第03讲 矩阵的基本概念与运算

3.1 矩阵的定义及其基本运算

3.1.1 矩阵的定义

矩阵是一个表格

3.1.2 矩阵的基本运算

相等

加法:

- 两个同型矩阵可以相加

数乘矩阵

数k和A的乘积

加法运算和数乘运算满足以下运算律

A, B, C是同型矩阵,其中k, l是任意常数

- 交换律:
  - $A+B=B+A$
- 结合律:
  - $(A+B)+C=A+(B+C)$
- 分配率
  - $k(A+B)=kA+kB$
  - $(k+l)A=kA+lA$
- 数和矩阵相乘的结合律
  - $k(lA)=(kl)A=l(kA)$

当n阶方程A计算行列式时,记成$|A|$

- $|kA|=k^n|A| \neq k|A|(n \geqslant 2, k \neq 0,1)$ **
- 一般$|A+B| \neq |A|+|B|$
- $A \neq O$不能推导出$|A| \neq 0$
- $A \neq B$不能推导出$|A| \neq |B|$

矩阵的乘法

- A是$m \times s$矩阵,B是$s \times n$矩阵
  - 矩阵A的列数必须与矩阵B的行数相等
- A,B可乘,乘积AB是$m \times n$矩阵
- $C=AB=(c_{ij})_{m \times n}$

- C的第i行第j列元素c_{ij}是A的第i行的s个元素与B的第j列的s个对应元素两两乘积之和
- $c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$

矩阵乘法的运算律

- 结合律:
  - $(A_{m\times s}B_{s\times r})C_{r\times n}=A_{m\times s}(B_{s\times r}C_{r\times n})$
- 分配率
  - $A_{m\times s}(B_{s\times n}+C_{s\times n})=A_{m\times s}B_{s\times n}+A_{m\times s}C_{s\times n}$
  - $(A_{m\times s}+B_{m\times s})C_{s\times n}=A_{m\times s}C_{s\times n}+B_{m\times s}C_{s\times n}$
- 数乘与矩阵乘积的结合律
  - $(kA_{m\times s})B_{m\times s}=A_{m\times s}(kB_{m\times s})=k(A_{m\times s}B_{m\times s})$
- 矩阵的乘法一般**不满足交换律**
  - $AB\neq BA$
  - $AB=O$不能推导出$A=O$或$B=O$
  - $AB=AC,A\neq 0\Rightarrow A(B-C)=0$,$A\neq 0$不能推导出$B=C$

关于矩阵乘法的交换律

矩阵乘法一般不满足交换律,但是常常有题目要求证明满足交换律 关键

- 可交换矩阵
  - $AB=BA$
    - 将B设为未知量,然后对应相等
    - 可将$A=E+C$便于计算方便
  - 对角矩阵的可交换矩阵是对角矩阵
  -
- 证明矩阵乘法可交换

一些互为可交换矩阵的总结

- 两个矩阵互逆,则这两个矩阵可交换
- $AA^*=A^*A$
  - A可以是任何矩阵
- $E-A$与$(E+A)^*$可交换
- 若$E+A$可逆,则$E-A$与$(E+A)^{-1}$可交换
  - 借助$E-A$与$E+A$可交换

矩阵的幂

A是一个n阶方阵,$A^m=AA\cdots A$为A的m次幂

因为矩阵乘法一般不满足交换律

- $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2\neq A^2+2AB+B^2$
- $(A-B)^2=(A-B)(A-B)=A^2-AB-BA+B^2\neq A^2+2AB+B^2$
- $(A+B)(A-B)=A^2+BA-AB-B^2\neq A^2-B^2$
- $(AB)^m=(AB)(AB)\cdots(AB)=\neq A^mB^n$
- $A^0=E$

方阵乘积的行列式

设A,B是同阶方阵,则$|AB| = |A||B|$

转置矩阵

A为方阵即可

- $(A^T)^T = A$
- $(kA)^T = kA^T$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- 方阵时
  - $|A^T| = |A|$

> $A = [\alpha_1, \alpha_2]$
>
> 则分库矩阵
>
> $$A^T = [\alpha_1, \alpha_2]^T = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \end{bmatrix}$$

3.2 特殊矩阵

- 对称矩阵:
  - 满足条件$A^T = A$的矩阵A,
    - $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$
- 反对称矩阵:
  - 满足条件$A^T = -A$的矩阵A,
    - $\Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji}(i \neq j), a_{ii} = 0$
- 正交矩阵:
  - 满足$A^T = A^{-1}$
    - 或$AA^T = A^T A = E$

3.3 分块矩阵

3.3.1 矩阵的分块

3.2.2 分块矩阵的基本运算

- 加法
- 数乘
- 乘法
- 幂

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & O \\ O & B^n \end{bmatrix}$$

3.2.3 分块矩阵的逆

- 副对角线分块矩阵的逆

$$A = \begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$$

- 待定系数法求逆

###3.2.4 矩阵的分割*

分割方式1

- 若$A_{m\times n}B_{n\times s} = O$,将$B$按照列向量分割,
  - 即$AB = A[\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s] = [A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_s] = [0, 0, \cdots, 0] = 0$
- 则$A\beta_i = O(i = 1, 2, \cdots, s), \beta_i(i = 1, 2, \cdots, s)$是$Ax = 0$的解

分割方式2

- 若$AB = C, A_{m\times n}, B_{n\times s}$,则$C$是$M \times s$矩阵,将$B$,$C$按列分块,有
- 则$A\beta_i = \xi_i(i = 1, 2, \cdots, s)$

分割方式3

- 若$AB = C, A_{m\times n}, B_{n\times s}$,则$C$是$m \times s$矩阵,将$B$,$C$按行分块,有

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$$

- 则$\gamma_i = a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n(i = 1, 2, \cdots, m)$.故$AB$(即$C$的行向量)是$B$的行向量的线性组合.

