第01讲 初等数学知识复习

1 函数的概念

当一件事情的变化,会引起另一件事情的变化时,便称这两件事情构成了一个函数关系,两件事情之间如何相互影响,就是一个对应法则

1.1 函数的概念

设x与y是两个变量,D是一个给定的数集,若对于每个值$x \in D$,按照一定的法则有一个确定的值y与之对应,则称y是x的函数,记为$y = f(x)$

- x:自变量
- y:因变量
- D:定义域
  - 定义域一般由实际背景的中的变量或者函数对应法则的要求确定
- $R = \{y|y = f(x), x \in D\}$:函数的值域,$y$的取值范围
  - 值域又称主值区间
- f:对应法则
  - 如何建立对应法则涉及到数学建模的知识

1.2 反函数的概念

设函数$y = f(x)$的定义域为D,值域为R.

- 如果对于每一个$y \in R$,必存在$x \in D$使得$y = f(x)$成立,则由此定义了一个新的函数$x = \psi(y)$.
- 这个函数就被称为函数$y = f(x)$的反函数,一般记为$x = f^{-1}(y)$,它的定义域R,值域D.相对于反函数来说,原来的函数也称为直接函数

需要说明

- 直接函数的单值性无法保证其反函数的单值性
  - 例如:$y = x^2$的反函数是多值函数$x = \pm\sqrt{y}$
- $y = f(x), x = \psi(y), x = f^{-1}(y)$和$y = f^{-1}(x)$
  - $y = f(x)$的反函数可以表示为
    - $x = \psi(y)$
    - $x = f^{-1}(y)$
  - $y = f(x)$和$x = f^{-1}(y)$图像重合
  - $y = f(x)$和$y = f^{-1}(x)$图像关于$y = x$对称

补充:

- $f^{-1}[f(x)] = x$
  - 已知
  - 注意取值范围

- 例如:$arccos(cos\varphi(x)) = \varphi(x), \varphi(x) \in [0, \pi]$

1.3 复合函数的概念

设$y = f(x)$的定义域D_1,函数$u = g(x)$在D上有定义,且$g(D) \subset D_1$,则由下式确定的函数$y = f[g(x)], x \in D$称为由函数$u = g(x)$和函数$y = f(u)$构成的复合函数

- D:复合函数的定义域
- u:中间变量

需要重点掌握复合函数的分解与复合的技术

1.4 基本初等函数

- 对反幂三指
    - 对数函数
    - 反三角函数
    - 幂函数
    - 三角函数
    - 指数函数

幂函数

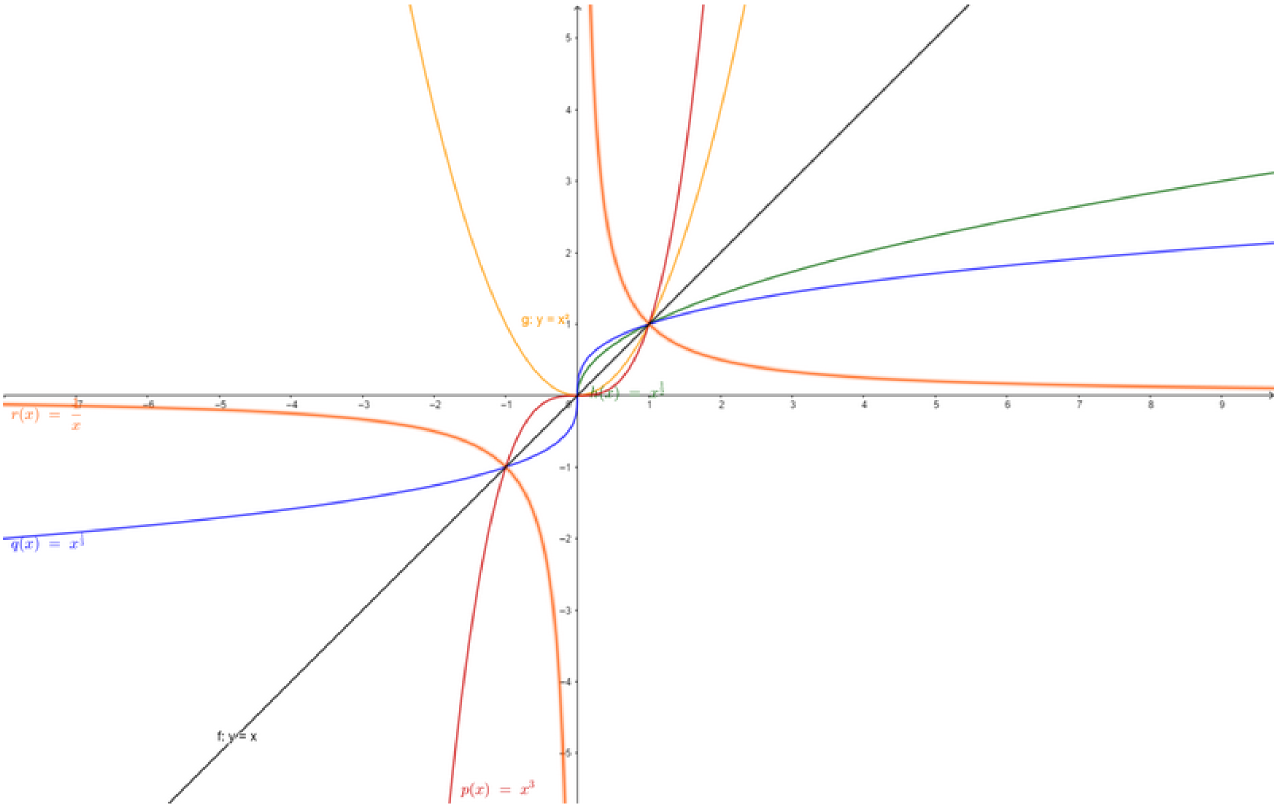
定义
$y = x^\mu$,μ为实数

定义域和值域

- 取决于μ的取值
- 当$x > 0$时,$y = x^\mu$都有定义

常用的幂函数

- $y = x$,$y = x^2$,$y = \sqrt{x}$(或$x = y^2$),$y = x^3$,$y = \sqrt[3]{x}$, $y = \frac{1}{x}$
  函数图像



