第08讲 相似矩阵与相似对角化

8.1 矩阵的相似

定义

设A,B是两个n阶方阵，若存在n阶可逆矩阵P,使得$P^{-1}AP=B$

- 则称A相似于B.记成$A\sim B$

矩阵相似关系具有反身性,对称性,传递性

相似矩阵的性质

若$A\sim B$,则有(反之,不成立)

- $r(A)=r(B)$
- $|A|=|B|$
- $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$
- A,B具有相同的特征值
  - 相同的特征值只是必要条件
    - 即相同的特征值的两个矩阵,不一定是相似矩阵

若$A\sim B$，则(8.12)

- $A^m\sim B^n$
- $f(A)\sim f(B)$
  - 其中$f(x)$是多项式

若$A\sim B$且A可逆，则

- $A^{-1}\sim B^{-1}$
- $f(A^{-1})\sim f(B^{-1})$
  - 其中$f(x)$是多项式

若$A\sim B$且A,B可逆,则(8.12)

- $A^*\sim B^*$
- 又$A^{-1}\sim B^{-1}$
  - 则
  - $f(A^{-1})\sim f(B^{-1})$
  - $f(A^*)\sim f(B^*)$

若$P^{-1}A_1P=B_1,P^{-1}A_2P=B_2$则,

- $P^{-1}A_1A_2P=P^{-1}A_1PP^{-1}A_2P=B_1B_2$

- 即$A_1A_2 \sim B_1B_2$

$P^{-1}(k_1A_1+k_2A_2)P=k_1P^{-1}A_1P+k_2P^{-1}A_2P$

> 若$A\sim B$,则$tr(A)=tr(B)$
>
> - 即A的迹等于B的迹
> - $\sum_{1=1}^{n} a_{ii}=\sum_{1=1}^{n} b_{ii}$

8.2 矩阵可对角化的条件

若存在可逆矩阵P,使得$P^{-1}AP=\Lambda$,

- 其中Λ是对角矩阵
- 则称A可相似对角化,记$A\sim\Lambda$
- 称Λ是A的相似标准形

其中

- n阶矩阵$A\sim\Lambda$
    - $\Leftrightarrow A$有n个线性无关的特征向量
- 矩阵A的属于不同特征值的特征向量线性无关
    - 若n阶矩阵A有n个不同的特征值,
        - 则A有n个线性无关的特征向量,于是$A\sim\Lambda$
- 设λ_0是A的r重特征值,则A的对应于λ_0的线性无关的特征向量的个数小于等于r
    - 矩阵A相似于对角矩阵
        - $\Leftrightarrow A$的对于每个r_i重特征值都有r_i个线性无关的特征向量

8.3 实对称矩阵必可相似于对角矩阵

- A是实对称矩阵,则A的特征值是实数,特征向量是实向量
    - 对称矩阵$A=A^T$
- 实对称矩阵A的属于不同特征值的特征向量相互正交
    - 内积为0
- 实对称矩阵A必相似于对角矩阵
    - 即必有n个线性无关的特征向量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$
    - 即必有可逆矩阵$P=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]^T$使得$P^{-1}AP=\Lambda$,其中$\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$
    - 且存在正交矩阵Q,使得$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda$
    - 故A相似于Λ

> 若Q是正交矩阵,则有$Q^{-1}=Q^T$,其中$Q^TAQ=\Lambda$
>
> - 称A合同于Λ,故实对称矩阵必相似且合同于对角矩阵

题型

判断矩阵是否相似于对角矩阵

- 矩阵可对角化的条件
  - 实对称矩阵
  - 特征值都是互异实单根
  - n个线性无关特征向量
  - 特征值是r重根,对应有r个线性无关的特征向量
- 某些特殊矩阵必相似于对角矩阵
  - 满足$A^2 = A$的矩阵(8.7)
  - 满足$A^2 = E$的矩阵

> 主要是还是按照定义,先构造特征方程,求出特征值,进而求特征向量.最后判断

求可逆矩阵P, 使得$P^{-1}AP = \Lambda$

若A为n阶矩阵,则ξ_i对应的$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$特征向量线性无关,可以作为可逆矩阵$P = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]$,从而$P^{-1}AP = \Lambda$

判断两个矩阵是否相似

利用

- 相似矩阵的性质
- 矩阵相似的传递性

若A, B均可相似对角化,且特征值相同,则A与B相似

若A, B相似,但是不一定$A \sim B \sim \Lambda$

由特征值,特征向量反求A

若有可逆矩阵P,使得$P^{-1}AP = \Lambda$,则$A = P\Lambda P^{-1}$

实对称矩阵的相似对角化

主要要求用正交矩阵将矩阵相似对角化

相似矩阵的应用

利用相似对角矩阵求一些复杂矩阵,高幂次矩阵