第07讲 一元函数积分学的概念与计算

7.1 不定积分,定积分,变限积分与反常积分的概念

7.1.1 不定积分的概念与存在性

1. 原函数与不定积分

- $f(x)$在区间I上,若存在可导函数$F(x)$
    - 即对该区间上的任意一点均有$F'(x)=f(x)$成立
- 原函数:
    - $F(x)$是$f(x)$在区间I上的一个原函数
- 不定积分:
    - $\int f(x)dx=F(x)+C$,C为任意常数

> 谈到函数$f(x)$的原函数与不定积分,必须指明$f(x)$所定义的区间

2. 积分上限的函数及其导数

如果函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,则函数$F(x)=\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上可导,且$F'(x)=[\int_a^x f(t)dt]'=f(x)$

证明:

- 利用积分可拆
- 利用积分中值定理

总结

- 变限积分只要存在,则必连续
- 奇函数的原函数与偶函数的原函数
    - 连续的奇函数的一切原函数都是偶函数
        - 反过来偶函数的导函数为奇函数
    - 连续的偶函数的原函数仅有一个原函数是奇函数
        - 只有当$\int_0^a f(t)dt=0$时,连续的偶函数的一切原函数才都是奇函数

3. 原函数(不定积分)存在定理

- 连续函数$f(x)$必有原函数$F(x)$
    - 问题:开区间连续,还是闭区间连续?
- 含有第一类间断点或无穷间断点的函数$f(x)$在包含该间断点的区间内必没有原函数$F(x)$
    - 即在$f(x)$的第一类间断点或无穷间断点的,原函数$F(x)$不可导

证明:

- 提示:
    - 分类讨论

- 导函数定义
- 连续函数的函数值与极限值相等

整理结论

- 可导函数$F(x)$求导后的函数$F(x)' = f(x)$不一定是连续函数,
  - 但是如果有间断点,一定是第二类间断点(振荡间断点)

7.1.2 定积分的概念,存在于性质

1. 定积分

- 在$[a,b]$上取$n-1$个分点$x_k(k=1,2,3,\cdots,n-1)$
- $x_0=a, x_n=b$,$a=x_0<x_1<x_3<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$
- $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k=1,2,3,\cdots,n$
- $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], \lambda = max_{\{1\leqslant k\leqslant n\}}\Delta x_k$
- 当$\lambda \to 0$时,极限$lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$存在且与分点$x_k$及$\xi_k$无关
  - $\int_a^b f(x)dx = lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$

注意:

- 若$f(x)<0$,曲边梯形在x轴下方,定积分的值为负值
- $a<b$时$dx>0$;$a>b$时$dx<0$
- 积分又称为黎曼积分
- 定积分的精确定义:可用于计算一些特殊形式的数列极限
  - $\int_a^b f(x)dx = lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(a+\frac{b-a}{n}i)\frac{b-a}{n}$
  - 一般特化为$a=0,b=1$
    - $\int_0^1 f(x)dx = lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})\frac{1}{n}$
      - 先提出$\frac{1}{n}$
      - 再凑出$\frac{i}{n}$
      - 由于$\frac{i}{n}=0+\frac{1-0}{n}i$,故$\frac{i}{n}$可以读作"0到1上的$x$",
      - 且$\frac{1}{n}=\frac{1-0}{n}$,读作"0到1上的$dx$",
      - 于是完成凑定义

2. 定积分存在定理/一元函数的常定义可积性/黎曼可积性

定积分存在定理(一元函数的常定义可积性)

- 常定义指:
  - 区间有限
  - 函数有界

定积分存在的充分条件

- 闭区间连续:
  - 若$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,则$\int_a^b f(x)dx$存在
- 闭区间有界,且有有限个间断点:

    - 若$f(x)$在区间$[a,b]$上有界,且只有有限个间断点,则$\int_a^b f(x)dx$存在
- 闭区间单调
    - 若$f(x)$在区间$[a,b]$上单调,则$\int_a^b f(x)dx$存在

定积分存在的必要条件

可积函数必有界

- 即,若$\int_a^b f(x)dx$存在,则$f(x)$在区间$[a,b]$上有界
- 上界为正数

定积分的性质

以下假设所写积分均存在

求区间长度

假设$a<b$,则$\int_a^b dx=b-a=L$,其中L为区间$[a,b]$的长度

积分的线性性质

设k_1,k_2为常数,则$\int_a^b[k_1f(x)\pm k_2g(x)]dx=k_1\int_a^b f(x)dx\pm k_2\int_a^b g(x)dx$

