

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ . . . . .	6
1 СПЕКТРАЛЬНО-РАЗНОСТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН В УПРУГИХ СРЕДАХ . . . . .	10
1.1 Постановка задачи . . . . .	10
1.2 Метод решения и вывод основных формул . . . . .	12
1.3 Разностная схема для преобразованной задачи . . . . .	18
2 ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ . . . . .	20
2.1 Задание основных параметров модели . . . . .	20
2.2 Последовательный алгоритм . . . . .	22
2.3 Параллельный алгоритм . . . . .	24
2.3.1 Параллельная реализация с использованием OpenMP . .	25
2.3.2 Параллельная реализация с использованием системы LuNA . . . . .	26
2.4 Адаптация и оптимизация под архитектуры . . . . .	28
2.4.1 Оптимизации с использованием векторных расширений	29
2.4.2 Сравнение автовекторизации различных компиляторов .	33
2.4.3 Выравнивание памяти . . . . .	33
3 ТЕСТИРОВАНИЕ РАЗРАБОТАННОГО ПО . . . . .	35
3.1 Сравнение времени работы последовательной и параллельной реализаций . . . . .	35
3.2 Сравнение OpenMP и LuNA параллельных реалазий . . . . .	38
3.3 Сравнение с конечно-разностным методом . . . . .	38

ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .	40
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК . . . . .	42
ПРИЛОЖЕНИЕ А . . . . .	44

## ВВЕДЕНИЕ

К числу достаточно новых геофизических технологий относится активный вибросейсмический мониторинг, он включает в себя методы по наблюдению и исследованию состояния земной коры по изменению различных характеристик вибро-сейсмических волн, порожденных некоторым вибрационным источником, и распространяющихся в некоторой среде.

Само исследование процесса распространения упругих волн в неоднородных средах широко используется при вибросейсмическом мониторинге различных геологических объектов. Стоит отметить, что научные группы из Института вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской Академии наук (ИВМиМГ СО РАН) уже достаточно давно занимаются задачами вибро-сейсмического мониторинга, и имеют уникальный опыт в исследованиях.

В этом легко убедиться на примерах работ Глинского Б.М, Ковалевского В.В и др. по изучению грязевого вулкана «Гора Карabetова», вулкана «Шуго» и т.д.

Саму задачу вибро-сейсмического мониторинга следует разделить на 2 больших класса: прямую и обратную. При решении прямой задачи, при заданных параметрах среды, в которой распространяется волна, исследователи ставят своей целью найти параметры распространения волны, например, продольные и поперечные скорости волн. Обратная же задача, ставит своей целью найти параметры среды, в которых распространяется волна порожденная вибро-излучателем, с заранее известными характеристиками, и связи с тем, что реальная область исследования имеет довольно сложный рельеф, который может не позволять поставить площадную систему наблюдения для корректной

постановки обратной задачи, обычно решается с помощью набора прямых задач, на основе проведения серии вычислительных экспериментов.

Для решения геофизических задач необходим определенный математический аппарат. В настоящее время в ИВМиМГ СО РАН накоплен опыт в создании алгоритмов и программ для решения таких задач. Однако в связи с большими масштабами реальных задач и необходимостью, в первую очередь, решать обратную задачу геофизики, через решение набора прямых задач, постоянно возникает необходимость в разработке экономичных с точки зрения используемой памяти и времени вычислений параллельных алгоритмов и программ, позволяющих с приемлемой точностью моделировать распространение упругих волн в неоднородных средах на современных многоядерных вычислительных системах различной архитектуры.

Спектральные методы являются альтернативными по отношению к стандартным конечно-разностным схемам для расчета сейсмических полей. Важным достоинством спектральных методов является высокая скорость сходимости, если решение обладает высокой степенью гладкости. Это позволяет получить хорошую точность взяв всего две-три пространственные гармоники на минимальную длину волны, что значительно меньше, чем при применении конечно-разностного метода второго порядка точности. Таким образом, можно получить экономию по памяти вычислительной системы, в сочетании с высокой точностью вычислений.

В данной работе рассматривается 2D спектрально-разностный метод, основанный на объединении конечно-разностного метода по одной координате и конечного преобразования Фурье по другой. Возникающие при этом суммы типа свертки вычисляются с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ).

