第12讲 常微分方程

12.1 微分方程的概念

微分方程

含有未知函数的导数(或者微分)的方程称为微分方程,一般写成

- $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$
  - 反映了未知函数y及其个阶导数之间的关系
- 或者$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$

常微分方程

未知函数是一元函数的微分方程

- 例如:
  - $y'''-y''+6y=0$
  - $ydx-(x+\sqrt{x^2+y^2})$

偏微分方程

未知函数是多元函数的微分方程

- 例如:
  - $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

微分方程的阶

微分方程的阶

- 方程中未知函数导数的最高阶数
- 例如:
  - $y'''-y''+6y=0$就是三阶微分方程

微分方程的解

若将函数带入微分方程,使方程称为恒等式

- 则该函数称为微分方程的解

设$y=y(y)$在区间I上连续且有直到n阶的导数,使$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})\equiv 0$

- 则称$y=y(y)$是该微分方程在区间I上的一个解

微分方程的通解与特解

特解 若微分方程的解中含有的独立常数的个数等于微分方程的阶数,

- 则该解称为微分方程的通解
- 不含任意常数的解称为特解

通解 若$y = y(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$是$n$阶微分方程$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) \equiv 0$在区间$I$上的解,

- 其中$C_1, C_2, \cdots, C_n$为n个独立的任意常数,
- 则称它为该微分方程的通解

初始条件(定解条件)

初始条件(定解条件)

- 确定通解中常数的条件就是
- 例如:
  - $y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1, \cdots, y^{n-1}(x_0) = a_{n-1}$,
    - 其中$a_1, a_1, \cdots, a_{n-1}$为$n$个给定的数

12.2 一阶微分方程的求解

变量可分离型

能写成$y' = f(x)g(y)$形式的方程称为变量可分离型方程

- 其解法为
  - $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$
- 举例
  - $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$
    - $\int e^y dy - \int e^x dx$
    - 解
      - 隐式解: $e^y = e^x + C$
      - 显式解:$y = ln(e^x + C)$

可化为变量可分离型

$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$

形如$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$的方程,

- 其中常数a, b全都不为0
- 其解法为:
  - 令$u = ax + by + c$,
  - 然后对x求导，得$\frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$,
  - 带入原方程得$\frac{du}{dx} = a + bf(u)$
- 例如$dy = sin(x + y + 100)dx$
  - 等价于
    - $y' = sin(x + y + 100)$

- 令$u=x+y+100$
  - 则$\frac{du}{dx}=1+\frac{dy}{dx}$
- 原方程化为
  - $\frac{du}{dx}=1+sinu$
- 分离变量
  - $\frac{du}{1+sinu}=dx$
    - 此处默认了$sinu\neq-1$
  - $tanu-secu=x+C$
  - 将$u=x+y+100$带入
- 得方程通解
  - $tan(x+y+100)-sec(x+y+100)=x+C$

齐次微分方程

齐次微分方程的概念

- 举例
  - $(x+yxos\frac{y}{x})dx-xcos\frac{y}{x}dy=0$
  - $\frac{dy}{dx}=\frac{x+ycos\frac{y}{x}}{xcosyx}$
  - 令$f(x,y)=\frac{x+ycos\frac{y}{x}}{xcosyx}$，则这个函数为零次齐次线性方程
- 具体来说
  - 给x和y各乘一个因子t，则
    - $f(tx,ty)=t^0f(x,y)=f(x,y)=x^0\varphi(\frac{y}{x})=\varphi(\frac{y}{x})$
  - 于是方程可以写成
    - $\frac{dy}{dx}=\frac{x+ycos\frac{y}{x}}{xcosyx}=\frac{1+\frac{y}{x}cos\frac{y}{x}}{cos\frac{y}{x}}$
      - 分子和分母上下同时除以x

>

齐次微分方程的求解

形如$\frac{dy}{dx}=\varphi(\frac{y}{x})$或者$\frac{dx}{dy}=\varphi(\frac{x}{y})$

- 其解法为:
  - 令$u=\frac{y}{x}$
    - $y=ux$
    - 对x 求导
      - $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$,
  - 原方程变为
    - $x\frac{du}{dx}+u=\varphi(u)$,
      - 即$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}$

一阶线性微分方程

形如$y'+p(x)y=q(x)$的方程

- 其中$p(x),q(x)$为已知的连续函数
- 其求解公式:
  - $y=e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx}\cdot q(x)dx+C]$

公式推导:

- 公式$y'+p(x)y=q(x)$两边同时乘以$e^{\int p(x)dx}$
- 得$e^{\int p(x)dx}\cdot y'+e^{\int p(x)dx}p(x)\cdot y=e^{\int p(x)dx}\cdot q(x)$
- 于是$[e^{\int p(x)dx}\cdot y]'=e^{\int p(x)dx}\cdot q(x)$
- 积分$[e^{\int p(x)dx}\cdot y]=\int e^{\int p(x)dx}\cdot q(x)+C$
- 从而$y=e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx}\cdot q(x)dx+C]$

