第01讲 行列式的基本概念与计算

行列式的定义

排序与逆序

逆序:

- 即在排列中前面有一个数比自身大的情况

逆序数:

- 一个排列中,逆序的总数,记作$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$,例如:$\tau(231546)=3$,$\tau(621534)=8$

n阶行列式的定义

行列式的性质

1. 行列互换,其值不变,即$|A|=|A^T|$
2. 行列式某行(列)元素全为零,则行列式为零
3. **倍乘**:行列式中某行(列)元素有公因子$k(k\neq 0)$,则k可以提到行列式外
4. 行列式中某行(列)元素均是两个元素之和,则可拆成两个行列式之和
5. **互换**:行列式中两行(列)互换,行列式的值反号
6. 行列式中的两行(列)相等或对应成比例,则行列式为零
7. **倍加**:行列式中某行(列)的k倍加到另一行(列),行列式的值不变
    - $(i)+k(j)$: j行的k倍加到i行
    - $[i]+k[j]$: j列的k倍加到i列

行列式的展开定理

余子式

余子式

- 在n阶行列式中
- 去掉元素a_{ij}所在的第i行,第j列元素
- 由剩下的元素按原来的位置与顺序组成的$n-1$解行列式
- 称为a_{ij}的余子式
    - 记成M_{ij}

代数余子式

- 代数余子式:

- $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

> $M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$

行列式按某一行(列)展开的展开公式

行列式按某一行(列)展开的展开公式

- 按i行:$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+...+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}(i=1,2,...,n)$
- 按j列:$|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{i2}+...+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}(j=1,2,...,n)$

- 如果行列式的某行(列)元素分别乘另一行(列)元素的代数余子式后再求和,结果为零
  - 容易忽略

几个重要的行列式

1. 上下三角行列式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$$

2. 副对角线行列式
   $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}...a_{n1}$
3. 两个特殊的拉普拉斯展开式

$$\begin{bmatrix} A_{m\times m} & 0 \\ 0 & B_{m\times m} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}=|A||B|$$

$$\begin{bmatrix} 0 & A_{n\times n} \\ B_{m\times m} & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C & A \\ B & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & C \end{bmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|$$

4. 范德蒙行列式

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1^0 & x_2^0 & \cdots & x_n^0 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$$

注意:$|A|=|A^T|$

5. 行和或列和相等的行列式

$$\begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{bmatrix}_{n\times n} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

行列式的计算总结

- 将行或列尽量变为1或0
- 注意按行拆分还是列拆分计算方便
- 抓型行列式化为三角行列式
- 每行的和相等,且各行元素依次循环
  - 将$2,3,\cdots,n$列(行)加到第一列(行),然后提取
- 加边法
  - 由行列式定义可知,若第1列为$[1,0,0,\cdots,n]^T$,然后可以在使用定义的求行列式的行处添加任意的值
- 数学归纳法
  - 第一类归纳法
    - 验证$n=1$时,命题成立
    - 假设$n=k$时,命题成立
    - 证明$n=k+1$时命题成立
    - 则命题对任意正整数n成立
  - 第二类归纳法
    - 验证$n=1$和$n=2$时命题成立
    - 假设$n<k$时,命题成立
    - 证明$n=k$时命题成立
    - 则命题对任意正整数n成立
  - 区分第一类归纳法和第二类归纳法的使用
    - 第一类归纳法的递推式$D_k=D_{k-1}$
    - 第二类归纳法的递推式$D_k=D_{k-1}+D_{k-2}$
- 善用递推关系式