СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

К числу новых геофизических технологий относится активный вибросейсмический мониторинг, он включает в себя методы по наблюдению и исследованию состояния земной коры по изменению различных характеристик вибросейсмических волн, порожденных некоторым вибрационным источником, и распростроняющихся в некоторой среде.

Само исследование процесса распространения упругих волн в неоднородных средах широко используется при вибросейсмическом мониторинге различных геологических объектов. Одним из ярких примеров является работа Глинского Б.М, Ковалевского В.В и др. по изучению грязевого вулкана «Гора Карабетова». (todo reference)

Стоит отметить, что и другие сотрудники Учреждения Российской Академии наук Института вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской Академии наук (ИВМиМГ СО РАН) уже достаточно долго занимаются задачами вибро-сейсмического мониторинга, и имеют уникальный опыт в исследованиях. В этом легко убедится на примерах работ: (todo reference на работы)

Саму задачу вибро-сейсмического мониторинга следует разделить на 2 больших класса: прямую и обратную. При решении прямой задачи, при заданных параметрах среды, в которой распространяется волна, исследователи ставят своей целью найти параметры распространения волны, например, продольные и поперечные скорости волн. Обратная же задача, ставит своей целью найти параметры среды, в которых распространяется волна порожденная вибро-излучателем, с заранее известными характеристиками, и связи с тем, что реальная область исследования имеет довольно сложный рельеф, который может не позволять поставить площадную систему наблюдения для решения обратной задачи геофизики, обычно решается с помощью набора прямых задач, на основе проведения серии вычислительных экспериментов. (todo reference на работы).

Для решения геофизических задач необходим определенный математический аппарат. В настоящее время в ИВМиМГ СО РАН накоплен опыт в создании алгоритмов и программ для решения таких задач. Однако в связи с большими масштабами реальных задач и необходимостью, в первую очередь, решать обратную задачу геофизики, через решения набора прямых задач, постоянно возникает необходимость в разработке экономичных с точки зрения используемой памяти и времени вычислений параллельных алгоритмов и программ, позволяющих с приемлемой точностью моделировать распространение упругих волн в неоднородных средах на современных многоядерных вычислительных систем различной архитектуры.

Спектральные методы являются альтернативными по отношению к стандартным конечно- разностным схемам для расчета сейсмических полей. Важным достоинством спектральных методов является высокая скорость сходимости, если решение обладает высокой степенью гладкости. Это позволяет получить хорошую точность взяв всего две-три пространственные гармоники на минимальную длину волны, что значительно меньше, чем при применении конечно-разностного метода второго порядка точности. Таким образом, можно получить экономию памяти вычислительной системы, в сочетании с высокой точностью вычислений.

Далее в работе рассматривается 2D спектрально-разностный метод, основанный на объединении конечно-разностного метода по одной координате и конечного преобразования Фурье по другой. Возникающие при этом суммы типа свертки вычисляются с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ).

При использовании такого подхода для сред с разрывными параметрами возникает явление Гиббса, которое можно устранить, предварительно фильтруя и сглаживая разрывные функции таким образом, что бы получить решение сравнимое с конечно-разностным.

Таким образом, целью работы является разработка спектрально-разностного параллельного алгоритма и программного пакета на его основе для моделирования распространения упругих волн в 2D неоднородных слоистых средах с разрывными параметрами и исследование качества и времени решения по сравнению с конечно-разностным решением аналогичной задачи.

Более строго задачи работы можно сформулировать в виде:

-- разработка и оптимизация параллельного программного обеспечения, реализующего спектрально- разностный метод и эффективно использующего современную вычислительную архитектуру;

-- исследование времени работы и масштабируемости разработанного ПО в сравнении с уже имеющимися программами, реализующими конечно-разностную схему Верье;
-- подбор фильтра и интерполяционного полинома для сглаживания разрывных параметров слоистой среды таким образом, что бы получить поле качественно сравнимое с результатом конечно-разностного решения;

Работа предполагает оригинальное развитие известного спектрально-разностного подхода на основе конечного преобразования Фурье к моделированию упругих волн в неоднородных средах, который может стать альтернативой стандартным конечно-разностным схемам. Отдельно отметим практическую значимость разработки таких подходов в связи с развитием программируемых логических схем (ПЛИС), выполняющих БПФ за минимальное время.

1 СПЕКТРАЛЬНО-РАЗНОСТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН В УПРУГИХ СРЕДАХ

В данной главе описана общая математическая модель для решения численной задачи о распространении упругих волн в 2D неоднородных средах, которые возникают в результате воздействия источника, расположенного непосредственно в самой исследуемой среде.

