提示

题号	知识点
8.1	矩阵可对角化的条件
8.2	不可逆即行列式为0 齐次线性方程组有非零解即$r < n$
8.3	要按照特征方程的定义做下去,题中给出的条件才会显示出作用 有时只是看条件,可能并不会带来思路
8.4	特征值的理解 矩阵可对角化
8.5	矩阵的(按行)分隔 若A为n阶矩阵,$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$线性无关,作为可逆矩阵$P=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]$,从而$P^{-1}AP=\Lambda$
8.6	矩阵的转置 观察
8.7	特征矩阵对应的齐次线性方程组 秩的不等式
8.8	(1)按照$\|\lambda E-A\|=0$和$A\xi=\lambda\xi$,来确定特征值与特征向量 (2)由(1)获得特征值对应的特征向量的形式
8.9	(1)注意重根 (2)带入特征值,分别求出特征向量 见详解
8.10	见详解
8.11-8.13	相似矩阵的性质;相似的传递性
8.14	相似的传递性;相似对角化的条件 若A,B 均可相似对角化,且特征值相同,则A与B相似 若A,B相似,但是不一定 $A\sim B\sim\Lambda$
8.15	相似矩阵的性质
8.16,8.18	特征值是k重根,对应有k个线性无关的特征向量, $n-r=k$
8.17	由$A\alpha=\lambda\alpha$对应相等,求解
8.19	若有可逆矩阵P,使得$P^{-1}AP=\Lambda$,则 $A=P\Lambda P^{-1}$ 构造
8.20	实对称矩阵A的属于不同特征值的特征向量相互正交
8.21	(1)非齐次线性方程组有解的条件 (2)实对称矩阵A的属于不同特征值的特征向量相互正交,然后将其单位化
8.22	(2)因为是非实对称矩阵,所以进行施密特标准正交化
8.23	利用$A\sim\Lambda,f(A)=f(P\Lambda P^{-1})$

题号	知识点
8.24	(1)$A^n\xi_i=\lambda_i^n\xi_i$ (2)用特征向量表示β
8.25	幂等矩阵$\lambda=0,1$ 矩阵秩的定义 行列式的计算 $A+kE$的特征值为$\lambda+k$
8.26	将A分块 分块矩阵的运算 对分块矩阵,进行分别计算出 $B=P_1\Lambda_1P_1^{-1},C=P_2\Lambda_2P_2^{-1}$
8.27	将递推方程组表现为矩阵 求出A,进而求A^n 要一步步进行计算,不要空想
8.28	见详解

详解

8.5

> ξ_1,ξ_2,ξ_3线性无关,作为可逆矩阵$P=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]$,从而$P^{-1}AP=\Lambda$

8.6

(1)

$A^2=A\cdot A=(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)=\alpha^T(\beta\alpha^T)\beta$

因为$\beta\alpha^T$结果为一个数值,满足交换律

所以 $A^2=A\cdot A=(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)=\alpha^T(\beta\alpha^T)\beta=\beta\alpha^T\alpha^T\beta=(\alpha\beta^T)^T\alpha^T\beta=0$

(2)

根据(1)的$A^2=0$

(3)

因为α和β都不是为零向量的列向量,故$A\neq0$

8.7

由$A^2=E$

和$A\xi=\lambda\xi$和$A^2\xi=\lambda^2\xi$

可得$\lambda^2=1$,即$\lambda=\pm1$

由$A^2=E$变形

得$E-A^2=(E-A)(E+A)=0$

从而满足秩的不等值关系的条件

得到$r(E-A)+r(E+A)\leqslant n$

又$r(E-A)+r(E+A)\geqslant r(E-A+E+A)=r(2E)=n$

故$r(E-A)+r(E+A)=n$

设$r(E-A)=r$,则$r(E+A)=n-r$

由$A(E+A)=A+A^2=E+A=1(E+A)$

前面得出A有特征值1,故$A+E$是A对应于特征值1的特征向量,取其为$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$

- 因为$E+A$的$n-r$列列向量时基础解系,则该$n-r$列列向量线性无关

由$A(E-A)=A-A^2=A-E=-(E-A)$,故$E-A$是A对应于特征值-1的特征向量,取其为$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$

取$P=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r},\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r]$

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}E_{n-r} & O\\ O & -E\end{bmatrix}\sim\Lambda$$

8.9

(1)

对于$\lambda_1=1+(n-1)b$,齐次线性方程组$(\lambda_1E-A)x=0$对应的系数矩阵

- 提取b,然后将2 至 $n-1$ 行加到第1行

$$\lambda_1E-A=\begin{bmatrix}(n-1)b & -b & \cdots & -b\\ -b & (n-1)b & \cdots & -b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -b & -b & \cdots & (n-1)b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}(n-1) & -1 & \cdots & -1\\ -1 & (n-1) & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & (n-1)\end{bmatrix}$$

- 交换第1行和第n行,然后2 至 $n-1$ 行加到第1行

$$\lambda_1E-A\to\begin{bmatrix}n-n & n-n & \cdots & n-n\\ -1 & (n-1) & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & (n-1)\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1 & -1 & \cdots & -1 & (n-1)\\ -1 & (n-1) & \cdots & -1 & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & (n-1) & -1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}$$

- 将第1行,分别加到2 至 $n-1$ 行,提取n

$$\lambda_1 E - A \to \begin{bmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -n & n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -n & 0 & \cdots & n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 2 至 $n-1$ 行乘-1 ,然后2 至 $n-1$ 行加到第1行

$$\lambda_1 E - A \to \begin{bmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 第1行乘以-1,然后化为最简行阶梯矩阵

$$\lambda_1 E - A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可得$r(\lambda_1 E - A) = n-1$,故$n-r=1$,选取x_n作为自由未知量,解得基础解系为$\xi_1 = [1, 1, \cdots, 1]^T$

8.10

(1)

由已知构造出$A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]B$即可

(2)

由已知$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关,令$C = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$,则$C^{-1}AC = B$,即$A$和$B$相似,具有相同的特征值

(3)

由(2)A和B相似,

$C^{-1}AC = B$

$Q^{-1}BQ = \Lambda$

即$Q^{-1}C^{-1}ACQ = C^{-1}BC = \Lambda$

所以需要求B的特征值所对应的特征向量,然后构造Q

最后求得$P = CQ$

8.28

解

(1)

$x_{n+1} = \frac{5}{6}x_n + \frac{2}{5}(\frac{1}{6}x_n + y_n)$

$y_{n+1} = \frac{3}{5}(\frac{1}{6}x_n + y_n)$