指数函数

定义:
$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$

定义域和值域

- 定义域:$(-\infty, +\infty)$
- 值域:$(0, +\infty)$

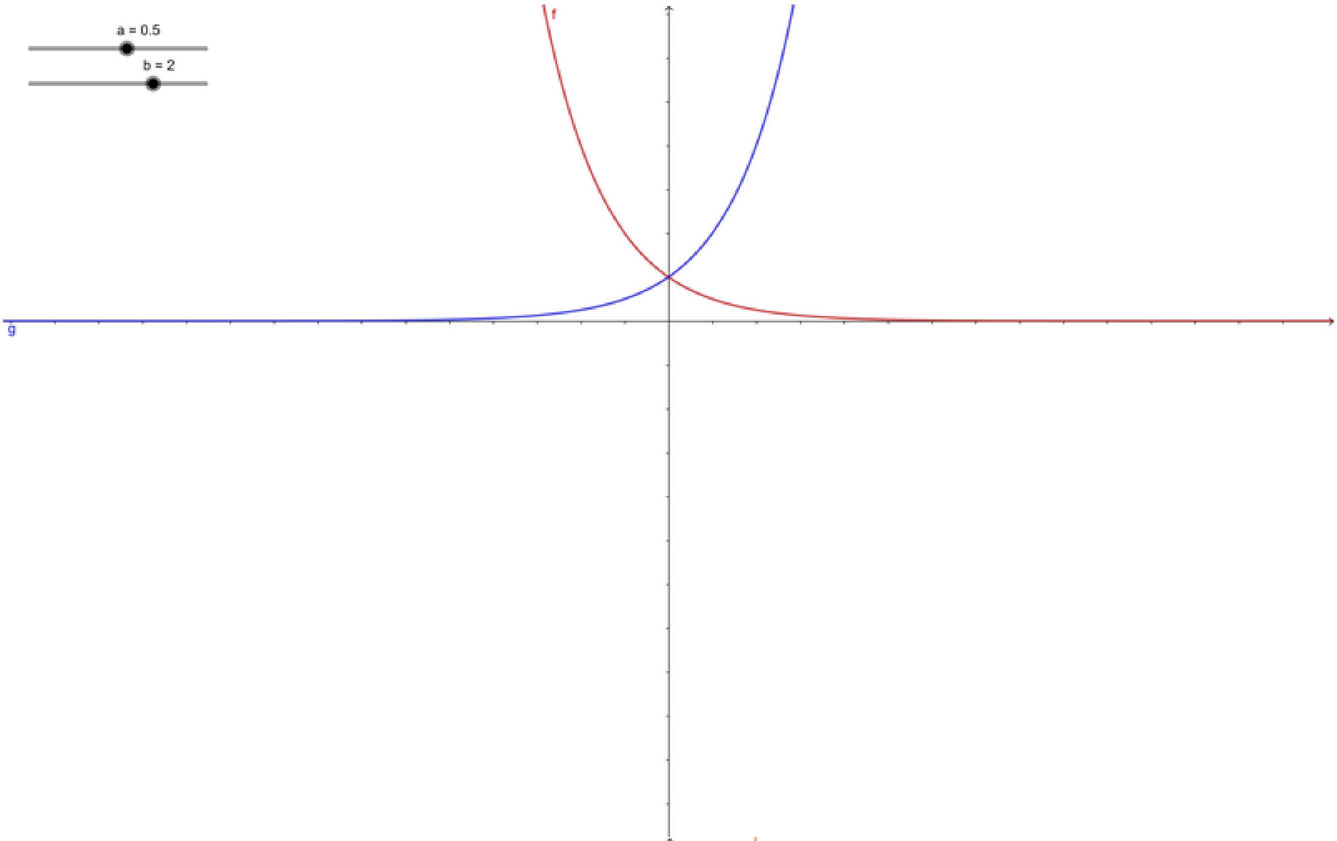
单调性

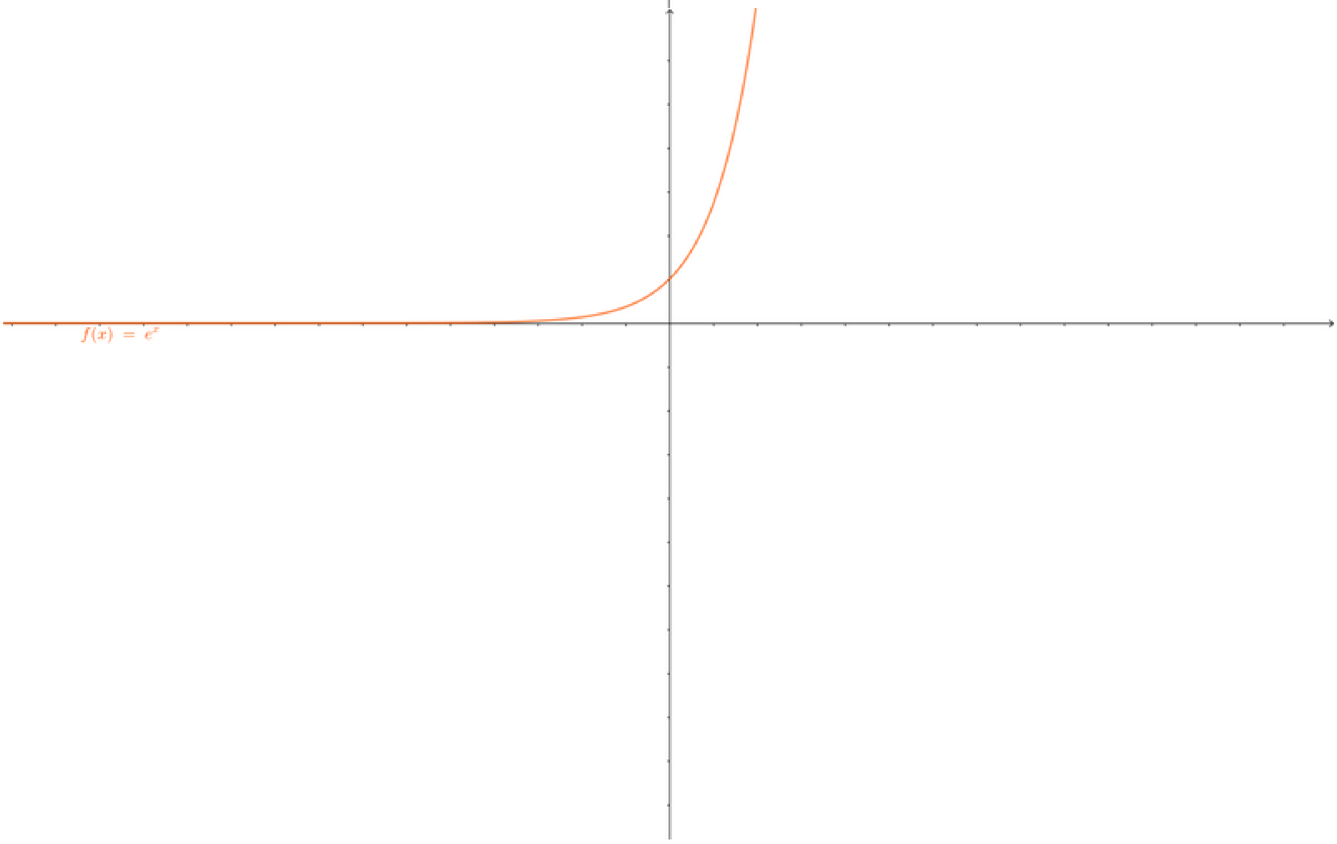
- 当$a > 1$,单调递增
- 当$0 < a < 1$,单调递减

常用的指数函数

- $y = e^x$

函数图像





极限

- $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

特殊函数值

- $a^0 = 1$
- $e^0 = 1$

运算法则

- $a^x \times a^y = a^{(x+y)}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{(x-y)}$