При использовании такого подхода для сред с разрывными параметрами возникает явление Гиббса, которое можно устранить, предварительно фильтруя и сглаживая разрывные функции, чтобы получить решение сравнимое с конечно-разностным.

Таким образом, целью работы является разработка спектрально-разностного параллельного алгоритма и программного пакета на его основе для моделирования распространения упругих волн в 2D неоднородных слоистых средах с разрывными параметрами и исследование качества и времени решения по сравнению с конечно-разностным решением аналогичной задачи.

Для достижения этой цели были поставлены и выполнены следующие задачи:

- разработать и оптимизировать параллельное программное обеспечение, реализующее спектрально-разностный метод и эффективно использующее современную вычислительную архитектуру многоядерного центрального процессора;
- исследовать время работы и масштабируемость разработанного ПО в сравнении с уже имеющимися программами, реализующими конечно-разностную схему Верье;
- подобрать фильтр и интерполяционный полином для сглаживания разрывных параметров слоистой среды таким образом, чтобы численно получить волновое поле, качественно сравнимое с результатом конечно-разностного решения;

Работа предполагает оригинальное развитие известного спектрально-разностного подхода на основе конечного преобразования Фурье к моделированию упругих волн в неоднородных средах, который может стать альтернативой стандартным конечно-разностным схемам. Отдельно отметим практическую

значимость разработки таких подходов в связи с развитием программируемых логических схем (ПЛИС), выполняющих БПФ за минимальное время.

# 1 СПЕКТРАЛЬНО-РАЗНОСТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН В УПРУГИХ СРЕДАХ

В данной главе описана общая математическая модель для решения численной задачи о распространении упругих волн в 2D неоднородных средах, которые возникают в результате воздействия источника, расположенного непосредственно в самой исследуемой среде.

## 1.1 Постановка задачи

Исследование распространения упругих сейсмических волн в неоднородных средах будет проводится на основе 2D модели теории упругости с соответствующими начальными и граничными условиями [5, 6, 7]

В качестве среды рассматривается изотропная 2D неоднородная среда, представляющая собой прямоугольник, размера  $a \times b$ ,  $a, b > 0$ , одна из границ (плоскость  $z = 0$ ) которого является свободной поверхностью.

Прямоугольная декартова система координат введена таким образом, чтобы ось  $Oz$  была направлена вертикально вниз, а ось  $Ox$  лежала на свободной поверхности.



Рис. 1.1 Система координат

Задача будет записана в терминах вектора скоростей смещений  $\vec{u} = (u, w)^T$  и тензора напряжений  $\vec{\sigma} = (\sigma_{xx}, \sigma_{xz}, \sigma_{zz})^T$  в следующем виде.

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \vec{\sigma} + f(x, z, t), \\ \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x} & \lambda \frac{\partial}{\partial z} \\ \mu \frac{\partial}{\partial z} & \mu \frac{\partial}{\partial x} \\ \lambda \frac{\partial}{\partial x} & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \vec{u}, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Где  $t$  - время,  $u, w$  - компоненты скоростей смещений по  $Ox$  и  $Oz$  соответственно. Параметры  $\lambda(x, z), \mu(x, z)$  - коэффициенты Ламе, удовлетворяющие соотношениям:  $\lambda + 2\mu = \rho v_p^2$ ,  $\mu = \rho v_s^2$ , где  $v_p$  - скорость распространения продольных волн,  $v_s$  - скорость распространения поперечных волн, а  $\rho(x, z) > 0, \forall x, z$  - плотность среды.

Граничные условия на свободной поверхности (плоскость  $z = 0$ ) задаются в виде:

$$\sigma_{xx}|_{z=0} = \sigma_{xz}|_{z=0} = 0 \quad (1.1.2)$$

В качестве начальных условий, в момент времени  $t = 0$  положим:

$$\begin{cases} u = w = 0, \\ \sigma_{xx}|_{t=0} = \sigma_{xz}|_{z=0} = \sigma_{zz}|_{z=0} = 0 \end{cases} \quad (1.1.3)$$

Также предполагается, что функция источника представима в виде  $f(x, z, t) = f_x i + f_z k$ , где  $i, k$  - единичные направляющие вектора соответствующих координатных осей.



В случае точечного источника типа "центр давления", расположенного в среде, функция  $f(x, z, t)$  примет вид  $f(x, z, t) = \delta(x - x_0)\delta(z - z_0)f(t)$ , где  $\delta$  - дельта функция Дирака, а  $x_0, z_0$  - координаты источника.

