第14讲

14.1 一元函数微分学的物理应用

已知指点运动的位移s关于时间t的函数为$s = s(t)$,称它为质点的运动方程(位移方程),则

- 其速度为$v = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t)$
- 其加速度$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = s'(t)$

14.2 一元函数微分学的几何应用

设$y(x)$二阶导数,则曲线$y = y(x)$在其上点$(x, y(x))$处的

- 曲率公式$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$
- 曲率半径的计算公式:$R = \frac{1}{k}$
- 曲率圆表达式:$(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 = R^2$
  - 其中$\alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}$

14.3 一元函数积分学的物理应用

变力沿直线做功

设方向沿x轴正向的力函数为F(x)(a \leqslant x \leqslant b),则物体沿x轴从点a移动到点b时,变力F(x)所做的功:W = \int_{a}^{b}F(x)dx,功的元素dW = F(x)dx

> 力关于路程的定积分就是功

抽水做工

将容器中的水全部抽出所做的功为W = \rho g \int_{a}^{b}xA(x)dx, 其中\rho为水的密度,g为重力加速度,功的元素dW = \rho g x A(x) dx为位于x处厚度为dx,水平截面面积为A(x)的一层水被抽出(路径为x)所做的功

> 抽水做功的特点是:力不变(重力),路程在变,切结该问题的关键在于确定x处的水平截面面积A(x),其余量都是固定的

水压力

垂直浸没在水中的平板ABCD的一侧受到的水压力为P = \rho g \int_{a}^{b}x[f(x) - h(x)]dx,其中\rho为水的密度,g为重力加速度

> 水压力问题的特点:压强随着水的深度而改变,求解该问题的关键在于:确定x处的平板的宽度f(x) - h(x)

14.4 一元函数积分学的几何应用

平面曲线的弧长

若平面光滑曲线L由$y = y(x)(a \leqslant x \leqslant b)$给出,则$L = \int_a^b \sqrt{1 + {[y'(x)]}^2}dx$

若平面光滑曲线L由参数式$x = x(t),y = y(t) (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$给出,则$L = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{{[x'(t)]}^2 + {[y'(t)]}^2}dt$

若平面光滑曲线L由$r = r(\theta)(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$给出,则$L = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{{[r(\theta)]}^2 + {[r'(\theta)]}^2}dt$

旋转曲线的面积

曲线$y = y(x)$的区间[a,b]上的曲线弧绕x轴一周所得到的旋转曲面的面积$S = 2\pi \int_{a}^{b}|y(x)|\sqrt{1 + {[y'(x)]}^2}dx$

曲线$x = x(t),y = y(t) (\alpha \leqslant t \leqslant \beta, x'(t) \neq 0)$在区间$[\alpha, \beta]$上的曲线弧段绕x轴旋转一周所得到的旋转曲面的面积$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta}|y(t)|\sqrt{{[x'(t)]}^2 + {[y'(t)]}^2}dt$

平行截面面积为已知的立体体积

在区间[a,b]上,垂直于x轴的平面截立方体Ω所得到的截面面积为x的连续函数A(x),则Ω的体积为$V = \int_{a}^{b}A(x)dx$

14.5 微分方程的物理应用

涉及牛顿第二定律

- 物体质量m
- 力f(重力,浮力,阻力)
- 加速度:$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d} t} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$

变化率问题

- 题目多为:t时刻某量y对t的变化率与t时刻某量成正比
- t时刻物体温度x(t)对时间的变化率与t时刻物体和介质的温差$x - x_0$成正比
  - $\frac{dx}{dt} = -k(x - x_0)$,负号代表温度随着时间的增加而降低
- t时刻已掌握新技术的人数x的变化率和已掌握新技术与未掌握新技术的人数之积成正比
  - $\frac{dx}{dt} = k(N - x_0)$

14.6 欧拉方程(数学一)

14.7 傅里叶级数(数学一)