分割方式4

类似地

- 若A, C按列分块,则有

$$\begin{bmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \cdots, & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]$$

- 则$\xi_i = \alpha_1 b_{1I} + \alpha_2 b_{2I} + \cdots + \alpha_n b_{mi}(i = 1, 2, \cdots, s)$,故$AB$(即$C$的列向量)是$A$的列向量的线性组合

3.4 矩阵的逆

3.4.1 逆矩阵的定义

定义:

- A,B是n阶方阵,E是n阶单位矩阵,若$AB = BA = E$,则称A是可逆矩阵,并称B是A的逆矩阵.并且逆矩阵是唯一的,记成A^{-1}

伴随矩阵

- $AA^* = A^*A = |A|E$

可逆的充要条件

- 当$|A| \neq 0$时,A可逆,且$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$

3.4.2 逆矩阵的性质

设A,B是同阶可逆矩阵

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- 若$k \neq 0$,则$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$
- AB也可逆,则$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- 穿脱原则:
    - A^T也可逆,则$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $|A^{-1}| = |A|^{-1}$
- $A + B$不一定可逆,即$(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$

3.4.3 求逆矩阵的方法

方法1:使用伴随矩阵

若$|A| \neq 0$,则A可逆,且$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$

> $AA^* = |A|E$
>
> - A可以为任何矩阵
>   - 详见4.1
>
> 仅适用于小于3阶的方阵

方法2:初等变换法

- 初等行变换

$$\begin{bmatrix} A & \vdots & E \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} E & \vdots & A^{-1} \end{bmatrix}$$

- 初等列变换

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} E \\ A^{-1} \end{bmatrix}$$

> 适用于大于3阶的方阵

方法3:定义法

求一个矩阵B,是$AB=E$,则A可逆,且$A^{-1}=B$

> 把矩阵的和,差关系提出公因子,化成乘积

方法4:

将A分解成若干个可逆矩阵乘积,因两个可逆矩阵的积仍是可逆矩阵
即若$A=BC$,其中B,C均可逆,则A可逆,且$A^{-1}=(BC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}$

方法5:分块矩阵的逆

若A,B是可逆方程,则

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix} 1$$

3.4.4 一些互为可逆矩阵的总结

- 当$A, B, A^{-1}+B^{-1}$可逆时,$A+B$可逆

3.4.5 可逆矩阵的判别及验证

- A是可逆矩阵
- $\Leftrightarrow |A| \neq 0$
- $\Leftrightarrow A$的行向量组线性无关
- $\Leftrightarrow A$的列向量组线性无关
- $\Leftrightarrow Ax=0$有唯一零解
- $\Leftrightarrow Ax=b$对任意b有唯一解
- $\Leftrightarrow r(A)=n$
- $\Leftrightarrow A$的所有特征值非零

3.5 题型总结

$E=A^{-1}A$的逆运算的利用

注意根据题目选择,将E拆分

- $E=A^{-1}A$
- 或$E=AA^{-1}$

A^n

$A=\alpha\beta^T$类型

$A=\alpha\beta^T$

- $\alpha=[a_1,a_2,a_3]^T$
- $\beta=[b_1,b_2,b_3]^T$

$\alpha\beta^T=$

- $$\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix}$$

$\alpha^T\beta$=

- $\sum_{i=1}^{3} a_ib_i$

A^n

- $=(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)\cdots(\alpha\beta^T)$
- $=\alpha(\beta^T\alpha)(\beta^T\alpha)\cdots\beta^T$
- $=(\sum_{i=1}^{3} a_ib_i)^{n-1}A$

若$A=$

$$\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix}$$

- 可以根据比例系数求
  - 行向量的比例系数与$[a_1,a_2,a_3]$有关
  - 列向量的比例系数与$[b_1,b_2,b_3]$有关

非$A=\alpha\beta^T$类型

要分开乘观察规律

- $A\cdot A$
- $A\cdot A\cdot A$
- $A=E+B$

> 常用到二项式定理

对称矩阵和反对称矩阵

对称矩阵和反对称矩阵

- 对称矩阵:$A^T=A$
  - $A+A^T$
- 反对称矩阵:$A^T=-A$
  - $A-A^T$

证明对称矩阵和反对称矩阵

- 利用矩阵的转置

利用对称矩阵和反对称矩阵

- 任何方阵都可以表示成一个对称矩阵和一个非对称矩阵之和

其他

- A为实对称矩阵,B为任意n阶方阵(p46)
  - 若$B^TAB=O$
  - 则$A=O$