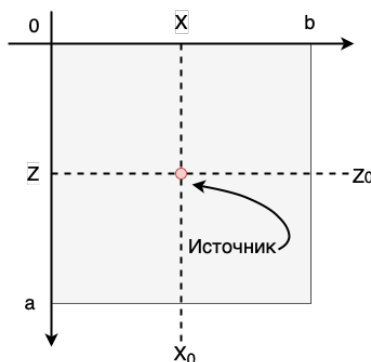


Рис. 1.2 Положение источника

Представленная система уравнений (1.1.1), в совокупности с начальными и граничными условиями (1.1.2-1.1.3), описывает распространения упругих волн в неоднородной среде с точечным источником.

## 1.2 Метод решения и вывод основных формул

В отличие от работы [2] метод расчета сейсмических полей для задачи (1.1.1-1.1.3) основан на альтернативном, не столь популярном, как его конечно-разностные аналоги, спектрально-разностном подходе. Этот метод обладает высокой скоростью сходимости, при достаточно гладких решениях исходной задачи, что позволяет получить решение сравнимое по точности со стандартным конечно-разностным методом.

Рассмотрим следующие прямые преобразования Фурье для функций  $u$ ,  $w$ ,

$\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{zz}$ .

$$\left[ \begin{aligned} \bar{u}_{\bar{k}} &= \int_0^b u \cdot \sin(\bar{k}x) dx = \int_0^b u(x, z, t) \cdot \sin(\bar{k}x) dx = \bar{u}_{\bar{k}}(x, z, t), \\ \bar{w}_{\bar{k}} &= \int_0^b w \cdot \cos(\bar{k}x) dx = \int_0^b w(x, z, t) \cdot \cos(\bar{k}x) dx = \bar{w}_{\bar{k}}(x, z, t), \\ \bar{p}_{\bar{k}} &= \bar{\sigma}_{xx}^{\bar{k}} = \int_0^b \sigma_{xx} \cdot \cos(\bar{k}x) dx = \int_0^b \sigma_{xx}(x, z, t) \cdot \cos(\bar{k}x) dx = \bar{\sigma}_{xx}^{\bar{k}}(x, z, t), \\ \bar{q}_{\bar{k}} &= \bar{\sigma}_{xz}^{\bar{k}} = \int_0^b \sigma_{xz} \cdot \sin(\bar{k}x) dx = \int_0^b \sigma_{xz}(x, z, t) \cdot \sin(\bar{k}x) dx = \bar{\sigma}_{xz}^{\bar{k}}(x, z, t), \\ \bar{s}_{\bar{k}} &= \bar{\sigma}_{zz}^{\bar{k}} = \int_0^b \sigma_{zz} \cdot \cos(\bar{k}x) dx = \int_0^b \sigma_{zz}(x, z, t) \cdot \cos(\bar{k}x) dx = \bar{\sigma}_{zz}^{\bar{k}}(x, z, t) \end{aligned} \right. \quad (1.2.1)$$

Где полагаем, что  $\bar{k} = \frac{k\pi}{b}$ .

2D спектрально-разностный метод для решения задачи (1.1.1-1.1.3), основанный на объединении конечно-разностного метода по  $z$  координате и конечного преобразования Фурье по  $x$  координате наиболее подробно описан в работе [4]. Ниже приведем только основные выкладки.

Умножим каждое уравнение системы (1.1.1) на соответствующую базисную  $k$ -функцию и проинтегрируем по  $x$ , предполагая, что

$$\frac{1}{\rho(x, z, t)} = \frac{\bar{\rho}_0}{2} + \sum_{\bar{l}=1}^{\infty} \bar{\rho}_{\bar{l}} \cdot \cos(\bar{l}x) = \frac{\bar{\rho}_0(0, z)}{2} + \sum_{\bar{l}=1}^{\infty} \bar{\rho}_{\bar{l}}(\bar{l}, z) \cdot \cos(\bar{l}x)$$

$$(\lambda + 2\mu)(x, z) = \frac{(\lambda + 2\mu)_0}{2} + \sum_{\bar{l}=1}^{\infty} (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})_{\bar{l}} \cdot \cos(\bar{l}x)$$

$$\mu(x, z) = \frac{\bar{\mu}_0}{2} + \sum_{\bar{l}=1}^{\infty} \bar{\mu}_{\bar{l}} \cdot \cos(\bar{l}x)$$

$$\lambda(x, z) = \frac{\bar{\lambda}_0}{2} + \sum_{\bar{l}=1}^{\infty} \bar{\lambda}_{\bar{l}} \cdot \cos(\bar{l}x)$$

