提示

题号	知识点
9.1	(2)若$x^TAx=0$,则$A^T=-A$(未完全理解)
9.2	(1)分块矩阵的对角矩阵的行列式 (2)由(1)的提示以及观察已知条件
9.3	用配方法化二次型为标准形
9.4	由于已知不含平方项,故需要做可逆线性变换,使其出现平方项,然后再配完全平方
9.5	见详解
9.6	$f=x^TAx=(Py)^TA(Py)$ $Q=eC,f=x^TAx=(Qy)^TA(Qy)$ 标准形对应的系数就是对应对角矩阵的对角线元素
9.7	二次型对应的矩阵一定有n个特征值(包括重根) 特征值之和为矩阵的迹之和 特征值之积为矩阵对应的行列式
9.8	带参数,求标准形
9.9	见详解
9.10-9.11	合同矩阵与合同二次型
9.12	判定二次型的正定性 见详解
9.13-9.14	对于选择题/填空题 判别对应矩阵的各阶顺序主子式是否大于零 $a_{ii}>0(i=1,2,\ldots,n)$
9.15	见详解
9.16	方法一:顺序主子式,(三对角线行列式见详解) 方法二:配普通完全平方
9.17	A正定$\Leftrightarrow A^{-1}$正定 见详解
9.18	$kE+\varepsilon A$的特征值 $k+\varepsilon\lambda$
9.19	对称矩阵的定义$A=A^T$ 对任意 $x\neq 0$,有 $x^TAx>0$
9.20	见详解
9.21	(1)先证明对称,然后由$A\xi=\lambda\xi$,解出λ,证明$\lambda>0$ (2)A正定可以推出$kA,A^{-1},A^*,A^k,f(A)$正定或者由$kE+\varepsilon A$的特征值 $k+\varepsilon\lambda$,解出λ,证明$\lambda>0$

题号	知识点
9.22	实对称矩阵必相似且合同于对角矩阵 见详解
9.23	实对称矩阵必相似且合同于对角矩阵
9.24-9.26	矩阵的等价,相似,合同

详解

9.5

用正交变换化二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$为标准形,并求所作的正交变换

解

第一步: 二次项的对应矩阵

> 注意对应系数就是二次项的对应矩阵的对应位置的元素

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

第二步:建立特征方程,求取特征值,然后获得特征向量

$|\lambda E-A|=0$

ξ_1,ξ_2,ξ_3

第三步:将获得特征向量的标准正交化,然后单位化,最后单位化,从而获得正交矩阵

$Q=[\eta_1^0,\eta_2^0,\eta_3^0]^T$

第四部:将第三步获得正交矩阵,$x=Qy$从而将原二次型化为标准形,

$x=Qy$

$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=(Qy)^TA(Qy)=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$

> 特征值是标准形对角线上的元素:$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$

9.9

求a

由标准形$\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2$

- $r(A)=2,|A|=0$
- 或者$0\cdot y_3^2$
  - 即$\lambda_3=0,|\lambda_3 E-A|=|A|=0$

9.12

判别二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$的正定性

解

二次型的对应矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$$

方法一:

- 判别对应矩阵的各阶顺序主子式是否大于零

$$D_1=|2|>0,D_2=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}>0,D_3=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}>0$$

方法二:

- 判别A的特征值是否都大于零

方法三:

- 利用配方法化为标准形,判别f的正惯性指数p是否等于n
  - $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$
  - $f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{2})^2+\frac{3}{2}(x_2+\frac{1}{3}x_3)^2+\frac{4}{3}x_3^2$

方法四:

- 用定义看是否对任意$x=[x_1,x_2,x_3]^T\neq 0$,都有$x^TAx>0$
- 将二次型配成完全平方公式
  - 这里的完全平方公式的做法与方法三的不同,不要求将某平方项及其有关的混合项一次配完
  - $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$
  - $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_1)^2$
- 得出$f\geqslant 0$
- 然后
  - $f=0$
    - $x_1+x_2=0$
    - $x_2+x_3=0$
    - $x_3+x_1=0$
  - 由系数矩阵的行列式不等于零

  - 则$x_1=x_2=x_3=0$
- 所以当$x=[x_1,x_2,x_3]^T\neq 0$,都有$x^TAx>0$

方法五 将二次型配成完全平方公式 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$
$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_1)^2$

$$f(x_1,x_2,x_3)=[x_1+x_2,x_2+x_3,x_3+x_1]\begin{bmatrix}x_1+x_2\\x_2+x_3\\x_3+x_1\end{bmatrix}=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$f(x_1,x_2,x_3)=x^TD^TDx=x^TAx$

$A=D^TD$,$|D|\neq 0$,故D可逆

9.15

设二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$,其中$A=(a_{ij})_{n\times n}$是实对称矩阵,证明$A^{-1}$是正定矩阵,是$f$为正定二次型的充要条件

> 正定矩阵一定是实对称矩阵

解

必要性:

若A正定

因为A是实对称矩阵,有$A^T=A$,且A的特征值$\lambda>0$

对$A^T=A$两边求逆,$(A^T)^{-1}=A^{-1}=(A^{-1})^T$

得A^{-1}是实对称矩阵,且其特征值$\frac{1}{\lambda}>0$,故A^{-1}是正定矩阵

充分性:

若A^{-1}是正定

则$(A^{-1})^T=A^{-1}$,且A^{-1}的特征值$\mu>0$

对$(A^{-1})^T=A^{-1}$两边求逆,$A^T=A$,

得A为实对称矩阵,且A的特征值$\frac{1}{\mu}>0$,故A是正定矩阵

9.16

三对角线行列式

$$\begin{vmatrix}2&1&0&\cdots&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&1\\0&0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix}$$

第一步消除最左侧的次对角线的1

- 第1行乘$-\frac{1}{2}$,加到第2行
  - $0,\frac{3}{2},1,\cdots,0,0$
- 第2行乘$-\frac{2}{3}$,加到第3行
  - $0,0,\frac{1}{3},\cdots,0,0$
- 第$n-1$乘$-\frac{1}{n+1}$,加到第n行
  - $0,0,0,\cdots,0,\frac{n+1}{n}$

第二步

由第一步变换得到

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n}{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & \frac{n+1}{n} \end{vmatrix}$$

故$|A|=n+1$

9.17

证明:若A是正定矩阵,则A^{-1}也是正定矩阵

方法1:

9.20

证法1

9.22

由$A^2=A$,然后$A^2\xi=A\xi=\lambda\xi=A\lambda\xi=\lambda^2\xi$,得到特征值为0或1,故$A+E$的特征值为1或2
然后根据$A^2=A$进行化简$|E+A+A^2+\cdots+A^k|=|E+kA|$

由于A实对称矩阵必相似且合同于对角矩阵,故存在正交矩阵Q,使得

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda=\begin{vmatrix} E_r & O \\ O & O \end{vmatrix}$$

$$A=Q\begin{vmatrix} E_r & O \\ O & O \end{vmatrix}Q^{-1}$$

$$|E+A+A^2+\cdots+A^k|=|E+kA|=|E+kQ\begin{vmatrix} E_r & O \\ O & O \end{vmatrix}Q^{-1}|=|Q|(k+1)^r|Q^{-1}|=(k+1)^r$$