第04讲 一元函数微分学的几何应用

4.1 极值与最值

极值点

定义1: 广义极值点

- 邻域

定义2: 真正的极值点

- 去心邻域

最值

定义3: 广义的最值

- 不等式可以取等号

定义4: 真正的最值

> 极值与最值的关系
>
> - 在区间I内的最值点x_0,且该点不是区间的端点,而是内部的点,那么该点必然是一个极值点

> 间断点可以是极值点

$$f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ |x| & x\neq 0\end{cases}$$

4.2 单调性与极值的判别

单调性的判别

若$y=f(x)$在区间I上

- $f'(x)>0$,则$y=f(x)$在区间I上严格单调增加
- $f'(x)<0$,则$y=f(x)$在区间I上严格单调递减

一阶可导点是极值点的必要条件

- 若$f(x)$在$x=x_0$处可导,且在点x_0处取得极值,则必有$f'(x_0)=0$
  - 费马定理
- 反之,导函数为0点,不一定是极值点

判断极值的第一充分条件

- $f(x)$在$x=x_0$处连续,在x_0某去心邻域内可导
- 然后根据在$x=x_0$点左右的导数$f'(x)$的正负变化来判断$f(x_0)$极值情况
  - 大于0,极小值
  - 小于0,极大值

判断极值的第二充分条件

- 若$f(x)$在$x=x_0$处二阶可导,且$f'(x_0)=0$(x_0为驻点), $f''(x_0)\neq 0$
- 然后根据$f''(x_0)$的正负来判断$f(x_0)$极值情况
  - 大于0,极小值
  - 小于0,极大值

判断极值的第三充分条件

- 判断极值的第三充分条件是判断极值的第二充分条件扩展
  - 若$f(x)$在$x=x_0$处n阶可导,且$f^{(m)}(x_0)=0(m=2,\cdots,n-1)$
  - 当n为偶数,然后根据$f^{(n)}(x_0)\neq 0(n\geqslant 2)$的正负来判断$f(x_0)$极值情况
    - 大于0,极小值
    - 小于0,极大值

4.3 凹凸性与拐点的概念

凹凸性的定义

- 凹:
  - $f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$
  - $f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),\lambda\in(0,1),x_1,x_2\in(a,b)$
- 凸:
  - $f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$
  - $f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\geqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),\lambda\in(0,1),x_1,x_2\in(a,b)$

拐点的定义

凹与凸的分界点

4.4 凹凸性与拐点的判别

> 对比判断极值的条件

判别凹凸性的充分条件

$y=f(x)$在区间I上二阶可导,然后根据$f''(x)$的正负来判断

二阶可导点是拐点存在的必要条件

若$f''(x_0)$存在,且点$(x_0,f(x_0))$为曲线上的拐点,则$f''(x_0)=0$

判断拐点的第一充分条件

$y=f(x)$在$x=x_0$处连续,在$x=x_0$的某去心邻域内二阶导数存在,且在该点的左右邻域内$f''(x)$异号则 点$(x_0,f(x_0))$为曲线上的拐点

> 注意是充分条件,即点$(x_0,f(x_0))$为曲线上的拐点,并不要求$y=f(x)$在点x_0的导数存在.例如$\sqrt[3]{x}$

判别拐点的第二充分条件

$y=f(x)$在$x=x_0$三阶可导,且$f''(x_0)=0,f'''(x_0)\neq 0$,则$(x_0,f(x_0))$为曲线上的拐点

判别拐点的第三充分条件

若$f(x)$在$x=x_0$处n阶可导,且$f^{(m)}(x_0)=0(m=2,\cdots,n-1),f^{(n)}(x_0)(n\geqslant 3)\neq 0$,$n$为奇数时,$(x_0,f(x_0))$为曲线上的拐点

4.5 渐近线

水平渐近线

若$lim_{x\to+\infty}f(x)=y_1$,则$y=y_1$为一条水平渐近线
若$lim_{x\to-\infty}f(x)=y_2$,则$y=y_2$为一条水平渐近线
若$lim_{x\to+\infty}f(x)=lim_{x\to-\infty}f(x)=y_0$,则$y=y_0$为一条水平渐近线

铅直渐近线

若$lim_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$,则$x=x_0$为一条铅直渐近线
若$lim_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$,则$x=x_0$为一条铅直渐近线

> 注意:此处的x_0一般为函数的无定义点

斜渐近线

若$lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k_1,lim_{x\to+\infty}[f(x)-k_1x]=b1$,则$y=k_1x+b_1$是曲线$y=f(x)$的一条斜渐近线
若$lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k_2,lim_{x\to-\infty}[f(x)-k_2x]=b2$,则$y=k_2x+b_2$是曲线$y=f(x)$的一条斜渐近线
若$lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k,lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b$,则$y=kx+b$是曲线$y=f(x)$的一条斜渐近线

4.6 最值或取值范围问题

求闭区间$[a,b]$上连续函数$f(x)$的最大值M和最小值m

- 求出$f(x)$在(a,b)的可疑点,并求出函数值
  - 驻点:
    - 一阶导数为0的点
  - 不可导点
- 求出区间端点值
- 比较求出的值

> 等价的问题:求连续函数$f(x)$在$[a,b]$上的值域$[m,M]$

求开区间(a,b)上连续函数$f(x)$的最值或者取值范围

- 求出$f(x)$在(a,b)的可疑点,并求出函数值
  - 驻点:一阶导数为0的点
  - 不可导点
- 用这些可以点将区间(a,b)划分为若干子区间,分别讨论子区间上的增减性
- 求单侧极限
  - $lim_{x\to a^+}$,$lim_{x\to b^-}$

4.7 做函数图形

- 做出函数的定义域,然后考察是否有奇偶性
- 求出一阶,二阶导数,然后根据特殊点将定义域划分为若干个子区间,确定函数图形在各个子区间上的单调性与凹凸性,进而确定函数的极值和拐点
  - 无定义点
  - 驻点
  - 一阶导数不存在的点
  - 二阶导数为零的点
  - 二阶导出不存在的点
- 确定渐近线
- 做出函数图形