对数函数

定义:
$y = log_a x(a > 0, a \neq 1)$,并且是对应$y = a^x$指数函数的反函数

定义域和值域

- 定义域:$(0, +\infty)$
- 值域:$(-\infty, +\infty)$

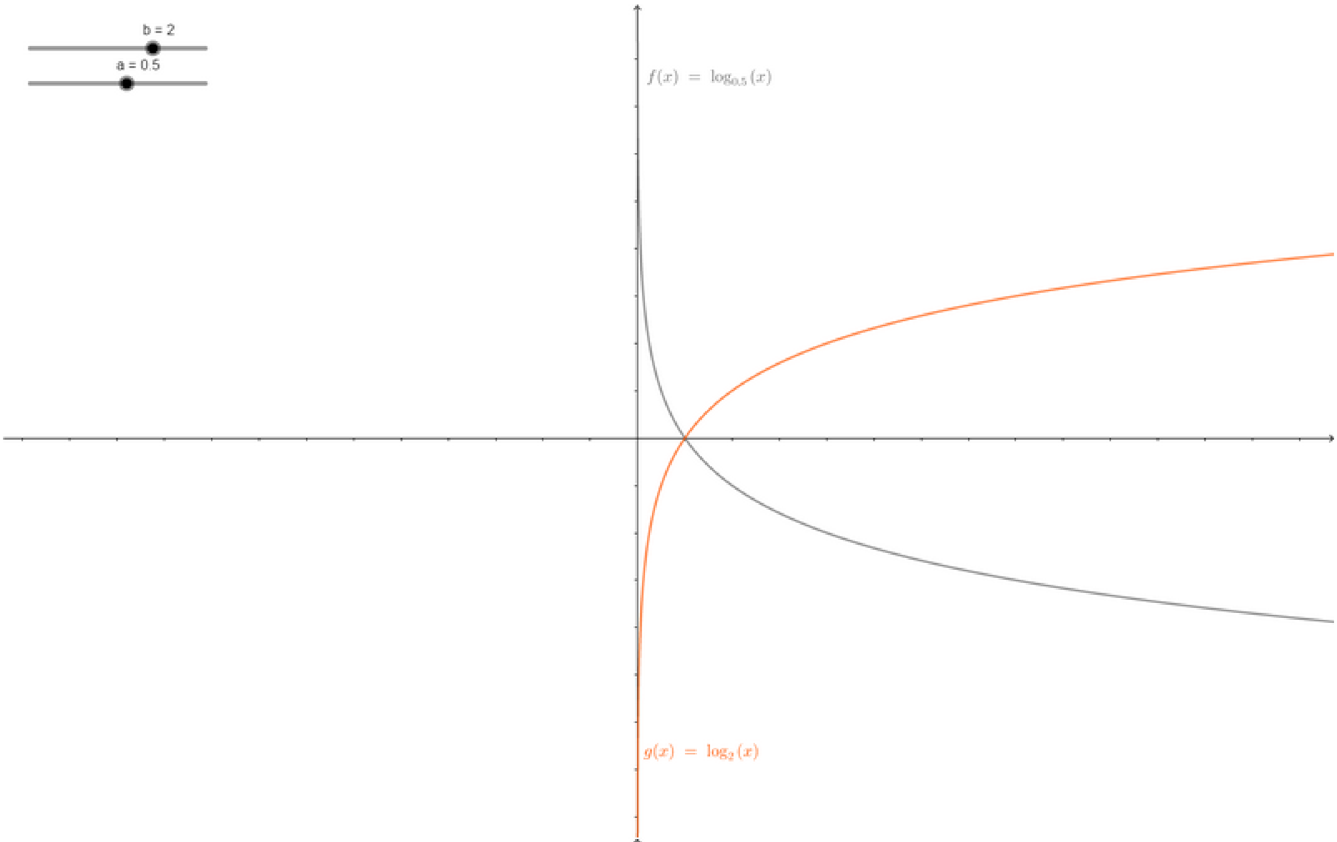
单调性

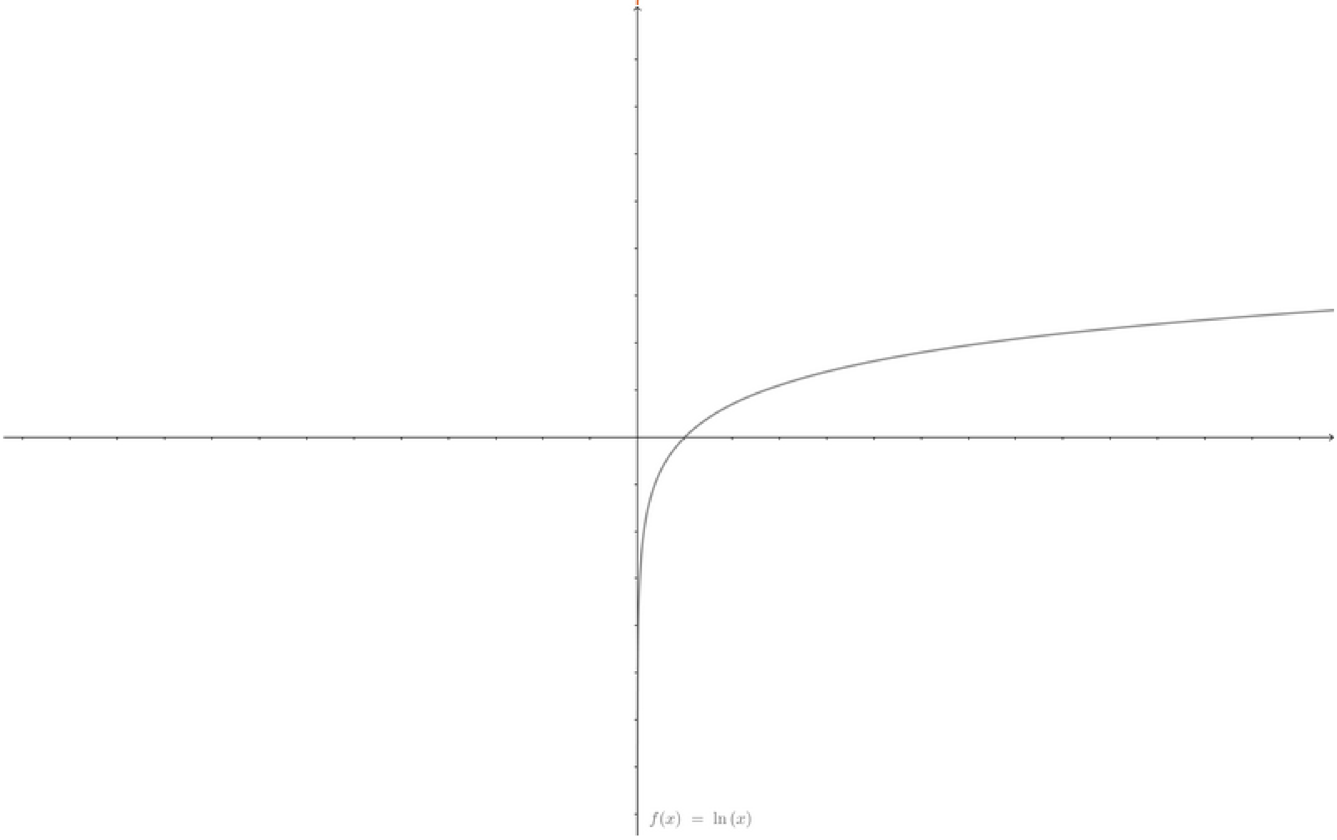
- 当$a > 1$,单调递增
- 当$0 < a < 1$,单调递减

常用的对数函数

- $y = ln_x$:以自然对数e为底的对数,$ln_x = log_e x$,$e = 2.71828...$

函数图像





极限

- $\lim_{x\to0^+} ln_x = -\infty$
- $\lim_{x\to0^-} ln_x = +\infty$

特殊函数值

- $log_a 1 = 0$
- $log_a a = 1$
- $ln 1 = 0$
- $ln e = 1$

常用公式
$x > 0, u > 0$

- $x = e^{ln_x} (x = e^y, y = ln_x)$
- $u^v = e^{ln_{u^v}} = e^{vln_u}$

换底公式$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$
倒数公式$log_a b = \frac{1}{log_b a}$

三角函数

正弦函数与余弦函数

定义:

- 正弦函数:$y = sin(x)$
- 余弦函数:$y = cos(x)$

定义域与值域

- 定义域:$(-\infty, +\infty)$
- 值域:$[-1, +1]$

单调性
$k \in N$

- $y = sin(x)$
  - 在$(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$单调递增
  - 在$(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$单调递减
- $y = cos(x)$
  - 在$(-\pi + 2k\pi, 2k\pi)$单调递增
  - 在$(2k\pi, \pi + 2k\pi)$单调递减

奇偶性

- $y = sin(x)$为奇函数
  - 并且关于任意$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$对称
- $y = cos(x)$为偶函数
  - 并且关于任意$x = 2k\pi, k \in Z$对称

