第02讲 极限与连续

2.1 数列极限的概念,性质与定理

数列极限定义

$\varepsilon - N$语言:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N^+$,当$n > N$时,恒有$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow lim_{x \to \infty} x_n = a$

关于ε

ε是描述接近程度,需要可以任意小(可以无限接近0) 几何解释:

- 多有$n > N$的数列项a_n都落在$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$内,而在该邻域之外只有有限项$n < N$

$\varepsilon - N$语言解题思路:

- 进行倒推的方法
  - 对于$\forall \varepsilon > 0$, 要使得$|x_n - a| < \varepsilon$成立,先去找到N
  - 化简表达式,进行放大$|x_n - a| \leqslant \frac{1}{Kn} < \varepsilon$
    - Kn表示从$|x_n - a|$放缩得到的表达式的简写
  - 从中解出$n > \frac{1}{K\varepsilon}$,取$N = [\frac{1}{K\varepsilon}] + 1$

> 利用定义法时,如何根据A来取值ε?例如$A > 0$满足任意小,ε可以等于$\frac{A}{2}$

数列收敛的充要条件

若a_{n_k}为a_n的子列,则a_{n_k}是新数列的第k项,是原数列的第n_k项,因此有$n_k \geqslant k(k = 1, 2, \dots)$

定理1(任一子序列的极限与原序列的极限相等)

- 任一子序列的极限与原序列的极限相等
  - 若数列a_n收敛,则其任何子列a_{n_k}也收敛,且$lim_{k \to \infty} a_{n_k} = lim_{k \to \infty} a_n$

> 可以用这个定理证明数列发散
>
> - 对于一个数列,如果能找到一个发散的子列,则原数列一定发散
> - 一个数列子序列收敛,原数列不一定收敛
> - 如果能找到两个收敛的子列,但它们收敛到不同的极限,则原数列也一定发散

定理1的**推论**:
$lim_{n \to \infty} a_n = a \Leftrightarrow lim_{k \to \infty} a_{2k} = lim_{k \to \infty} a_{2k-1} = a$

收敛数列的性质

定理2(唯一性):

给出数列x_n,若$lim_{n\to\infty}x_n=a$存在,则a是唯一的

- 在极限存在前提下,无论什么方法求得的极限值都是唯一的

从函数观点上来看,数列就是定义在正整数集上的函数, 由函数有界定义,可以得出**数列有界**定义:

- 若存在正整数$M>0$,对任意正整数n,有$|x_n|\leqslant M$,则称数列x_n有界

####**定理3(有界性)**:

- 若数列x_n极限存在,则x_n有界.

定义法证明时需要分清*:

- 什么时候用取定ε
- 什么时候用任给ε

定理4(保号性):

- 设数列a_n存在极限a,且$a>0$(或$a<0$),则存在正整数N,当$n>N$时,有$a_n>0$(或$a_n<0$)

推论:

- 设$a_n\geqslant 0(n=1,2,\dots)$,且$lim_{n\to\infty}a_n=a$,则$a\geqslant 0$
- 数列任一项大于零,极限大于零

极限运算规则

> 参与极限运算的前提是极限存在

设$lim_{n\to\infty}x_n=a$, $lim_{n\to\infty}y_n=b$

- $lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b$
- $lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=ab$
- 若$b\neq 0,y_n\neq 0$,则$lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}$

> 关于$lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b$的证明用到的绝对值不等式的技巧
>
> - $|x_ny_n-ab|$,插入一项,
> - 这项有两个因子,一个因子与第二项的因子相同,另一个因子与第一项的因子相同
> - $|x_ny_n-ay_n+ay_n+ab|=|(x_n-a)y_n+a(y_n+b)|$

推广:

- $lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n\pm z_n)=a\pm b\pm c$
- $lim_{n\to\infty}(x_ny_nz_n)=abc$

数列极限存在准则

> 先证明收敛,再求极限

准则1:夹挤准则

如果数列x_n,y_n,z_n满足下列条件

- $x_n\leqslant z_n\leqslant y_n(n=1,2,3,\dots)$

- $lim_{n\to\infty}x_n=a,lim_{n\to\infty}y_n=a$
- 则$lim_{n\to\infty}z_n=a$

> 题目中涉及到不等关系首选夹挤准则

如何使用夹挤准则

当数列通项公式已知

- 夹挤准则
  - 观察通项的规律
    - 通项为分式:观察分子与分母,分母是否一致
      - 分母大者$<\sum u_n<$分母小者
  - 当夹挤两端的极限不一致时考虑其他方法
- 定积分定义
- 利用幂级数求和
- 利用级数收敛的必要条件

