提示

题号	知识点	
5.1	举出特例,基础概念的积累	
5.2	非齐次线性方程组的解,系数矩阵的秩,列数和增广矩阵的秩的关系	
5.3	非齐次线性方程组的解,系数矩阵的秩与列数的关系	
5.4	线性相关的定义的理解;	
5.5	判断系数矩阵的秩是否不为零;或者是凑系数看和是否为零向量	
5.6	系数矩阵的列秩与列数的关系;整体线性无关⇒任何部分线性无关	
5.7	以少表多,则多相关	
5.8	要证明线性无关,可以假设线性相关,然后利用题中条件证明$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$,与线性相关矛盾,故线性无关得证	
5.9	要证明线性无关,可以假设线性相关,然后利用题中条件证明$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$,与线性相关矛盾,故线性无关得证	
5.10	1)要证明线性无关,可以假设线性相关,然后利用题中条件证明$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$,与线性相关矛盾,故线性无关得证; 2)有关秩的等式和不等式	
5.11	详解	
5.12	定理2的扩展	
5.13	极大线性无关组的概念	
5.14-5.15	计算求极大线性无关组 理解求极大线性无关组有助于后面的求解方程组的自由未知量	
5.16-5.17	对于向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$,若任一$\beta_i(i=1,2,\cdots,t)$均由可$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出, 则$r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)\leqslant r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$; 有关秩的等式和不等式	
5.18-5.21	有关秩的等式和不等式	
5.22	向量组等价	
5.23	向量组等价 矩阵等价 详解	
5.24	向量组等价	
5.25	正交向量 线性方程组	
5.26	数学一	

题号	知识点	
5.27	施密特标准正交化(正交规范化)	
5.28	第3讲的知识,主要是矩阵的转置	

详解

5.1

A :

- 若α_s不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表出,但是可能$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$中其他向量可由其余向量线性表出
  - 例如
    - α_1能由$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_s$线性表出
    - 从而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关

B

- 线性表示不唯一
  - $\alpha_1=[1,1],\alpha_2=[2,2],\alpha_3=[3,3]$
  - $2\alpha_1-\alpha_2+0\alpha_3=0$
  - $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$
- α_s可能为零向量

C

- $\alpha_1=[0,0],\alpha_2=[1,0]$线性相关,但是$\alpha_2$无法由$\alpha_1$线性表出

D

- 反证法

5.3

> 化为行阶梯矩阵便于看出两个矩阵的线性关系,系数矩阵的秩与增广矩阵的秩不等,明显就不能线性表示,与已知不符合

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表示,则三个方程组$x_{i1}\beta_1+x_{i2}\beta_2+x_{i3}\beta_3=\alpha_i(i=1,2,3)$均有解 向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$不可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示,则三个方程组$x_{i1}\alpha_1+x_{i2}\alpha_2+x_{i3}\alpha_3=\beta_i(i=1,2,3)$至少有一个解

5.4

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关,$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$线性无关.问

- 证明:α_1能否由$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_s$线性表出
- 证明:α_{s+1}能否由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出

解:

(1)

方法一:

- 整体线性无关⇒任何部分线性无关
- 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关,而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$线性相关,则$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出,且表出法唯一

方法二

- 已知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关,表示存在一组不全为零的数$k_1,k_2\cdots k_s$,使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$
- 关键在于对k_1的讨论
    - 若$k_1\neq 0$
        - 则
            - $\alpha_1=\frac{1}{k_1}(k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+\cdots+k_s\alpha_s)=l_2\alpha_2+l_3\alpha_3+\cdots+l_s\alpha_s$
            - 显然α_1能由$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_s$线性表出
    - 若$k_1=0$
        - 由于$k_1,k_2\cdots k_s$不全为零,故$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_s$线性相关,则
            - $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$线性相关,与已知条件不符
                - α_{s+1}的系数k_{s+1}可以取0
        - 故$k_1\neq 0$

(2)

证明α_{s+1}不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出,无从下手,使用反证法假设$\alpha_{s+1}$能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出

- $\alpha_{s+1}=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_s\alpha_s$
- 由(1)$\alpha_1=l_2\alpha_2+l_3\alpha_3+\cdots+l_s\alpha_s$替换$\alpha_1$
- 得
    - $\alpha_{s+1}=(\lambda_1 l_2+\lambda_2)\alpha_2+(\lambda_1 l_3+\lambda_3)\alpha_3+\cdots+(\lambda_1 l_s+\lambda_s)\alpha_s$
    - 即$(\lambda_1 l_2+\lambda_2)\alpha_2+(\lambda_1 l_3+\lambda_3)\alpha_3+\cdots+(\lambda_1 l_s+\lambda_s)\alpha_s-\alpha_{s+1}=0$
    - 即$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$线性相关
- 与已知$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$无关矛盾
- 故α_{s+1}不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出