Используя формулу интегрирования по частям, формулу произведения тригонометрических функций, приводя подобные слагаемые, и замену (1.2.1) Получим следующее соотношение.

$$\begin{aligned}
& \int_0^b \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \sin(\bar{k}x) dx = \int_0^b \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \sin(\bar{k}x) \right) dx = \\
& = \underbrace{\left[ \sigma_{xx} \frac{1}{\rho} \sin(\bar{k}x) \right]_0^b}_{=0} - \int_0^b \sigma_{xx} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\rho} \sin(\bar{k}x) \right] dx = \\
& = - \int_0^b \sigma_{xx} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\bar{\rho}_0}{2} + \sum_{\bar{l}=1}^{\infty} \bar{\rho}_{\bar{l}} \cdot \cos(\bar{l}x) \right) \sin(\bar{k}x) \right] dx = \\
& = - \int_0^b \sigma_{xx} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\bar{\rho}_0}{2} \sin(\bar{k}x) + \sum_{\bar{l}=1}^{\infty} \bar{\rho}_{\bar{l}} \cdot \cos(\bar{l}x) \sin(\bar{k}x) \right] dx = \\
& = - \int_0^b \sigma_{xx} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\bar{\rho}_0}{2} \sin(\bar{k}x) + \frac{1}{2} \sum_{\bar{l}=1}^{\infty} \bar{\rho}_{\bar{l}} \cdot \sin((\bar{k} + \bar{l})x) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \sum_{\bar{l}=1}^{\infty} \bar{\rho}_{\bar{l}} \cdot \sin((\bar{k} - \bar{l})x) \right] dx = \tag{1.2.2} \\
& = - \int_0^b \sigma_{xx} \left[ k \frac{\bar{\rho}_0}{2} \cos(\bar{k}x) + \frac{1}{2} \left( \sum_{\bar{l}=1}^{\infty} (\bar{k} + \bar{l}) \bar{\rho}_{\bar{l}} \cdot \cos((\bar{k} + \bar{l})x) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{\bar{l}=1}^{\infty} (\bar{k} - \bar{l}) \bar{\rho}_{\bar{l}} \cdot \cos((\bar{k} - \bar{l})x) \right) \right] dx = \\
& = - \bar{k} \bar{\sigma}_{xx}^{\bar{k}} \frac{\bar{\rho}_0}{2} - \frac{1}{2} \left( \sum_{\bar{l}=1}^{\infty} (\bar{k} + \bar{l}) \bar{\rho}_{\bar{l}} \cdot \bar{\sigma}_{xx}^{(\bar{k}+\bar{l})} + \sum_{\bar{l}=1}^{\infty} (\bar{k} - \bar{l}) \bar{\rho}_{\bar{l}} \cdot \bar{\sigma}_{xx}^{(\bar{k}-\bar{l})} \right) = \\
& = - \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} + \bar{l}) \bar{\rho}_{\bar{l}} \cdot \bar{\sigma}_{xx}^{(\bar{k}+\bar{l})} + \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} - \bar{l}) \bar{\rho}_{\bar{l}} \cdot \bar{\sigma}_{xx}^{(\bar{k}-\bar{l})} \right) = \\
& = - \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} + \bar{l}) \bar{\rho}_{\bar{l}} \cdot \bar{p}^{(\bar{k}+\bar{l})} + \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} - \bar{l}) \bar{\rho}_{\bar{l}} \cdot \bar{p}^{(\bar{k}-\bar{l})} \right)
\end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем оставшиеся соотношения.

