提示

题号	知识点	
6.1	齐次线性方程组的通解 见详解	
6.2	非齐次线性方程组的通解 过程与求齐次线性方程组的通解大致一致,但是注意对增广矩阵行初等变换时作	
6.3	非齐次线性方程组有解的条件	
6.4-6.5	非齐次线性方程组有解的条件 题目带有参数后,变得抽象,不易理解和计算,容易忽视	
6.6	注意A是增广矩阵,不是系数矩阵 方法一:$r(B) \leqslant min\{n, n-1\}$ 方法二:A可逆,则$\|A\| \neq 0$,则$A=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n\}$列向量线性无关	
6.7	非齐次线性方程组有解的条件 秩与线性无关 见详解	
6.8-6.9	齐次线性方程组的通解 非齐次线性方程组有解的条件	
6.10	基础解系 合并成矩阵,进行行初等变换	
6.11	由题设,联想到代数余子式 见详解	
6.12	基础解系,系数行列式	
6.13	等价向量组 n阶可逆矩阵的秩$r=n$ 若向量组的秩r等于向量组的向量个数,则整个向量组都是线性无关的,即极大线性无关组是向量组本身	
6.14	第一种方法:使用了线性无关的证明方法 第二种方法:思想大致与6.13一致,利用等价向量组,等秩,然后,向量组的个数为与向量组的秩相等,进而证明线性无关	
6.15	解的结构,由解向量得到通解 使用提出系数矩阵的方法,然后求逆来求的通解更简便 见详解	
6.16	假设为零,证明线性无关 若向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关,而$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta$线性相关,则$\beta$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表出,且表出法唯一 证明中需要构造一下非齐次线性方程组的通解	
6.17	A的行向量与$Ax=0$的解向量的关系 方法一:线性无关的定义 方法二:反证法,证明线性无关,则假设可以线性表出,进而找出与已知的矛盾	

题号	知识点	
6.18	A的行向量与$Ax=0$的解向量的关系 见详解	
6.19	已知基础解系,反求系数矩阵 没有技巧,做一遍基本就记住了 见详解	
6.20-21	理解方程组的解的意义 方程组的解是描述向量组各向量之间数量关系的系数	
6.22	非齐线性方程组的通解 关于秩的理解 见详解	
6.23	如何解出另一个齐次解	
6.24-25	两个方程组的公共解	
6-26-27	同解方程组	
6.28	同解方程组 矩阵的分割 矩阵的转置的活用	

详解

6.1

解

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&-3&-1\\1&-1&2&-1&0\\4&-2&6&3&-4\\2&4&-2&4&-7\end{bmatrix}\xrightarrow{初等行变换}\begin{bmatrix}1&1&0&-3&-1\\0&-2&2&2&1\\0&0&0&3&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=B$$

$Ax=0$与$Bx=0$是同解方程组

- 且$r(A)=r(B)=3$
- $n-r=5-3=2$
  - 故自由未知量的个数为2
    - 基础解系由两个线性无关的解向量组成
  - 独立未知量的个数为3
- 两个自由未知量的选取

- 如果对未知量进行划分,分为三类
    - x_1
    - x_2, x_3
    - x_4, x_5
- 且要求选取的秩为$r = 3$
- 故自由未知量可以选取
    - x_2, x_4
    - x_2, x_5
    - x_3, x_5
        - 自由未知量的选取尽量以1或-1为系数选取,取值时且尽量"凑整",以方便计算

- 选取x_3, x_5为自由未知量,选取x_1, x_2, x_4为独立未知量
- 取自由未知量$x_3 = k_1, x_5 = 3k_2$,带入方程得
    - 独立未知量为
        - $x_1 = -x_2 + 3x_4 + x_5 = -k_1 + \frac{7}{2}k_2$
        - $x_2 = x_3 + x_4 + \frac{1}{2}x_5 = k_1 + \frac{5}{2}k_2$
        - $x_4 = k_2$

通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 + \frac{7}{2}k_2 \\ k_1 + \frac{5}{2}k_2 \\ k_1 + 0 \\ 0 + k_2 \\ 0 + 3k_2 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

6.7

设非齐次线性方程组为$A_{m\times n}x = b$,当$r(A) = m$时,方程组有解

证明

当$r(A) = m$时,且$r(A) \leqslant min\{m, n\}$,即$m < n$,所以$A$的行向量组线性无关,在行上增加一个分量变为增广矩阵,由原向量组线性无关延,则伸向量组线线性无关,所以$r(A) = r([A, b]) = m$,可得方程组有解

6.11

设$A_{(n-1)\times n}x = 0$,其中

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1.n} \end{bmatrix}_{(n-1)\times n}$$

将A中按次序分别划去第1列,第2列,$\cdots$,第n列得到的$n-1$阶子行列式记为$A_1,A_2,\cdots,A_n$. 证明

- $[A_1,-A_2,A_3,\cdots,(-1)^{1+n}A_n]^T$是方程组$Ax=0$的解
- 若$[A_1,-A_2,A_3,\cdots,(-1)^{1+n}A_n]^T\neq 0$,则$k[A_1,-A_2,A_3,\cdots,(-1)^{1+n}A_n]^T$是方程组$Ax=0$的通解,其中$k$是任意常数

(1) 解 由已知

- 将A中按次序分别划去第1列,第2列,$\cdots$,第n列得到的$n-1$阶子行列式记为$A_1,A_2,\cdots,A_n$.
- $[A_1,-A_2,A_3,\cdots,(-1)^{1+n}A_n]^T$

