题号	考点	补充
9.1	解题技巧	
9.2	被积函数在整个区间大于0,则该区间的定积分大于0,积分的保号性;介值定理	
9.4	关键在于求出$f(n)$的取值范围	
9.3	积分号与极限号同时存在	
9.5	判断积分的大小关系,想到积分的保号性;函数的图像;由第一问想起用夹挤定理	
9.6	见详细	
9.7	构造辅助函数,将原不等式转化为与0的不等式关系;导数与单调性	
9.8	由$f(0)=f(1)=0$想到中值定理,拉格朗日中值定理的分点的选择;绝对值不等式;积分的保号性;	
9.9	泰勒公式	
9.10	当被积函数啊较为复杂,考虑化简(通过变量替换等)	
9.11	1)积分的保号性;2)由不等式想到构造函数,然后证明构造函数大于0,然后想到求导证明单调性	
9.12	证明和式不等式	
9.13	证明和式不等式	
9.14	方法1:构造辅助函数;定积分中值定理;方法2:替换变量,构造辅助函数;方法3:构造辅助函数,用一阶导数判断单调性	

9.6

方法1 1) 由$f(x)$在$(0,\pi)$上连续$\int_0^\pi f(x)dx=0$,从而知道原函数存在$F(x)=\int_0^x f(t)d(t),x\in[0,\pi]$ 且 $\int_0^\pi f(x)dx=F(\pi)-F(0)=0$,又$F(0)=0$所以$F(\pi)=F(0)=0$ 2) $\int_0^\pi f(x)cosxdx=\int_0^\pi cosdF(x)=cosxF(x)|_0^\pi-\int_0^\pi F(x)sinxdx=\int_0^\pi F(x)sinxdx=0$ 3)假设在$x\in(0,\pi)$, $F(x)sinx$恒为正或恒为负,则与$\int_0^\pi F(x)sinxdx=0$矛盾,故存在$\xi\in(0,\pi)$,使得$F(\xi)sin\xi=0$,且$sinx\neq0$,故$F(\xi)=0$

4)由1),2)知道$F(\pi)=F(0)=F(\xi)=0$,使用罗尔定理$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$即$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$,

方法二 1)假设在$x\in(0,\pi)$, $f(x)$恒为正或恒为负,则与$\int_0^\pi f(x)dx=0$矛盾,故存在$\xi_1\in(0,\pi)$,使得$f(\xi_1)=0$ 2)从1)知道$f(x)$在$(0,\pi)$内至少存在一个实根

- 若仅存在一个实根,即$f(\xi_1)=0$
    - 不妨设$x\in(0,\xi), f(x)>0, x\in(\xi,\pi)<0$
    - $\int_0^\pi f(x)cosxdx-cos\xi_1\int_0^\pi f(x)dx=\int_0^\pi f(x)(cosx-cos\xi_1)dx=\int_0^{\xi_1}(cosx-cos\xi_1)dx+\int_{\xi_1}^\pi(cosx-cos\xi_1)dx>0$
        - 结合$cosx$的单调性
- 与已知$\int_0^\pi f(x)cosxdx=\int_0^\pi f(x)dx=0$矛盾,故还有其他根

    - 问题:但是怎么确定至少还有另一个实根ξ_2,使得$f(\xi_2)=0$

9.11

(2) $F(x)=\int_a^{a+\int_a^x g(u)du} f(t)dt-\int_a^x f(t)g(t)dt$

9.12

- 对不等式取对数
- $\sum_{k=1}^{n-1} lnk \leqslant 1+n(lnn-lne) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} ln(k+1)$
- 由于$y=lnx$的单调性,所以在$[1,n]$上单调递增,
- 所以在$[k,k+1]$
    - $lnk \leqslant lnx \leqslant ln(k+1)$
- 然后利用积分的保号性,积分的分段可加性
    - $\int_k^{k+1} lnkdx \leqslant \int_k^{k+1} lnxdx \leqslant \int_k^{k+1} ln(k+1)dx$
    - $\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} lnkdx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} lnxdx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} ln(k+1)dx$
    - $\sum_{k=1}^{n-1} lnk \leqslant \int_1^n lnxdx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} ln(k+1)$
        - $\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} lnxdx=\int_1^n lnxdx$
    - $\int_1^n lnxdx=1+n(lnn-lne)$
- 得证: $\sum_{k=1}^{n-1} lnk \leqslant 1+n(lnn-lne) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} ln(k+1)$

> 关键对于$\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} lnxdx=\int_1^n lnxdx$的理解