举例

- 对于和式:$\sum_{i=1}^{n}u_i=u_1+u_2+\cdots+u_n$
  - 当有无穷项时,即n为无穷大时,
    - 则$n\cdot u_{min}\leqslant\sum_{i=1}^{n}u_i\leqslant n\cdot u_{max}$
  - 当有穷项时,即n为有限数,且$u_i\geqslant 0$时,
    - 则$1\cdot u_{max}\leqslant\sum_{i=1}^{n}u_i\leqslant n\cdot u_{max}$
  - 如何找到u_{min}和u_{max},需要讨论根据x的区间进行讨论
    - 可以辅助图像便于直观判断不同函数在区间的大小,便于找出u_{min}和u_{max}
    - 例如:$lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\frac{x^2}{2}^n}$

2.3 函数的连续与间断

准则2:单调有界准则

单调有界准则:

- 单调有界数列必有极限
  - 有上界,单调增加
  - 有下界,单调减少

> 当数列通项由递推关系式给出时,通常使用单调有界数列必有极限的准则
>
> - 可以先假设极限存在,设其为A,然后在通项两端同时求极限,得到一个关于A的方程,解方程即可,最后以此为依据,便于判断次数列的单调性与有界性

如何使用单调有界准则

- 证明单调性
  - 缩放法

        - 使用不等式(详见第六讲不等式)
    - 数学归纳法
        - 题中一般给出递推式
- 证明有界

常见极限列举和一些总结

- $\lim_{n\to\infty} q^n = 0(|q| < 1)$
- $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1(a > 0)$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} x = a$
    - 可以得出$\lim_{n\to\infty} |x| = a$
    - 可以得出$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = a$
- $lim_{n\to\infty} \frac{x}{a^n} = 0, |a| > 1$

2.2 函数极限的概念,性质与定理

邻域

函数极限的定义

$\varepsilon - N$语言:

- $x \to x_0$
    - $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$,当$0 < |x - x_0| < \delta$时,$|f(x) - A| < \varepsilon$
- $x \to \infty$
    - $\forall\varepsilon > 0, \exists X > 0$,当$|x| > X$时,$|f(x) - A| < \varepsilon$

> $x \to x_0$:既要考虑$x \to x_0^+$也要考虑$x \to x_0^-$

函数的单侧极限(左,右极限)

函数存在的充要条件

- 左极限=右极限=极限:
    - $lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow lim_{x\to x_0^-} f(x) = lim_{x\to x_0^+} f(x) = A$
- 函数值=极限+无穷小:
    - $lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$
    - $x \to 0, x\alpha(x) = o(x)$

函数极限的性质

唯一性:

需要注意的几个重要函数

- 自变量取值的双向性
- $lim_{x \to \infty} e^x$
  - $x \to +\infty$:$lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
  - $x \to -\infty$:$lim_{x \to -\infty} e^x = 0$
  - 注意x可以替换成$\frac{1}{x}$,然后$\frac{1}{x}$可以替换为$\frac{1}{x-1}$
- $lim_{x \to 0} \frac{sinx}{|x|}$
  - $x \to 0^+$:$lim_{x \to 0^+} \frac{sinx}{|x|} = lim_{x \to 0^+} \frac{sinx}{x} = 1$
  - $x \to 0^-$:$lim_{x \to 0^-} \frac{sinx}{|x|} = lim_{x \to 0^-} \frac{sinx}{x} = -1$
- $lim_{x \to \infty} arctanx$
  - $x \to +\infty$:$lim_{x \to +\infty} arctanx = \frac{\pi}{2}$
  - $x \to -\infty$:$lim_{x \to -\infty} arctanx = -\frac{\pi}{2}$
- $lim_{x \to 0} [x]$
  - $x \to 0^+$:$lim_{x \to 0^+} [x] = 0$
  - $x \to 0^-$:$lim_{x \to 0^-} [x] = -1$