分析得$(-1)^{1+i}A_i$相当于代数余子式 故可以在矩阵A的第一行添加一行$[a_1,a_2,\cdots,a_n]$,得到矩阵B,$(-1)^{1+i}A_i$为$a+i$的代数余子式

$$B=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1.n} \end{bmatrix}_{(n-1)\times n}$$

$A\cdot[A_1,-A_2,A_3,\cdots,(-1)^{1+n}A_n]^T$
$=a_{11}A_1+a_{11}A_2+\cdots+a_{1n}(-1)^{1+n}A_n]+\cdots+a_{n1}A_1+a_{n1}A_2+\cdots+a_{nn}(-1)^{1+n}A_n]$
$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{1+i}A_i=0$

> 如果行列式的某行(列)元素分别乘另一行(列)元素的代数余子式后再求和,结果为零

故$[A_1,-A_2,A_3,\cdots,(-1)^{1+n}A_n]^T$是方程组$Ax=0$的解

(2)

解

- $[A_1,-A_2,A_3,\cdots,(-1)^{1+n}A_n]^T\neq 0$,则$A_i$中至少一个不为零,且$A_i$均为$n-1$阶的行列式,
- 故$r(A)=n-1$,故自由未知量的个数$n-(n-1)=1$,
- 故$Ax=0$的基础解系只能由一个非零向量构成
- 即$k[A_1,-A_2,A_3,\cdots,(-1)^{1+n}A_n]^T$为方程组$Ax=0$的通解,其中$k$是任意常数

6.15

设$r(A_{4\times4})=2,\eta_1,\eta_2,\eta_3$是$Ax=b$的三个解向量,

其中

- $\eta_1-\eta_3=[-1,0,3,-4]^T$

- $\eta_1 + \eta_2 = [3,2,1,-2]^T$
- $\eta_3 - 3\eta_2 = [5,1,0,3]^T$

则$Ax=b$的通解是.

解

$$[\eta_1-\eta_2,\eta_1+\eta_2,\eta_3+2\eta_2] = [\eta_1,\eta_2,\eta_3]\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

则

$$[\eta_1,\eta_2,\eta_3] = [\eta_1-\eta_2,\eta_1+\eta_2,\eta_3+2\eta_2]\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}$$

6.18

已知其次线性方程组(1)

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0\end{cases}$$

的基础解系为$[b_{11},b_{12},\cdots,b_{1n}]^T,[b_{21},b_{22},\cdots,b_{2n}]^T,\cdots,[b_{s1},b_{s2},\cdots,b_{sn}]^T$,且$r+s=n$

写出线性方程组(2)

$$\begin{cases}b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n=0,\\ b_{21}x_1+b_{22}x_2+\cdots+b_{2n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\\ b_{s1}x_1+b_{s2}x_2+\cdots+b_{sn}x_n=0\end{cases}$$

的通解,并说明理由

解:

(1)(2)的系数矩阵分别为

$A^T=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r]^T$

$B^T=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s]^T$

- 已知B的行向量的转置是$Ax=0$的基础解系
  - 即$AB^T=O$
- 故$r(B)=s$,
- 则$r(A)=n-s=r$
- $(AB^T)T=BA^T=O$

- 故A的行向量的转置是$By=0$的解向量
- 因为$r(A)=r,r(B)=s,n=r+s$
- 故A的行向量的转置是$By=0$的基础解系
- 即方程组(2)的通解为
  - $k_1[\alpha_{11},\alpha_{12},\cdots,\alpha_{1n}]^T,k_2[\alpha_{21},\alpha_{22},\cdots,\alpha_{2n}]^T+\cdots+k_r[\alpha_{r1},\alpha_{r2},\cdots,\alpha_{rn}]^T$

> 当解向量的秩为解$n-r(系数矩阵)$时,该解向量可以为基础解系

6.19

已知齐次线性方程组$A_{2\times4}x=0$的基础解系为$\xi_1=[1,-1,3,2]^T,\xi_2=[2,1,1,-3]^T$,则系数矩阵$A=?$

解

由已知得$A\xi_1=0,A\xi_2=0$,即$A[\xi_1,\xi_2]=$O,

$A=[\alpha_1^T,\alpha_2^T]^T,[\alpha_1^T,\alpha_2^T]^T[\xi_1,\xi_2]=O$,

> 注意:α_i是行向量,β_i是列向量

然后对其进行转置,得到$[\xi_1^T,\xi_2^T]^T[\alpha_1^T,\alpha_2^T]=O,[\xi_1^T,\xi_2^T]^Ty=0$

接下来相当求次齐次线性方程组的通解

系数矩阵为$[\xi_1^T,\xi_2^T]^T$

$$\begin{bmatrix}\xi_1^T\\\xi_2^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&3&2\\2&1&1&-3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&3&2\\0&3&-5&-7\end{bmatrix}$$

选取自由未知量y_2,y_3

- y_2,y_3,y_4等价
- 注意:$r(自由未知量列向量组)=r(A)$

> 因为A有两个解向量构成,因此y_2,y_3需要取两组值

6.22

因为$k[1,-1,2,0]$是齐次线性方程组的通解

- 故系数矩阵的列秩为$r=n-s=4-1=3$
- $k(\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3+0\alpha_4)=0$

若α_4能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出,只有$k=0$时

这样$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$就线性无关了

与$r=3$矛盾

或者

若α_4能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出,只有$k=0$时

由$k(\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 + 0\alpha_4) = 0$

则$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \leqslant 2$

与$r = 3$矛盾