积分的可加(可拆)性

无论a,b,c之间的大小关系,总有$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

积分的保号性

- 若在区间$[a,b]$上$f(x)\leqslant g(x)$,
- 则有$\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b g(x)dx$
    - 特殊的有$|\int_a^b f(x)dx|\leqslant\int_a^b|f(x)|dx$

> 若$f(x)$是区间[a,b]上非负的连续函数,只有不恒等于零,则必有$\int_a^b f(x)dx>0$

> 经常用到的定理,且容易忽略

估值定理

- 设M,m分别是$f(x)$在区间[a,b]上的最大值和最小值,$L=b-a$为区间$[a,b]$的长度,
- 则有$mL\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant ML$

> 函数$y(x)$在$[a,b]$上的平均值为$\bar{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b y(x)dx$

定积分中值定理

定积分中值定理

- 设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,
    - 则在$[a,b]$上至少存在一点ξ,使得$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

> 可由估值定理,然后介值定理证明

定积分中值定理的推广

- 设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续且$g(x)$不变号,

- 则至少存在一点$\xi \in [a,b]$,使$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

补充

- 奇函数和偶函数
  - 奇函数:$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$
  - 偶函数:$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
- 关于T为周期的连续函数$f(x)$
  - $\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$
    - 以$x - T = t$替换x
  - $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$
  - 以T为周期的连续函数$f(x)$的一切原函数以T为周期$\Leftrightarrow \int_0^T f(x)dx = 0$
    - $\Leftrightarrow$:充分必要条件,左边是结论,右边是条件
- 若函数$f(x)$在$[a,b]$上不恒等于零,且非负,故至少存在一点$x_0 \in [a,b]$使得$f(x_0) \neq 0$,即$f(x_0) > 0$
  - 推论:
    - 若连续函数$f(x), g(x)$满足$f(x) \geqslant g(x)$,且$f(x)$不恒等于$g(x)$,又$a < b$,
    - 则必有$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$

7.1.3 变限积分及其求导公式

1. 变限积分

变上限的定积分

- 当x在$[a,b]$上变动时,对应于每一个x值,积分$\int_a^x f(t)dt$就有一个确定的值,
- 因此$\int_a^x f(t)dt$是变上限的一个函数,记作$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt(a \leqslant x \leqslant b)$
- 称函数$\Phi(x)$为变上限的定积分.

> 同理可以定义
>
> - 变下限的定积分
> - 变上下限积分

实际上,变限积分就是定积分的推广

2. 变限积分的性质

- 被积函数可积,则原函数连续:
  - 函数$f(x)$在$[a,b]$上可积,则函数$F(x) = \int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上连续
- 被积函数连续,则原函数可导
  - 函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,则函数$F(x) = \int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上可导

> 由这两个性质可知:对于变限积分$F(x) = \int_a^x f(t)dt$只要存在,就是连续的 证明:

3. 变限积分的求导公式

设$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt$,其中函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,可导函数$\varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$的值域在$[a,b]$上,则函数$\varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$的公共定义域上,有$F'(x) = \frac{d}{dx}[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt] = f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x) - f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x)$.

其中

- x:求导变量;
- t:积分变量
- x只出现在积分的上下限时才能使用变限积分求导公式, 若求导变量x出现在被积函数中,必须通过恒等变形,将其移除被积函数,才能再使用变限积分求导公式

> 注:求导变量x对于变限积分相当于常数

7.1.4 牛顿-莱布尼兹公式

若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,则$\int_a^b f(t)dt \overset{F'(x)=f(x)}{\rightarrow} F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

推广:
在积分区间$[a,b]$上只有有限个间断点的被积函数$f(x)$,只要其在$[a,b]$存在原函数,则牛顿-莱布尼兹公式依然成立

7.1.5 反常积分的概念与敛散性

1. 反常积分概念的通俗理解

定积分存在的两个必要条件

- 积分区间有限
  - 破坏了积分区间的有界性,就引出了无穷区间上的反常积分,
- 被积函数有界
  - 破坏了被积函数的有界性,就引出了无界函数的反常积分

一般来说

- $\int_a^{+\infty} f(t)dt$收敛$\Rightarrow lim_{x\rightarrow+\infty} f(x) = 0$
  - 但不是一定,只是一般
- $f(x)$无穷小的程度越小,则$\int_a^{+\infty} f(t)dt$越容易收敛

