第05讲 中值定理 知识点

5.1 涉及函数$f(x)$的中值定理

定理1:有界与最值定理

$f(x)$在$[a,b]$上连续, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, m, M分别为$f(x)$在$[a,b]$上的最小值和最大值

定理2:介值定理

$f(x)$在$[a,b]$上连续,$m \leqslant \mu \leqslant M$,存在$\xi \in [a,b]$,使得$f(\xi)=\mu$

总结

- 注意函数在闭区间连续
- 证明等式问题
- 解题
  - 一般借助最值定理
  - 然后找到与最值之间的不等关系
  - 最后应用介值定理
- 跟积分有关的定理
  - $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$,
    - 则$\int h(x) \leqslant \int f(x) \leqslant \int g(x)$也成立
      - $[\int f(x)]' = f(x)$
- 题型
  - 题中给出在$[a,b]$,具有$f'(x)$一阶连续导数,并且命题中给出$f'(x)$一阶导数的相关等式,则需要考虑对$f'(x)$一阶导数应用中值定理
    - 一阶导数:$xf'(x)$
    - 二阶导数:$x^2 f''(x)$

导数介值定理

设$f(x)$在$[a,b]$上可导,当$f'_+(a) \neq f'_-(b)$时,对于任意的介于$f'_+(a)$与$f'_-(b)$之间的μ,存在$\xi \in (a,b)$,使得$f'(\xi)=\mu$

定理3:平均值定理

$f(x)$在$[a,b]$上连续,当$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$时,在$[x_1, x_n]$内至少存在有一点$\xi$,使$f(\xi) = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$

定理4:零点定理

$f(x)$在$[a,b]$上连续,当$f(a) \cdot f(b) < 0$,存在$\xi \in (a,b)$,使得$f(\xi)=0$

- 零点定理的极限扩充形式

> 零点定理可以看做是是介值定理的特例

导数零点定理

设$f(x)$在$[a,b]$上可导,当$f'_+(a)f'_-(b)<0$时存在$\xi\in(a,b)$,使得$f'(\xi)=0$

积分中值定理

设$f(x)$在$[a,b]$上连续,则至少存在$\eta\in[a,b]$,使得$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\eta)(b-a)$

- 只有在积分中值定理中可以取到端点值

5.2 涉及导数(微分)$f(x)'$的中值定理

定理5:费马定理

设$f(x)$在x_0点处可导且为极值点,则$f'(x_0)=0$

总结

- 费马定理用于证明带有不等关系的条件的题目
  - 最值是通过不等关系体现的
- 注意函数极限的局部保号性P97-5.11

需要掌握费马定理的证明

证:

- 假设$f(x)$在x_0点处取得极大值,则对于任意$x\in U(x_0)$,都有$\Delta f=f(x)-f(x_0)\leqslant 0.$
- 根据导数的定义:$f'_-(x_0)=lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},f'_+(x_0)=lim_{x\to -x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- 又根据函数极限的局部保号性$f'_-(x_0)=lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0,f'_+(x_0)=lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0$
- 又已知$f(x)$在x_0点处可导,根据函数在点x_0处可导的充要条件得$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$
- 故$f'(x_0)=0$

定理6:罗尔定理

设$f(x)$满足

- $[a,b]$上连续
- (a,b)上可导
- $f(a)=f(b)$

则存在$\xi\in(a,b)$,使得$f'(\xi)=0$

推广

- 设$f(x)$在(a,b)内可导,$lim_{x\to a^+}f(x)=lim_{x\to b^-}f(x)=A$,且在$(a,b)$内至少存在一点$\xi$,使得$f(\xi)=0$
- 设$f(x)$在(a,b)内可导,$lim_{x\to a^+}f(x)=lim_{x\to b^-}f(x)\pm\infty$,且在$(a,b)$内至少存在一点$\xi$,使得$f(\xi)=0$
- 设$f(x)$在(a,∞)内可导,$lim_{x\to a^+}f(x)=lim_{x\to\infty}f(x)=A$,且在$(a,\infty)$内至少存在一点$\xi$,使得$f(\xi)=0$
- 设$f(x)$在$(-\infty,\infty)$内可导,$lim_{x\to -\infty}f(x)=lim_{x\to\infty}f(x)=A$,且在$(-\infty,\infty)$内至少存在一点$\xi$,使得$f(\xi)=0$

总结

- 第一类问题:证明$\xi\in(a,b)$,使得$H(\xi,f(\xi),f'(\xi))$
  - 关键

- 关键一: 在于构造辅助函数
  - 思路
    - 对于$\xi \in (a,b)$, 使得$f'(\xi)+g(\xi)f(\xi)=0$
    - 左右两端同时乘以$e^{\int g(x)dx}$
    - 求导得
      - $f'(x)e^{\int g(x)dx}+e^{\int g(x)dx}g(x)f(x)=0$
        - 即$[f(x)e^{\int g(x)dx}]'=f'(x)e^{\int g(x)dx}+e^{\int g(x)dx}g(x)f(x)=0$
    - 举例
      - $A'+BA=Ae^{\int g(x)dx}$
        - $f''(x)+g(x)f'(x)=0$,辅助函数为$f'(x)\cdot e^{\int g(x)dx}$
        - $f(x)+g(x)\int_0^x f(t)dt=0$,辅助函数为$\int_0^x f(t)dt\cdot e^{\int g(x)dx}$
        - $f(x)+g(x)[f(x)-1]=0$,辅助函数$[f(x)-1]\cdot e^{\int g(x)dx}$
- 关键二: 找到函数值相等的两个端点
  - 找辅助函数的函数值相等的两个不同点,转化为在给定区间找辅助函数两个不同的零点
    - $F(x_1)=F(x_2)=0$

