6 零点问题 微分不等式

6.1 零点问题

方程$f(x)=0$的根就是函数$f(x)$的零点

> 讨论方程根的问题与讨论函数的零点问题等价

6.1.1 零点定理

设$f(x)$在$[a,b]$上连续,且$f(a)f(b)<0$,则$f(x)=0$在$[a,b]$内至少有一个根

推广:

- $f(x)$在(a,b)上连续,$lim_{x\to a^+}f(x)=\alpha,lim_{x\to b^-}f(x)=\beta$,且$\alpha\beta<0$,则在$(a,b)$至少有一个根
    - a,b,α,β可以是有限数,也可以是无穷大

> 主要用于证明根的存在性

6.1.2 单调性

若$f(x)$在(a,b)上单调,则$f(x)=0$在(a,b)内至多有一个根,这里的a,b可以是有限数,也可以是无穷大

> 主要用于证明根的唯一性

6.1.3 几何意义

方程的根作为两条曲线的交点,代数语言与几何语言概念不同,但是描述的是同一件事

- 代数语言:$f(x)=g(x)$的根
- 几何语言:曲线$f(x)$与$g(x)$的交点

6.1.4 利用罗尔中值定理

构造辅助函数

- 首先观察法
- 然后
    - 将欲证相等的两式移至等号一端,并设根为x,再做积分
    - 若欲讨论的方程中既有函数$f(x)$又有其导函数$f'(x)$,经常借助其指数函数e^x构造辅助函数,再用罗尔定理,利用$e^x\neq 0$达到目的
        - 详见05 罗尔定理 总结

6.1.5 利用拉格朗日中值定理

定理结论中的ξ即为方程$f(b)-f(a)=f'(x)(b-a)$的根

6.1.6 利用柯西中值定理

定理结论中的ξ即为方程$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$的根

6.1.7 费马定理(极值的必要条件)

设$f(x)$在x_0处取极值,若$f'(x_0)$存在,则$f'(x_0)=0$

常见用法:
为证$g(x)=0$有根,可取$g(x)$的一个原函数$f(x)$,对$f(x)$用费马定理

6.1.8 罗尔原话

若$f^{(n-1)}(x)$最多只有一个实零点,则$f(x)$最多只有n个不同实零点

6.1.9 若在题设中给出一个端点函数值为零

例如$f(a)=0$,同时在欲证方程中含有自然数m,n等,应该在$f^{(m)},f^{(n)}$上下功夫

6.1.10 利用积分中值定理

定理中ξ即为方程$\int_b^a f(t)dt=f(x)(b-a)$的根

6.1.11 实系数奇次多项式至少有一个实零点

6.1.12 多项式有重根的充要条件

设$p(x)$为多项式,则x_0是$p(x)=0$的r重根的充要条件是

- $p(x_0)=p'(x_0)=p''(x_0)=\cdots=p^{(r-1)}(x_0)=0,p^{(r)}(x_0)\neq 0$

6.2 微分不等式

6.2.1 经典基本不等式总结

1. 绝对值不等式

设a,b为实数

- $2|ab|\leqslant a^2+b^2$
- $||a|-|b||\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$

> 构造绝对值不等式的用法:$|f(x)|=|f(x)-A+A|<|f(x)-A|+|A|<\varepsilon+|A|<|M|$

推广:

- 离散情况:
  - 设$a_1,a_2,\ldots,a_n$为实数,则$|a_1\pm a_2\pm\ldots\pm a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$
- 连续情况:
  - 设$f(x)$在$[a,b]$上可积.则$|\int_a^b f(x)dx|\leqslant\int_a^b|f(x)|dx$

2. 均值不等式

设$a_1,a_2,...,a_n>0$

- 算术平均值大于等于几何平均值:$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$,当且仅当$a_1=a_2=...=a_n$时等号成立
- 算术平均数的绝对值小于平方平均数:$|\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}|\leqslant\sqrt[n]{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}}$,当且仅当$a_1=a_2=...=a_n$时等号成立

证明:
算术平均值大于等于几何平均值:$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$,当且仅当$a_1=a_2=...=a_n$时等号成立 证:
用拉格朗日乘数法,设$a_1a_2...a_n=a$,并做辅助函数 $F=a_1+a_2+...+a_n+\lambda(a_1a_2...a_n-a)$
令

$$\begin{cases}F'_{a_1}=1+\lambda a_2a_3...a_n=0\\F'_{a_2}=1+\lambda a_1a_3...a_n=0\\......\\F'_{a_n}=1+\lambda a_1a_2...a_{n-1}=0\\F'_{\lambda}=a_1a_2...a_n-a=0\end{cases}$$

分别将$a_1,a_2,..,a_n,\lambda$当作未知数对F求导
然后根据等式判断$a_1=a_2...=a_n$
最后得$a_1=a_2...=a_n=\sqrt[n]{a}$

由于$a_1,a_2,...,a_n>0$,所以$a_1+a_2+...+a_n$无最大值,其最小值为$min a_1+a_2+...+a_n=n\sqrt[n]{a}$,即得
$a_1+a_2+...+a_n\geqslant n\sqrt[n]{a}$

推广:
设$b_i\geqslant(i=1,...,k)$,$m_1,...,m_k$是正整数,则$\frac{m_1n_1+...+m_kb_k}{m_1+...+m_k}\geqslant(b_1^{m_1}...b_k^{m_K})^{\frac{1}{m_1+...+m_k}}$
证明:
由均值不等式得知,算术平均数大于几何平均数.
令$m_1+...+m_k=n$可得$b_1+b_1+...+b_1\geqslant\sqrt[m_1+...+m_k]{b_1^{m1}}$

补充:

- 均值不等式/平均值不等式/平均不等式:$H_n\leqslant G_n\leqslant A_n\leqslant Q_n$,即调和平均值小于等于几何平均值小于等于算术平均值小于等于平方平均值
- 调和平均值: $H_n=\frac{n}{\sum^n{}_{i=1}\frac{1}{x_i}}$
- 几何平均值: $G_n=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$
- 算术平均值: $A_n=\frac{\sum_{i=1}^n}{n}x_i$
- 平方平均值: $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}$

3. 杨氏不等式

设:$x>0$,$y>0$,$p>0$,$q>0$,$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

- 则,$xy\leqslant\frac{x^p}{p}+\frac{x^q}{q}$

证明:
提示:不等式两边取对数$ln(xy)\leqslant ln(\frac{x^p}{p}+\frac{x^q}{q})$,这样两个不等式等价,证明原不等式等价于证明这个不等式

由于$x>0$,令$f(x)=lnx\Rightarrow f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0\Rightarrow f(x)$是凸函数

由凹凸性定义有$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\geqslant \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),\lambda\in(0,1),x_1,x_2\in(a,b)$
令$\lambda=\frac{1}{p},x_1=x^p,x_2=y^p$,则$1-\lambda=1-\frac{1}{q}$
即
$ln(\frac{x^p}{p}+\frac{x^q}{q})\geqslant\frac{1}{p}f(x^p)+\frac{1}{q}f(y^q)=ln(xy)$
即
$\frac{x^p}{p}+\frac{x^q}{q}\geqslant xy$

例题:
设p,q是大于1的常数,且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,证明:对任意的$x>0$,都有$\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}\geqslant x$

4.

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$

证明:
利用$cos\theta=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|}=\frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}$,且$|cos\theta|\leqslant 1$

推广:
$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$

5.

若$f(x),g(x)$在$[a,b]$上可积且平方可积,则$[\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx]^2\leqslant\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$

证明:
若$g(x)=0$,不等式显然成立

若$g(x)\neq 0$
对一切实数λ,均有$\int_a^b[f(x)+\lambda g(x)]^2dx\geqslant 0$,即$\int_a^b f^2(x)dx+2\lambda\int_a^b f(x)g(x)+\lambda^2\int_a^b g^2(x)dx\geqslant 0$恒成立.又由$\int_a^b g^2(x)dx>0$,则关于λ的这个二次三项式的判别式必须有
$\Delta=4[\int_a^b f(x)g(x)dx)]^2-4\int_a^b g^2(x)dx\int_a^b f^2(x)dx\leqslant 0$

结论成立

6.

设$f(x)$在$[a,b]$上p次方可积,$g(x)$在$[a,b]$上q次方可积,则$|\int_a^b f(x)g(x)dx|\geqslant[\int_a^b|f(x)|^p dx]^{\frac{1}{p}}\cdot[\int_a^b|g(x)|^q dx]^{\frac{1}{q}}$,其中$p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

7.其他重要不等式

> - 设$a>b>0$,则
> - 当$n>0$时,$a^n>b^n$
> - 当$n<0$时,$a^n<b^n$

> - 若$0<a<x<b,0<c<y<d,$
> - 则$\frac{c}{b}<\frac{y}{x}<\frac{d}{b}$

> - $sinx<x<tanx(0<x<\frac{\pi}{2}),sinx<x(x>0)$(可用单位圆证明)

> - $arctanx\leqslant x\leqslant arcsinx(0\leqslant x\leqslant 1)$

> - $e^x\geqslant x+1(x\in R),x-1\geqslant lnx(x>0)$

> - $\frac{1}{1+x} < ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{1}{x}(x>0)$
>   **证明**:
>   令$f(x)=lnx$,并在区间$[x,x+1]$上对其用拉格朗日中值定理.有
> $ln(1+\frac{1}{x})=ln(1+x)-lnx>=\frac{1}{\xi}[(x+1)-x]$,其中$0<x<\xi<x+1$.因此,对任意$x>0$,都有
> $\frac{1}{1+x}<ln(1>+\frac{1}{x})=\frac{1}{\xi}<frac1x$

> - 若$lim_{n\to\infty}u_n=0$,
> - 则u_n有界,即存在M,使得$|u_n|\leqslant M$

> - 闭区间上的连续函数必有界
> - 即设$f(x)$在$[a,b]$上连续,则存在$M>0$,使得$|f(x)|\leqslant M$

> - 闭区间上的连续函数必有最大值和最小值
> - 即设$f(x)$在$[a,b]$上连续,则存在$m\leqslant f(x)\leqslant M$,其中$m,M$分别为$f(x)$在>$[a,b]$上的最小值和最大值

> - 若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上单调增加且可导
> - 则$f'(x)\geqslant 0$,则$f(a)\leqslant f(x)>\leqslant f(b)$

> - 若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上图像是凹的,且二阶可导
> - 则$f''(x)\geqslant 0$

> - 设$f(x)\geqslant g(x),x\in[a,b]$
> - 则$\int_a^b f(x)dx\geqslant\int_a^b g(x)dx$
> - 扩展:
> - 若$f(x)\geqslant 0,x\in[a,b]$,
>   - 则$\int_a^b f(x)dx\geqslant 0$
> - 若$f(x)$在$[a,b]$上连续,
>   - 则$m\leqslant f(x)\leqslant M$,于是$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx>M(b-a)$

> - 若$\sum_{n\to 0}^{\infty}$收敛$\Rightarrow lim_{n\to\infty}u_n=0$,
> - 则u_n有界
> - 即任取$M>0$,存在$N\in N_+$,当$n>N$时,使得$|u_n|\geqslant M$,其中M常取为1

6.2.2 微分不等式证明

一般,用导数或中值定理来证明不等式