第02讲 行列式的综合计算与应用

用行或列表示的行列式的性质

行列式的性质用行或列来表示的情形
$\alpha_i(i=1,2,\ldots,n)$都是n维列向量

- 矩阵的转置的行列式等于矩阵的行列式:
  - $|A^T|=|A|$,$|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|=|[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^T|=$
$$\begin{vmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\vdots\\\alpha_n^T\end{vmatrix}$$
- 当有一列或一行为零时行列式的值为0
  - $|\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_n|=0$
- 倍乘:
  - $|\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},k\alpha_i,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_n|=k|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|$
- 可拆
  - $|\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_i+\beta_i,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_n|=|\alpha_1,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n|+|\alpha_1,\cdots,\beta_j,\cdots,\alpha_n|$
- 互换
  - $|\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n|=-|\alpha_1,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_n|$
- 成比例
  - $|\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,k\alpha_i,\cdots,\alpha_n|=0$
- 倍加
  - $|\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_n|==|\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,k\alpha_i+\alpha_j,\cdots,\alpha_n|$

克拉默法则

克拉默法则

若n个方程n个未知量构成的非齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\qquad\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的系数行列式$|A|\neq 0$,则方程组有唯一解,且$x_1=\frac{|A_i|}{|A|},i=1,2,\cdots,n.$

其中$|A_i|$是$|A|$中第i列元素(即x_i的系数)替换成方程组右端的常数项$b_1,b_2,\cdots,b_n$后所构成的行列式.

> 适合三阶以下的非齐次线性方程组

推论

若包含n个方程n个未知量的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

- 齐次线性方程组的系数行列式
  - $|A| \neq 0$,则方程组有唯一零解
  - $|A| = 0$,则方程组有非零解
    - $r(A) < n$表示方程的数量大于未知数的数量

关于$|A|$行列式是否等于0

- $|A| = 0$
- $\Leftrightarrow |A| = k|A|, k \neq 1$
- $\Leftrightarrow Ax = 0$有非零解
- $\Leftrightarrow A$不可逆
- $\Leftrightarrow A$有0特征值

> $|A| = 0$行列式的值为0与矩阵A为O矩阵不同

总结

- 因奇数阶反对称矩阵的行列式为零.,故奇数阶的反对称矩阵必不可逆,则反对称矩阵可你的必要条件是该矩阵是偶数阶的