第10讲 多元函数微分学

10.1 多元函数微分学的基本概念

平面点集的基本概念

平面上任意两点之间的距离

邻域

点M_0的δ邻域$U(M_0,\delta)$:

- 设M_0为平面上的一点,$\delta>0$,以平面上点M_0为圆心,以δ为半径的园的内部

去心邻域

点M_0的δ去心邻域$\dot{U}(M_0,\delta)$:

- 去掉圆心M_0

平面上的点分类: 内点,外点和边界点

给定平面上的一个点集E
设M_0为平面上的一点

内点:

- 若存在$\delta>0$, 使得$U(M_0,\delta)\subset E$
  - 邻域位于点集内

外点:

- 若存在$\delta>0$,使得$U(M_0,\delta)\cap E=\varnothing$
  - 邻域与点集没有交点(没有重合区域)

边界点:

- 若对任意$\delta>0$, 使得$U(M_0,\delta)\cap E\neq\varnothing,U(M_0,\delta)\cap E\neq U$
  - 邻域与点集有交点(重合区域)
  - 所有边界点构成边界∂E
  - 任意一点集E与它的余集E^c有公共边界
    - 即$\partial E=E^c$

平面上的点集分类

- 给定平面上的一个点集E
- $\dot{U}(O,\delta)$去心邻域

- O为坐标原点

有界集和无界集

有界集:

- 若存在常数$\delta > 0$, 使得$E \subset U$
    - 即点集E, 位于去心邻域之内

无界集:

- 若不存在常数$\delta > 0$, 使得$E \subset U$
    - 即点集E, 位于去心邻域之外

开集和闭集

开集:

- 若E中的每一个点都是E的内点
- 若一个点集是开集,其余集必是闭集

闭集:

- 若E的边界点都是E的点
- 若一个点集是闭集,其余集必是开集

连通集,开区域和闭区域

给定平面上的一个点集E

(道路)连通集:

- 若对于E中的任意两点,都可用一条完全属于E的折线(曲线)将这两点连接起来

开区域

- 连通的开集

闭区域

- 一个开区域和它的边界点集的并集

区域

- 开区域和闭区域的统称

单连通区域

- E内的任一条简单闭曲线的内部还在E内

多连通区域

- E内的任一条简单闭曲线的内部不在E内

聚点和孤立点

给定平面上的一个点集E
设M_0为平面上的一点

聚点

- 对任意的$\delta > 0$,总有$\delta > 0$,$U(M_0, \delta) \cap E = \varnothing$
    - 即M_0任意邻域中都含有异于M_0的E中的点
- 非空开集的内点与边界点都是这个点集的聚点
- 闭区域的任何一点都是它的聚点

孤立点

- 若存在$\delta > 0$,使得$U(M_0, \delta) \cap E = M_0$
    - 即,如果M_0的某一邻域与点集E的交集是一个孤立的点M_0
- 边界点要么是聚点,要么是孤立点

极限的存在性

第一种定义:

- 按集合论知识(以点集趋向的方式)定义多元极限
- 简单描述:
    - $f(x,y)$是有定义的,且满足$|f(x,y) - A| < \varepsilon$,则$lim_{x \to x_0, y \to y_0} f(x,y) = A$

第二种定义:

- 大部分教材给出的定义
- $f(x,y)$在(x_0, y_0)去心邻域内有定义,且(x,y)以任意方式趋向于(x_0, y_0)时,$f(x,y)$均趋向于A,则$lim_{x \to x_0, y \to y_0} f(x,y) = A$

注意:
$lim_{x \to x_0, y \to y_0} (x^2 + y^2) sin \frac{1}{x+y}$

- 对于第一种定义:0
- 对于第二种定义:不存在
    - 因为$f(x,y)$不在(x_0, y_0)去心邻域内有定义

连续性

如果$lim_{x \to x_0, y \to y_0} f(x,y) = f(x_0, y_0)$,则称$f(x,y)$在点$(x_0, y_0)$处连续

> 如果不连续,对于多元函数是不讨论间断点的

偏导数

定义:

- 设函数$z = f(x,y)$在点(x_0, y_0)的某邻域内有定义,
- 若极限lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}存在
- 则称此极限为函数$z = f(x,y)$在点(x_0, y_0)处对x的偏导数
- 记为 \frac{\partial z}{\partial x}|_{x = x_0,y = y_0},\frac{\partial f}{\partial x}|_{x = x_0,y = y_0},z'_x|_{x = x_0,y = y_0}或f'_x(x_0,y_0)

- f'_x(x_0,y_0) = lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} = lim_{ x \to x_0}\frac{f(x, y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}
- f'_y(x_0,y_0) = lim_{\Delta y \to 0}\frac{f(x_0 , y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} = lim_{y \to y_0}\frac{f(x_0, y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0}

