg r \lor (s \land \neg t)))$

$(\neg p \lor q) \land (\neg p \lor ((\neg r \lor s) \land (\neg r \lor \neg t)))$

$(\neg p \lor q) \land (\neg p \lor (\neg r \lor s)) \land (\neg p \lor (\neg r \lor \neg t))$

$(\neg p \lor q) \land (\neg p \lor \neg r \lor s) \land (\neg p \lor \neg r \lor \neg t)$

Βήμα 4ο: Απλοποίησε με βάση τις σχεσεις: $(p \lor p) = p$ και $(p \land p) = p$

Δεν κανουμε κατι εδω

Αρα: Η CNF είναι: $[\neg p, q], [\neg p, \neg r, s], [\neg p, \neg r, \neg t]$

2. $\exists x. \forall y. \exists z. (A(x,y,z) \land (\neg B(z) \Rightarrow \neg(\forall w. (C(x,w,z) \lor K(y)))))$ είναι Λ.Π.Τ.

Βημα 1ο: Αντικατάσταση των συνεπαγωγών

$$\exists x. \forall y. \exists z. (A(x,y,z) \land (\neg(\neg B(z)) \lor \neg(\forall w. (C(x,w,z) \lor K(y)))))$$

Βημα 2ο: Μετακινηση αρνησεων μπροστα στις ατομικες προτασεις.

$$\exists x. \forall y. \exists z. (A(x,y,z) \land (B(z) \lor (\exists w. \neg(C(x,w,z) \lor K(y)))))$$

$$\exists x. \forall y. \exists z. (A(x,y,z) \land (B(z) \lor (\exists w. (\neg C(x,w,z) \land \neg K(y)))))$$

Βημα 3ο: Ονοματα σε μεταβλητες - οκ

Βημα 4ο: Αφαιρεση υπαρξιακων ποσοδεικτων

$$\exists x \forall y \exists z. (A(x,y,z) \land (B(z) \lor (\neg C(x,f_1(y),z) \land \neg K(y))))$$

$$\exists x \forall y (A(x,y,f_2(y)) \land (B(f_2(y)) \lor (\neg C(x,f_1(y),f_2(y)) \land \neg K(y))))$$

προσοχη! ο ποσοδεικτης $\exists x$ δεν δεσμευεται απο το $\forall y$, επειδη ειναι πιο εξωτερικος του

$$\forall y (A(c,y,f_2(y)) \land (B(f_2(y)) \lor (\neg C(c,f_1(y),f_2(y)) \land \neg K(y))))$$

Βημα 5ο: Αφαιρεση καθολικων ποσοδεικτων

$$A(c,y,f_2(y)) \land (B(f_2(y)) \lor (\neg C(c,f_1(y),f_2(y)) \land \neg K(y)))$$

Βημα 6ο: Επιμερισμος διαζευξεων

$$A(c,y,f_2(y)) \land ((B(f_2(y)) \lor \neg C(c,f_1(y),f_2(y))) \land (B(f_2(y)) \land \neg K(y)))$$

$$A(c,y,f_2(y)) \land (B(f_2(y)) \lor \neg C(c,f_1(y),f_2(y))) \land (B(f_2(y)) \lor \neg K(y))$$

Αρα η CNF είναι: $\{[A(c,y,f_2(y))], [B(f_2(y)), \neg C(c,f_1(y),f_2(y))], [B(f_2(y)), \neg K(y)]\}$

Άσκηση 2

1. $\forall x. R(x,x)$ - ανακλαστική ιδιότητα

2. $\forall x. \forall y. (R(x,y) \Rightarrow R(y,x))$ - συμμετρική ιδιότητα

3. $\forall x. \forall y. \forall z. (R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z))$ - μεταβατική ιδιότητα

• Θεωρω - Εξεταζω αν υπαρχει μοντελο που ικανοποιει την 1 και την 2 αλλα οχι την 3.*

Θεωρώ $\Delta^I = \{\alpha, b, c\}$

$$R^I = \{ (\alpha,\alpha), (b,b), (c,c), (\alpha,b), (b,c), (b,\alpha), (c,b) \}$$