1.1 Постановка задачи

Исследование распространения упругих сейсмических волн в неоднородных средах будет проводится на основе 3D модели теории упругости с соответсвующими начальными и граничными условиями, редуцированной по y координате. (todo reference)

В качестве среды рассматривается изотропная 2D неоднородная среда, представляющая собой прямоугольник, размера $a \times b$, $a, b > 0$, одна из границ (плоскость $z = 0$) которого является свободной поверхностью.

Прямоугольная декартова система координат введена таким образом, чтобы ось Oz была направлена вертикально вниз, а ось Ox лежала на свободной поверхности. (todo picture)

Задача будет записана в терминах вектора скоростей смещений $\vec{u} = (u, w)^T$ и тензора напряжений $\vec{\sigma} = (\sigma_{xx}, \sigma_{xz}, \sigma_{zz})^T$ в следующем виде.

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \vec{\sigma} + f(x,z,t), \\ \dfrac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial x} & \lambda \frac{\partial}{\partial z} \\ \mu \frac{\partial}{\partial z} & \mu \frac{\partial}{\partial x} \\ \lambda \frac{\partial}{\partial x} & (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \vec{u}, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Где t - время, u, w - компоненты скоростей спещений по Ox и Oz соотвественно. Параметры $\lambda(x, z), \mu(x, z)$ - коэффициенты Ламе, удовлетворяющие соотношениям: $\lambda + 2\mu = \rho v_p^2$, $\mu = \rho v_s^2$, где v_p - скорость распространения продольных волн, v_s - скорость распространения поперечный волн, а $\rho(x, z) > 0, \forall x, z$ - плотность среды.

Граничные условия на свободной поверхности (плоскость $z = 0$) задаются в виде:

$$\sigma_{xx}|_{z=0} = \sigma_{xz}|_{z=0} = 0 \tag{1.1.2}$$

В качестве начальных условий, в момент времени $t = 0$ положим:

$$\begin{cases} u = w = 0, \\ \sigma_{xx}|_{t=0} = \sigma_{xz}|_{z=0} = \sigma_{zz}|_{z=0} = 0 \end{cases} \tag{1.1.3}$$

Также предполагается, что функция источника представима в виде $f(x, z, t) = f_x i + f_z k$, где i, k - единичные направляющие вектора соответствующих координатных осей.

В случае точечного источника типа "центр давления", функция $f(x, z, t)$ примет вид $f(x, z, t) = \delta(x - x_0)\delta(z - z_0)f(t)$, где δ - дельта функция Дирака, а x_0, z_0 - координаты источника.

Представленная система уравнений, в совокупности с начальными и граничными условиями, описывает распространения упругих волн в неоднородной среде с точечным истоником.

1.2 Метод решения и вывод основых формул

В отличии от работы (todo reference) метод расчета сейсмических полей для задачи (1.1.1-1.1.3) основан на альтернативном, не столь популярном, как его конечно-разностные аналоги, спектрально-разностном подходе, обладающим высокой скоростью сходимости, при достаточно гладких решениях исходной задачи, что позволяет получить решение сравнимое по точности со стандартным конечно-разностным подходом.

Рассмотрим следующие прямые преобразование фурье для функций u, w, σ_{xx}, σ_{xz}, σ_{zz}. (todo написать про четность)

$$\left[\begin{array}{l}\overline{u}_k = \int_0^b u \cdot sin(kx)dx = \int_0^b u(x,z,t) \cdot sin(kx)dx = \overline{u}_k(x,z,t),\\ \overline{w}_k = \int_0^b w \cdot cos(kx)dx = \int_0^b w(x,z,t) \cdot cos(kx)dx = \overline{w}_k(x,z,t),\\ \overline{p}_k = \overline{\sigma}^k_{xx} = \int_0^b \sigma_{xx} \cdot cos(kx)dx = \int_0^b \sigma_{xx}(x,z,t) \cdot cos(kx)dx = \overline{\sigma}^k_{xx}(x,z,t),\\ \overline{q}_k = \overline{\sigma}^k_{xz} = \int_0^b \sigma_{xz} \cdot sin(kx)dx = \int_0^b \sigma_{xz}(x,z,t) \cdot sin(kx)dx = \overline{\sigma}^k_{xz}(x,z,t),\\ \overline{s}_k = \overline{\sigma}^k_{zz} = \int_0^b \sigma_{zz} \cdot cos(kx)dx = \int_0^b \sigma_{zz}(x,z,t) \cdot cos(kx)dx = \overline{\sigma}^k_{zz}(x,z,t)\end{array}\right. \tag{1.2.1}$$

Где полагаем $k = \frac{k\pi}{b}$.