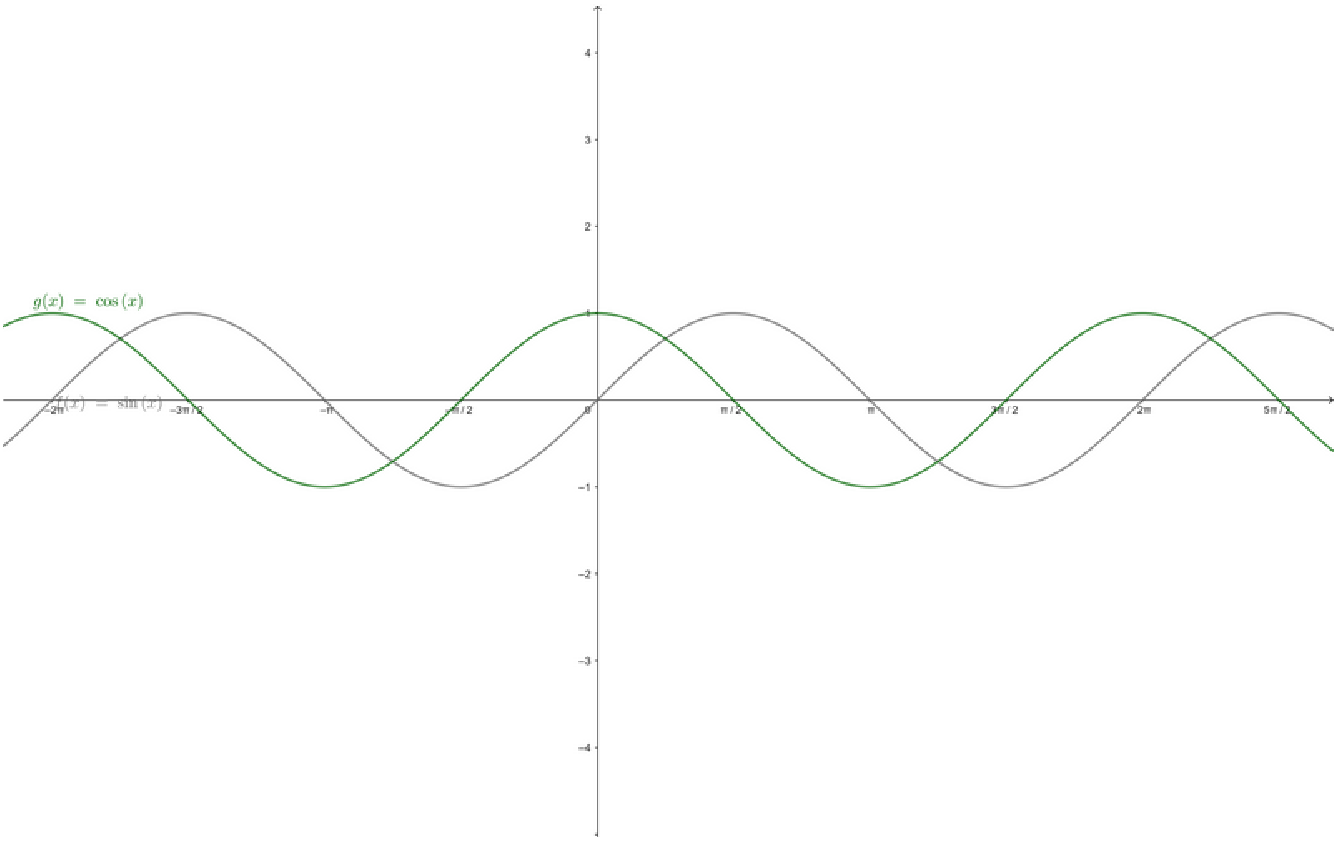
周期性

- $T = 2\pi, x \in R$

有界性

- $|sinx| \leqslant 1$
- $|cosx| \leqslant 1$

函数图像



特殊函数值

x	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2	2π
$sinx$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$cosx$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

正切函数与余切函数

定义

- 正切函数:$y = tanx$
- 余切函数:$x = cotx$

定义域与值域

- 正切函数
  - 定义域:$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$
  - 值域:R
- 余切函数
  - 定义域:$x \neq k\pi, k \in Z$
  - 值域:R

单调性
$k \in Z$

- 正切函数

- 在$(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$上单调递增

- 余切函数
  - 在$(-\pi+k\pi,k\pi)$上单调递减

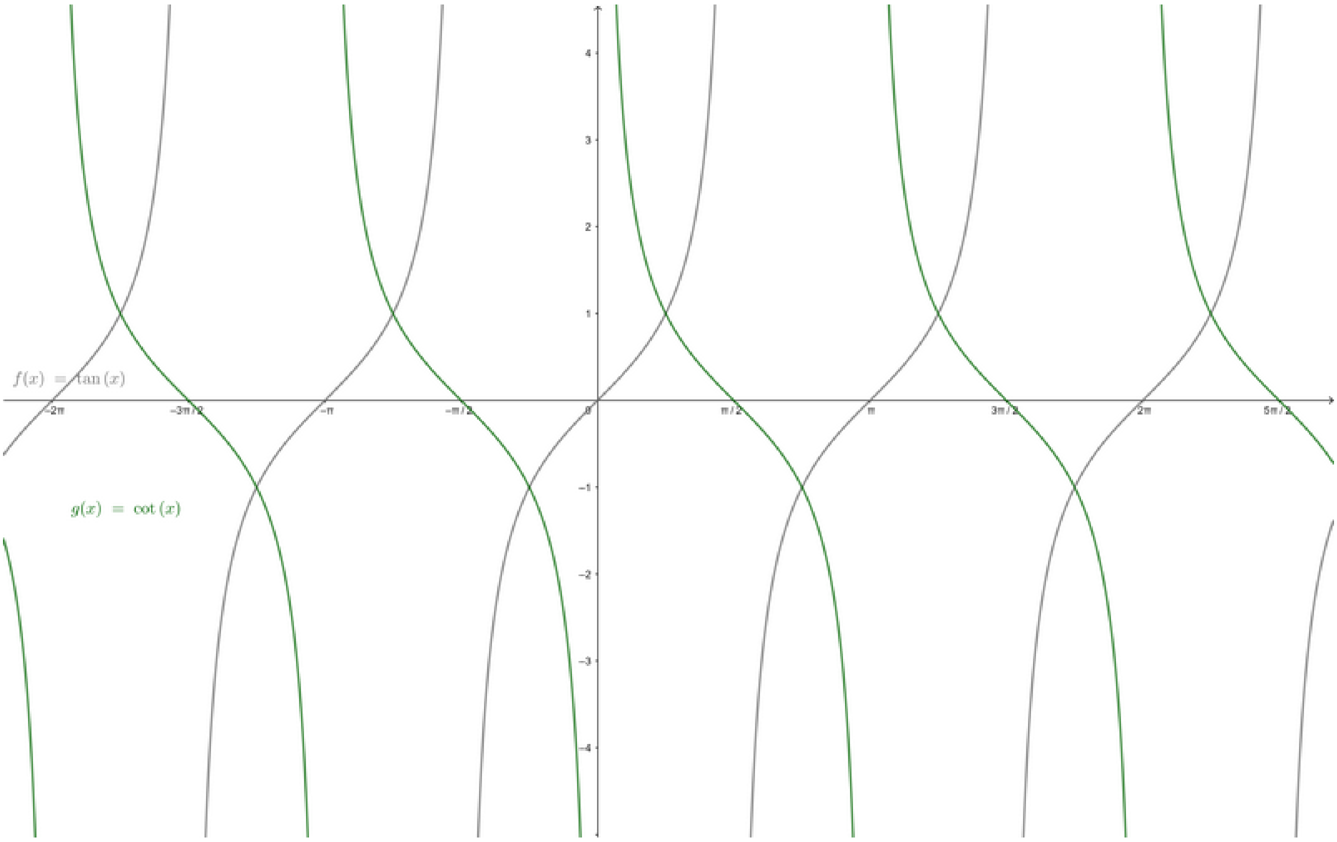
奇偶性

- 正切函数与余切函数在其定义域内均为奇函数

周期性

- 正切函数与余切函数在其定义域内,周期均为π

函数图像



特殊函数值

x	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2	2π
$tanx$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$cotx$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