2. 无穷区间上反常积分的概念与敛散性

- $\int_a^{+\infty} f(x)dx = lim_{b\rightarrow+\infty} \int_a^b f(x)dx,$
  - 极限存在反常积分收敛,否则发散
- $\int_{-\infty}^b f(x)dx = lim_{a\rightarrow-\infty} \int_a^b f(x)dx,$
  - 极限存在反常积分收敛,否则发散
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_c^{+\infty} f(x)dt + \int_{-\infty}^c f(x)dt,$
  - 若两个反常积分都收敛,则称该反常积分收敛,否则称发散

奇点:

- 使$f(x)\rightarrow\infty$的点
- 瑕点:
  - 使得函数无定义的点
    - 分母为零

3. 无界函数的反常积分的概念与敛散性

若a是$f(x)$的唯一奇点,则无界函数$f(x)$的反常积分定义为$\int_{a}^{b}f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+}\int_{a + \varepsilon}^{b}f(x)dx$,极限存在反常积分收敛,否则发散

> 当x = b为$f(x)$的无穷间断点,这时$f(x)$是一个无界函数,积分$\int_{-\infty}^{b}f(x)dx$还有可能存在.
> 注意:定积分(黎曼积分)$\int_{a}^{b}f(x)dx$存在的必要条件是$f(x)$有界,但是此处为反常积分,并不不是一个概念

若b是$f(x)$的唯一奇点,则无界函数$f(x)$的反常积分定义为$\int_{a}^{b}f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+}\int_{a}^{b + \varepsilon}f(x)dx$,极限存在反常积分收敛,否则发散

若$c \in (a,b)$是$f(x)$的唯一奇点,则无界函数$f(x)$的反常积分定义为$\int_{a}^{b}f(x)dx = \int_{c}^{b}f(x)dt + \int_{a}^{c}f(x$,若两个反常积分都收敛,则称该反常积分收敛,否则称发散

反常积分的计算与敛散性的判断

反常积分的计算

- 反常积分是变限积分的极限
  - 一道积分题的求解过程中，出现了无穷区间或者瑕点，直接带入计算即可
- 如何识别反常积分
  - 积分上下限含有∞为无穷区间上的反常积分
- 无界函数的反常积分比较难以识别
  - 一般看被积函数是否有使其分母为零的点（但是这个条件既不必要，也不充分）
  - 区间内是否有使$f(x) \to \infty$的奇点

敛散性的判断

- 重要结论
  - 无穷区间的反常积分$\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}(a>0)$
    - 在$p>1$时收敛
    - 在$p \leqslant 1$时发散
  - 无界函数的反常积分$\int_a^b\frac{dx}{{(x-a)}^p}$,$a$为唯一瑕点
    - 在$p<1$时收敛
    - 在$p \geqslant 1$时发散
  - 无穷区间的反常积分$\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}ln^{\beta}x}$
    - 当$\alpha = 1$时
      - $\beta > 1$ 发散
      - $\beta \leqslant 1$收敛
    - 当$\alpha > 1$,收敛
    - 当$\alpha \leqslant 1$,发散
- 敛散性的判断的判别方法
  - 理论判别法
    - 是否收敛，无法通过计算结果来判别，只能用已有结论做比较判别
  - 计算判别法
    - 是否收敛，通过计算结果来判别
  - 若$\lim_{x \to +\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A \neq 0$
    - 则$[a, +\infty)$内无暇点，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$和$\int_a^{+\infty} g(x)dx$同敛散，即同阶同敛散
      - 对无界函数的反常积分这同样的结论

7.2 一元函数积分学的计算

7.2.1 不定积分的积分法

1. 凑微分法

基本思想:

- $\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[g(x)]d[g(x)] = \int f(u)du$
- 当被积函数比较复杂时,提取一部分放到d的后面去,若能凑成$\int fudu$