$$\begin{aligned}
& \int_0^b \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \sin(\bar{k}x) dx = \\
& = \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} + \bar{l}) \bar{\rho}_{\bar{l}} \cdot \frac{\partial \bar{\sigma}_{xz}^{(\bar{k}+\bar{l})}}{\partial z} + \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} - \bar{l}) \bar{\rho}_{\bar{l}} \cdot \frac{\partial \bar{\sigma}_{xz}^{(\bar{k}-\bar{l})}}{\partial z} \right) = \\
& = \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} + \bar{l}) \bar{\rho}_{\bar{l}} \cdot \frac{\partial \bar{q}^{(\bar{k}+\bar{l})}}{\partial z} + \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} - \bar{l}) \bar{\rho}_{\bar{l}} \cdot \frac{\partial \bar{q}^{(\bar{k}-\bar{l})}}{\partial z} \right); \\
& \int_0^b \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} \cos(\bar{k}x) dx = \\
& = \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} + \bar{l}) \bar{\rho}_{\bar{l}} \cdot \bar{\sigma}_{xz}^{(\bar{k}+\bar{l})} + \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} - \bar{l}) \bar{\rho}_{\bar{l}} \cdot \bar{\sigma}_{xz}^{(\bar{k}-\bar{l})} \right) = \\
& = \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} + \bar{l}) \bar{\rho}_{\bar{l}} \cdot \bar{q}^{(\bar{k}+\bar{l})} + \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} - \bar{l}) \bar{\rho}_{\bar{l}} \cdot \bar{q}^{(\bar{k}-\bar{l})} \right); \\
& \int_0^b \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \cos(kx) dx = \tag{1.2.3} \\
& = \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} + \bar{l}) \bar{\rho}_{\bar{l}} \cdot \frac{\partial \bar{\sigma}_{zz}^{(\bar{k}+\bar{l})}}{\partial z} + \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} - \bar{l}) \bar{\rho}_{\bar{l}} \cdot \frac{\partial \bar{\sigma}_{zz}^{(\bar{k}-\bar{l})}}{\partial z} \right) = \\
& = \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} + \bar{l}) \bar{\rho}_{\bar{l}} \cdot \frac{\partial \bar{s}^{(\bar{k}+\bar{l})}}{\partial z} + \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} - \bar{l}) \bar{\rho}_{\bar{l}} \cdot \frac{\partial \bar{s}^{(\bar{k}-\bar{l})}}{\partial z} \right); \\
& \int_0^b (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\bar{k}x) dx = \\
& = \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} + \bar{l}) (\bar{\lambda}_{\bar{l}} + 2\bar{\mu}_{\bar{l}}) \cdot \bar{u}^{(\bar{k}+\bar{l})} + \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} - \bar{l}) (\bar{\lambda}_{\bar{l}} + 2\bar{\mu}_{\bar{l}}) \cdot \bar{u}^{(\bar{k}-\bar{l})} \right); \\
& \int_0^b \lambda \frac{\partial w}{\partial z} \cos(\bar{k}x) dx = \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} + \bar{l}) \bar{\lambda}_{\bar{l}} \cdot \frac{\partial \bar{w}^{(\bar{k}+\bar{l})}}{\partial z} + \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} - \bar{l}) \bar{\lambda}_{\bar{l}} \cdot \frac{\partial \bar{w}^{(\bar{k}-\bar{l})}}{\partial z} \right); \\
& \int_0^b \lambda \frac{\partial u}{\partial z} \sin(\bar{k}x) dx = \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} + \bar{l}) \bar{\mu}_{\bar{l}} \cdot \frac{\partial \bar{u}^{(\bar{k}+\bar{l})}}{\partial z} + \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} - \bar{l}) \bar{\mu}_{\bar{l}} \cdot \frac{\partial \bar{u}^{(\bar{k}-\bar{l})}}{\partial z} \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^b \mu \frac{\partial w}{\partial x} \sin(\bar{k}x) dx &= -\frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} + \bar{l}) \bar{\mu}_{\bar{l}} \cdot \bar{w}^{(\bar{k}+\bar{l})} + \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} - \bar{l}) \bar{\mu}_{\bar{l}} \cdot \bar{w}^{(\bar{k}-\bar{l})} \right); \\
\int_0^b (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} \cos(\bar{k}x) dx &= \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} + \bar{l}) (\bar{\lambda}_{\bar{l}} + 2\bar{\mu}_{\bar{l}}) \cdot \frac{\bar{w}^{(\bar{k}+\bar{l})}}{\partial z} + \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} - \bar{l}) (\bar{\lambda}_{\bar{l}} + 2\bar{\mu}_{\bar{l}}) \cdot \frac{\bar{w}^{(\bar{k}-\bar{l})}}{\partial z} \right); \\
\int_0^b \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\bar{k}x) dx &= -\frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} + \bar{l}) \bar{\lambda}_{\bar{l}} \cdot \bar{u}^{(\bar{k}+\bar{l})} + \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} - \bar{l}) \bar{\lambda}_{\bar{l}} \cdot \bar{u}^{(\bar{k}-\bar{l})} \right);
\end{aligned}$$

