# 第13讲 无穷级数

## 13.1 数项级数的概念与性质

## 引言

### 数项级数的基本概念及其敛散性

无穷级数

- $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$
  - 通项:$u_n$
    - 若$u_n$为常数,则被称为常数项无穷级数,简称数项级数

无穷级数求和

- $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$
  - $lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$
    - 用极限来处理无穷级数相加
  - 若$lim_{n\to\infty} S_n = S$收敛
    - 则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛
  - 若$lim_{n\to\infty} S_n$发散或为$\pm\infty$
    - 则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散

## 基本性质

性质1:倍乘

- 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,且其和为S,
  - 则任给常数$a$,有$\sum_{n=1}^{\infty} au_n$也收敛,且其和为$aS$
- 即$\sum_{n=1}^{\infty} au_n = a\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

性质2:可加

- 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$均收敛,且其和分别为$S, T$,
  - 则有$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$也收敛,且其和为$S \pm T$
- 即,$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$

性质3: 倍乘,可加

- 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$均收敛,且其和分别为$S, T$,
  - 则任给常数$a, b$,有$\sum_{n=1}^{\infty} au_n + bv_n$也收敛,且其和为$aS + bS$
- 即,$\sum_{n=1}^{\infty}(au_n + bv_n) = a\sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$

性质4:

- 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,
    - 则其任意$m$项后余项$\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n$也收敛;
- 反之,若存在$m$项后余项$\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n$收敛
    - 则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛

性质5:

- 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,则$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

# 13.2 数项级数敛散性的判别方法

## 正项级数及其敛散性判别

若通项$u_n \geqslant 0, n = 1, 2, \cdots,$

- 则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为正项级数

### 收敛原则

正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的充分必要条件是

- 它的部分和数列$S_n$有界

> $S_n$有界,则$\lim_{n\to\infty} S_n = S(\text{有限数})$;若$S_n$无界,则$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$

### 判别1: 比较判别法

若给出两个正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$,如果从某项其有$u_n \leqslant v_n$成立,则

- 若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛,
    - 则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛
- 若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散,
    - 则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也发散

> 两个正项级数,小的随大的敛散

### 判别2: 比较判别法的极限形式

若给出两个正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n, v_n \neq 0$,且$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A$,

- 若$A = 0$,
    - 则当$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛时,$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛
- 若$A = +\infty$,
    - 则当$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也发散
- 若$0 < A < +\infty$,
    - 则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$有相同的敛散性

### 判别3: 比值判别法(达朗贝尔判别法)

给出一正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,如果$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{v_n} = \rho$

- 若$\rho < 1$,

    - 则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛
- 若$\rho > 1$,
    - 则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散

> $\rho = 1$比值判别法(达朗贝尔判别法)会失效

### 判别4: 根值判别法(柯西判别法)

给出一正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,如果$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

- 若$\rho < 1$,
    - 则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛
- 若$\rho > 1$,
    - 则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散

> $\rho = 1$根值判别法会失效

## 交错级数及其敛散性判别

莱布尼兹判别法:

- 给出一交错级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, u_n > 0, n = 1, 2, \cdots$
    - 若$u_n$单调不增且$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$
    - 则该级数收敛

## 任意项级数及其敛散性判别

任意项级数

- 每一项有正,有负

绝对值级数

- $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$

绝对收敛

- 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为任意项级数,若$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛,
    - 则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛

条件收敛

- 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为任意项级数,若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,但$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$发散,则
    - 称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$条件收敛

定理:

- 若$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛

## 收敛级数的性质

性质

- 收敛级数的项任意添加括号后所得的新级数仍收敛,且其和不变

性质

- 若级数绝对收敛,不论将其各项如何重新排列,所得的新级数也绝对收敛,且其和不变
    - 即,绝对收敛的级数具有可交换性
    - 即,收敛的正项级数任意交换各项顺序后得到的新级数仍收敛,且其和不变

# 13.3 阿贝尔定理与幂级数的收敛域

## 有关概念

### 函数项级数

设函数列$u_n(x)$定义在区间$I$上,

- 称$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$为定义在区间$I$上的函数项级数,
- 记为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$,
- 当$x$取$x_0$时,
- $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$称为常数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$

### 幂级数

若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的一般项$u_n(x)$是$n$次幂函数,

- 则称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为幂级数
- 一般形式$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$
- 标准形式$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$
    - $a_n$为幂级数的系数

### 收敛点与发散点

给定$x_0\in I$

- 有$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$收敛,
    - 则称$x_0$为级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛点
- 有$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$发散,
    - 则称$x_0$为级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的发散点

### 收敛域

函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的所有收敛点的集合

## 阿贝尔

### 阿贝尔定理

当幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在点$x=x_1(x_1\neq 0)$处收敛时,

- 对于满足$|x|<|x_1|$的一切$x$,幂级数绝对收敛

当幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在点$x=x_2(x_2\neq 0)$处收敛时,

- 对于满足$|x|>|x_1|$的一切$x$,幂级数发散

### 推论 - 收敛半径的存在性

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径$R(R \geqslant 0)$必存在,且

- 仅在点$x = 0$处收敛,此时收敛半径$R = 0$
- 在整个数轴上都收敛,此时收敛半径$R = +\infty$
- 当$|x| < R$时幂级数绝对收敛,且当$|x| > R$时,幂级数发散,则收敛半径就是$R$
- 当$x = R$与$x = -R$时,幂级数可能收敛也可能发散