• Επειδη ο $\Delta^I = \{\alpha, b, c\}$ και λογω των $R(\alpha,\alpha), R(b,b), R(c,c)$ η προταση 1 επαληθευεται αυτη η ερμηνεια

• Επειδη $\Delta^I = \{\alpha, b, c\}$ και $R(\alpha,b) \Leftrightarrow R(b,\alpha)$ ισχυει η προταση 2
$R(b,c) \Leftrightarrow R(c,b)$

• Ομως δεν ισχυει η μεταβατικη ιδιοτητα αφου καθως ισχουν οι $R(\alpha,b)$ και $R(b,c)$ θα επρεπε να ισχυει και η $R(\alpha,c)$ που ομως δεν ισχυει! Αρα η προταση 2 δεν ισχυει. Αρα ισχυει η υποθεση*

• Εξεταζω αν υπαρχει μοντελο που ικανοποιει την 1 και την 3 αλλα οχι την 2:

Θεωρω $\Delta^I = \{\alpha, b, c\}$

$$R^I = \{ (\alpha,\alpha), (b,b), (c,c), (\alpha,b), (b,c), (\alpha,c) \}$$

• Λογω $\Delta^I = \{\alpha, b, c\}$ και $R(\alpha,\alpha), R(b,b), R(c,c)$ ισχυει η 1.

• Ισχυει η 3 αφου:

$R(\alpha,b), R(b,c) \rightarrow R(\alpha,c)$
$R(\alpha,b), R(b,b) \rightarrow R(\alpha,b)$
$R(b,c), R(c,c) \rightarrow R(b,c)$
$R(\alpha,c), R(c,c) \rightarrow R(\alpha,c)$
$R(\alpha,\alpha)\ R(\alpha,\alpha) \rightarrow R(\alpha,\alpha)$
$R(b,b)\ R(b,b) \rightarrow R(b,b)$
$R(c,c)\ R(c,c) \rightarrow R(c,c)$

• Δεν ισχυει η πρόταση 2 αφου ενω $R(\alpha, b)$ το $R(b, \alpha)$ δεν ισχυει!

Αρα, βρηκαμε τετοιο μοντελο!

• Η περιπτωση που να ισχυουν οι 2, 3 και όχι η 1 δεν ισχυει, δεν υπαρχει μοντελο που να την επαληθευει.

Ιδεα αποδειξης: Θεωρω $\Delta^I = \{x, y\}$

απο ② $R(x,y) \rightarrow R(y,x)$, δηλαδη ισχυουν $R(x,y)$ και $R(y,x)$

τοτε απο ③ $R(x,y) \land R(y,x) \rightarrow R(x,x)$

$R(y,x) \land R(x,y) \rightarrow R(y,y)$

άρα θα ισχυουν οι $R(x,x)$ κ' $R(y,y)$ αρα θα ισχυει και η ①.

Προσοχη! Δεν ειναι αποδειξη αλλα θελω να δειξω γιατι ισχυει σίγουρα και η 1

Τι συμπέρασμα βγάζετε σχετικα με το αν κάποια απο τις προτάσεις αποτελει λογική συνεπεια αλλων προτάσεων;

Η πρόταση 1 είναι λογικη συνεπεια των 2 και 3

Αν ισχυουν οι 2 και 3 ισχυει σίγουρα η 1

Άσκηση 3η

α) Έχουμε τις προτάσεις:

(1) $\forall x. (R(x,x) \Rightarrow \forall y. R(x,y))$

(2) $\forall x. \forall y. (R(x,y) \Rightarrow R(y,x))$

(3) $\forall x. \exists y. \neg R(y,x)$

(4) $\forall x. \neg R(x,x)$

και θέλουμε να δούμε αν $(1),(2),(3) \models (4)$

Αρχικά μετατρέπουμε τις προτάσεις (1), (2), (3), βάση γνώσης, σε CNF:

(1): $\forall x. (R(x,x) \Rightarrow \forall y. R(x,y))$

$\forall x. (\neg R(x,x) \vee (\forall y. R(x,y)))$

$\forall x. \forall y. (\neg R(x,x) \vee R(x,y))$

$(\neg R(x,x) \vee R(x,y)) \longrightarrow [\neg R(x,x), R(x,y)]$

(2): $\forall x \forall y. (R(x,y) \Rightarrow R(y,x))$

$\forall x \forall y. (\neg R(x,y) \vee R(y,x))$

$(\neg R(x,y) \vee R(y,x) \longrightarrow [\neg R(x,y), R(y,x)]$

(3): $\forall x. \exists y. \neg R(y,x)$

$\forall x \neg R(f(x),x)$

$\neg R(f(x),x) \longrightarrow [\neg R(f(x),x)]$

Σύμφωνα με τον Αλγόριθμο της Ανάλυσης, μετατρέπουμε την άρνηση της πρότασης (4) σε CNF ως εξής:

$\neg(\forall x. \neg R(x,x))$

$(\exists x. R(x,x))$

$R(c,c) \longrightarrow [R(c,c)]$

Άρα τώρα η γνώση μας είναι η εξής:

A_1 : $[\neg R(x,x), R(x,y)]$

A_2 : $[\neg R(x,y), R(y,x)]$

A_3 : $[\neg R(f(x),x)]$

A_4 : $[R(c,c)]$

Από το A_1 και το A_4 με x/c_1 έχουμε το αναλυθέν:

$$A_5: [R(c_1, y)]$$

Από το A_5 και το A_2 με x/c_1 έχουμε το αναλυθέν:

$$A_6: [R(y, c_1)]$$

Από το A_6 και το A_3 με x/c_1 και $y/f(x)$ δηλαδή $y/f(c_1)$ έχουμε το αναλυθέν:

A_7: [], που είναι η αντίφαση, οποτε ο Αλγοριθμος της Ανάλυσης τερματιζει με "YES", επομενως η προταση (2) ισχυει/παράγεται αναλυτικα απο την γνωση (1), (2), (3)

β) Τωρα θελουμε να δούμε αν $(1), (3), (4) \models (2)$

Αρχικά, μετατρέπουμε τις προτάσεις (1), (3), (4), γνωση μας, σε CNF:

Το (1) όπως πριν δίνει το: $[\neg R(x,x), R(x,y)]$

Το (3) όπως πριν δίνει το : $[\neg R(f(x), x)]$

Το (4): $\forall x. \neg R(x,x)$

$$\neg R(x,x) \rightarrow [\neg R(x,x)]$$

Σύμφωνα με τον Αλγοριθμο της Ανάλυσης, μετατρεπουμε την αρνηση της πρότασης (2) σε CNF ως εξης:

$$\neg(\forall x. \forall y. (R(x,y) \Rightarrow R(y,x)))$$

$$\neg(\forall x. \forall y. (\neg R(x,y) \vee R(y,x)))$$

$$\exists x. \exists y. \neg(\neg R(x,y) \vee R(y,x))$$

$$\exists x. \exists y. (R(x,y) \wedge \neg R(y,x))$$

$$\exists x (R(x, c_1) \wedge \neg R(c_1, x))$$

$$R(c_2, c_1) \wedge \neg R(c_1, c_2) \rightarrow [R(c_2, c_1)], [R(c_1, c_2)]$$

Άρα, τώρα η γνώση μας είναι η εξής:

A_1: $[\neg R(x,z), R(x,y)]$

A_2: $[\neg R(f(x), x)]$

A_3: $[\neg R(x,x)]$

A_4: $[R(c_2, c_1)]$, $[R(c_1, c_2)]$

·Απο το A_1 και το A_2 με $x/f(x)$ και y/x εχουμε το αναλυθεν:

A_5: $[\neg R(f(x), f(x))]$

·Από το A_1 και το A_3 με $x \backslash x$ και $y \backslash y$ έχουμε το αναλυθεν:

$[\neg R(x,x)]$ που δεν είναι νέα γνώση

·Απότο A_1 και το A_4 με $x \backslash c_2$ και $x \backslash c_1$ δεν εχουμε μορφη για να βγαλουμε αναλυθεν οπως ουτε με $x \backslash c_1$ $x \backslash c_2$ δεν εχουμε μορφη (δεν έχει νοημα δηλαδη). *

·Απο το A_1 και το A_5 με $x/f(x)$ και $y/f(x)$ εχουμε

$[\neg R(f(x), f(x)]$ που δεν είναι νέα γνωση

·Απο το A_2 με το A_3 δεν εχουμε αρνητικο/θετικο οποτε δεν συνεχιζει

·Απο το A_2 με το A_4 δεν εχει νοημα οπως σε προηγ. περιπτωσ. *

·Απο το A_2 με το A_5 δεν εχουμε αρνητικο/θετικο οποτε δεν συνεχιζει

·Απο το A_3 με το A_4 δεν γινεται

·Αποτο A_3 με το A_5 δεν εχουμε αρνητικο/θετικο οποτε δεν γινεται

·Απο το A_4 με το A_5 δε γινεται οπως σε προηγ. περιπτωση*

⊛ Αφου γενικα κανουμε mapping μονο μεταβλητες σε μεταβλητες. Δεν κανουμε mapping ποτε σταθερες ή σταθερες ή συναρτησεις. Δεν κανουμε mapping ποτε σταθερες ουτε συναρτήσεις.

Επομενως, αφου τρεξαμε όλες τις περιπτώσεις και δεν καταληξαμε σε αντιφαση, η προταση (2) δεν επαρτεται αναλυτικα απο την γνωση (1), (3), (4).

Άσκηση 4η

(1) $\forall x\,(\text{χώρα}(x) \to \exists y\,(\text{Ήπειρος}(y) \land \text{ΑνήκειΣε}(x,y)))$

(2) $\exists x\,(\text{χώρα}(x) \land \text{ΜεγαλύτεροΑπο}(\text{πληθυσμος}(x), 3\cdot 10^8))$

(3) $\neg \exists x\,(\text{χώρα}(x) \land \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3\,(\text{Ηπειρος}(y_1) \land \text{Ηπειρου}(y_2) \land \text{Ηπειρος}(y_3) \land$

$\land\ \text{ΑνήκειΣε}(x,y_1) \land \text{ΑνηκειΣε}(x,y_2) \land \text{ΑνηκειΣε}(x,y_3) \land$

$\land\ \neg(y_1=y_2) \land \neg(y_1=y_3) \land \neg(y_2=y_3)))$

(4) $\exists x\,(\text{χώρα}(x) \land \text{ΑνηκειΣε}(x, \text{Αμερική}) \land$

$\land\ \forall y\,((\text{χωρα}(y) \land \text{ΑνήκειΣε}(y, \text{Ευρωπη})) \Rightarrow \text{ΜεγαλυτεροΑπο}(\text{πληθυσμος}(x), \text{πληθυσμος}(y))))$

(5) $\exists x_1 \exists x_2\,(\text{χώρα}(x_1) \land \text{χώρα}(x_2) \land \text{ΜεγαλυτεροΑπο}(\text{πληθυσμος}(x_1), 3\cdot 10^8)$

$\land\ \text{ΜεγαλυτεροΑπο}(\text{πληθυσμος}(x_2), 3\cdot 10^8) \land \neg(x_1=x_2))$

(6) $\forall x\,((\text{χωρα}(x) \land \neg(x=\text{Κινα}) \land \neg(x=\text{Ινδία})) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\text{ΜεγαλυτεροΑπο}(\text{πληθυσμος}(\text{Κινας}), \text{πληθυσμος}(x)) \land$

$\land\ \text{ΜεγαλυτεροΑπο}(\text{πληθυσμος}(\text{Ινδιας}, \text{πληθυσμος}(x)))$

Σχόλιο: Σε καθε new line επαναλαμβάνω το τελευταίο λογικό σύμβολο.