Таким образом, используя (1.2.2) и (1.2.3), и обозначая

$$conv(x, y)_{\bar{k}} = \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} - \bar{l}) x^{(\bar{k}-\bar{l})} y^{\bar{l}}$$

$$corr(x, y)_{\bar{k}} = \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} (\bar{k} + \bar{l}) x^{(\bar{k}+\bar{l})} y^{\bar{l}}$$

$$sum(x, y)_{\bar{k}} = conv(x, y)_{\bar{k}} + corr(x, y)_{\bar{k}}$$

можно привести исходную систему (1.1.1-1.1.3) к виду.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_{\bar{k}}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} \left( -(\bar{k} + \bar{l}) \bar{\rho}_{\bar{l}} \bar{p}^{(\bar{k}+\bar{l})} - (\bar{k} - \bar{l}) \bar{\rho}_{\bar{l}} \bar{p}^{(\bar{k}-\bar{l})} + \right. \\
&\quad \left. + (\bar{k} + \bar{l}) \bar{\rho}_{\bar{l}} \frac{\partial \bar{q}^{(\bar{k}+\bar{l})}}{\partial z} + (\bar{k} - \bar{l}) \bar{\rho}_{\bar{l}} \frac{\partial \bar{q}^{(\bar{k}-\bar{l})}}{\partial z} \right) + \bar{f}_x^{\bar{k}} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left( -conv(\bar{\rho}, \bar{p})_{\bar{k}} - corr(\bar{\rho}, \bar{p})_{\bar{k}} + conv(\bar{\rho}, \frac{\partial \bar{q}}{\partial z})_{\bar{k}} + corr(\bar{\rho}, \frac{\partial \bar{q}}{\partial z})_{\bar{k}} \right) + \bar{f}_x^{\bar{k}} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left( -sum(\bar{\rho}, \bar{p})_{\bar{k}} + sum(\bar{\rho}, \frac{\partial \bar{q}}{\partial z})_{\bar{k}} \right) + \bar{f}_x^{\bar{k}}; \\
\frac{\partial \bar{w}_{\bar{k}}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \cdot \left( sum(\bar{\rho}, \bar{q})_{\bar{k}} + sum(\bar{\rho}, \frac{\partial \bar{s}}{\partial z})_{\bar{k}} \right) + \bar{f}_z^{\bar{k}}; \\
\frac{\partial \bar{p}_{\bar{k}}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \cdot \left( sum((\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}), \bar{u})_{\bar{k}} + sum(\bar{\lambda}, \frac{\partial \bar{w}}{\partial z})_{\bar{k}} \right);
\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{q}_{\bar{k}}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \cdot \left( \text{sum}(\bar{\mu}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial z})_{\bar{k}} - \text{sum}(\bar{\mu}, \bar{w})_{\bar{k}} \right); \\ \frac{\partial \bar{s}_{\bar{k}}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \cdot \left( \text{sum}((\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}), \frac{\partial \bar{w}}{\partial z})_{\bar{k}} + \text{sum}(\bar{\lambda}, \bar{u})_{\bar{k}} \right);\end{aligned}$$

Начальные и граничные условия примут вид

$$\begin{cases} \bar{u}^{\bar{k}} = \bar{w}^{\bar{k}} = \bar{p}^{\bar{k}} = \bar{q}^{\bar{k}} = \bar{s}^{\bar{k}} = 0; \\ \bar{p}^{\bar{k}} = \bar{s}^{\bar{k}} = 0 \end{cases} \quad (1.2.5)$$