正割函数与余割函数

定义

- 正割函数$y=secx$ = $\frac{1}{cosx}$
- 余割函数$y=cscx$ = $\frac{1}{sinx}$

定义域与值域

- 定义域:

    - 正割函数$x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
    - 余割函数$x \neq 2k\pi$
- 值域
    - 正割函数与余割函数的值域均为$(-\infty, 1] \cup [1, +\infty)$

单调性

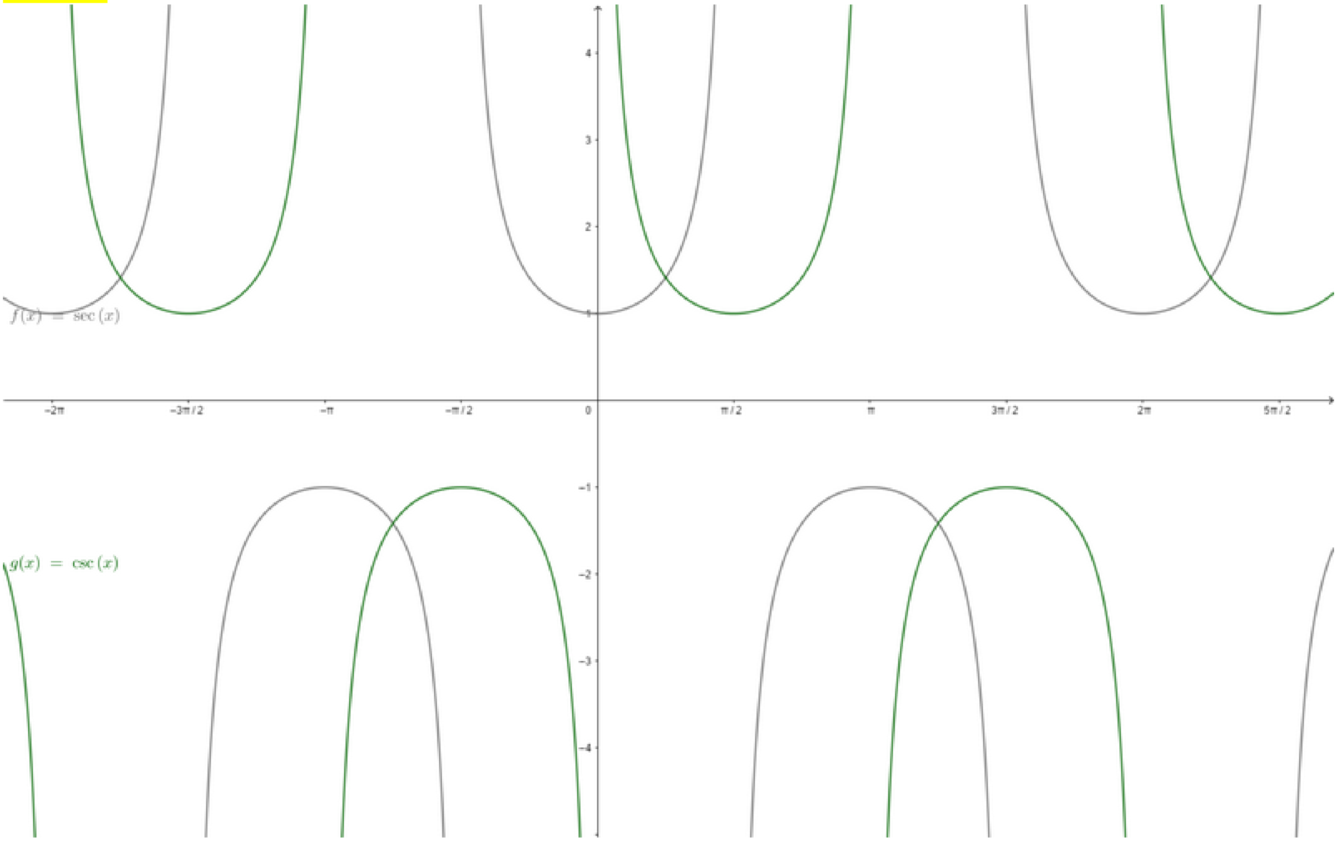
奇偶性

- 正割函数$y = secx$在其定义域为偶函数
- 余割函数$y = cscx$在其定义域为奇函数

周期性

- 正割函数与余割函数的周期均为2π

函数图像



反三角函数

反正弦函数与反余弦函数

定义

- 反正弦函数$y = arcsinx$
- 反余弦函数$y = arccosx$

定义域与值域

- 反正弦函数
    - 定义域:$[-1, 1]$
    - 值域:$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