局部有界性

局部有界性

- 如果$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$,则存在正常数$M$和$\delta$,使得当$0 < |x - x_0| < \delta$, 有$|f(x)| \leqslant M$

补充:

- 注意在题目中给出判断函数是否有界时,需要考察的特殊点
  - 无定义点
  - 间断点
  - $\pm\infty$
- 充分非必要:
  - 极限存在,则函数局部有界;
  - 函数函数局部有界,极限不一定存在
    - 例如:$|x|$
  - 需要注意特殊点的极限存在性判断
- $f(x)'$在(a, b)上有界,则$f(x)$在(a, b)上有界
- 有界函数与有界函数的和,差,积仍为有界函数
  - 已知$h(x) = f(x)g(x)$,且$f(x)$为有界函数,则判断$h(x)$的有界性,只需讨论$g(x)$的有界性

局部保号性

- 在导数的几何应用中有重要作用

无穷小与无穷大

无穷小:

- 极限值为0
- $lim_{x \to x_0} f(x) = 0$
- $lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

无穷大:

- 极限不是不存在,而是为无穷大
- $lim_{x\to x_0}f(x)=\infty$
- $lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

无穷小的比阶*

> 前提是均为无穷小,即极限值为0

$lim\alpha(x)=0,lim\beta(x)=0,\beta(x)\neq0$

- 高阶无穷小:
  - $lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$,记为$\alpha(x)=o(\beta(x))$
    - $\lim\frac{o(\beta(x))}{\beta(x)}=0$
      - 暂时未理解
- 同阶无穷小:
  - $lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq0$
- 等价无穷小:
  - $lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,记为$\alpha(x)\sim\beta(x)$
    - 扩展
      - $lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c,lim\frac{\alpha(x)}{c\beta(x)}=1$,记为$\alpha(x)\sim c\beta(x)$,$c$为常数
- k阶无穷小:
  - $lim\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=c\neq0$

> 并不是任意两个无穷小量都可以进行比阶的.

函数极限运算规则

若$limf(x)=A,limg(x)=B$

- 加减法:
  - $lim[kf(x)\pm lg(x)]=klimf(x)\pm llimg(x)$
- 乘法:
  - $lim[f(x)g(x)]=limf(x)limg(x)=AB$
  - $lim[f(x)]^n=[limf(x)]^n$
- 除法:
  - $lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B},(B\neq0)$
    - $lim\frac{f(x)}{g(x)}=lim\frac{f_1(x)+f_2(x)}{g_1(x)+g_2(x)}$极限存在,不一定得出$lim\{\frac{f_1(x)}{g_1(x)+g_2(x)}+\frac{f_2(x)}{g_1(x)+g_2(x)}\}$极限存在

> 注意:
>
> - 记住极限运算规则的前提是$limf(x)$与$limg(x)$存在
> - 当函数连续时,$f(x)=\lim\frac{f(x)}{x}x$

无穷小运算规则*

- 有限个无穷小的和是无穷小
- 有界函数与无穷小的乘积是无穷小
  - $lin_{x\to 0}\frac{1}{x}sin\frac{1}{x}$和$lin_{x\to 0}\frac{1}{x}cos\frac{1}{x}$不是无穷小与有界函数的乘积
    - $x \to +0, \frac{1}{x} \to +\infty$
    - $x \to -0, \frac{1}{x} \to -\infty$
  - $lin_{x\to 0}xsin\frac{1}{x}$和$lin_{x\to 0}xcos\frac{1}{x}$才是无穷小与有界函数的乘积
  - $lin_{x\to\infty}xsin\frac{1}{x}$和$lin_{x\to\infty}xcos\frac{1}{x}$的变形$\frac{f(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$,然后用等价无穷小
- **有限个**无穷小的乘积是无穷小
  - 无穷个无穷小的乘积就不一定是无穷小了
- 无穷小的运算:
  - 加减法,低阶吸收高阶:
    - $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^l), l = min\{m, n\}$
  - 乘法,阶数累加:
    - $o(x^m)o(x^n) = o(x^{m+n})$
    - $x^m o(x^m) = o(x^{m+n})$
  - 非零常数不影响阶数:
    - $o(x^m) = o(kx^m) = ko(x^m)$

常用的等价无穷小

当$x \to 0$:

- $sinx \sim x, tanx \sim x, arcsinx \sim x, arctanx \sim x, 1 - cosx \sim \frac{1}{2}x^2$
- $ln(1+x) \sim x$
  - $x \to 1, lnx = ln(1 + x - 1) \sim x - 1$
  - $x \to 0, ln(1 - x) \sim x$
- $e^x - 1 \sim x, a^x - 1 \sim xlna$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

> 注意这里的$x \to 0$,可以替换为$h(x) \to 0$

函数存在准则:夹挤准则

如果函数$f(x), g(x), h(x)$满足以下条件

- $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$
- $limg(x) = A, limh(x) = A$
- 则$limf(x)$存在,且$limf(x) = A$

> - $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x), lim_{x\to\infty}[h(x) - g(x)]$存在,但不能保证$h(x)$和$g(x)$存在,也不能保证$f(x)$存在

洛必达法则

法则1 $\frac{0}{0}$型:

- 当$x \to a$(或者$x \to \infty$)时,函数$f(x)$及$F(x)$都趋近于0
- $f(x)'$及$F(x)'$在点a的某去心邻域内(或者当$|x| > X$,此时X为充分大的正数)存在,且$F(x)' \neq 0$
- $lim_{x \to a}\frac{f(x)'}{F(x)'}$或$lim_{x \to \infty}\frac{f(x)'}{F(x)'}$存在或无穷大
- 则$lim_{x \to a}\frac{f(x)}{F(x)} = lim_{x \to a}\frac{f(x)'}{F(x)'}$

法则2 $\frac{\infty}{\infty}$型:

- 当$x \to a$(或者$x \to \infty$)时,函数$f(x)$及$F(x)$都趋近于∞
- $f(x)'$及$F(x)'$在点a的某去心邻域内(或者当$|x| > X$,此时X为充分大的正数)存在,且$F(x)' \neq 0$
- $lim_{x \to a}\frac{f(x)'}{F(x)'}$或$lim_{x \to \infty}\frac{f(x)'}{F(x)'}$存在或无穷大
- 则$lim_{x \to a}\frac{f(x)}{F(x)} = lim_{x \to a}\frac{f(x)'}{F(x)'}$

> 洛必达法则一般用于计算$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型的未定式极限的,不是$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型则不能用洛必达法则 如果极限$lim_{x \to a}\frac{f(x)'}{F(x)'}$仍然属于$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型,且$f(x)'$及$F(x)'$继续满足法则的条件,则可以继续使用洛必达法则
>
> - 即$lim_{x \to a}\frac{f(x)'}{F(x)'} = lim_{x \to a}\frac{f(x)''}{F(x)''}$

> 对于$lim_{x \to a}\frac{f(x)}{F(x)} = lim_{x \to a}\frac{f(x)'}{F(x)'}$来说:
>
> - 右存在,则左存在
> - 左存在,并不意味着右一定存在

> $x \to \infty$不能转换为$x \to 0$时,且是$\frac{\infty}{\infty}$型的极限,需要使用洛必达法则

> 当使用洛必达法则,导致求导越来越复杂时,建议考虑泰勒公式

> $x \to \infty$不能转换为$x \to 0$时要使用洛必达法则

关于积分上限函数$\int_x^0 f(t)dt$的极限

$lim_{x \to 0}\frac{\int_x^0 f(t)dt}{x}$->洛必达法则->$lim_{x \to 0}f(x) = 1$

海涅定理

海涅定理是联系数列极限与函数极限的桥梁

函数极限的计算总结

第一步:化简

- 提出极限不为0的因式
- 等价无穷小替换
  - 乘除用等价无穷小
  - 加减用泰勒公式
- 恒等变形
  - 换元法进行变量替换(方便计算)
    - 倒代换
      - 例如:将$e^{\frac{1}{x}}$,进行替换$u = \frac{1}{x}$

