# 第06讲 线性方程组

> 方程组的解是描述向量组各向量之间数量关系的系数

## 6.1 齐次线性方程组

方程组(1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

称为$m$个方程组$n$个未知量的齐次线性方程组

其向量形式为

- $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$
- $$\alpha_j=\begin{bmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{bmatrix},j=1,2,\cdots,n$$

其矩阵形式

- $A_{m\times n}x=0$
- $$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix},x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

### 有解的条件

- 当$r(A)=n$时
  - $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关
  - 方程组(1)有唯一零解
- 当$r(A)=r<n$时
  - $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关
  - 方程组(1)有非零解,且有$n-r$个线性无关解

> 为方阵时

> - 至少有零解
> - 有唯一零解
>   - $\Leftrightarrow |A| \neq 0$
> - 有非零解
>   - $\Leftrightarrow |A| = 0$

## 解的性质

若$A\xi_1 = 0, A\xi_2 = 0$

- 则$A(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) = 0$,其中$k_1, k_2$是任意常数

## 求解方法

### 高斯消元法

- 将系数矩阵$A$作初等行变换化成阶梯形矩阵$B$(或最简阶梯形矩阵),
- 初等行变换将方程组化为通解方程组
- 故$Ax = 0$和$Bx = 0$同解
- 只需解$Bx = 0$即可

其中

- 系数矩阵的秩：$r(A) = r$
  - 独立方程个数
  - 独立未知量$x_1, x_2, \cdots, x_r$的个数
- $m - r$:
  - 原方程组中方程个数$m$ - 系数矩阵的秩$r$
  - 多余方程表示的方程个数
    - 就是化为行梯形矩阵中全为0的行向量的数量
- $n - r$ :
  - 未知数个数$n$ - 系数矩阵的秩$r$
  - 自由未知量$x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$的个数
    - 自由未知量：可以用来表示其他未知量的量

令自由未知量为任意常数,回代求出独立未知量,即$Ax = 0$的通解

> 选取自由未知量和自由未知量的取值
>
> - 选取自由未知量
>   - 非零行首元素非零元素所在列对应的未知量为约束未知量,剩下的就是自由未知量
>     - 未理解:那怎么理解自由未知量的等价?
> - 自由未知量的取值
>   - 以1或$-1$为系数选取,取值时且尽量"凑整",以方便计算

> 方程组的求解的回代过程

> - 方法一
>     - 从$n$行开始求解约束未知量
> - 方法二
>     - 对梯形矩阵$B$继续作行变换,化成行最简梯形矩阵

> 行阶梯矩阵
>
> - 在矩阵中可画出一条阶梯线,线的下方全为0，每个台阶只有一行，台阶数即是非零行的行数，阶梯线的竖线(每段竖线的长度为一行)后面的第一个元素为非零元，也就是非零行的第一个非零元
>
> 行最简形矩阵
>
> - 若非零行的第一个非零元都为1，且这个非零元所在的列的其他元素都为0

## 基础解系和解的结构

### 基础解系:

设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是方程组$Ax=0$的解，若满足

- $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关
- 方程组$Ax=0$的解均可由$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性表出

则称$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$为$Ax=0$基础解系

> 基础解系的向量的个数=自由未知量的个数$=n-r$

### 通解:

设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是方程组$Ax=0$的基础解系,

- 则$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$是方程组$Ax=0$的通解
    - 其中$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$是任意常数

## 解空间

记$S=\{x|Ax=0\}$表示齐次线性方程组$Ax=0$的解的全体,且集合$S$具有如下性质

- 若$\xi_1,\xi_2\in S$,那么$\xi_1+\xi_2\in S$
    - 即两个解的和还是方程组的解
- 若$\xi\in S,k\in R$,那么$k\xi\in S$
    - 即一个解的倍数还是方程组的解

