第08讲 一元函数积分学的应用

假设以下曲线都是连续的

8.1 用定积分表达和计算平面图形的面积

平面图形的面积

- 曲线$y=y_1(x)$和$y=y_2(x)$及$x=a,x=b(a<b)$
  - $S=\int_a^b|y_1(x)-y_2(x)|dx$
    - 长方形面积：$S=d\times h=dx\times|y_1(x)-y_2(x)|$

曲边扇形的面积

- 曲线$r=r_1(\theta)$和$r=r_2(\theta)$与两个射线$\theta=\alpha,\theta=\beta(0<\beta-\alpha\leqslant 2\pi)$所围成的曲边扇形的面积
  - $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta|r_1^2(\theta)-r_2^2(\theta)|d\theta$
    - 扇形面积:
      - 弧长: $l=r\theta$
        - 圆周长: $2\pi r$
        - 弧长比圆周长等于弧对应的弧度比2π: $\frac{l}{2\pi r}=\frac{\theta}{2\pi}$
      - $S=l\cdot r\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}r^2\theta$
        - $S_{扇形}=\frac{\theta}{2\pi}S_{圆}=\frac{\theta}{2\pi}\pi r^2=\frac{1}{2}r^2\theta$

8.2 用定积分表达和计算旋转体的体积

曲线$y=y(x)$和$x=a,x=b(a<b)$及x轴围城的曲边梯形绕x旋转一周所得到的旋转体的体积

- $V=\int_a^b\pi y^2(x)dx$
  - 类比圆柱体体积$S=\pi y^2(x),V=S\cdot dx$

曲线$y=y_1(x)$,$y=y_2(x)$和$x=a,x=b(a<b)$及x轴围城的曲边梯形绕x旋转一周所得到的旋转体的体积

- $V=\int_a^b\pi|y_1^2(x)-y_2^2(x)|dx$

曲线$y=y(x)$和$x=a,x=b(a<b)$及x轴围城的曲边梯形绕y轴旋转一周所得到的旋转体的体积

- $V_y=2\pi\int_a^b x|y(x)|dx$
  - 类比长方体体积$S=|y(x)|dx,V=S\cdot 2\pi x$

曲线$y=y_1(x),y=y_2(x)$和$x=a,x=b(a<b)$及x轴围城的曲边梯形绕y轴旋转一周所得到的旋转体的体积

- $V_y=2\pi\int_a^b x|y_1(x)-y_2(x)|dx$

8.3 用定积分表达和计算函数的平均值

设$x \in [a,b]$,函数$y(x)$在$[a,b]$上的平均值为$\bar{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b y(x)dx$

补充

如何将直角坐标方程转化为极坐标方程

- $x = \rho cos\theta$
- $y = \rho sin\theta$
- $x^2 + y^2 = \rho^2$

积分上下限的取得

- 两个曲线的交点
- 在给定区间内,交点可能不止一个,需要进一步对区间进行分割