第11讲 二重积分

11.1 二重积分的概念.性质与对称性

二重积分的几何背景

二重积分的几何背景:

- 曲顶柱体的体积
  - $\iint_D f(x,y)d\sigma$
- 类比
  - 长方体:底面积$\times$高

二重积分的存在性/可积性

- 设平面有界闭区域D由一条或者几条逐段光滑闭曲线所围成
- 当
  - $f(x,y)$在D上连续时
  - 或$f(x,y)$在D上有界,且它在D上除了有限个点和有限条光滑曲线外都是连续的,
- 则它在D上可积,即二重积分存在

二重积分的精确定义

类比于定积分的精确定义

$\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(a+\frac{b-a}{n}i, c+\frac{d-c}{n}j)\cdot\frac{b-a}{n}\frac{d-c}{n}$

- D是一个"长方形区域"

> 基本用在将和式$\sum$转为积分和$\int$中

"凑二重积分定义"的步骤

- 先提出$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$
- 再凑出$\frac{i}{n},\frac{j}{n}$
- 由于
  - $\frac{i}{n}=0+\frac{1-0}{n}i,$
    - $\frac{i}{n}$故可以读作0到1上的x
  - $\frac{j}{n}=0+\frac{1-0}{n}j$
    - $\frac{j}{n}$故可以读作0到1上的y
- $\frac{1}{n}=\frac{1-0}{n}$
  - 既可以读作"0到1上的dx",也可以读作"0到1上的dy"

例如

- $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{ij}{n^4}$
  - 凑定义
    - $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{ij}{n^2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$
    - $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{j}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$
    - $\int_0^1\int_0^1 xydxdy$
    - $\iint_D xyd\sigma$
- $\sum_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$
  - 凑定义
    - $\sum_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(1+\frac{i}{n})(1+\frac{j^2}{n^2})}\cdot\frac{1}{n^2}$
    - $\int_0^1\int_0^1\frac{n}{(1+x)(1+y^2)}dxdy$

> 定积分$\int_a^b f(x)dx = A$是一个数,二重积分$\iint_D f(x,y)dxdy = A$也是一个数

二重积分的性质

性质1 求区域面积:

- $\iint_D 1\cdot d\sigma = \iint_D d\sigma = A$

性质2 可积函数必有界

- 当$f(x,y)$在有界闭区域D上可积时,
  - 则$f(x,y)$在D上必有界

性质3 积分的线性性质

- 设k_1,k_2为常数,
  - 则$\iint_D[k_1f(x,y)\pm k_2f(x,y)]d\sigma = k_1\iint_D f(x,y)\pm k_2\iint_D f(x,y)$

性质4 积分的可加性

- 当$f(x,y)$在有界闭区域D上可积时,且D_1 \cup D_2 = D,D_1 \cap D_2 = \varnothing,
  - 则\iint_{D}f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1}f(x,y) + \iint_{D_2}f(x,y)

性质5 积分的保号性

- 当f(x,y),g(x,y)在有界闭区域D上可积时,若在D上,f(x,y) \leqslant g(x,y)
  - 则\iint_{D}f(x,y) \leqslant \iint_{D}g(x,y)
    - 特别地有|\iint_{D}f(x,y)| \leqslant \iint_{D}|f(x,y)|

性质6 二重积分的估值定理

- 设M,m分别是$f(x,y)$在有界闭区域D上的最大值和最小值,A为D的面积,
  - 则有mA \leqslant \iint_{D}f(x,y)d\sigma \leqslant MA

性质7 二重积分的中值定理

- 设函数$f(x,y)$在有界闭区域D上连续,A为D的面积,
  - 则在D上至少存在一点(\varepsilon , \eta),使得\iint_{D}f(x,y)d\sigma = f(\varepsilon , \eta)A

普通对称性和轮换对称性

- 对称性问题本质上是概念,不是计算
- 是关于积分区域D的对称性

普通对称性

$$\iint_{D} f(x,y)dxdy = \begin{cases} 2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy & ,f(x,y) = f(-x,y) \\ 0 & ,f(x,y) = -f(-x,y) \end{cases}$$

- 区域D关于x轴对称
  - 两个f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(-x,y)\mathrm{d}\sigma
  - 对称位置体积相等
- 区域D关于原点对称
  - f(x,y)\mathrm{d}\sigma = -f(-x,y)\mathrm{d}\sigma
  - 对称位置体积正好相反

轮换对称性

积分值与用什么字母表示示无关的

- \iint_{D_{xy}}f(x,y)dxdy = \iint_{D_{yx}}f(y,x)dydx

轮换对称性:

- 若把x与y对调后,区域D不变
  - 或称区域D关于y = x对称
- 则\iint_{D}f(x,y)dxdy = \iint_{D}f(y,x)dydx

例如

- 区域D = \{ (x,y) | x^2 + y^2 \leqslant 1, x, y \geqslant 0\} f(x)为D上的正值连续函数, a,b为常数,求I = \iint_{D}\frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f()y}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)\mathrm{d}\sigma}}
- 分析
  - 被积函数为抽象的,无法直接计算
  - 观察发现
    - 把x和y对调后,区域D不变,
      - 即区域D关于y=x对称
  - 根据轮换对称性
    - I = \iint_{D}\frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} \mathrm{d}\sigma= I = \iint_{D}\frac{a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} \mathrm{d}\sigma
    - 2I = \iint_{D}(a+b) \mathrm{d}\sigma