- 反余弦函数
    - 定义域:$[-1,1]$
    - 值域:$[0,\pi]$

单调性

- 反正弦函数在其定义域单调增加
- 反余弦函数在其定义域单调减小

奇偶性

- 反正弦函数在其定义域为奇函数

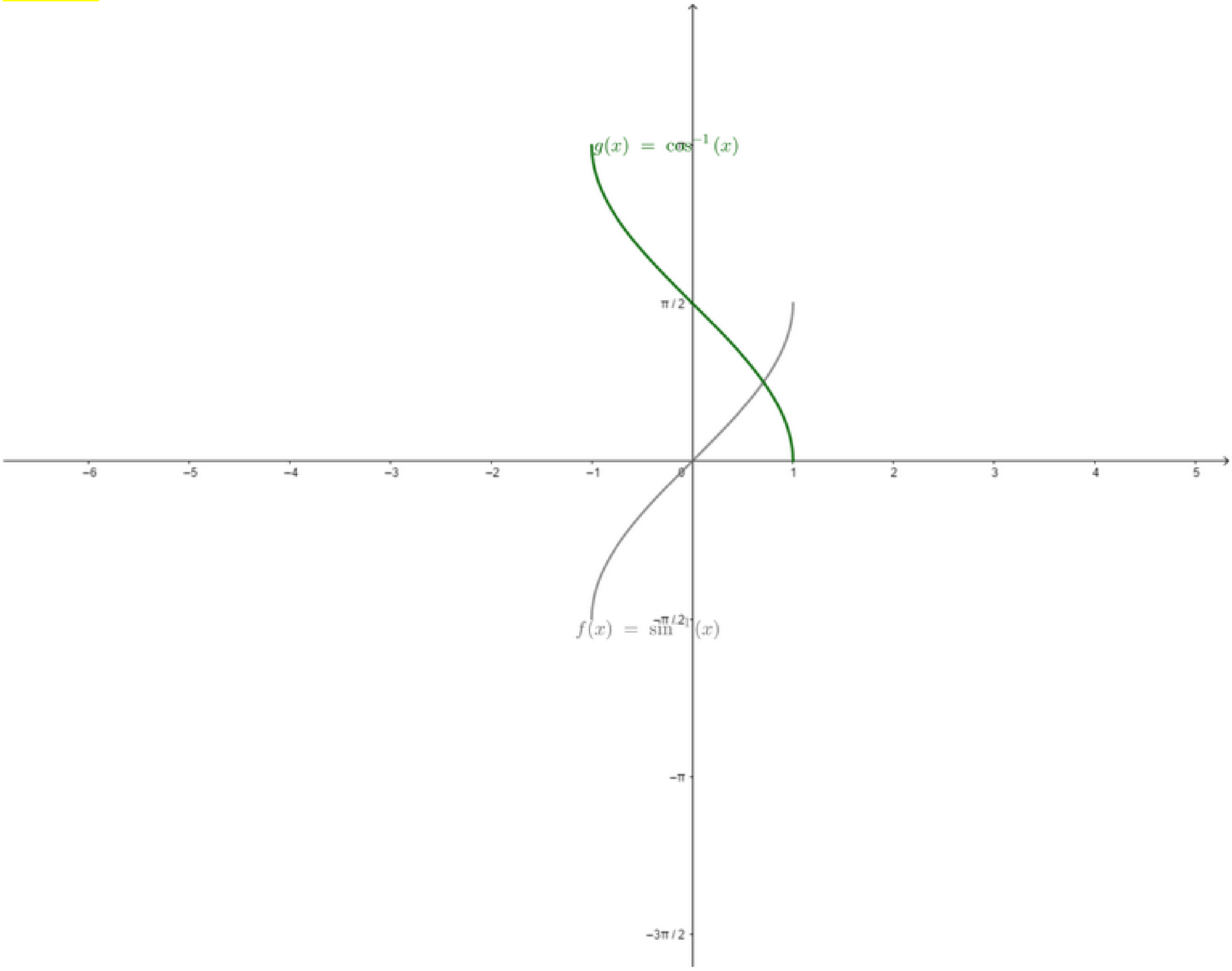
有界性

性质

- $arcsinx + arccosx = \frac{\pi}{2}$

特殊函数值

函数图像**



反正切函数与反余切函数

定义

- 反正切函数:$y = arctanx$
- 反余切函数:$y = arccotx$

定义域与值域

- 反正切函数与反余切函数的定义域均为R
- 反正切函数的值域
  - $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
- 反余切函数的值域
  - $(0, \pi)$

单调性

- 反正切函数在其定义域单调递增
- 反余切函数在其定义域单调递减

奇偶性

- 反正切函数与反余切函数在其定义域内均为奇函数

有界性

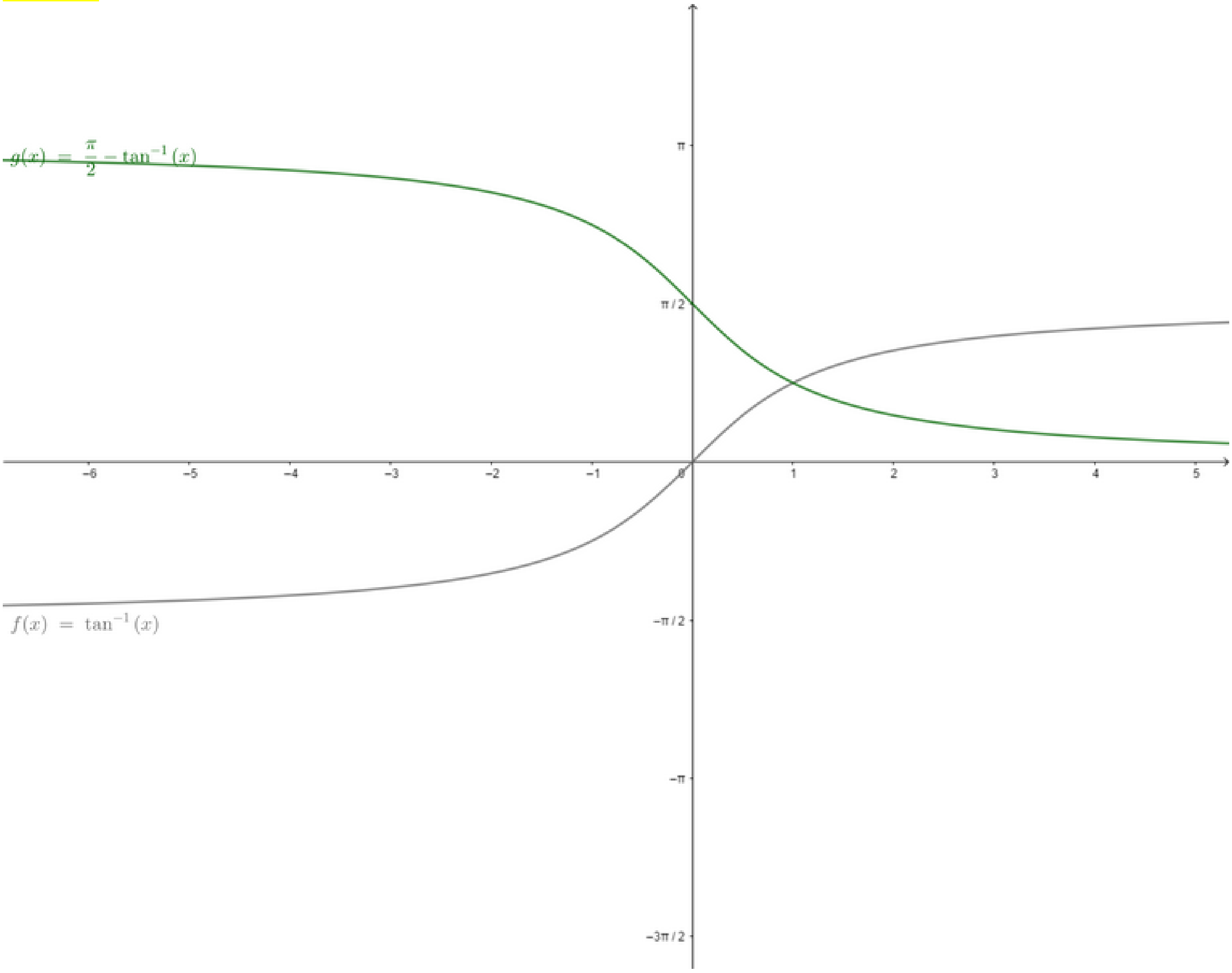
性质

- $arctanx + arccotx = \frac{\pi}{2}$
- $arctanA + arctanB = arctan\frac{A+B}{1-AB}$

特殊函数值

极限

函数图像**



1.5 其他几种特殊函数

分段函数

分段函数:在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同狮子来表示的函数

$$f(x)=\begin{cases}\varphi_1(x) & x>x_0\\ a, & x=x_0\\ \varphi_2(x) & x<x_0\end{cases}$$

或

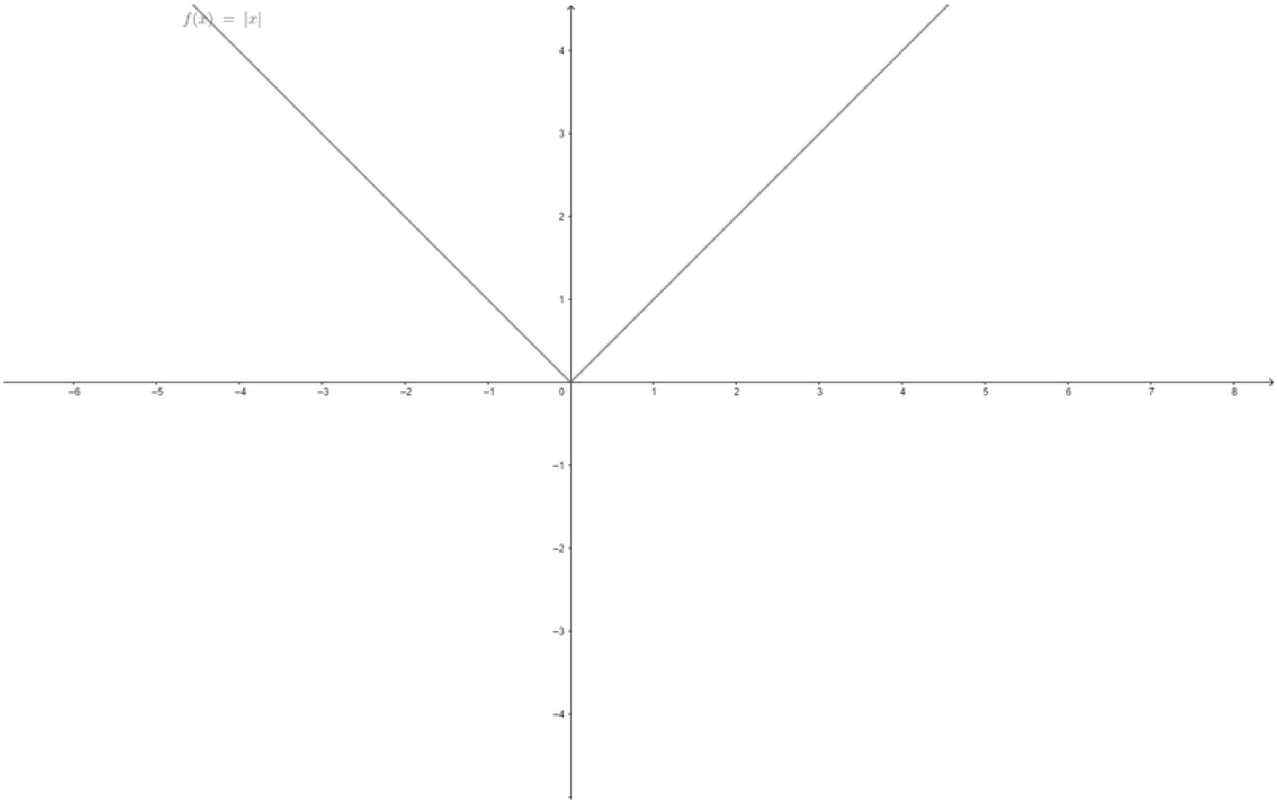
$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x) & x\neq x_0\\ a & x=x_0\end{cases}$$

