提示

题号	知识点
7.1-7.3	用特征方程$\|\lambda E-A\|=0$ 解齐次线性方程组 $(\lambda E-A)x=0$
7.4	反证法
7.6	A为n阶幂等($A^2=A$)矩阵,则$\lambda=0,1$
7.8	矩阵分割的理解
7.11	利用证明线性无关
7.12	见详解
7.13	(2)找出反例
7.14	代数余子式,伴随矩阵
7.15	判断重根,找出特征值
7.16	方阵不可逆等价于行列式为0 代数余子式,伴随矩阵

详解

7.1 7.2 7.3

求解特征向量步骤

- 带入特征值,获得齐次线性方程组的系数矩阵
- 判断系数矩阵的秩
  - 矩阵的秩的定义
    - A中最大的不为零的子行列式的阶数称为矩阵A的秩
  - 如果$r(\lambda E-A)=n$
  - 如果$r(\lambda E-A)<n$
- 由$n-r$获得自由未知量的数目

- 将系数矩阵化为最简行阶梯矩阵
- 根据非零行首元素非零元素所在列对应的未知量为约束未知量,剩下的就是自由未知量
- 然后对自由未知量取合适的值,从而获得约束未知量的值
- 最后得到特征向量

7.1

对于矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

特征值$\lambda_1 = 1$对应的特征方程

$$(\lambda_1 E - A)x = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

对应系数矩阵化为最简阶梯矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$n - r = 3 - 2 = 1$可以自由未知量的数目为1

- x_1为自由未知量
- $x_1 = k_1$
- 约束未知量
  - $x_2 = 0$
  - $x_3 = 0$

特征值$\lambda_2 = 2$对应的特征方程

$$(\lambda_1 E - A)x = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

对应系数矩阵化为最简阶梯矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$n-r=3-2=1$可以自由未知量的数目为1

- x_2为自由未知量
- 设$x_2=k_2$
- 约束未知量
  - $x_1=k_2$
  - $x_3=0$

对于矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$的特征方程

$$(\lambda E-A)x=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0$$

$n-r=3-1=2$ 可以自由未知量的数目为2

- x_1,x_2选为自由未知量
- 设$x_1=k_1,x_2=k_2$
- 约束未知量
  - $x_3=0$

7.2

> 7.2 (2)的答案注释.未明白

7.12

未理解

- 若A有n个互不相同的特征值,特征值均是单根,对应线性无关特征向量只有一个
- λ是单根时,对应的线性无关特征向量有且只有一个;若单重根特征值对应两个特征向量.则二者成比例且是非零向量