5.8

设A是n阶方阵,若存在正整数k,使线性方程组$A^kx=0$有解向量α,且$A^{k-1}\alpha\neq 0$ 证明$\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$线性无关

解

假设$\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$线性相关

- $\lambda_1\alpha+\lambda_2 A\alpha+\cdots+\lambda_k A^{k-1}\alpha=0$
    - 左乘$A^{k-1}\alpha$
        - $\lambda_1 A^{k-1}\alpha+\lambda_2 A^k\alpha+\cdots+\lambda_k A^{2k-2}\alpha=0$
    - 由已知$A^k\alpha=0$
    - 故$A^{k+1}\alpha=A^{k+2}\alpha=\cdots=A^{k+1}\alpha A^{2k-2}\alpha=0$
    - 从而$\lambda_1 A^{k-1}\alpha$,且$A^{k-1}\alpha\neq 0$
    - 进而$\lambda_1=0$

- 最终$\lambda_2 A^k\alpha+\cdots+\lambda_k A^{2k-2}\alpha=0$
  - 左乘$A^{k-2}\alpha$,可证$\lambda_2=0$
  - 继续下去
- 得证$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_k=0$
- 与假设矛盾
- 故$\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$线性无关

5.10

$A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$ $k_1\alpha_1+k_2\alpha 2+\cdots+k_n\alpha_n=[k_1,k_2,\cdots,k_n][\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^T=[k_1,k_2,\cdots,k_n]A$

5.11

> A是B充分必要条件:
>
> - 必要性是已知B证明A
> - 充分性:已知A证明B

证明:$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关的充分必要条件是$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性无关

方法一

必要性 已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,证明$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性无关 证明:

- 欲证$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$
  - 即证明$k_1=k_2=k_3=0$
- 已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关
- 即 $(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$
  - 此处有个疑问:
    - 怎么区分线性无关的两个条件(可能还是我没有理解)
    - 就是证明线性无关为什么只能证明系数全为零,而不能证明不存在这一组数字
- 即系数方程组为
  - $k_1+k_3=0$
  - $k_1+k_2=0$
  - $k_2+k_3=0$
- 系数行列式为

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}=2\neq 0$$

- 系数方程组有唯一零解,
  - 即$k_1=k_2=k_3=0$
- 从而$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性无关
- 必要性得证

充分性 已知$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性无关,证明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关 证明

- 反证法
    - 已知$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性无关,假设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关
- $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关
    - 即$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$
- 令
    - $\alpha_1+\alpha_2=\beta_1$
    - $\alpha_2+\alpha_3=\beta_2$
    - $\alpha_3+\alpha_1=\beta_3$
- 可得
    - $\alpha_1=\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2+\beta_3)$
    - $\alpha_2=\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2-\beta_3)$
    - $\alpha_3=\frac{1}{2}(-\beta_1+\beta_2+\beta_3)$
- 整理得$(k_1+k_2-k_3)\beta_1+(-k_1+k_2+k_3)\beta_2+(k_1-k_2+k_3)\beta_3=0$
- 已知$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性无关
- 故系数方程组
    - $k_1+k_2-k_3=0$
    - $-k_1+k_2+k_3=0$
    - $k_1-k_2+k_3=0$
- 齐次系数方程组的系数行列式不为0

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}=4\neq 0$$

- 即$k_1=k_2=k_3=0$
- 则与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关矛盾
- 故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关
- 充分性得证

方法二:

利用等价向量组等秩

- 令
    - $\alpha_1+\alpha_2=\beta_1$
    - $\alpha_2+\alpha_3=\beta_2$
    - $\alpha_3+\alpha_1=\beta_3$
- 可得
    - $\alpha_1=\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2+\beta_3)$
    - $\alpha_2=\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2-\beta_3)$
    - $\alpha_3=\frac{1}{2}(-\beta_1+\beta_2+\beta_3)$
- 因为:$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$向量组与$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$与向量组可以相互表出,是等价向量组,等价向量组等秩
- 若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$,即列秩等于列数
    - 则$r(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=3$

    - 则$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性无关
- 反之亦然

方法三

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

- $\Leftrightarrow[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]x=0$有唯一零解
- $\Leftrightarrow$
$$[\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1]x=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}x=0$$
  有唯一零解

方法四 利用初等变换不改变秩 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

- $\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$
- $\Leftrightarrow$
$$r(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=r([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix})=3$$

其中

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

是若干个初等矩阵的乘积(等价于对$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$做了若干次初等变换得到$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$)可逆

5.12

定理2的扩展

- n个n维列向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关$\Leftrightarrow|A|=|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|=0\Leftrightarrow Ax=0$有非零解
- n个n维列向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关$\Leftrightarrow|A|\neq0\Leftrightarrow Ax=0$只有零解

5.23

注意

- $a=-1$
    - $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$
    - $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_3)=3$
    - β_3不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出
- $a=0$
    - $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$
    - $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$均不能由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表出