> 若出此处出现lnu,且不知道u正负,不用加绝对值
>
> - 若其他计算过程中出现lnu,不知道u正负,一律加绝对值

伯努利方程

形如$y'+p(x)y=q(x)y^n(n\neq 0,1)$的方程

- 其中$p(x),q(x)$为已知的连续函数, 其解法为:
- 先变形为$y^{-n}\cdot y'+p(x)y^{1-n}=q(x)$
- 令$z=y^{1-n}$
  - z对x得求导,
    - $\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$,
- 则$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+p(x)z=q(x)$
- 解次一阶线性微分方程
- 例$ydx=(1+xlny)xdy,(y>0)$
  - 方程变形
    - $\frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x=\frac{lny}{y}x^2$
      - 注意思考是以x为自变量,y为未知函数来解方程方便;还是以y为自变量,x为未知函数来解方程方便
  - 此处是关于以y为自变量,x为未知函数的伯努利方程
  - 两边同时除以x^2,然后令$z=x^{1-2}=x^{-1}$
    - $\frac{dx}{dy}x^{-2}-\frac{1}{y}x^{-1}=\frac{lny}{y}$
    - z对y求导,得$\frac{dz}{dy}=\frac{-1}{x^2}\frac{dx}{dy}$
  - 于是方程化为
    - $-\frac{dz}{dx}-\frac{1}{y}z=\frac{lny}{y}$
    - $\frac{dz}{dx}+\frac{1}{y}z=-\frac{lny}{y}$
  - 通解为$z=\frac{1}{x}=e^{-\int\frac{1}{y}dy}(\int e^{\int\frac{1}{y}}\frac{-lny}{y}dy+C)$

12.3 二阶可降阶微分方程的求解

$y''=f(x,y')$型

- 令$y'=p(x),y''=p(x)'$,
  - 则原方程变为一阶方程$\frac{dp}{dx}=f(x,p)$
- 若求得其解为$p=\varphi(x,C_1)$,即$y'=\varphi(x,C_1)$,
  - 则原方程的通解为$y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2$
- 例如$y''=\frac{2xy'}{1+x^2}$
  - $y'=p,y''=p'$
  - $p'=\frac{2xp}{1+x^2}$
    - $\frac{dp}{dx}=\frac{2xp}{1+x^2}$
  - $\frac{1}{p}dp=\frac{2x}{1+x^2}dx$

$y''=f(y,y')$型

- 令$y'=p,y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot p$,
  - 则原方程变为一阶方程$p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$
- 若求得其解$p=\varphi(y,C_1)$,则由$p=\frac{dy}{dx}$
  - 可得$\frac{dy}{dx}=\varphi(y,C_1)$,
  - 分离变量得$\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=dx$
- 两边积分得$\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}$
- 例如$2yy''+y'^2=0,y>0$
  - $y'=p,y''=\frac{dp}{dx}p$
  - $2y\frac{dp}{dy}p+p^2=0$
  - $p(2y\frac{dp}{dy}+p)=0$
    - 故$2y\frac{dp}{dy}+p=0$
    - $ln|p|=-\frac{1}{2}lny+C_0$
  - $p=\pm C_0\frac{1}{\sqrt{y}}=C_1\frac{1}{\sqrt{y}}$
  - 由$p=\frac{dy}{dx}$
    - 则$\frac{dy}{dx}=C_1\frac{1}{\sqrt{y}}$
  - $y=(Cx+D)^{\frac{2}{3}}$

12.4 高阶线性微分方程的求解

二阶线性微分方程的概念

二阶变系数线性微分方程

二阶变系数线性微分方程:

- 方程$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$,
  - 其中
    - $p(x), q(x)$叫系数函数,
    - $f(x)$叫自由项,均为已知的连续函数
- 齐次方程:
  - 当$f(x) \equiv 0$时
  - $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$
- 非齐次方程:
  - 当$f(x) \not\equiv 0$时
  - $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

二阶常系数线性微分方程

二阶变系数线性微分方程:

- 方程$y'' + py' + qy = f(x)$,
  - 其中
    - p,q为常数,
    - $f(x)$叫自由项
- 齐次方程:
  - 当$f(x) \equiv 0$时
  - $y'' + py' + qy = 0$
- 非齐次方程:
  - 当$f(x) \not\equiv 0$时
  - $y'' + py' + qy = f(x)$

线性微分方程的解的结构

以二阶为例

若$y_1(x),y_2(x)$是$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$的两个解,且$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq C$

- 则称$y_1(x),y_2(x)$是该方程的两个线性无关的解
- $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$是方程$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$的通解

若$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$是方程$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$的通解, $y^*(x)$是$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$的一个特解,