几个重要的分段函数

1. 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

- 该函数在$x=0$处连续(没有间断),但是不可导(有折点,不光滑)



- 例: 绝对值函数和最大值函数,最小值函数的关系
  设$f(x)$和$g(x)$为连续函数,令$U=max\{f(x),g(x)\}$,$V=min\{f(x),g(x)\}$

$$U=max\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]=\begin{cases} f(x) & f(x)\geqslant g(x) \\ g(x) & f(x)<g(x) \end{cases}$$

$$V=min\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]=\begin{cases} g(x) & f(x)\geqslant g(x) \\ f(x) & f(x)<g(x) \end{cases}$$

则

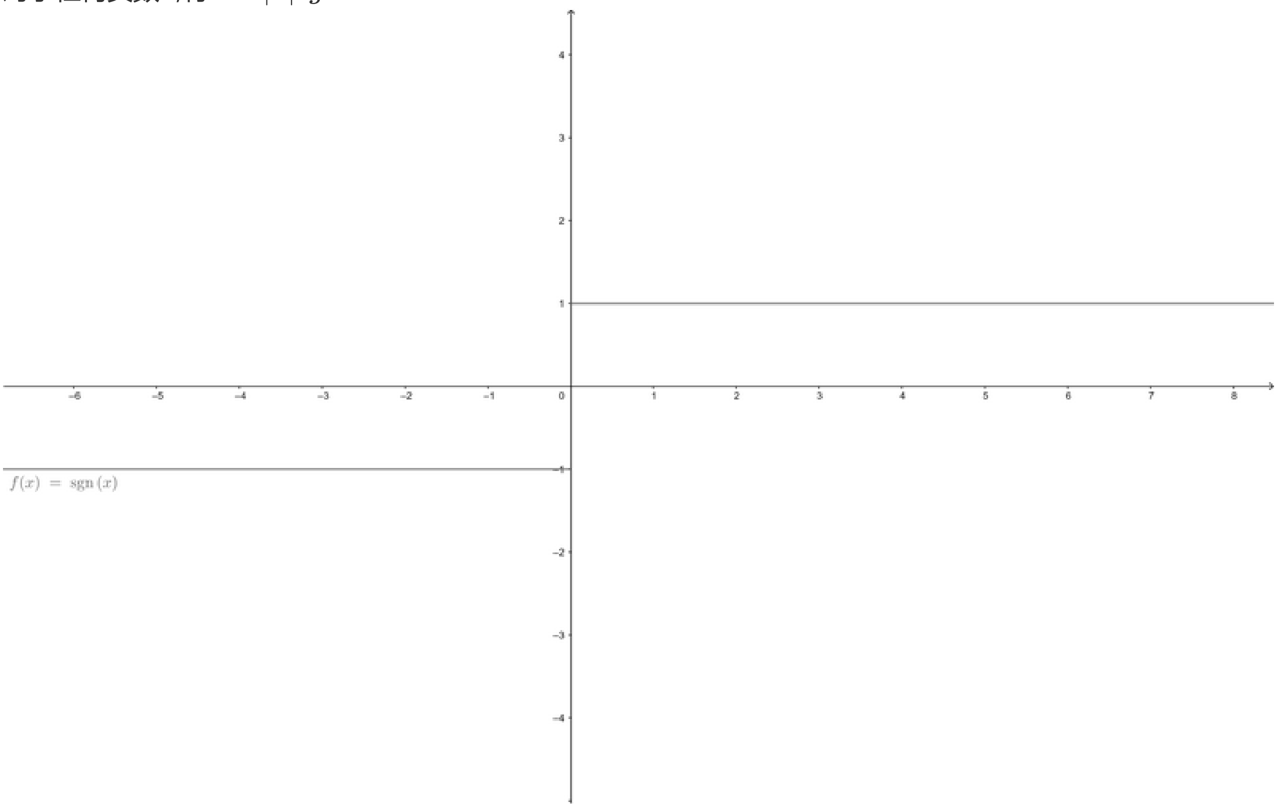
- $U+V=f(x)+g(x)$
- $U-V=|f(x)-g(x)|$
- $UV=f(x)g(x)$

> 常用于选择题中的特例,来便于解题

2. 符号函数

$$y=sgnx=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

- 对于任何实数x,有$x=|x|sgnx$



3. 取整函数(向下取整)

$y=[x]$

- $[x]$:设x为任一实数,不超过x 的最大整数称为x 的整数部分
  - 例如,$[0.99]=0$,$[\pi]=3$,$[-0.99]=-1$
- 定义域为R ,值域为Z
  013

注意一些重要性质

- 性质1:
  - n为正整数
  - $x-1<[x]\leqslant x$
    - $\frac{1}{x}-1<[\frac{1}{x}]\leqslant\frac{1}{x}$
  - $[x+n]=[x]+n$
  - $n[x]\leqslant nx$
  - $[x]+[y]\leqslant[x+y]$
- 性质2:
  - $\lim_{x\to0^+}[x]=0$
  - $\lim_{x\to0^-}[x]=-1$

4.其他

- 换元法解题
- 复合函数与分段函数相结合的题型,建议先画出图像

- 例如:$f[g(x)]$,先画出$g(x)$的图像

幂指函数

幂指函数是初等函数,形如$u(x)^{v(x)}$的一般函数,通常将其转化为复合函数$e^{v(x)ln_u(x)}$来处理

- $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)ln_u(x)}$

2 函数的四种特性

有界性

定义:
设$f(x)$的定义域为D,数集$I \subset D$.

