第07讲 特征值与特征向量

7.1 基本概念

- 设A是n阶矩阵, λ是一个数,
  - 若存在n维非零列向量ξ，使得$A\xi = \lambda\xi$
    - 则称
      - λ是A的特征值,
      - ξ是A对应于特征值称λ的特征向量
- 由$A\xi = \lambda\xi$
  - 得$(\lambda E - A)\xi = 0$

因为$\xi \neq 0$

- 故齐次线性方程组有非零解，系数矩阵的行列式为0

$$|\lambda E - A| = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} = 0$$

特征方程$|\lambda E - A| = 0$是未知量λ的n次方程,有n个根(重根按照重数计)

- 特征方程:
  - $|\lambda E - A| = 0$
    - 表示特征矩阵的行(列)向量线性相关
- 特征矩阵:
  - $\lambda E - A$
- 特征多项式(特征矩阵的行列式):
  - $|\lambda E - A|$

7.2 基本性质

特征值的性质

设$A = (a_{ij})_{n\times n}, \lambda_i(i = 1, 2, \cdots, n)$是$A$的特征值,则

- $\sum_{1=1}^{n} \lambda_i = \sum_{1=1}^{n} a_{ii}$
  - 特征值累加 = 对角线元素的累加
  - 矩阵的迹:
    - $tr(A) = \sum_{1=1}^{n} a_{ii}$

- $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$
    - 特征值累乘 = 矩阵的行列式

> 对于对角矩阵,上下三角矩阵的特征值就是对角元素

特征向量的性质

- k重特征值λ至多只有k个线性无关的特征向量
    - 注意是至多有k个,即可以小于k
- 若ξ_1,ξ_2是A的属于同一特征值λ的特征向量
    - 则$k_1\xi_1+k_2\xi_2$(非零向量)仍是A的属于特征值λ的特征向量
- 若ξ_1,ξ_2是A的属于不同特征值λ_1,λ_2的特征向量
    - 则ξ_1,ξ_2线性无关

题型和补充

同一特征值λ可能对应不同的特征向量

一个特征向量不能属于两个不同的特征值

零矩阵的特征值为零

可以容易得出

- $A+kE$的特征值为$\lambda+k$
- kA的特征值为$k\lambda$
- A^2的特征值为λ^2
    - A^k的特征值为λ^k
- $f(A)$的特征值为$f(\lambda)$
    - $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$
- A^{-1}的特征值为$\frac{1}{\lambda}$
- A^*的特征值为$\frac{|A|}{\lambda}$
- $A\sim B$, 即A与B相似
    - 则A,B的特征值相等
- 特征向量均为ξ

若A是方阵

- A^T的特征值为λ
- 若A,B均是实对称矩阵,
    - 则AB和BA有相同的特征值
- A是可逆矩阵,
    - 则AB和BA有相同的特征值
- 特征向量均为ξ

求数值矩阵的特征值,特征向量

特征值

- 用特征方程$|\lambda E-A|=0$
  - 注意此处是解行列式 特征向量
- 解齐次线性方程组$(\lambda E-A)x=0$

求抽象矩阵的特征值,特征向量

方法一

- 利用定义
  - 若满足关系是$A\xi=\lambda\xi,\xi\neq 0$

方法二

- 由定义推导得到A的特征方程
  - 若$|\lambda E-A|=0$成立
  - 则λ是A的特征值
  - 若有$(\lambda E-A)\xi=0,\xi\neq 0$
  - 则ξ是A对应于ξ的特征向量