第00讲 前言

线性代数

- 线性代数研究的是量与量之间的一次(所谓线性)关系
- 那些非一次(所谓非线性)关系,很多都可以转换为一次关系进行研究,从而将复杂问题简化

从行列式讲起

一个二阶行列式如下:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

考虑一个一个二阶行列式的几何意义,计算规则:

- 先将行列式的第一行,第二行分别看作两个2维向量,令$\alpha_1 = [a_{11}, a_{22}]$, $\alpha_2 = [a_{12}, a_{21}]$
- 将这两个向量放入直角坐标系中,且以这两个向量为临边拼出一个平行四边形,则平行四边形的面积为$l \cdot m \cdot sin(\beta - \alpha) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
    - l为α_1的模长
    - m为α_2的模长
    - α为α_1与x轴的夹角
    - β为$\alpha 21$与y轴的夹角
- 得出2阶行列式由2个2维向量组成,其运算结果是以这两个向量为邻边的平行四边形的面积

推广到n阶行列式:

- 三阶行列式:由三个3维行向量组成,其运算结果是以这三个向量为邻边的平行六面体的体积
- n阶行列式:由n个n维向量组成,其结果为以这个向量为邻边的n维图形的体积

矩阵的本质

矩阵用于表达系统信息
矩阵由若干个行(列)向量拼成的
矩阵不能运算,但是若干个行(列)向量之间存在着某种联系.这种关系反映了矩阵的本质(矩阵的秩)

向量

矩阵中若干个行(列)向量之间存在着某种联系,即是线性无关的向量的个数(独立信息的个数)的问题
找到在一个向量组中能够代表该向量组中所有的成员的一组向量,把它们组成的向量组叫**极大线性无关组**,极大线性无关组中的代表的个数对于同一个向量组来说,是唯一的.这个个数叫做秩.
矩阵的秩,向量组的秩都反映了代表的问题,本质相同

线性方程与向量组其实是一回事

一般的非齐次性线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

该方程组的系数矩阵

$$
A = \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
$$

就是若干个列向量拼成的,且其增广矩阵

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{bmatrix}
$$

就是系数矩阵再添加一个列向量拼成的

将方程组写成向量的形式,就可以看出该方程组的未知数就是向量组中各成员的系数

$$
x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n = \beta
$$

$$
\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, j = 1, 2, \cdots, n, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

所以本质上讲:
方程组问题就是向量组问题,方程组和向量组是同一个问题的两种表现形式,其本质一样,所以解决方法也一样

求解线性方程组,就是对增广矩阵作初等行变换,化成行阶梯矩阵,然后求解
接下来,该方程组解的情况,如果有解,如何表示出所有解,这个解即某个向量组用什么代表来表示,这个代表就是基础解系.
其实,解方程获得的解,就是描述向量与向量之间关系的表示系数

引入向量空间

齐次线性方程组的解向量是$[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$,其全部的解的集合就是一个向量组,也叫作解空间,这个解空间就叫做一个向量空间
 向量空间的基就是向量组中的极大线性无关组,仍然是代表问题,空间的维数就是基的个数,就是矩阵或者向量组的秩的问题,就是代表的个数
 求一个向量在一组基下的坐标表示,就是解决一个非齐次方程组的问题,坐标就是方程组的解

以下三个问题是等价的

- 求非齐次线性方程组的解
- 求一个向量由一组向量线性表示的系数
- 求一个向量在一组基下的坐标

二次型化标准形

如何把一个二次齐次式的复杂表示(含有交叉项)通过变换得到简单表示(含有平方项)
这种变换的实质就是用正交变换把实对称矩阵相似对角化