- 如果存在某个正整数M使之对任一$x \in I$,有$|f(x)| \leqslant M$,则称$f(x)$在I上有界
- 如果这样的M不存在,则称$f(x)$在I上无界

> 注:
>
> - 从几何上看,如果在给定的区间,函数$y = f(x)$的图形能够被直线$y = M$和$y = -M$完全包起来,则为有界.
>   从解析上说,找到某个正数M,使得$|f(x)| \leqslant M$,则为有界

- 有界还是无界的讨论首先得指明区间I,不知区间,无法讨论有界性
  - 比如$y = \frac{1}{x}$在$(2, \infty)$内有界,但在$(0, 2)$内无界
- 事实上,主要在区间I上存在一点x_0使得函数$lim_{x \to x_0} f(x)$的值为无穷大,则没有任何两条直线$y = M$和$y = -M$可以把I包起来,这叫无界
  - 考研中常出这样的题目

单调性

定义:
设$y = f(x)$的定义域为D,区间$I \subset D$,如果对于区间I任意两点x_1,x_2

- 当$x_1 < x_2$时,恒有$f(x_1) < f(x_2)$,则称$f(x)$在区间I上单调增加
- 当$x_1 < x_2$时,恒有$f(x_1) > f(x_2)$,则称$f(x)$在区间I上单调减少

> 注:
> 考研中常用求导来判断单调性,但是也不要忘记了定义法
> 如下的定义法的判别形式:
> 对于任何$x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$,则
> $f(x)$是单调增函数$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) > 0$
> $f(x)$是单调减函数$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) < 0$
> $f(x)$是单调不减函数$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) \geqslant 0$
> $f(x)$是单调不增函数$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) \leqslant 0$

复合函数的单调性:同增异减

> 题型:题目给出在区间连续,和不等式,利用导数与单调性的关系等

奇偶性

定义:
设$f(x)$的定义域D关于原点对称(即$x \in D$,则$-x \in D$)

- 偶函数:如果对于任一$x \in D$,有$f(-x) = f(x)$
  - 偶函数的图像关于y轴对称
  - 当$f(0)'$存在时,必有$f(0)' = 0$
- 奇函数:如果对于任一$x \in D$,有$f(-x) = -f(x)$
  - 奇函数的图像关于原点对称
  - 当函数在$x = 0$出有定义时,则$f(0) = 0$

补充:

- 奇函数在零点连续,则零点的函数值为零
- 原函数为奇函数,则导函数为偶函数

$f(x)$必为一个奇函数和一个偶函数之和

设$f(x)$是在$[-l, l]$(关于原点对称)上的任意函数

- $F_1(x) = f(x) - f(-x)$必为奇函数
  - $u(x) = \frac{1}{2}F_1(x)$,显然为奇函数
- $F_2(x) = f(x) + f(-x)$必为偶函数
  - $v(x) = \frac{1}{2}F_2(x)$.显然为偶函数
- $f(x) = u(x) + v(x)$
  - 即$f(x)$必为一个奇函数和一个偶函数之和

对称轴(一)

- 函数$y = f(x)$与$y = -f(x)$关于x轴对称
- 函数$y = f(x)$与$y = f(-x)$关于y轴对称
- 函数$y = f(x)$与$y = -f(-x)$关于$(0, 0)$轴对称

对称轴(二)

函数$y = f(x)$关于直线$x = x_0$对称

- $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$:
  - 关于对称$x = x_0$显然成立
    - $x_0 + x$和$x_0 - x$距离直线$x = x_0$相等
- $f(x) = f(2x_0 - x)$:
  - $f(x_1) = f(x_2)$
  - 方法一:两点距离对称轴距离相等,$x_0 - x_1 = x_2 - x_0 \Rightarrow x_2 = 2x_0 - x_1 \Rightarrow f(x_1) = f(2x_0 - x_1)$
  - 方法二:令$x + x_0 = t$,则$f(2x_0 - t) = f(t)$,然后t替换为x,即$f(2x_0 - x) = f(x)$

周期性

定义:

- 设$f(x)$的定义域D.如果存在一个正数T,使得对于任一$x \in D$有$x \pm T \in D$,且$f(x + T) = f(x)$,则称$f(x)$为周期函数,T称为周期

> 三角函数的周期:
>
> - $T = \frac{\pi}{\omega}$

3 数列基础

等差数列

定义:

- 首项为a_1,公差为$d(d \neq 1)$的数列$a_1, a_1+d, a_1+2d, \ldots, a_1+(n-1)d$

通项公式

- $a_n = a_1 + (n-1)d$

前n项的和

- $S_n = \frac{1}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{1}{2}(a_1 + a_n)$

等比数列

定义

- 首项为a_1,公比为$r(r \neq 0)$的数列$a_1, a_1 r, a_1 r^2, \ldots, a_1 r^{(n-1)}$

通项公式

- $a_n = a_1 r^{(n-1)} d$

前n项的和

- $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}(r \neq 1)$

一些数列前n项和

- 正整数之和:$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1))}{2}$
- 正奇数之和:$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$
- 正整数平方之和:$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
  - 证明:
    - 利用$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 2n + 1$,左右展开
      - $(n)^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 2(n-1) + 1$
      - ......
      - $2^3 - 1^3 = 3 * 1^2 + 2 * 1 + 1$
      - 左右分别相加
      - 出现$(n+1)^3 - 1 = 3[n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 1^2] + 3(1+2 \ldots + n) + n$
    - 然后从其中解出 $\sum_{n}^{k=1} k^2$
- 正整数立方之和:$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1))}{2})^2$
- $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{n}^{k=1}(k^2+k) = \sum_{n}^{k=1} k + \sum_{n}^{k=1} k^2$
- $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

4 三角函数基础

三角函数基本关系

$sin\alpha = tan\alpha cos\alpha$

$sec^2\alpha - tan^2\alpha = 1$
$csc^2\alpha - cot^2\alpha = 1$

诱导公式

奇变偶不变,符号看象限
$\frac{k\pi}{2} + \alpha, k \in Z, |\alpha| < \frac{\pi}{4}$

- 奇变偶不变:
  - 当k为奇数时,函数不变化
  - 当k为偶数时,函数变化
    - $sin \Leftrightarrow cos$
    - $tan \Leftrightarrow cot$
- 符号看象限:
  - $\frac{k\pi}{2}$加上将α看做锐角所得的值,然后将值带入原来的函数中,来判断函数值的正负符号

例如:

- $sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -cos\alpha$
- $tan(\pi + \alpha) = tan\alpha$
- $cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = sin\alpha$

三角函数特殊值

重要公式

和差公式

$sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha cos\beta \pm cos\alpha sin\beta$
$cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha cos\beta \mp sin\alpha sin\beta$

> 其他公式都可以从和差公式推导出来

二倍角/三倍角/降幂公式/半角公式

- 二倍角/降幂公式/半角公式
  - $sin2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha$
  - $cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$
- 三倍角
  - $sin3\alpha = -4sin^3\alpha + 3sin\alpha$
  - $cos3\alpha = 4cos^3\alpha - 3cos\alpha$

积化和差与和差化积公式

积化和差

和差化积

证明:

$$\begin{cases} \alpha+\beta=u \\ \alpha-\beta=v \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha=\frac{u+v}{2} \\ \beta=\frac{u-v}{2} \end{cases}$$

$sin\alpha+sin\beta=sin(\frac{u+v}{2})+sin(\frac{u-v}{2})=2sin(\frac{u}{2})cos(\frac{v}{2})=2sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

万能公式

若$u=tan\frac{x}{2}(-\pi<x<\pi)$,则$sinx=\frac{2u}{1+u^2}$,$cosx=\frac{1-u^2}{1+u^2}$

5 其他补充

一元二次方程基础

$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$

- 根:$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- 根与系数关系(韦达定理):$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$,$x_1x_2=\frac{c}{a}$
- 抛物线的顶点:$(-\frac{b}{2a},c-\frac{b^2}{4a})$

因式分解公式

- $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
- $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
- $a^3+b^3=(a+b)(a^2+ab+b^2)$
- $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1})$
- 二项式定理:$(a+b)^n=\sum_n^{k=0}C_n^ka^kb^{n-k}$
  - $C_n^k=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$
  - 注意当$a=b=1$时
    - $\sum_{k=0}^nC_n^k=2^n$

阶乘与双阶乘

- 阶乘:$n!=n\times(n-1)\times...\times2\times1$
- 双阶乘 :
  - $(2n)!!=2\times4\times6\times...\times(2n)=2^n\cdot n!$
  - $(2n-1)!!=1\times3\times5\times...\times(2n-1)$

6 常用的曲线与曲面(待补)