> 应用轮换对称性一般是被积函数不宜计算的或抽象函数一般都是

> - A + B不容易计算,但是(A + B) + (B + A)可能会消去分母便于计算

11.2 二重积分的计算

> 将二次(累次)积分转化为二重积分时,必须将积分限写成下限小于上限(累次积分无此要求),然后交换次序

直角坐标系

> 下限均小于上限

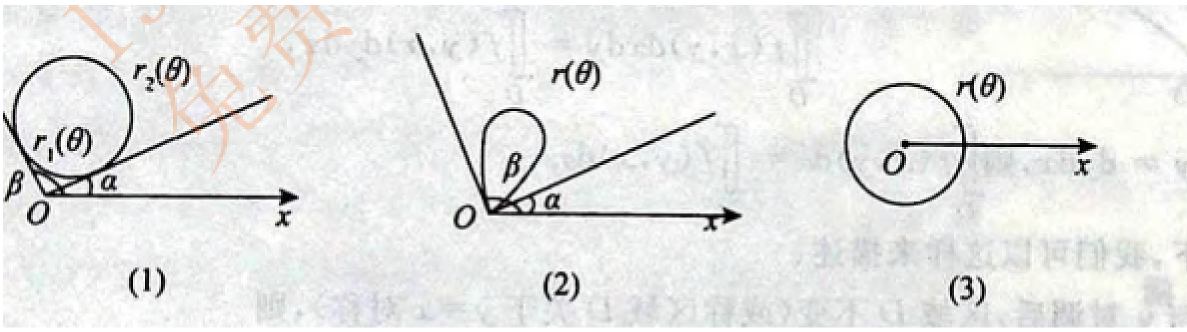
D为X型区域

- $\iint_{D}f(x,y)d\sigma = \int_{a}^{b}dx\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}f(x,y)dy,\varphi_1 \leqslant y \leqslant \varphi_2,a \leqslant x \leqslant b$

D为Y型区域

- $\iint_{D}f(x,y)d\sigma = \int_{c}^{d}dx\int_{\psi_1}^{\psi_2}f(x,y)dy,\psi_1 \leqslant y \leqslant \psi_2,c \leqslant x \leqslant d$

极坐标系



极点O在区域D外部

- $\iint_{D}f(x,y)d\sigma = \int_{\alpha }^{\beta }d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(rcos\theta, rsin\theta)rdr$

极点O在区域D边上

- $\iint_{D}f(x,y)d\sigma = \int_{\alpha }^{\beta }d\theta \int_{0}^{r(\theta)}f(rcos\theta, rsin\theta)rdr$

极点O在区域D内部

- $\iint_{D}f(x,y)d\sigma = \int_{0}^{2\pi}d\theta \int_{0}^{r(\theta)}f(rcos\theta, rsin\theta)rdr$

> 极坐标中几乎都是先计算r后积分θ

极坐标与直角坐标系选择的一般原则

满足以下则选择极坐标否则使用直角坐标

- 被积函数是否为$f(x^2+y^2),f(\frac{y}{x}),f(\frac{x}{y})$等形式
  - 是则选择极坐标
- 再看积分区域是否为圆或者圆的一部分
  - 是则选择极坐标

极坐标系与直角坐标系的相互转化

- 公式:

$$\begin{cases} x = rcos\theta \\ x = rsin\theta \end{cases}$$

- 画好区域D的图形,确定好上下限
- r drd\theta = dxdy

出题角度

二重积分的基础题

- 坐标系
  - 直角坐标系下的计算
  - 极坐标系下的计算
  - 极坐标系与直角坐标系的相互转化后的计算
- 积分次序

  > 首先画出积分区域,方便写出交换次序后的积分上下限

  - 直角坐标系下交换积分次序
    - 被积函数$f(x,y)$关于x或y的函数,原函数无法用初等函数表示
    - 进行变量替换时观察哪种积分次序方便后续计算
      - 例如
        - \int_0^1dy\int_y^1 \sqrt{x^2 - y^2}dx
          - 计算\int\sqrt{x^2 - y^2}dx
            - 等价于\sqrt{x^2-a^2}, x = asecx
          - 计算\int\sqrt{x^2 - y^2}dy
            - 等价于\sqrt{a^2-y^2}, y = asinx
          - 对比后者更方便计算
  - 极坐标系下交换积分次序
- 涉及二重积分概念的计算

交换积分次序

- 例如
  - \int_1^2dx\int_{\sqrt{x}}^xsin\frac{\pi x}{2y}dy + \int_2^4dx\int_{\sqrt{x}}^2 sin\frac{\pi x}{2 y}dy
    - 如果不进行积分次序的交换,被积函数sin\frac{\pi x}{2y}作为y的函数,原函数无法用初等函数表示
      - \int_1^2dx\int_{\sqrt{x}}^xsin\frac{\pi x}{2y}dy + \int_2^4dx\int_{\sqrt{x}}^2 sin\frac{\pi x}{2 y}dy
      - \iint_{D}sin\frac{\pi x}{2y}dxdy
      - 此时D由X型区域变为Y型区域
        - D = 1 \{(x,y) | \leqslant y \leqslant\ 2, y \leqslant x \leqslant y^2 \}

- $\int_1^2dy\int_x^{x^2}sin\frac{\pi x}{2y}dx$