总结凑微分法

- 熟练掌握基本积分公式,常用的凑微分公式
- 当被积函数可以分为$f(x)g(x)$或$\frac{f(x)}{g(x)}$,
  - 其中$f(x)$较复杂时,对$f(x)$求导(或其主要部分求导),一般得到$g(x)$的倍数,既可以是常数倍,又可以是函数倍
    - 若$f'(x) = Ag(x)$,
    - 则$df(x) = Ag(x)dx$,
    - 所以$\int f(x)g(x)dx = \frac{1}{A} \int f(x)Ag(x)dx = \frac{1}{A}\int f(x)df(x)$
- 当对$f(x)$求导得不到$g(x)$的倍数时,考虑被积函数的分子分母,同乘以或同除以一个适当的因子,恒等变形以达到凑微分的目的
  - 一般而言,因子根据题设函数给出,常用的有$e^{\alpha x}$,x^{β},$sinx$,$cosx$等

2. 换元法

基本思想:

- $\int f(x)dx \overset{x = g(u)}{\rightarrow} \int f[g(u)]d[g(u)] |_{u = g^{-1}(x)} = \int f[g(u)]g'(u)du |_{u = g^{-1}(x)}$
- 当被积函数不容易积分(比如含有根式,含有反三角函数)时,可以通过换元法从d的后面拿出一部分放到前面来,就称为$\int f[g(u)]g'(u)du$的形式,若$f[g(u)]g'(u)$容易积分,则换元成功

> $x = g(x)$需要是单调可导函数,且不要忘记计算完后用反函数$u = g^{-1}(x)$回带

总结换元法:

- 三角函数代换:
  - 当被积函数含有如下根式时,可作三角代换
    - $\sqrt{a^2 - x^2} \rightarrow x = asint, |t| < \frac{\pi}{2}$
    - $\sqrt{a^2 + x^2} \rightarrow x = atant, |t| < \frac{\pi}{2}$
    - $\sqrt{x^2 - a^2} \rightarrow x = asect, 0 < t < \frac{\pi}{2}$
- 恒等变形后做三角函数代换:
  - 当被积函数含有根式$\sqrt{ax^2 + bx + c}$,可化为以下三种形式,再做三角代换
    - $\sqrt{\varphi^2(x) - k^2}$
    - $\sqrt{\varphi^2(x) + k^2}$
    - $\sqrt{k^2 - \varphi^2(x)}$
- 根式代换:
  - 当被积函数含有根式时,一般令根式$\sqrt{*} = t$
    - $\sqrt[n]{ax + b}$

    - $\sqrt{\frac{ax + b}{cx + d}}$
    - $\sqrt{ae^{bx} + c}$
    - 因为很难通过根号内换元的办法凑成平方,所以根号无法去掉
  - 对$\sqrt[n]{ax + b}$和$\sqrt[m]{ax + b}$,一般取m,n的最小公倍数l,令$\sqrt[l]{ax + b}$
- 倒代换:
  - 当被积函数分母的幂次比分子高两次及两次以上时,做倒代换令$x = \frac{1}{t}$
- 复杂函数的直接代换:
  - 当被积函数中含有a^x,e^x,lnx,arcsinx,arctanx时可考虑直接令复杂函数等于t
    - 当lnx,arcsinx,arctanx与P(x)或$e^{\alpha x}$作乘除时,有限考虑分部积分法
    - P(x)为x的n次多项式
  - 举例
    - $\int\frac{1}{1 + e^x}dx$令$e^x=t$

3. 分部积分法

基本思想

- $\int udv = uv - \int vdu$
- 适用于$\int udv$比较困难,而$\int vdu$比较容易

u和v选取的原则

- 被积函数:$P_n(x)e^{kx}$, $P_n(x)sinax$, $P_n(x)cosax$等形式
  - 一般选取$u = P_n(x)$
- 被积函数:$e^{ax}sinbx$,$e^{ax}cosbx$等形式,
  - u可以选取两个其中任意一个因子
- 被积函数:$P_n(x)lnx$,$P_n(x)arcsinx$,$P_n(x)arctanx$等形式时
  - 一般分别选取u = lnx, u=arcsinx, u=arctanx