> 多元函数偏导数在某区域上的正负是不能直接决定该函数在这个区域的单调性的

二阶偏导数

函数$z = f(x,y)$在区域D内的偏导数f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)仍具有的偏导数

- f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial }{\partial x}{(\frac{\partial z}{\partial x})} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}
- f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial }{\partial y}{(\frac{\partial z}{\partial x})} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}
- f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial }{\partial x}{(\frac{\partial z}{\partial y})} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}
- f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial }{\partial y}{(\frac{\partial z}{\partial y})} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}

可微

定义:

- 如果函数$z = f(x,y)$在点(x,y)的全增量\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x,y)
- 可表示为\Delta z = A\Delta x + B\Delta y +o(\rho),
    - 其中\rho = \sqrt{{(\Delta x)}^2 + {(\Delta y)}^2},
    - 其中A,B不依赖于\Delta x, B\Delta y而仅与x,y相关,
- 则称函数$z = f(x,y)$在点(x,y)可微
- 而A\Delta x + B\Delta y称为函数$z = f(x,y)$在点(x,y)的全微分,记为dz
    - 即dz = A\Delta x + B\Delta y

判断$z = f(x,y)$是否可微

- 写出全增量\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x,y)
- 写出线性增量A\Delta x + B\Delta y,其中A = f'_x(x_0,y_0),B = f'_y(x_0,y_0)
- 作极限lim_{\Delta x \to 0,\Delta y \to 0} \frac{\Delta z - (A\Delta x + B\Delta y)}{\sqrt{{(\Delta x)}^2 + {(\Delta y)}^2}},若该极限等于0,则$z = f(x,y)$在点(x_0,y_0)可微,否则就不可微

可微的真正含义:

- 用线性增量A\Delta x + B\Delta y代替了形式复杂的全增量\Delta z
- 且其误差\Delta z - (A\Delta x + B\Delta y)是o(\sqrt{{(\Delta x)}^2 + {(\Delta y)}^2})可以忽略不计

偏导数的连续性

对于$z = f(x,y)$,讨论其在某特殊点(x_0,y_0)处偏导数是否连续的步骤

- 用定义法求f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)
    - 偏导数在该点的值
- 用公式法求f'_x(x,y), f'_y(x,y)

    - 偏导函数
- 计算\lim_{x \to x_0, y \to y_0}f'_x{(x,y)}和 \lim_{x \to x_0, y \to y_0}f'_y{(x,y)}
- 最后看\lim_{x \to x_0, y \to y_0}f'_x{(x,y)} = f'_x(x_0,y_0)和\lim_{x \to x_0, y \to y_0}f'_y{(x,y)} = f'_y(x_0,y_0)是否成立
- 若成立则$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)处偏导数连续

补充

- 一般f''_{xy}(x_0,y_0) \neq f''_{yx}(x_0,y_0)
    - 但若函数$z = f(x, y)$在二阶导数f''_{xy}(x,y),f''_{yx}(x,y)在点P_0(x_0,y_0)处都连续,
    - 则f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}{x_0,y_0}

10.2 多元函数微分法则

链式求导规则

复合函数的中间变量均为一元函数的情形

- 设z = f(u, v), u = \varphi (x,y), v = \psi (x,y),则z = f[\varphi (x,y), \psi (x,y)]
- 且\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}

复合函数的中间变量既有一元函数,又有多元函数的情形

- 设z = f(u, v), u = \varphi (x,y), v = \psi (y),则z = f[\varphi (x,y), \psi (y)]
- 且\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}

隐函数存在定理

隐函数:

- 由方程F(x,y) = 0所确定的函数

> 隐函数存在是有前提的

二元隐函数存在定理1:

- 设函数F(x,y)在点P(x_0, y_0)的某一邻域内具有连续偏导数,F(x_0,y_0) = 0, F'_y(x_0,y_0) \neq 0
    - 则方程F(x,y) = 0在点(x_0, y_0)的某一邻域内能**唯一**确定一个连续且具有连续导数的函数y = f(x),
    - 它满足条件y_0 = f(x_0),并有\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}
- 关于F'_y(x_0,y_0) \neq 0
    - 即\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x}存在
    - 可以看出隐函数的存在的要求
        - 在一个指定“位置”，方程F(x,y) = 0确定一个“不仅有意义，而且要有可导这种良好性质的函数”
        - 在一个指定位置处可导的函数必然首先得是单值的

    - 例如伯努利双曲线${(x^2 + y^2)}^2 = a^2(x^2 - y^2)$
        - 在(0,0), (a,0), (-a,0)点处，隐函数不存在，而其他位置隐函数都存在
            - 这三点出，切线都垂直于x轴

三元隐函数存在定理2:

- 设函数F(x,y,z)在点P(x_0, y_0, z_0)的某一邻域内具有连续偏导数,$F(x_0, y_0, z_0) = 0, F'_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$-
- 则方程$F(x,y,z) = 0$在点(x_0,y_0,z_0)的某一邻域内能**唯一**确定一个连续且具有连续导数的函数$z = f(x, y)$,
    - 它满足条件$z_0 = f(x_0, y_0)$,并有$\frac{dz}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_z}$,$\frac{dz}{dy} = -\frac{F'_y}{F'_z}$
- 关于$F'_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$
    - 即$\frac{\mathrm{d} z}{\mathrm{d} x}, \frac{\mathrm{d} z}{\mathrm{d} y}$存在且连续

10.3 多元函数的极值与最值问题的理论

极值和最值的概念

极值

定义 - 广义的极值:
若存在(x_0, y_0)的某个邻域,使得在该邻域内任意一点(x, y)均有

- $f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0)$
    - 广义的极大值点:(x_0, y_0)
    - 广义的极大值:$f(x_0,y_0)$
- $f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0)$
    - 广义的极小值点:(x_0, y_0)
    - 广义的极小值:$f(x_0,y_0)$

定义 - 真正的极值:
若存在(x_0, y_0)的某个去心邻域,使得在该邻域内任意一点(x, y)均有

- $f(x,y) < f(x_0,y_0)$
    - 真正的极大值点:(x_0, y_0)
    - 真正的极大值:$f(x_0,y_0)$
- $f(x,y) > f(x_0,y_0)$
    - 真正的极小值点:(x_0, y_0)
    - 真正的极小值:$f(x_0,y_0)$

最值

定义 - 广义的最值 设(x_0, y_0)为$f(x, y)$定义域内一点,若对$f(x, y)$的定义域内任意一点(x, y)均有

- $f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0)$
    - 广义的最大值:$f(x_0,y_0)$
- $f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0)$
    - 广义的极小值:$f(x_0,y_0)$

定义 - 真正的最值 设(x_0, y_0)为$f(x,y)$定义域内一点,若对$f(x,y)$的定义域内任意一异于(x,y)的点(x,y)均有

- f(x,y) < f(x_0,y_0)
  - 真正的最大值:f(x_0,y_0)
- f(x,y) > f(x_0,y_0)
  - 真正的极小值:f(x_0,y_0)

> 题中,一般未注明则默认为广义的最值/极值

多元函数极值与最值问题的理论依据

1. 二元函数取极值的必要条件(类比一元函数)

- 设$z = f(x,y)$在点(x_0, y_0)
  - 取极值
  - 且一阶偏导数存在
- 则f'_x(x_0, y_0)=0, f'_y(x_0, y_0) = 0

> 适用于三元以及三元以上函数

2. 二元函数取极值的充分条件(无条件极值)

- 记
  - f''_{xx}(x_0, y_0) = A, f''_{xy}(x_0, y_0) = B, f''_{yy}(x_0, y_0) = C,
- 则
  - \Delta = B^2 - AC < 0:极值
    - A < 0:极大值
    - A > 0:极小值
  - \Delta = B^2 - AC > 0:非极值
  - \Delta = B^2 - AC = 0:方法失效

> 不适用于三元以及三元以上函数

> 用必要条件求出可疑点,用充分条件判别可疑点

3. 条件极值与拉格朗日乘数法

求目标函数u = f(x,y,z)在条件\varphi (x,y,z) = 0 , \psi (x,y,z) = 0下的最值,则

- 构造辅助函数F(x,y,z,\lambda ,\mu) = f(x,y,z) + \lambda \varphi (x,y,z) + \mu \psi (x,y,z)
- 令

$$
\begin{cases}
F'_x = f'_x + \lambda\varphi'_x + \mu\psi'_x = 0 \\
F'_y = f'_x + \lambda\varphi'_y + \mu\psi'_y = 0 \\
F'_z = f'_z + \lambda\varphi'_z + \mu\psi'_z = 0 \\
F'_\lambda = \varphi(x,y,z) = 0 \\
F'_\mu = \psi(x,y,z) = 0
\end{cases}
$$

- 解上述方程组得备选点P_i,i = 1,2,3,\cdots,n,并求f(P_i)取其中最大值为u_{max},最小值u_{min}
- 根据实际问题,必存在最值,所得即所求

多元函数极值与最值的考题类型

- 无条件极值显函数/隐函数 + \Delta判别法
- 闭区域边界上的最值
- 闭区间上的最值

求函数$f(x, y)$在某区域D上的最值的步骤

- 求出$f(x, y)$在D内所有可疑点处的函数值
  - 可疑点:
    - 根据二元函数取极值的必要条件,求出偏导数为0的点
- 求出$f(x, y)$在D的边界上的最值
- 比较所有得到的函数值,其中最大者即为最大值,最小者即为最小值

实际问题中,如果可以判断出$f(x, y)$的最值一定在D内部取得,且$f(x, y)$在内部只有一个驻点,则可以判定该驻点出函数值就是$f(x, y)$在D上的最值