#第05讲 向量

5.1 向量及线性相关性

向量的概念和运算

向量组的线性相关性的概念

线性组合

- 设有m个n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$及$m$个数$k_1,k_2,\cdots,k_m$
- 则$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$称为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的线性组合

线性表出

- 若向量β能表示成向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的线性组合,
- 即存在m数$k_1,k_2,\cdots,k_m$,
  - 使得$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$,
- 则称向量β能被向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表出

> 一个向量与一个线性组合相等

> 对于向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$,若任一$\beta_i(i=1,2,\cdots,t)$均由可$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出
>
> - 则$r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)\leqslant r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$

> 若向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出,但是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$不一定可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表出

线性相关和线性无关

线性相关

- 有m个n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$,
- 若存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$,
  - 使得线性组合$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$,
- 则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关

> 线性组合为零向量

> 含有零向量或有成比例的向量的向量组必线性相关

线性无关

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关

- 若不存在不全为零的$k_1,k_2,\cdots,k_m$,
  - 使得使得线性组合$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$成立
- 或者只有$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$,

    - 才使得线性组合$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$成立

> 单个非零向量,两个不成比例的向量均线性无关
> 向量组或线性相关或线性无关,二者必居其一且仅矩其一

> 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关,则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$不能由其任何部分线性表出

> 正交向量组必线性无关,线性无关向量组未必相互正交

题型

证明向量组线性相关或线性无关,即考察$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$

- 若能找到一组对应的系数,则线性相关
- 若找不到这样一组对应的系数,或者只有当系数为零时,则线性无关
    - 利用题中条件,证明$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$故线性无关得证

> - 此处有个疑问:
>   - 怎么区分线性无关的两个条件(可能还是我没有理解)
>   - 就是证明线性无关为什么只能证明系数全为零,而不能证明不存在这一组数字

证明线性无关,常用到反证法,假设线性先关

判别线性相关性的五大定理

记$A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$

定理1:

向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表出

- ⇔非齐次线性方程组有解

$$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{bmatrix}=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_sx_s=\beta$$

- $\Leftrightarrow r[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]=r[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta]$ 系数矩阵的列秩等于增广矩阵的列秩

> 反过来不能线性表出$\Leftrightarrow Ax=\beta$无解 $\Leftrightarrow r(A)\neq r([A,\beta])$ 系数矩阵的秩不等于增广矩阵的秩

定理2:

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关

- ⇔齐次线性方程组有非零解

$$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{bmatrix}=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_sx_s=0$$

- $\Leftrightarrow$向量组的秩$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$,矩阵的列秩小于矩阵的列数
  - $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\leqslant s-1$

> 线性无关$\Leftrightarrow$ $Ax=0$只有零解$\Leftrightarrow$ A的列秩$=s$ 矩阵的列秩等于矩阵的列数

> 我理解的线性相关就是矩阵的列,进过多次的列变换,最后等于零向量

定理2的扩展

方阵

- n个n维列向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关$\Leftrightarrow|A|=0\Leftrightarrow Ax=0$有非零解$\Leftrightarrow r(A)<n$
- n个n维列向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关$\Leftrightarrow|A|\neq0\Leftrightarrow$ $Ax=0$只有零解$\Leftrightarrow r(A)=n$

$n+1$个n为列向量必相关

- $n+1$个n维列向量,
  - 因$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1})\leqslant n<n+1$,
  - 故$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}]x=0$必有非零解$\Rightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$必线性相关

部分相关$\Rightarrow$整体相关

- $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关$\Leftrightarrow$ $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r]x=0$有非零解$\Rightarrow$ $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\cdots,\alpha_s]y=0$必有非零解,即$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\cdots,\alpha_s$线性相关

整体线性无关$\Rightarrow$任何部分线性无关

- $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\cdots,\alpha_s$线性无关$\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关

原向量组线性无关$\Rightarrow$延伸向量组线性无关 延伸向量组线线性相关$\Rightarrow$原向量组线性向量相关

定理3:

- s线性相关的充要条件是至少一个可由其余$s-1$线性表出
  - 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geqslant2)$线性相关的充要条件是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中至少有一个向量可由其余$s-1$个向量线性表出
- s线性无关的充要条件是任意一个都不可由其余$s-1$线性表出
  - 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geqslant2)$线性无关的充要条件是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中任一向量都不能由其余$s-1$个向量线性表出

定理4:

- s无关,s,β相关,则β可由s线性表出,且表示法唯一
    - 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关,而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$线性相关,则$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出,且表出法唯一

定理5:

若向量组$(1)\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$中的每一个向量$\beta_i(i=1,2,\cdots,s)$均可由向量组$(2)\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$线性表出

- 以少表多,则多相关
    - 当$s>t$
        - ,则向量组$(1)\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性相关
- β表示α,若β线性无关,则β的个数小于等于α的个数
    - 当向量组$(1)\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关,
        - 则$s\leqslant t$

其他结论

5.2 极大线性无关组,等价向量组,向量组的秩

极大线性无关组

在向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中,若存在部分组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$满足以下条件,则称$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$为原向量组的极大线性无关组

- $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性无关
- 向量组中任一向量$\alpha_i(i=1,2,\cdots,s)$均可由$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性表出

> 向量组的极大线性无关组一般不唯一,只由一个零向量组成的向量组不存在极大线性无关组 一个线性无关向量组的极大线性无关组就是该向量组本身

结论扩展

> 一个向量组的任何极大线性无关组都是等价向量组,即极大线性无关组之间可以相互线性表出

等价向量组

设两个向量组$(1)\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$和$(2)\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$.

- 若(1)中每个$\alpha_i(i=1,2,\cdots,t)$均可由(2)线性表出
    - 则称向量组(1)可由向量组(2)线性表出
- 若向量组(1)(2)可以相互线性表出
    - 则称向量组(1)与向量组(2)是等价向量组
    - 记作$(1)\cong(2)$

等价向量组满足

- 反身性,对称性,传递性

向量组和它的极大线性无关组是等价向量组

向量组的秩

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的极大线性无关组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$中所含向量的个数$r$称为向量组的秩,

- 记作$rank(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r$
- 或$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r$

> 等价向量组等秩,反之未必成立

> 给出带未知数或数值的两个矩阵(向量组)的秩是否相等
>
> - 进行行合并做增广矩阵,然后进行行初等变换,变换为阶梯矩阵,最后进行判断
>   - $[A\vdots B]$和$[B\vdots A]$需要两次
>   - 可能会求出不同的未知数的值,来影响判断

总结

求一个列向量组的极大线性无关组,并且其余向量用极大线性无关组表出

- 将矩阵做初等行变换,化成阶梯矩阵
- 选取一个列向量组的极大线性无关组
  - 进行初等行变换,变换为阶梯矩阵
  - 根据秩等于r,选取r个向量
    - 注意
      - 对于方阵
        - 齐次线性方程组只有零解
        - 系数行列式不为零
        - 矩阵的列秩等于矩阵的列数
      - 对于非方阵
        - 齐次线性方程组只有零解
        - 矩阵的列秩等于矩阵的列数
- 其余向量用极大线性无关组表出
  - 其余向量分别用极大线性无关组表出得到的方程组即是

利用等价向量组等秩,

- 讨论有表出关系的两个向量组的线性关系时,转换成讨论两个向量组的表出关系及秩的问题

向量组等价和矩阵等价是两个不同的概念

- 矩阵等价要同型
  - 行数,列数都要相等
- 向量等价要同维
  - 向量的个数可以不等

A,B同型, 且$A\cong B$

- $\Leftrightarrow r(A)=r(B)$
- $\Leftrightarrow PAQ=B$
  - P,Q是可逆矩阵

$\alpha_i,\beta_j(i=1,2,\cdots,;j=1,2,\cdots,t)$同维,且$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}\cong\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$

