第03讲 一元函数微分学的概念与计算

3.1 导数与微分的概念

引例

导数的概念

计算:

- 函数的增量/自变量的增量的极限

导数的定义:

- $f'(x_0)=lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$,其中$x_0\in I,x_0+\Delta x\in I$,$I$为$f(x)$定义域

> 不能根据导数在某一点的正负,判断函数的单调性

导数表示形式:

- 拉格朗日:
  - $f'(x_0)$
  - $y'|_{x=x_0}$
- 莱布尼兹:
  - f对x的变化率
    - $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=x_0}$
    - $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}|_{x=x_0}$

注意等价的三种说法

- $y=f(x)$在点x_0处可导
- $y=f(x)$在点x_0处导数存在
- $f'(x_0)=A$

导数的定义等价扩展

1. 对于Δx:

- $f(x_0)'=lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
- 其中的Δx可以广义化为$h(x)$,
  - $lim_{h(x)\to 0}\frac{f(x_0+h(x))-f(x_0)}{h(x)}$
  - 三个位置$h(x)$相同

2. $x=x_0+\Delta x$

- $\Delta x=x-x_0$,则$f(x_0)'=lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

- 广义化为$f(x_0)' = lim_{h(x)\to x_0} \frac{f[h(x)]-f(x_0)}{h(x)-x_0}$
  - 三个位置$h(x)$相同

单侧导数

点x_0处的左导数:$f_-(x_0)' = lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
点x_0处的右导数:$f_+(x_0)' = lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

函数在点x_0处可导的充要条件

- 函数在点x_0处可导的充要条件就是左右导数存在且相等,与极限存在的充要条件相对应,本质上讲导数的定义就是一个极限问题
- 若函数在点x_0处可导
  - 那么$f(x)$在$x = x_0$处连续
  - 那么不一定存在点$x = x_0$的某个邻域,使函数在这个邻域内连续

导数的几何意义

导数即切点的斜率

高阶导数的概念

微分的概念*

设函数$y = f(x)$在x_0的某邻域内有定义,且$x_0 + \Delta x$在该邻域内

- $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
  - $\mathrm{d}y : \Delta y$对应的线性主部
- 若存在与Δx无关的常数A使得$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$
  则称:
- $f(x)$在点x_0处可微
- $A\Delta x$为$f(x)$在点x_0处的微分,记作
  - $dy|_{x=x_0} = A\Delta x$
  - 或$df(x)|_{x=x_0} = A\Delta x$
  - 又$\Delta x = dx$,所以$dy|_{x=x_0} = Adx$

> $dy = y'\mathrm{d}x = y'\Delta x$

可微的判别

- $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
- $A\Delta x = f(x_0)'\Delta x$
  - $A = f(x_0)'$
- $lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y - A\Delta x}{\Delta x} = lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y - f(x_0)'\Delta x}{\Delta x}$,若极限等于0,则函数$y = f(x)$在$x_0$处可微,否则就不可微

> 在一元函数下,可微与可导互为充要条件

可微的几何解释

3.2 导数与微分的计算

四则远算

商:

- 导数$[\frac{u(x)}{v(x)}]' = \frac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
- 微分$d[\frac{u(x)}{v(x)}] = \frac{v(s)du(x)-u(x)dv(x)}{v^2(x)}$ *

复合函数的导数(微分)

设$u = g(x)$在点x可导,$y = f(u)$在点$u = g(x)$可导

- 导数:$\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)]g(x)'$
- 微分(微分形式不变性):
  - $df[g(x)] = f'[g(x)]g(x)'dx$
  - 无论u是中间变量还是自变量,$dy = f'(u)du$都成立
  - 注意,看清求导符号的位置:$\{f[g(x)]\}' = \frac{d\{f[g(x)]\}}{dx}$,$f'[g(x)] = \frac{d\{f[g(x)]\}}{d[g(x)]}$

> u=g(x)在 点 x_0可 导 ,y=f(u)在 点 u_0=g(x_0)可 导 是 复 合 函 数 $f[g(x)]$在点x_0的充分非必要条件

反函数的导数

设$y = f(x)$可导,且$f'(x) \neq 0$,则存在反函数$x = \varphi(y)$,且$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$,即$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