2D спектрально-разностный метод для решения задачи (1.1.1-1.1.3), основанный на объединении конечно-разностного метода по z координате и конечного преобразования Фурье по x координате наиболее подробно описан в работе (todo reference). Ниже приведем только основные выкладки.

Умножим каждое уравнение системы (1.1.1) на соответсвующую базисную k-функцию и проинтегрируем по x, предполагая, что

$$\frac{1}{\rho(x,z,t)} = \frac{\overline{\rho}_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} \overline{\rho}_l \cdot cos(lx) = \frac{\overline{\rho}_0(0,z)}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} \overline{\rho}_l(l,z) \cdot cos(lx)$$

$$(\lambda + 2\mu)(x,z) = \frac{(\lambda + 2\mu)_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} (\overline{\lambda} + 2\overline{\mu})_l \cdot cos(lx)$$

$$\mu(x,z) = \frac{\overline{\mu}_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} \overline{\mu}_0 \cdot cos(lx)$$

Подробно распишем одно из соотношений.

$$\int_0^b \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} sin(kx)dx = \int_0^b \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho} sin(kx)dx\right) =$$

$$= \underbrace{\left[\sigma_{xx}\frac{1}{\rho} sin(kx)\right]_0^b}_{=0} - \int_0^b \sigma_{xx}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\rho} sin(kx)\right] dx =$$

$$= -\int_0^b \sigma_{xx}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\overline{\rho}_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} \overline{\rho}_l \cdot cos(lx)\right) sin(kx)\right] dx =$$

$$= -\int_0^b \sigma_{xx}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\overline{\rho}_0}{2}sin(kx) + \sum_{l=1}^{\infty}\overline{\rho}_l \cdot cos(lx)sin(kx)\right]dx =$$

$$= -\int_0^b \sigma_{xx}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\overline{\rho}_0}{2}sin(kx) + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\overline{\rho}_l \cdot sin\left((k+l)x\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\overline{\rho}_l \cdot sin\left((k-l)x\right)\right]dx = \tag{1.2.2}$$

$$= -\int_0^b \sigma_{xx}\left[k\frac{\overline{\rho}_0}{2}cos(kx) + \frac{1}{2}\left(\sum_{l=1}^{\infty}(k+l)\overline{\rho}_l \cdot cos\left((k+l)x\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{l=1}^{\infty}(k-l)\overline{\rho}_l \cdot cos\left((k-l)x\right)\right)\right]dx =$$

$$= -k\overline{\sigma}_{xx}^{k}\frac{\overline{\rho}_0}{2} - \frac{1}{2}\left(\sum_{l=1}^{\infty}(k+l)\overline{\rho}_l \cdot \overline{\sigma}_{xx}^{(k+l)} + \sum_{l=1}^{\infty}(k-l)\overline{\rho}_l \cdot \overline{\sigma}_{xx}^{(k-l)}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty}(k+l)\overline{\rho}_l \cdot \overline{\sigma}_{xx}^{(k+l)} + \sum_{l=0}^{\infty}(k-l)\overline{\rho}_l \cdot \overline{\sigma}_{xx}^{(k-l)}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty}(k+l)\overline{\rho}_l \cdot \overline{p}^{(k+l)} + \sum_{l=0}^{\infty}(k-l)\overline{\rho}_l \cdot \overline{p}^{(k-l)}\right)$$

Аналогичным образом получаем оставшиеся соотношения

$$\int_0^b \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}sin(kx)dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty}(k+l)\overline{\rho}_l \cdot \frac{\partial \overline{\sigma}_{xz}^{(k+l)}}{\partial z} + + \sum_{l=0}^{\infty}(k-l)\overline{\rho}_l \cdot \frac{\partial \overline{\sigma}_{xz}^{(k-l)}}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty}(k+l)\overline{\rho}_l \cdot \frac{\partial \overline{q}^{(k+l)}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{\infty}(k-l)\overline{\rho}_l \cdot \frac{\partial \overline{q}^{(k-l)}}{\partial z}\right);$$

$$\int_0^b \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x}cos(kx)dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty}(k+l)\overline{\rho}_l \cdot \overline{\sigma}_{xz}^{(k+l)} + \sum_{l=0}^{\infty}(k-l)\overline{\rho}_l \cdot \overline{\sigma}_{xz}^{(k-l)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty}(k+l)\overline{\rho}_l \cdot \overline{q}^{(k+l)} + \sum_{l=0}^{\infty}(k-l)\overline{\rho}_l \cdot \overline{q}^{(k-l)}\right);$$