则有$n$个未知量的齐次线性方程组$Ax=0$的解向量集合$S$构成$R^n$的一个子空间.称$S$是齐次线性方程组$Ax=0$的解空间

# 6.2 非齐次线性方程组

方程组$(2)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

称为$m$个方程组$n$个未知量的非齐次线性方程组,其向量形式为

- $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b$
- $$\alpha_j = \begin{bmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, j = 1, 2, \cdots, n$$

其矩阵形式

- $A_{m\times n}x = b$
- $$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

矩阵$A$的增广矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix}$$

简记成$[A\vdots b]$或$[A, b]$

## 有解的条件

- 若$r(A) \neq r([A, b])$
  - $b$不能由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表出
  - 则方程组$(4)$无解
- 若$r(A) = r([A, b]) = n$
  - $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关,$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta$线性相关
  - 则方程组$(4)$有唯一解
- 若$r(A) = r([A, b]) = r < n$
  - 则方程组$(4)$有无穷多解

> 遇到带参数的非齐次线性方程组解的问题,可以先讨论唯一解的情况

## 解的性质

设$\eta_1, \eta_2, \eta$是非齐次线性方程组$Ax = b$的解, $\xi$是对应齐次线性方程组$Ax = 0$的解,则

- $\eta_1 - \eta_2$是$Ax = 0$的解
- $k\xi + \eta$是$Ax = b$的解
  - $x_i - \eta = k\xi$

## 求解方法和通解结构

将增广矩阵作初等行变换化成阶梯形(或最简洁梯形)矩阵,求出对应齐次线性方程组的通解加上一个非齐次线性方程组的特解即是非齐次线性方程组的通解

# 典型题

$A$的行向量与$Ax = 0$的解向量的关系

- 设$Ax = 0$的解为$\beta = [b_1, b_2, \cdots, b_n]^T$
- $a_{i1}b_1 + a_{i2}b_2 + \cdots + a_{in}b_n = 0, (i = 1, 2, \cdots, m)$
- 记$\alpha_i = [a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}], (i = 1, 2, \cdots, m)$
- 则$A$的行向量为$a_{i1}b_1 + a_{i2}b_2 + \cdots + a_{in}b_n = \alpha\beta = 0, (i = 1, 2, \cdots, m)$
- 所以
  - $A$的行向量与$Ax = 0$的解向量是正交关系
- 对$\alpha\beta$进行转置,得$\beta^T\alpha^T = 0$
  - 将解向量的转置作为齐次方程组的行向量
  - $A$的行向量的转置作为方程组的解向量

选择题时,快速判断是否是基础解系的方法:

- 线性无关
  - 系数行列式是否不为零
- 例如
  - 当$\xi_1, \xi_2, \xi_3$是方程组$Ax = 0$的基础解系,判断$\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_3 - \xi_1$是否也是方程组$Ax = 0$的基础解系

求两个方程组的公共解

- 齐次线性方程组$A_{m\times n}x = 0$和$B_{m\times n}x = 0$的公共解
  - 方法一:$[A^T, B^T]^T x = 0$,联立求解
  - 方法二:在一个方程中的通解解中寻找符合另一个方程组的解
    - 将一个方程的通解带入另一个方程中
  - 方法三:在两个方程组的通解寻找公共解
    - 分别设两个方程组的通解,然后对应相等

- 非齐次线性方程组$A_{m\times n}x=\alpha$和$B_{m\times n}x=\beta$的公共解

求解方程组时,满足一个与变量有关的等式条件,该条件可以当并入方程组中(P-122-6-25)

同解方程组

- 两个方程组$A_{m\times n}x=0$和$B_{m\times n}x=0$有完全相同的解
- ⇔$Ax=0$的解满足$Bx=0$,且$Bx=0$的解满足$Ax=0$
- ⇔r(A)=r(B),且$Ax=0$的解满足$Bx=0$(或$Bx=0$的解满足$Ax=0$)
- ⇔r(A)=r(B)=r([A^T,B^T]^T)