题号	分析	
11.1	观察被积函数,进行拆分计算	
11.2	直角坐标系下的二重积分计算;注意画出积分区域	
11.3	极坐标系与直角坐标系的相互转化;积分的可加性;轮换对称性可以简便计算	
11.4	先画出积分区域;极坐标系与直角坐标系的相互转化;积分的换元技巧;相关公式	
11.5	极坐标系与直角坐标系的相互转化	
11.6-11.7	如果不进行积分次序的交换,被积函数f(x,y)关于x或y的函数,原函数无法用初等函数表示	
11.8	进行变量替换时观察哪种积分次序方便后续计算	
11.10	注意此处的三角函数与反三角函数的图像	
11.11	极坐标系与直角坐标系的相互转化	
11.12	利用二重积分是一个数的概念	
11.13	由于sgnx的存在,所以需要将积分区域进行划分	
11.14	由于max\{x,y\}和|y - x^2|的存在,所以需要将积分区域进行划分	
11.15	关键在于找好积分区域	
11.16	二重积分与极限	
11.17	二重积分与极限;二重积分中值定理,反三角函数的性质	
11.18	方法一:积分上限函数,累次积分,导数与单调性;方法二:交换积分次序,更改变量名,利用f(x)单调减小,且为正值	
11.19	方法1:分部积分; 方法二:化为二重积分,交换积分次序	
11.20	代换,换元技巧	
11.21	二重积分的逆向思维,交换积分次序,算术平均数大于几何平均数	
11.22	计算技巧,与11.21思想类似	
11.23	等价无穷小,积分上限函数,积分的中值定理,多元函数的可微	
11.24	将已知条件与偏导数的定义建立联系	

11.4

积分区域

- 极坐标为
  - $D = \{(r, \theta) | 0 \leqslant r \leqslant sec\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\}$
- 化为直角坐标
  - 由$0 \leqslant r \leqslant sec\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$
    - $0 \leqslant x \leqslant 1$
    - $x \geqslant y \geqslant 0$

11.5

积分区域

- 直角坐标为
  - $D = \{(x,y) |0 \leqslant x \leqslant 1 , 1-x \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2} \}$
- 化为极坐标
  - $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$
  - 用$x = rcos\theta , y = rsin\theta$和$1-x \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}$
    - 可得$1 \leqslant r \leqslant \frac{1}{cos\theta + sin\theta}$

11.10

积分次序先y后x

- 积分区域
  - $D =D_1 + D_2$
    - $D_1 = \{ (x,y) | 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant sinx\}$
    - $D_2 = \{ (x,y) | \pi \leqslant x \leqslant 2\pi, sinx \leqslant y \leqslant 0\}$

交换积分次序变为先x后y

- 积分区域
  - $D =D_1 + D_2$
    - $D_1 = \{ (x,y) | 0 \leqslant y \leqslant 1, arcsiny \leqslant x \leqslant \pi - arcsiny\}$
    - $D_2 = \{ (x,y) | -1 \leqslant x \leqslant 0, \pi - arcsiny \leqslant y \leqslant 2\pi + arcsiny\}$

> 未理解图像

11.11

> "穿入穿出"的概念

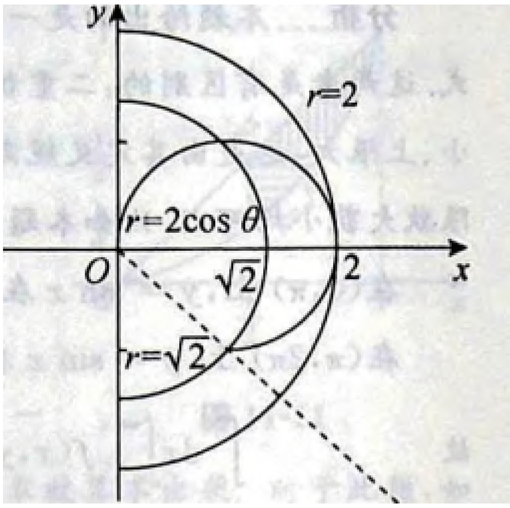
交换$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta \int_0^{2cos\theta}rf(r, \theta)dr$的积分次序,其中$f(r, \theta)$连续

先r后θ的积分次序

- 积分区域
  - $-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},0 \leqslant r \leqslant 2cos\theta$

分析穿入与穿出

- $0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2}$
    - 圆弧r从$\theta = -\frac{\pi}{4}$进入区域D,从$r = 2cos\theta$, $(\theta > 0)$穿出
- $\sqrt{2} \leqslant r \leqslant 2$
    - 圆弧r从$r = 2cos\theta$, $(\theta < 0)$进入区域D, 从$r = 2cos\theta$, $(\theta > 0)$穿出



交换积分次序,先θ后r

- 积分次序
    - $-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant arccos\frac{r}{2}, \sqrt{2} \leqslant r \leqslant 2$
    - $-arccos\frac{r}{2} \leqslant \theta \leqslant arccos\frac{r}{2}, 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2}$

11.12

设区域D $\{(x,y) | x^2+y^2 \leqslant y, x \geqslant 0 \}$.f(x,y)为D上的连续函数,且$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint_{D}f(u,v)dudv$求f(x,y).

解

设$\iint_{D}f(u,v)dudv = A$

则$\iint_{D}f(x,y) dxdy= \iint_{D}\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy-\frac{8}{\pi}A\iint_{D}dxdy$

从而

- $\frac{1}{2}\iint_{D}dxdy = \frac{1}{2}\pi(\frac{1}{2})^2 = \frac{\pi}{8}$
- $A = \iint_{D}\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy - A$

接下来由于被积函数含有x^2,y^2且积分区域为半球形,变换为极坐标计算

11.13