- $\Leftrightarrow\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$和$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$可以相互表出
- $\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$,且可单方向表出
  - 即只知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$这两个向量组中的某一个向量组可有另一个向量组线性表出

    > 证明见例题5.22-C
    >
    > 注意此处是跟等价矩阵的不同,除了要求等秩还有条件

- $\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$三秩相等

若向量组的秩为r

- 则任何$r+1$个向量的部分组合都是线性相关的
- 并不是所有r向量的部分组合都是线性无关的
- 并不是所有r向量的部分组合都是极大线性无关组

若向量组的秩r等于向量组的向量个数,则整个向量组都是线性无关的,即极大线性无关组是向量组本身

n阶可逆矩阵的秩$r=n$

若$A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$可以线性表示$\beta$,

- 则$r(A)=r([A,\beta])$

有关向量组的秩的重要定理和公式

###(矩阵)三秩相等

- 矩阵的秩($r(A)$) = A的行向量的秩(A的行秩) = A的列向量的秩(A的列秩)

####初等行变换的两个矩阵的行向量组

若A经过初等行变换为B,则

- A的行向量组和B的行向量组是等价向量组
- A和B的任何相应的部分列向量组具有相同的线性相关性

一个向量组由另一个向量组线性表出,它们秩的大小关系

设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$及$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$.若$\beta_i(i=1,2,\cdots,s)$均可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$线性表出, 则$r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)\leqslant r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$

5.3 向量空间

向量空间,子空间(数一)

基变换,坐标变换(数一)

向量的内积和正交

内积

设$\alpha=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^T,\beta=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]^T$,

- 则$\alpha^T\beta=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$称为向量$\alpha,\beta$的内积,
  - 记作(α,β),
- 即$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta$

> 内积是一个数

正交

当$\alpha^T\beta=0$时,称作向量α,β是正交向量

模

||\alpha|| = \sqrt{\sum_{i = 1}^{n}{a_i}^2}称为向量α的模(长度)

标准正交向量组

若列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$满足

$$\alpha_i{}^T\alpha_j=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$$

则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$为标准或单位正交向量组

施密特标准正交化(正交规范化)

线性无关向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的标准正交化公式

$$\begin{cases}\beta_1=\alpha_1,\\ \beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,\\ \cdots\cdots\\ \beta_n=\alpha_n-\frac{(\alpha_n,\beta_{n-1})}{(\beta_{n-1},\beta_{n-1})}\beta_{n-1}-\frac{(\alpha_n,\beta_{n-2})}{(\beta_{n-2},\beta_{n-2})}\beta_{n-2}-\cdots-\frac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\alpha_n-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(\alpha_n,\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)}\end{cases}$$

得到\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n是正交向量组

将$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$单位化,得$\eta_1 = \frac{\beta_1}{||\beta_1||},\eta_2= \frac{\beta_2}{||\beta_2||},\cdots,\eta_n = = \frac{\beta_n}{||\beta_n||}$,则$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$是标准正交向量组

> 与α_1, α_2都正交的单位向量有两个$\beta^0 = \pm \frac{\beta}{||\beta||}$

补充

介绍施密特正交化方法

- 构造正交向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$,并且使$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$等价
- β_1是α_1的线性组合,β是α_1,α_2的线性组合
- 不妨设
- $\beta_1 = \alpha_1,\beta_2 = \alpha-k\beta_2$
- k选取应满足β_1与β_2垂直(正交)
- 即 β_1与β_2的内积为0
  - $(\beta_1, \beta_2) =$

正交矩阵

设A是n阶方阵,满足${A}^TA = E$,则称A是正交矩阵

- A是正交矩阵$\Leftrightarrow A^TA = E \Leftrightarrow A^{-1} = A^T \Leftrightarrow$ A是行(列)向量组是标准正交向量组

设A是正交矩阵,则称$Y = AX$为正交变换,正交变换保持向量的内积不变,即保持向量的长度,两向量间的夹角不变