$$\int_0^b \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} cos(kx)dx = \tag{1.2.3}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{l=0}^{\infty}(k+l)\overline{\rho}_l\cdot\frac{\partial\overline{\sigma}_{zz}^{(k+l)}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{\infty}(k-l)\overline{\rho}_l\cdot\frac{\partial\overline{\sigma}_{zz}^{(k-l)}}{\partial z}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{l=0}^{\infty}(k+l)\overline{\rho}_l\cdot\frac{\partial\overline{s}^{(k+l)}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{\infty}(k-l)\overline{\rho}_l\cdot\frac{\partial\overline{s}^{(k-l)}}{\partial z}\right);$$
$$\int_0^b (\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} cos(kx)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{l=0}^{\infty}(k+l)(\overline{\lambda}_l+2\overline{\mu}_l)\cdot\overline{u}^{(k+l)} + \sum_{l=0}^{\infty}(k-l)(\overline{\lambda}_l+2\overline{\mu}_l)\cdot\overline{u}^{(k-l)}\right);$$
$$\int_0^b \lambda\frac{\partial w}{\partial z} cos(kx)dx = \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{l=0}^{\infty}(k+l)\overline{\lambda}_l\cdot\frac{\partial\overline{w}^{(k+l)}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{\infty}(k-l)\overline{\lambda}_l\cdot\frac{\partial\overline{w}^{(k-l)}}{\partial z}\right);$$
$$\int_0^b \lambda\frac{\partial u}{\partial z} sin(kx)dx = \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{l=0}^{\infty}(k+l)\overline{\mu}_l\cdot\frac{\partial\overline{u}^{(k+l)}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{\infty}(k-l)\overline{\mu}_l\cdot\frac{\partial\overline{u}^{(k-l)}}{\partial z}\right);$$
$$\int_0^b \mu\frac{\partial w}{\partial x} sin(kx)dx = -\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{l=0}^{\infty}(k+l)\overline{\mu}_l\cdot\overline{w}^{(k+l)} + \sum_{l=0}^{\infty}(k-l)\overline{\mu}_l\cdot\overline{w}^{(k-l)}\right);$$
$$\int_0^b (\lambda+2\mu)\frac{\partial w}{\partial z} cos(kx)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{l=0}^{\infty}(k+l)(\overline{\lambda}_l+2\overline{\mu}_l)\cdot\frac{\overline{w}^{(k+l)}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{\infty}(k-l)(\overline{\lambda}_l+2\overline{\mu}_l)\cdot\frac{\overline{w}^{(k-l)}}{\partial z}\right);$$
$$\int_0^b \lambda\frac{\partial u}{\partial x} cos(kx)dx = -\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{l=0}^{\infty}(k+l)\overline{\lambda}_l\cdot\overline{u}^{(k+l)} + \sum_{l=0}^{\infty}(k-l)\overline{\lambda}_l\cdot\overline{u}^{(k-l)}\right);$$

Таким образом, используя (1.2.2) и (1.2.3), и обозначая $conv(x,y)_k = \sum_{l=0}^{\infty}(k-l)x^{(k-l)}y^l$, $corr(x,y)_k = \sum_{l=0}^{\infty}(k+l)x^{(k+l)}y^l$, можно привести исходную систему (1.1.1-1.1.3) к виду.

$$\frac{\partial\overline{u}_k}{\partial t} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\Big(-(k+l)\overline{\rho}_l\overline{p}^{(k+l)} - (k-l)\overline{\rho}_l\overline{p}^{(k-l)} +$$
$$+(k+l)\overline{\rho}_l\frac{\partial\overline{q}^{(k+l)}}{\partial z} + (k-l)\overline{\rho}_l\frac{\partial\overline{q}^{(k-l)}}{\partial z}\Big) + \overline{f}_x^k =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-conv(\overline{\rho},\overline{p})_k - corr(\overline{\rho},\overline{p})_k + conv(\overline{\rho},\frac{\partial\overline{q}}{\partial z})_k + corr(\overline{\rho},\frac{\partial\overline{q}}{\partial z})_k\right) + \overline{f}_x^k =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-sum(\overline{\rho},\overline{p})_k + sum(\overline{\rho},\frac{\partial\overline{q}}{\partial z})_k\right) + \overline{f}_x^k;$$

$$\frac{\partial\overline{w}_k}{\partial t} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\Bigg((k+l)\overline{\rho}_l\overline{q}^{(k+l)} + (k-l)\overline{\rho}_l\overline{q}^{(k-l)} +$$