Формулы обращения для нахождения решения исходной системы (1.1.1-1.1.3) примут вид:

$$\begin{aligned}u(x, z, t) &= \frac{2}{b} \sum_{\bar{k}=1}^{\infty} \bar{u}_{\bar{k}}(k, z, t) \sin(\bar{k}x) \\ w(x, z, t) &= \frac{1}{b} \bar{w}(0, z, t) + \frac{2}{b} \sum_{\bar{k}=1}^{\infty} \bar{w}_{\bar{k}}(k, z, t) \cos(\bar{k}x) \\ \sigma_{xx}(x, z, t) &= \frac{1}{b} \bar{\tau}_{xx}(0, z, t) + \frac{2}{b} \sum_{\bar{k}=1}^{\infty} \bar{\sigma}_{xx}^{\bar{k}}(k, z, t) \cos(\bar{k}x) \\ \sigma_{xz}(x, z, t) &= \frac{2}{b} \sum_{\bar{k}=1}^{\infty} \bar{\sigma}_{xz}^{\bar{k}}(k, z, t) \sin(\bar{k}x) \\ \sigma_{zz}(x, z, t) &= \frac{1}{b} \bar{\sigma}_{zz}(0, z, t) + \frac{2}{b} \sum_{\bar{k}=1}^{\infty} \bar{\sigma}_{zz}^{\bar{k}}(k, z, t) \cos(\bar{k}x)\end{aligned} \quad (1.2.6)$$

### 1.3 Разностная схема для преобразованной задачи

Новую, уже одномерную задачу (1.2.4-1.2.5), полученную из исходной постановки (1.1.1-1.1.3), можно решать различными конечно-разностными методами. В данной работе в качестве разностной схемы для решения (1.2.4-1.2.5) был взят одномерный аналог, хорошо себя зарекомендовавшей, конечно-разностной схемы Верье на сдвинутых сетках.

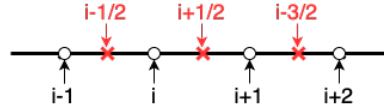


Рис. 1.3 Расположение узлов сетки

Полагая, что  $\tau$  - шаг по времени, а  $h$  - по пространственной координате, получаем следующее конечно-разностное представление системы (1.2.4-1.2.5)

$$\begin{aligned}
 \frac{\bar{u}_{n+1,i}^k - \bar{u}_{n,i}^k}{\tau} &= \frac{1}{2} \left[ \text{sum} \left( \frac{\bar{q}_{n,i+\frac{1}{2}}^k - \bar{q}_{n,i-\frac{1}{2}}^k}{h}, \bar{\rho}_i \right)_{\bar{k}} - \text{sum}(\bar{p}_{n,i}, \bar{\rho}_i)_{\bar{k}} \right] \\
 \frac{\bar{w}_{n+1,i+\frac{1}{2}}^k - \bar{w}_{n,i+\frac{1}{2}}^k}{\tau} &= \frac{1}{2} \left[ \text{sum}(\bar{q}_{n,i+\frac{1}{2}}^k, \bar{\rho}_{i+\frac{1}{2}})_{\bar{k}} - \text{sum} \left( \frac{\bar{s}_{n,i+1}^k - \bar{s}_{n,i}^k}{h}, \bar{\rho}_{i+\frac{1}{2}} \right)_{\bar{k}} \right] \\
 \frac{\bar{p}_{n+1,i}^k - \bar{p}_{n,i}^k}{\tau} &= \frac{1}{2} \left[ \text{sum} \left( \frac{\bar{w}_{n,i+\frac{1}{2}}^k - \bar{w}_{n,i-\frac{1}{2}}^k}{h}, \bar{\lambda}_i \right)_{\bar{k}} - \text{sum}(\bar{u}_{n,i}, \bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i)_{\bar{k}} \right] + f_{x,n}^k \\
 &\quad (1.3.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\bar{q}_{n+1,i+\frac{1}{2}}^k - \bar{q}_{n,i+\frac{1}{2}}^k}{\tau} &= \frac{1}{2} \left[ \text{sum} \left( \frac{\bar{u}_{n,i+1}^k - \bar{u}_{n,i}^k}{h}, \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}} \right)_{\bar{k}} - \text{sum}(\bar{w}_{n,i+\frac{1}{2}}^k, \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}})_{\bar{k}} \right] \\
 \frac{\bar{s}_{n+1,i}^k - \bar{s}_{n,i}^k}{\tau} &= \frac{1}{2} \left[ \text{sum} \left( \frac{\bar{w}_{n,i+\frac{1}{2}}^k - \bar{w}_{n,i-\frac{1}{2}}^k}{h}, \bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i \right)_{\bar{k}} - \text{sum}(\bar{u}_{n,i}, \bar{\lambda}_i)_{\bar{k}} \right] + f_{z,n}^k
 \end{aligned}$$