参数方程所确定的函数的导数

设函数$y = y(x)$由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \phi(t) \end{cases}$$

确定,其中t实参数,则$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\phi'(t)}{\varphi'(t)}$

隐函数求导法

设函数$y = y(x)$是由方程$F(x, y) = 0$确定的可导函数,则

- 方程$F(x, y) = 0$两边对自变量x,注意$y = y(x)$,即将y看作中间变量,得到一个关于y'的方程
- 解该方程便可求出y'

对数求导法

对于多项相乘相除,开方,乘方的式子,一般先取对数再求导.
设$y = f(x)$

- 等式两边取对数,得$lny = lnf(n)$

- 两边对自变量x求导,得$\frac{1}{y}y' = [lnf(x)]' \Rightarrow y' = y[lnf(x)]'$

幂指函数求导法

对于$u(x)^{v(x)}$,除了使用对数求导法,还可以先化成指数函数,然后求导

- $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)lnu(x)}$
- $[u(x)^{v(x)}]' = e^{v(x)lnu(x)'} = u(x)^v(x)[v'(x)lnu(x) + v(x)\frac{u(x)'}{u(x)}]$

高阶导数的运算

- $[u \pm v]^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$
- 莱布尼兹公式:
  - $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$
  - $u^{(0)} = u, v^{(0)} = v$

几个初等函数的n阶导数公式

- 任何n阶可导函数
  - $y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(x_0)^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n$
  - 特别的,当$x_0 = 0$时$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(0)^{(n)}}{n!}(x)^n$
- 指数函数:
  - $(a^x)^{(n)} = a^x lna^n$
  - $(e^x)^{(n)} = e^x$
- 三角函数:
  - $(sinkx)^{(n)} = k^n sin(kx + n\frac{\pi}{2})$
  - $(coskx)^{(n)} = k^n cos(kx + n\frac{\pi}{2})$
- 对数函数:
  - $(lnx)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$
    - $[ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$
- 幂函数:
  - $[(x+x_0)^m]^{(n)} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(x+x_0)$ *
    - 当$n > m$时为0
  - $(\frac{1}{x+a})^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$

参数方程确定的函数的二阶导数

设函数$y = y(x)$由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \phi(t) \end{cases}$$

确定,其中t实参数,则

- 一阶导数:$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\phi'(t)}{\varphi'(t)}$

- 二阶导数:$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\frac{d(\frac{dy}{dx})/dt}{dx/dt}=\frac{\phi''(t)\varphi'(t)-\phi(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$

反函数的二阶导数

在$y=f(x)$二阶可导的情况下,记$f'(x)=y'_x,\varphi'(y)=x'_y(x'_y\neq 0)$,则有:

- 一阶导数:$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{x'_y}$
- 二阶导数*:$y''_{xx}=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\frac{d(\frac{1}{x'_y})}{dx}=\frac{d(\frac{1}{x'_y})}{dx}\cdot\frac{dy}{dy}=\frac{d(\frac{1}{x'_y})}{dy}\cdot\frac{1}{x'_y}=\frac{-x''_{yy}}{(x'_y)^3}$
  - 复合函数求导x当做中间变量

反过来:

- $x'_y=\frac{1}{y'_x}$
- $x''_{yy}=\frac{-y''_{xx}}{(y'_x)^3}$

> 意义?

变限积分求导公式

设$F(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(t)dt$,则$F'(x)=\frac{d}{dx}[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(t)dt]=f[\varphi_2(x)]\varphi_2{}'(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi_1{}'(x)$

基本初等函数的求导公式

- 幂函数
  - $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$
- 指数函数
  - $(a^x)'=a^xlna$
  - $(e^x)'=e^x$
- 对数函数
  - $(log_ax)'=\frac{1}{xlna}$
  - $(lnx)'=\frac{1}{x}$
  - $[ln(x+\sqrt{x^2+1})]'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
  - $[ln(x+\sqrt{x^2-1})]'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
- 三角函数
  - $(cosx)'=-sinx$
  - $(cotx)'=-csc^2x$
  - $(arccosx)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
  - $(arccotx)'=-\frac{1}{1+x^2}$
  - $(cscx)'=-cscxcotx$