$$+(k+l)\overline{\rho}_l\frac{\partial\overline{s}^{(k+l)}}{\partial z} + (k-l)\overline{\rho}_l\frac{\partial\overline{s}^{(k-l)}}{\partial z}\Bigg) + \overline{f}_z^k =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(conv(\overline{\rho},\overline{q})_k + corr(\overline{\rho},\overline{q})_k + conv(\overline{\rho},\frac{\partial\overline{s}}{\partial z})_k + corr(\overline{\rho},\frac{\partial\overline{s}}{\partial z})_k\right) + \overline{f}_z^k =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(sum(\overline{\rho},\overline{q})_k + sum(\overline{\rho},\frac{\partial\overline{s}}{\partial z})_k\right) + \overline{f}_z^k; \tag{1.2.4}$$

$$\frac{\partial\overline{p}_k}{\partial t} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\Bigg(-(k+l)(\overline{\lambda}_l + 2\overline{\mu}_l)\overline{u}^{(k+l)} - (k-l)(\overline{\lambda}_l + 2\overline{\mu}_l)\overline{u}^{(k-l)} +$$

$$+(k+l)\overline{\lambda}_l\frac{\partial\overline{w}^{(k+l)}}{\partial z} + (k-l)\overline{\lambda}_l\frac{\partial\overline{w}^{(k-l)}}{\partial z}\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\big(-conv((\overline{\lambda}_l + 2\overline{\mu}_l),\overline{u})_k - corr((\overline{\lambda}_l + 2\overline{\mu}_l),\overline{u})_k +$$

$$+conv(\overline{\lambda},\frac{\partial\overline{w}}{\partial z})_k + corr(\overline{\lambda},\frac{\partial\overline{w}}{\partial z})_k\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(sum((\overline{\lambda}_l + 2\overline{\mu}_l),\overline{u})_k + sum(\overline{\lambda},\frac{\partial\overline{w}}{\partial z})_k\right);$$

$$\frac{\partial\overline{q}_k}{\partial t} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\Bigg(+(k+l)\overline{\mu}_l\frac{\partial\overline{u}^{(k+l)}}{\partial z} + (k-l)\overline{\mu}_l\frac{\partial\overline{u}^{(k-l)}}{\partial z} +$$

$$-(k+l)\overline{\mu}_l\overline{w}^{(k+l)} - (k-l)\overline{\mu}_l\overline{w}^{(k-l)}\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\Bigg(conv(\overline{\mu},\frac{\partial\overline{u}}{\partial z})_k + corr(\mu,\frac{\partial\overline{u}}{\partial z})_k -$$

$$-conv(\overline{\mu},\overline{w})_k - corr(\overline{\mu},\overline{w})_k) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(sum(\overline{\mu},\frac{\partial\overline{u}}{\partial z})_k - sum(\overline{\mu},\overline{w})_k\right);$$

$$\frac{\partial\overline{s}_k}{\partial t} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\Bigg((k+l)(\overline{\lambda}_l + 2\overline{\mu}_l)\frac{\partial\overline{w}^{(k+l)}}{\partial z} + (k-l)(\overline{\lambda}_l + 2\overline{\mu}_l)\frac{\partial\overline{w}^{(k+l)}}{\partial z} +$$

$$+(k+l)\overline{\lambda}_l\overline{u}^{(k-l)} + (k-l)\overline{\lambda}_l\overline{u}^{(k-l)}\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\Bigg(+conv((\overline{\lambda}_l + 2\overline{\mu}_l),\frac{\partial\overline{w}}{\partial z})_k + corr((\overline{\lambda}_l + 2\overline{\mu}_l),\frac{\partial\overline{w}}{\partial z})_k +$$

$$+conv(\overline{\lambda},\overline{u})_k + corr(\overline{\lambda},\overline{u})_k\big) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(sum((\overline{\lambda}_l + 2\overline{\mu}_l), \frac{\partial \overline{w}}{\partial z})_k + sum(\overline{\lambda}, \overline{u})_k \right);$$

1.2.1 Разностная схема для преобразованной задачи

todo

1.2.2 Фильтрация (+аппроксимация)

todo

2 ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

2.1 Последовательный алгоритм

todo

2.2 Параллельный алгоритм

todo

2.3 Адаптация и оптимизация под архитектуры

todo

3 СРАВНЕНИЕ С КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ

3.1 Точность решения

todo

3.2 Время работы ПО

todo

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

todo

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Каталог программных продуктов семейства Intel [Электронный ресурс] // Intel Россия URL: https://intel.com (дата обращения: 25.04.2020)