- 则$y(x) + y^*(x)$是$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$的通解

若$y^*_1(x)$是$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$的解,$y^*_2(x)$是$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$的解

- 则$y^*_1(x) + y^*_2(x)$是$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$

二阶常系数齐次线性微分方程的通解

对于$y'' + py' + qy = 0$

- 其对应的特征方程为$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$,求其特征根
- 若$p^2 - 4q > 0$,
    - 设λ_1,λ_2是特征方程的两个不等实根,即$\lambda_1 \neq \lambda_2$
    - 可得其通解为
        - $y = C_1e^{\lambda_1x} + C_2e^{\lambda_2x}$
- 若$p^2 - 4q = 0$,
    - 设λ_1,λ_2是特征方程的两个相等实根,即$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$
    - 可得其通解为
        - $y = (C_1 + C_2x)e^{\lambda x}$
- 若$p^2 - 4q < 0$,
    - 设 $\alpha \pm \beta i$是特征方程的一对共轭复根
    - 可得其通解为
        - $y = e^{\alpha x}(C_1cos\beta x + C_2sin\beta x)$

二阶常系数非齐次线性微分方程的特解

对于$y'' + py' + qy = f(x)$

- 当自由项$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$
    - 特解要设为$y^* = e^{\alpha x}Q_n(x)x^k$
        - 其中$Q_n(x)$为x的n次一般多项式
        - 关于k
            - $\alpha \neq \lambda_1,\alpha \neq \lambda_2$:
                - $k = 0$
            - $\alpha = \lambda_1$或$\alpha = \lambda_2$:
                - $k = 1$
            - $\alpha = \lambda_1 = \lambda_2$:
                - $k = 2$
- 当自由项$f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)cos\beta x + P_n(x)sin\beta x]$,
    - 特解要设为
        - $y^* = e^{\alpha x}[Q_l^{(1)}(x)cos\beta x + Q_l^{(2)}(x)sin\beta x]x^k$
            - 其中
                - $l = max\{ m,n \}$,
                - $Q_l^{(1)}(x)$, $Q_l^{(2)}(x)$分别为x的两个不同的l次一般多项式
            - 关于k
                - $\alpha \pm \beta i$不是特征根:
                    - $k = 0$
                - $\alpha \pm \beta i$是特征根:
                    - $k = 1$

举例

例如$y''-4y'+4y=3xe^{2x}$

- 自由项
  - $f(x) = 3xe^{2x}$
- 特征方程
  - $r^2-4r+4=0$
  - 特征根
    - $r_1=r_2=2$
- 对应的齐次方程的通解是
  - $y = (C_1+C_2x)e^{2x}$
- $r = 2$为重根
  - $P_n(x) = 3x$为一次多项式
  - 设原方程的特解$y* = x^2(ax+b)e^{2x}$
  - 带入原方程
    - $6ax + 2b = 3x$
    - 对应系数
      - 得$a=\frac{1}{2},b=0$
- 原方程的特解为$y^*=\frac{1}{2}x^3e^{2x}$
- 所以原方程的通解为
  - $y = (C_1+C_2x)e^{2x} + \frac{1}{2}x^3e^{2x}$

例如$y'' - 4y'+3y={e}^x {cos x} + xe^{3x}$

- 有线性微分方程的解的结构,可拆分为两个非齐次微分方程

n阶常系数齐次线性微分方程的解

方程$y^{(n)} + p_1y^{(n - 1)} + \cdots + p_{n-1}y' + p_ny = 0$,

- 其中$p_1, p_2, \cdots , p_n$为常数,
- 其对应的特征方程$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0$,
- 求出其特征根
  - 特征根为单实根λ时,
    - 微分方程通解中对应一项
      - $Ce^{\lambda x}$
  - 特征根为k重实根λ时,
    - 微分方程通解中对应k项
      - $(C_1 + C_2x + \cdots + C_kx^{k-1})e^{\lambda x}$
  - 特征根为单复根$\alpha \pm \beta i (\beta > 0)$时,
    - 微分方程通解中对应两项
      - $e^{\alpha x}(C_1cos\beta x + C_2sin\beta x)$

    - 特征根为k重复根$\alpha \pm \beta i$ ($\beta > 0$)时,
        - 微分方程通解中对应2k项
            - $e^{\alpha x}[(C_1 + C_2x + \cdots + C_kx^{k-1})cos\beta x + (D_1 + D_2x + \cdots + D_kx^{k-1})sin\beta x]$

n阶非齐次微分方程$y^{(n)} = f(x)$型的解

- 令$y^{(n - 1)} = P(x)$,$P' = y^{(n)}$,
    - 原方程变为$P'(x) = f(x)$
    - 得$P(x) = y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C$
- 同理
    - 可得$y^{(n - 2)} = \int[\int f(x)dx + C_1]dx + C_2$
- 连续积分n次,便得含有n个任意常数的通解