> 总结:当$f(x)$与A(e^x,lnx三角函数,反三角函数)相乘时,选取A作为u

> 分部积分的循环形式:例如$\int \frac{xe^{arctanx}}{{(1+x^2)}^{\frac{3}{2}}}dx$

> 分部积分法用于解决已知部分定积分的构成,求抽象定积分

分部积分法的推广公式与$\int P_n(x)e^{kx}$, $\int P_n(x)sinax$, $\int P_n(x)cosax$

- 设函数u和v具有直到第(n + 1)阶的连续导数,并根据分部积分公式$\int udv = uv - \int vdu$
- 则有$\int uv^{(n + 1)}dx = \sum_{k = 0}^n{{(-1)}^{k}}{u^{(k)}}{v^{(n - k)}} + {(-1)}^{n + 1}\int u^{(n + 1)}vdx$
- 使用方法:
  - 令$u = P_n(x)$,则$u^{(n + 1)} = 0$

4. 有理函数的积分

定义:

- 形如$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$ (n < m)的积分称为有理函数的积分
- 其中$P_n(x)$和$Q_m(x)$分别是x的n次多项式和m次多项式

方法:

- 先将$Q_m(x)$因式分解,再把$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$拆成若干最简有理式之和

分解的基本原则

- $Q_m(x)$的一次因式$(ax+b)$产生一项
  - $\frac{A}{ax + b}$
- $Q_m(x)$的k重因式${(ax+b)}^k$产生k项
  - $\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{{(ax+b)}^2} + \cdots + \frac{A_k}{{(ax+b)}^k}$
- $Q_m(x)$的二次因式$px^2 + qx + r$产生一项
  - $\frac{Ax+B}{px^2 + qx + r}$
- $Q_m(x)$的k重二次因式${(px^2 + qx + r)}^k$ 产生k项
  - $\frac{A_1x + B_1}{{px^2 + qx + r}} + \frac{A_2x + B_2}{{(px^2 + qx + r)}^2} + \cdots + \frac{A_kx+ B_k}{{(px^2 + qx + r)}^k}$

举例

- $\int \frac{4x^2 - 6x - 1}{(x+1){(2x-1)}^2}dx$
- $\frac{4x^2 - 6x - 1}{(x+1){(2x-1)}^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{{(2x-1)}^2}$
- 通分,然后对应系数相等
- 另一方法:
  - 对于$4x^2 - 6x - 1 \equiv A{(2x-1)}^2 + B(x+1)(2x-1) + C(x+1)$
  - 带入x的合适的特殊值,然后相当于解三个三元一次方程组

积分的一些技巧总结

三角函数

- $\int \frac{1}{sin^2x + cos^2x} dx = \int \frac{1}{cos^2x}\frac{1}{\frac{sin^2}{cos^2x} + 1}dx = \int sec^2x \frac{1}{tan^2x + 1}dx = \int \frac{1}{tan^2x + 1} dx = \int \frac{1}{tan^2x + 1}dtanx = arctan(tanx) +C$
- $\int \frac{1}{sinx + 1}dx = \int \frac{1 - sinx}{con^2x}dx$
- 万能公式补充
  - 用半角的和差公式,进行构造

幂函数

- $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}$

指数函数

-

7.2.2 定积分的计算

主要依赖于牛顿-莱布尼兹公式

1. 定积分的换元积分法

设$f(x)$为$[a,b]$上连续,变换$x = \varphi(t)$满足$\varphi(\alpha) = a,\varphi(\beta) = b$,且当t在以$\alpha, \beta$为端点的闭区间时,$x = \varphi(t)$有连续的导数,且$x = \varphi(t)$不超过区间$[a,b]$,则有定积分的换元积分公式:

- $\int_{a}^{b}f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta}f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

2. 定积分的分部积分法

与不定积分的分部积分法基本一致

结论

奇偶性

- 设$f(x)$为连续的偶函数,则$\int_{a}^{-a}f(x)dx = 2\int_{0}^{a}f(x)dx$
- 设$f(x)$为连续的奇函数,则$\int_{a}^{-a}f(x)dx = 0$
- 被积函数是否能够拆分为奇函数 + 偶函数,以便于计算

周期性

- 设$f(x)$为以T为周期的连续函数,则$\int_{a}^{a + T}f(x)dx = \int_{0}^{T}f(x)dx$
  - 即在长度为一个周期的区间上的定积分,以该区间的起点位置无关

