4.1 伴随矩阵及其运算

伴随矩阵

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{bmatrix}$$

> 注意伴随矩阵的元素下标,相当于原矩阵转置了
>
> 伴随矩阵A^*在位置(i,j)上的元素是矩阵A在位置(j,i)上的代数余子式
>
> 为了方便,先计算出$(A^*)^T$

对任意n阶方阵A,都有伴随矩阵$|A^*|$,则有

- $AA^* = A^*A = |A|E$
- $|A^*| = |A|^{n-1}$

当$|A| \neq 0$

- $A^* = |A|A^{-1}$,$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$,$A = |A|(A^*)^{-1}$
- 对于$AA^* = A^*A = |A|E$公式可将A替换为
  - kA倍乘矩阵:$(kA)(kA)^* = |kA|E$
  - A^T矩阵的转置:$(A^T)(A^T)^* = |A^T|E = |A|E$
  - A^{-1}矩阵的逆:$(A^{-1})(A^{-1})^* = |A^{-1}|E$
  - A^*伴随矩阵:$(A^*)(A^*)^* = |A^*|E$

穿脱原则

- $(A^T)^* = (A^*)^T$
- $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

> $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

其他

- $(AB)^* = B^*A^*$
- $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$

> $(A+B)^* \neq A^* + B^*$

总结公式

- $(kA)^* = k^{n-1}A*$
- 小于三阶的分块矩阵求其伴随矩阵待定系数法

4.2 初等变换与初等矩阵

初等变换

倍乘初等变换:

- 一个非零常数乘矩阵的某一行(列)

互换初等变换:

- 互换矩阵中某两行(列)的位置

倍加初等变换:

- 将某行(列)的k倍加到另一行(列)

初等矩阵

初等矩阵:由单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵

- $E_2(k)$:
  - E的第2行乘k倍
  - E的第2列乘k倍
- E_{12}
  - E的1,2行互换
  - E的1,2列互换
- $E_{31}(k)$
  - E的第1行的k倍加到第3行
  - E的第3列的k倍加到第1列

初等矩阵的性质

- 初等矩阵的转置仍然是初等矩阵
- 初等矩阵都是可逆矩阵
  - 因为$|E_i(k)| = k \neq 0, |E_{ij}| = -1 \neq 0, |E_{ij}(k)| = 1 \neq 0$
  - 故初等矩阵都是可逆矩阵,且$[E_i(k)]^{-1} = E_i(\frac{1}{k}), E_{ij}^{-1} = E_{ij}, [E_{ij}(k)]^{-1} = E_{ij}(-k)$
  - 其逆矩阵也是初等矩阵
- 若A是可逆矩阵,则A可以表示成一些列初等矩阵的乘积,即$A = P_1 P_2 \cdots P_s$
- 初等行(列)变换等价于左(右)乘相应的初等矩阵
  - 对n阶矩阵A,进行初等行变换,相当于在矩阵A的左边乘相应的初等矩阵
  - 对n阶矩阵A,进行初等列变换,相当于在矩阵A的右边乘相应的初等矩阵

用初等变换求逆矩阵的方法

初等行变换

$$[A \vdots E] \to [E \vdots A^{-1}]$$

初等列变换

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} E \\ A^{-1} \end{bmatrix}$$

4.3 等价矩阵和矩阵的等价标准形

等价矩阵

设A,B均是$m\times n$矩阵,若存在可逆矩阵$P_{m\times n},Q_{n\times n}$,使得$PAQ=B$,则称$A,B$是等价矩阵,记作$A\cong B$

矩阵的等价标准形

设A是一个$m\times n$矩阵,则A等价于形如

$$\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

的矩阵(E_r中的r恰是$r(A)$), 后者称为A的等价标准形.

等价标准形是唯一的,即若$r(A)=r$,则存在可逆矩阵P,Q,使得$PAQ=$

$$\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

4.4 矩阵的秩

定义

设A是一个$m\times n$矩阵,A中最大的不为零的子行列式的阶数称为矩阵A的秩,记为$r(A)$

- 若$r(A)=n$
- $\Leftrightarrow |A|\neq 0$
- $\Leftrightarrow A$可逆
- $\Leftrightarrow$ 以A为系数矩阵的齐次线性方程组只有零解

> 更多间5.2 向量组的秩

初等变换不改变矩阵的秩

$r(A)=r(P_1A)=r(AQ_1)=r(P_1AQ_1)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$

- P_1,Q_1是初等矩阵
- P,Q是可逆矩阵

$PAQ=B$(其中P,Q是可逆矩阵)$\Leftrightarrow A\cong B\Leftrightarrow r(A)=r(B)$

有关秩的等式和不等式

> 一些证明见第5讲例题

设A是一个$m \times n$矩阵,B是满足有关矩阵运算要求的矩阵

- $r(A) \leqslant min\{m,n\}$
- $r(A) \leqslant r([A,b])$
- $r(A^T) = r(A)$
    - 若$r(A) = r(A^T)$,则$r(A) = r(AA^T) = r(A^TA)$
        - 证明:利用同解方程组P-124-28
- $r(A+B) \leqslant r(A) + r(B)$
    - $r(A+B) \leqslant r([A,B]) \leqslant r(A) + r(B)$
- $r(A-E) = r(E-A)$
- $r(kA) = r(A)(k \neq 0)$
- $r(AB) \leqslant min\{r(A), r(B)\}$
    - 即$r(A), r(B)$均大于等于$r(AB)$
- $r(AB) \geqslant r(A) + r(B) - n$
- $AB = 0$时,$r(A) + r(B) \leqslant n$
    - n是A的列数(或B的行数)
- $r(A) = r([A,O])$
- $$r(\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}) = r(A) + r(B)$$
- $$r(A) + r(B) \leqslant r(\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}) \leqslant r(A) + r(B) + r(C)$$
- A为n阶方阵,A^*是A的伴随矩阵
    - $r(A^*) =$
        - n
            - $r(A) = n$
            - 即n行(列)线性无关
        - 1
            - $r(A) = n-1$
            - 即n行(列)两两成比例
        - 0
            - $r(A) < n-1$
            - 即n全是零向量(?)
- A可逆,则$r(A) = n$,则$r(A^*) = r(A) = n$,即A^*可逆

总结

矩阵方程

解矩阵方程:

- 先根据题设条件和矩阵运算规则,将方程进行恒等变形,使方程化成形如等形式

    - $AX = B$
    - $XA = B$
    - $AXB = C$
- 若A或B可逆或A且B可逆,则可得解为
    - $X = A^{-1}B$
    - $X = BA^{-1}$
    - $X = A^{-1}CB^{-1}$
- 若A不可逆
    - 形如$AX = B$,则将X和B按列分
        - $A\xi_i = \beta_i(i = 1, 2, \cdots, s)$
- 若无法化成上述形式
    - 则应设未知矩阵为$X = (x_{ij})$直接带入方程得到含未知量x_{ij}的线性方程组
    - 求得X的元素x_{ij},从而求得X
        - 即用待定元素法求X