### 收敛半径的求法

若$lim_{n \to \infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \rho$,

- 则$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径$R$的表达式为
  - $\rho \neq 0$:
    - $R = \frac{1}{\rho}$
  - $\rho = 0$:
    - $R = +\infty$
  - $\rho = +\infty$:
    - $R = 0$

### 收敛区间与收敛域

收敛区间

- $(-R, R)$为幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛区间

收敛域

- 单独考察幂级数在$x = \pm R$处的敛散性就可以确定其收敛域为$(-R, R)$或$[-R, R)$或$(-R, R]$或$[-R, R]$

# 13.4 幂级数求和

## 和函数

在收敛域上,记$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$,

- 并称$S(x)$为$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$的和函数

## 幂级数的相等

定义:

- 给定两个幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$和$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$,
- 若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$和$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$在$x = 0$的某邻域内有相同的和函数,
  - 则称这两个幂级数在该邻域内相等

定义:

- 若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$和$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$在$x = 0$的某邻域内相等,
  - 则它们同次幂项的系数相等

- 即$a_n = b_n(n = 0, 1, 2, \cdots)$

## 幂级数的四则运算

若幂级数$\sum_{n=0}\infty a_nx^n$和$\sum_{n=0}\infty b_nx^n$的收敛半径分别为$R_a$和$R_b(R_a \neq R_b)$,则有

- $k\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty}ka_nx^n, |x| < R_a$
- $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \pm \sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n, |x| < R$
- $(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n) = \sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n, |x| < R$
    - $k$为常数,$R = min\{R_a, R_b\}$,$c_n = \sum_{n=0}^{\infty}a_kb_{n-k}$

## 幂级数的性质

性质:

- 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数$S(x)$在其收敛区间$I$上连续,且如果幂级数在收敛区间的端点$x = R$(或$x = -R$)处收敛,
    - 则和函数$S(x)$在$(-R, R]$(或$[-R, R)$)上连续

性质

- 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数$S(x)$在其收敛域可积,且有逐项积分公式 $\int_0^x S(t)dt = \int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n)dt = \sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^x t^ndt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}(x \in I)$
- 逐项积分后所得到的幂级数与原级数有相同的收敛半径,但收敛域可能扩大

性质

- 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数$S(x)$在其收敛区$(-R, R)$内可导,且有逐项求导公式S'(x) = {(\sum_{n = 0}^{\infty}a_nx^n)}' = \sum_{n = 0}^{\infty}{(a_nx^n)}' = \sum_{n = 0}^{\infty}na_nx^{n-1}(|x| < R)
- 逐项求导后所得到的幂级数与原级数有相同的收敛半径,但收敛域可能缩小

## 几个重要函数幂级数展开式

- e^x = \sum_{n = 0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, -\infty < x < \infty
- sinx = \sum_{n = 0}^{\infty}{(-1)}^n\frac{x^{2n + 1}}{(2n + 1)!}, -\infty < x < \infty
- cosx = \sum_{n = 0}^{\infty}{(-1)}^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}, -\infty < x < \infty
- ln(1 + x) = \sum_{n = 0}^{\infty}{(-1)}^{n-1}\frac{x^n}{n}, -1 < x \leqslant 1
- \frac{1}{1 + x} = \sum_{n = 0}^{\infty}{(-1)}^nx^n,-1 < x < 1
- \frac{1}{1-x}, -1<x<1
- {(1 + x)}^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha (\alpha - 1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)}{n!}x^n
    - 当\alpha \leqslant -1:
        - x \in (-1, 1)
    - 当-1 < \alpha < 0:
        - x \in (-1, 1]
    - 当\alpha > 0:
        - x \in [-1, 1]

# 13.5 函数展开成幂级数

## f(x)的泰勒级数

如果函数f(x)在点$x = x_0$出存在任意阶导数,则称$\sum_{n = 0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$为函数函数f(x)在点$x_0$出的泰勒级数

- 记为$f(x) \sim \sum_{n = 0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$
  - $\sim$:可展开为
  - 具有任意导数的函数,其泰勒级数并不都等于收敛函数本身

特别地,当$x_0 = 0$时

- 记为$f(x) \sim \sum_{n = 0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$,麦克劳林级数

## f(x)的泰勒级数收敛于函数f(x)本身的充要条件

定理

- 设f(x)在区间$(x_0 - R, x_0 + R)$内具有任意阶导数,则$f(x) = \sum_{n = 0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$的充要条件是:
- 对于一切满足不等式$|x - x_0| < R$的x,有$\lim_{n \to \infty}R(x) = \lim_{n \to \infty}\frac{f^{(n + 1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n + 1} = 0$
  - 其中$\xi$介于$x$与$x_0$之间,$R_n(x)$是f(x)在$x_0$处的泰勒公式余项

## 幂级数展开式的求法

### 方法一:直接法

验证$\lim_{n \to \infty}R(x) = 0$,并逐个计算$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$,并带入$\sum_{n = 0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

> 一般不用

### 方法二:间接法

利用已知的幂级数展开式,通过变量代换,四则运算逐项求导,逐项积分和待定系数法等方法得到函数的展开式