三角函数有关

- $\int_{-\pi}^\pi cosmx sinnx dx = 0$
- $[-\pi, \pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cosmxcosnxdx = \int_{-\pi}^{\pi} sinmxsinnxdx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$$

- $[0, \pi]$

$$\int_{0}^{\pi} cosmxcosnxdx = \int_{0}^{\pi} sinmxsinnxdx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & m = n \end{cases}$$

- 华里士公式$[0, \frac{\pi}{2}]$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin^n xdx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^n xdx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & n = 2k \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} & n = 2k+1 \end{cases} \quad k = 0,1,2,\cdots,n$$

- 华里士公式扩展$[0,2\pi]$

$$\int_{0}^{2\pi} sin^n xdx = \int_{0}^{2\pi} cos^n xdx = \begin{cases} 4 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & n = 2k > 0 \\ 0 & n = 2k+1 > 0 \end{cases} \quad k = 0,1,2,\cdots,n$$

- 三角函数的周期性和奇偶性
  - $\int_0^{2\pi}\frac{1}{1 + cos^2x}dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{1 + cos^2x}dx = 2\int_0^{\pi}\frac{1}{1 + cos^2x}dx = 2(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1 + cos^2x}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{1 + cos^2x}dx) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1 + cos^2x}dx$
    - 然后假设x所对的直角边为t,邻边为1,斜边为$\sqrt{1 + t^2}$
    - 故$cosx = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}, tanx = t$
- $\frac{1}{2(1+n)}\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}}tan^nxdx \leqslant \frac{1}{2(n-1)}$
  - $f(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}tan^nxdx$
  - $f(n) + f(n + 2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}tan^nx(1 + tan^2x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}tan^nxdtanx = \frac{1}{1 + n}tan^{n + 1}x|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{1 + n}$

    - $1 + tan^2x = sec^2x$
  - $f(n) + f(n+ 2) \leqslant 2f(n) \leqslant f(n-2) + f(n)$
    - $tanx \leqslant 1,x \in [0, \frac{\pi}{4}]$
  - $\frac{1}{n + 1} \leqslant 2f(n) \leqslant \frac{1}{n-1}$
  - $\frac{1}{2(1+n)}\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}}tan^nxdx \leqslant \frac{1}{2(n-1)}$

其他

- 区间再现公式
  - 设$f(x)$为连续函数,则$\int_{a}^{b}f(x)dx = \int_{a}^{b}f(a+ b -x)dx$
  - 当遇到含有三角函数的被积函数,无处下手时,可以尝试
    - $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx}{sinx + cosx}dx$
- $f(x)$在(a,b)上连续
  - 若$\int_a^bf(x) = 0$, 则至少存在$\xi \in (0,\pi)$使得$f(\xi) = 0$
    - 在区间内只有函数一部分大于0,另一部分小于0,才能使积分为0
  - 若$\int_a^bf(x)g(x) = 0$, 则至少存在$\xi_1,\xi_2 \in (0,\pi)$使得$f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$
- 证明和式不等式基于以下命题
  - 若函数$f(x)$在[1,n]上单调增加,则有
    - $f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) \leqslant \int_1^nf(x)dx \leqslant f(2) + f(3) + \cdots + f(n)$
      - $\sum_{i = 1}^{n-1}f(i) \leqslant \int_1^nf(x)dx \leqslant \sum_{i = 2}^{n}f(i)$
      - $\int_k^{k+1}f(k)dx \leqslant \int_k^{k+1}f(x)dx \leqslant \int_k^{k+1}f(k +1)dx$
      - $f(k) \leqslant \int_k^{k+1}f(x)dx \leqslant f(k + 1)$
  - 若函数$f(x)$在[1,n]上单调减小,则有
    - $f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \leqslant \int_1^nf(x)dx \leqslant f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)$
      - $\sum_{i = 2}^{n}f(i) \leqslant \int_1^nf(x)dx \leqslant \sum_{i = 1}^{n-1}f(i)$
      - $\int_k^{k+1}f(k+1)dx \leqslant \int_k^{k+1}f(x)dx \leqslant \int_k^{k+1}f(k)dx$
      - $f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1}f(x)dx \leqslant f(k)$
  - 例如
    - P171-9-12 证明: $(n-1)! \leqslant e{(\frac{n}{e})}^n \leqslant n!$

题型