            - $x \to -\infty$,进行替换$u=-x$,$u \to \infty$
    - 提取公因式
    - 拆项
    - 合并
    - 根号差,则进行有理化
- 判断类型
    - $\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$
        - 当遇到$\frac{a^m x^m + a^{m-1}x^{m-1} + \cdots + a^2x^2 + ax + 1}{b^n x^n + b^{n-1}x^{n-1} + \cdots + b^2x^2 + bx + 1}$
            - 当$x \to \infty$时:
                - 分子分母同除以变量的最高次幂
                - 结果为$\frac{a^m}{b^n}$
        - 当遇到$\frac{x^m}{a^t}$
            - 即幂函数比上指数函数的形式,用洛必达法则,最后一定为0
    - $0 \cdot \infty$
    - $\infty - \infty$
        - 有分母,则通分,将加减化为乘除
        - 无分母,则提取公因式,或进行倒代换,来出现分母,再利用通分等,将加减化为乘除
    - ∞^0和0^0
        - $\lim u^v = e^{vlnu} = exp\{vlnu\}$
    - 1^{∞}:
        - $(1+0)^{\infty}$:
        - $lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$
            - 扩展:
                - $u \to 0, lim(1+u)^v = lim\{[1+u]^{\frac{1}{u}}\}^{uv} = e^{limuv}$
                - $u \to 1, limu^v = lim\{[1+(u-1)]^{\frac{1}{u-1}}\}^{(u-v)v} = e^{lim(u-1)v}$
            - 注意
                - $f(x) \to 0$
                    - $(1+f(x))^{g(x)} \Rightarrow (1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}f(x)g(x)}$
                    - $f(x)$的形式要与小括号内保持一致
                        - 即若为$f(x) \to 0^-$,相当于$[1+(-f(x))]^{g(x)} \Rightarrow [1+(-f(x))]^{\frac{1}{(-f(x))}(-f(x))g(x)}$

关于泰勒公式

> 任何可导函数都是可以用幂级数表示

> 详见第5讲

关于几个重要函数的泰勒公式

记不住,可以先记通项$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$
$arcsinx = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$

$tanx = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
$arctanx = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$

对应的等价无穷小:$A = B + \alpha \Rightarrow A \sim B$

- $x - sinx = \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$
- $arcsinx - x = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
- $tanx - x = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
- $arctanx - x = \frac{x^3}{3} + 0(x^3)$
- $x - ln(1+x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

注意函数应展开到x的几次方

- $\frac{A}{B}$型,适用于上下同阶原则
  - 将分子(分母)展开到与分母(分子)相同的x的k次方
- $A - B$型.适用于幂次最低原则
  - 即将A, B分别展开到它们的系数不相等的x的最低次幂为止

补充

有时候求带有极限的积分,由于一般情况下积分号和极限号不能交换次序

- 可以利用定积分中值定理去掉积分号
- 可以利用定积分中值定理的推广去掉积分号
  - $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$
    - $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \frac{1}{1+\xi_n}\int_0^1 x^n dx, \xi_n \in [0,1]$
- 可以利用积分估值定理
- 可以利用夹挤定理

连续的定义

- $lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$:
  - 设$f(x)$在x_0某邻域内有定义,若$lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)] = 0$,
  - 则称函数在点x_0连续,点x_0成为$f(x)$的连续点

> 主要用于证明题

- 极限值为函数值:
  - 设$f(x)$在x_0某一邻域内有定义,且有$lim_{x\to x_0} = f(x_0)$,
  - 则称函数在点x_0连续, 点x_0成为$f(x)$的连续点

连续与有界

- 区间连续:$f(x)$在$[a,b]$上连续,则$f(x)$在$[a,b]$上有界
  - 可以放宽条件至常积分定义$\int_a^b f(x)dx$
  - 即,若$f(x)$在$[a,b]$上可积,则函数$F(x)=\int_a^b f(x)dx$在$[a,b]$上连续
- 点连续:$f(x)$在(a,b)上连续,且$\lim_{x\to a^+} f(x),\lim_{x\to b^-} f(x)$存在,则$f(x)$在$(a,b)$上有界

间断点的定义

以下设$f(x)$在x_0某去心邻域内有定义

第一类间断点

可去间断点/可补间断点:

- 函数在x_0点的极值与函数值不等
- 函数在x_0点无定义

跳跃间断点:

- 函数在x_0点的左右极值存在,但是左右极值不相等

第二类间断点

无穷间断点:

- 函数在x_0点极值为∞
  - 不是极限不存在

振荡间断点:

- $y=sin\frac{1}{x}$在$x=0$处没有定义,且当$x\to1$时,函数值在-1与1之间交替振荡取值,极限不存在 ,但是有界$|sin(\frac{1}{x})|\leqslant 1$