- 第二类问题:证明涉及二阶导数为0
  - 分析
    - 多次使用罗尔定理
    - 找到函数值相等的三个不同点
      - $f(a)=f(b)=f(c)$
      - 分别在$[a,b]$, $[b,c]$s上使用罗尔定理,
        - 有$f'(\xi_1)=f'(xi_2)=0$
        - 进而在$[\xi_1,\xi_2]$上,再次使用罗尔定理,得$f''(\xi)=0$

定理7:拉格朗日中值定理

设$f(x)$满足

- $[a,b]$上连续
- (a,b)上可导

则存在$\xi \in (a,b)$,使得$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.或$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

拉格朗日中值定理的另一形式

- $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\xi \in (a,b)$
  - 令$\theta=\frac{\xi-a}{b-a},\theta \in (a,b)$,即$\xi=a+\theta(b-a)$
  - $f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a),\xi \in (a,b)$

总结

- 拉格朗日中值定理用于解决一类双中值且中值不同的问题
  - 证明:存在不同的$\xi,\eta \in (a,b)$使某个命题成立得
  - 题目给出函数一阶可导且某一端点值较简单(甚至为0)
- 难点

- 关键在于保证中值的不同
- 分区间使用两次中值定理
- 分点的选择
  - 一般给出区间$[a,b]$, $f(a)=f(b)=c$,c甚至是0,分点选为x
  - 从而将区间分为$[a,x]$和$[x,b]$
- 建议根据从提问中进行逆推

定理8:柯西中值定理

设$f(x)$满足

- $[a,b]$上连续
- (a,b)上可导
- $g'(x)\neq 0$

则存在$\xi\in(a,b)$,使得$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

总结

- 柯西中值定理用于解决一类双中值且不要求中值不同的问题
  - 证明:存在不同的$\xi,\eta\in(a,b)$使某个命题成立得
- 难点
  - 不要求中值不同,故不必分区,直接在同一区间使用拉格朗日中值定理,柯西中值定理
  - 关键在于看出哪两个函数使用柯西中值定理

定理8:泰勒公式

- 总结
  - 题目给出二阶以上导数连续的条件,以及出现二阶以上的导数
- 掌握好
  - 展开点x_0
    - 一般选取已知导数信息最多的点
      - 包含隐含导数信心的点
        - 如极值点
  - 被展开点x
    - 一般试着将有利于待证结论的式子化简来选取
      - 如取端点,中间点
  - 带拉格朗日余项ξ位于x_0和x之间

引例

现有一个三次多项式:
$p(x)=2+2x-x^2+x^3$ 对其求导三次

- $p'(x)=2-2x+3x^2$,$p''(x)=-2+6x$,$p'''(x)=6$
- 令$x=0$,得$p(0)=0$,$p'(0)=2$,$p''(0)=-2$,$p'''(0)=0$
- 可得到对应的三次多项式的常数项为$0=p'(0)$,x的系数$2=\frac{p'(0)}{1!}$,x^2的系数$-1=\frac{p''(0)}{2!}$,x^3的系数$1=\frac{p'''(0)}{3!}$

n次多项式的泰勒公式

$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

n次多项式的麦克劳林公式

$x=0, f(x)=f(0)+\frac{p'(0)}{1!}x+\frac{p''(0)}{2!}x^2+\frac{p'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n$

n次多项式的泰勒公式

$f(x)=f(x_0)+\frac{p'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{p''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{p'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots+\frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

$f(x)=p_n(x)+r_n(x)$

- $p_n(x)=f(x)=f(x_0)+\frac{p'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{p''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{p'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots+\frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$
- $r_n(x)$
  - 带拉格朗日余项$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^{n+1}$,$\xi$位于$x_0$和$x$之间
    - 条件:$f(x)$在x_0的某个邻域内$n+1$阶导数存在,x位于x_0邻域内
  - 带佩亚诺余项$o((x-x_0)^n)=\alpha(x)\cdot(x-x_0)^n$
    - 条件:$f(x)$在点x_0出的n阶导数连续,x位于x_0邻域内
    - 刻画的是当$x\to x_0$时局部性质的公式

几个重要的初等函数泰勒展开式

在$x_0=0$处展开

$f(x)=e^x$

- $f^{(k)}=e^x$
  - $f(0)=1, f^{(k)}(0)=1$
- 故$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+r_n(x)$

$f(x)=sinx$

- $f^{(k)}(x)=sin(x+\frac{k\pi}{2}), k=1,2,3,\cdots$
  - $f(0)=0, f^{(2n)}(0)=sinnx=0, f^{2n-1}(0)=sin(\pi x+\frac{\pi}{2})=(-1)^{(n-1)}n=1,2,3,\cdots$
- 故$sinx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+r_{2n-1}(x)$

$f(x)=cosx$

- $f^{(k)}(x)=sin(x+\frac{k\pi}{2}), k=1,2,3,\cdots$
  - $f(0)=1, f^{(2n)}(0)=sinnx=(-1)^n, f^{2n-1}(0)=0, n=1,2,3,\cdots$
- 故$cosx=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+r_{2n}(x)$

$f(x)=ln(1+x)$

- $f^{(k)}(x)=[f'(x)]^{(k-1)}=(\frac{1}{1+x})^{(k-1)}=(-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-1-(k-1)}=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$
  - $f(0)=0, f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$
- 故$ln(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

$f(x) = (1+x)^m$

- $f^{(k)}(x) = m(m-1)\cdots(m-k+1)(1+x)^{m-k}, m \in R, k = 1, 2, 3, \cdots$
  - $f(0) = 1, f^{(k)}(0) = m(m-1)\cdots(m-k+1)$
- 故$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{n!} + r_n(x)$