Где функция источника представляется в виде:

$$f_{x,n}^{\bar{k}} = f_{z,n}^{\bar{k}} = \begin{cases} f(t)\cos(\bar{k}x_0) & , z = z_0 \\ 0 & , z \neq z_0 \end{cases}$$

А граничные условия:

$$\frac{\bar{w}_{n+1,\frac{1}{2}} - \bar{w}_{n,\frac{1}{2}}}{\tau} = \frac{1}{2}sum(\frac{2\bar{s}_{n,1}^{\bar{k}}}{h}, \bar{\rho}_1)$$

Для того, чтобы обеспечить сходимость представленной выше явной разностной схемы, также необходимо выполнение условий Куранта:

$$\tau \leq \frac{h}{\max_z (V_p)} \quad (1.3.2)$$



## 2 ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

В данной главе представлено описание основных компонентов разработанного параллельного программного обеспечения, с помощью которого произведено исследование спектрально-разностного алгоритма в однородных средах. Представлена эффективная последовательная и параллельная реализация алгоритма под системы с общей памятью, на языке программирования C++ с использованием стандарта C++17, в том числе под вычислительные системы использующиеся в Сибирском Суперкомпьютерном центре Коллективного Пользования ИВМиМГ СО РАН (ЦКП ССКЦ ИВМиМГ СО РАН). В ходе работы проведена адаптация параллельной реализации алгоритма под архитектуры, поддерживающие векторные расширения (SIMD). Также рассмотрена одна из возможных параллельных реализаций для гетерогенных систем с распределенной памятью при помощи системы фрагментированного программирования LuNA, разрабатываемой лабораторией синтеза параллельных программ ИВМиМГ СО РАН. Проведено сравнение между программами: сгенерированной системой LuNA для вычислительных систем с общей памятью и реализованной средствами OpenMP.

### 2.1 Задание основных параметров модели

Для того, чтобы провести численный расчет приведенной задачи в первую очередь необходимо задать сеточную область. В настоящее время существует множество программных средств, позволяющих это реализовать, однако большинство из них входит в состав больших коммерческих программных продуктов, использование которых избыточно для данной задачи.

В первую очередь задаются основные параметры модели:  $a$ ,  $b$  - размеры исследуемой области. Шаг по времени  $t$  и размеры сеточной области по вертикальной координате  $z$ , а также количество гармоник, используемых для преобразования Фурье. Для того, чтобы обеспечить сходимость явной разностной схемы, необходимо проверить выполнение условий Куранта.

Для того, чтобы не тратить вычислительные ресурсы во время исполнения основного кода, удобно вычислять все параметры на этапе компиляции программы, условия Куранта и остальные ограничения на входные данные могут быть проверены аналогичным образом.

Средства C++17 позволяют реализовать эти проверки на этапе компиляции.

Например, следующим образом.

```
using Precision = double;

constexpr auto g_z_limit_value = static_cast<Precision>(1.);
constexpr auto g_t_limit_value = static_cast<Precision>(1.);

constexpr auto g_t_grid_size = 2048u;
constexpr auto g_z_grid_size = 1024u;

constexpr auto g_k_limit = 32u;

constexpr auto g_z_grid_step = g_z_limit_value / static_cast<Precision>(
    g_z_grid_size);
constexpr auto g_t_grid_step = g_t_limit_value / static_cast<Precision>(
    g_t_grid_size);

static_assert(g_t_grid_step * g_t_grid_step <= g_z_grid_step * g_z_grid_step /
    static_cast<Precision>(2.));

static_assert(g_z_grid_step < static_cast<Precision>(1.) / (static_cast<
    Precision>(2.) * static_cast<Precision>(g_k_limit)));
```

Параметры среды  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{\lambda}$ ,  $\bar{\mu}$  задаются в виде 2D массивов, где первая координата соответствует индексу по пространственной сетке  $z$ , а вторая соответствует индексу гармоники  $k$ . Аналогичным образом задаются рассчитываемые величины  $\bar{u}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$ ,  $\bar{s}$ .

## 2.2 Последовательный алгоритм

Алгоритм расчета явной разностной схемы (1.3.1), представляет собой процедуру вычисления серии сумм типа сверток и корреляций, представленных в (1.2.3). Вычисление каждой из таких сумм, предварительно сопровождается умножением элементов исходных массивов на соответствующие коэффициенты, после чего выполняется дискретная свертка или корреляция.

Так как полная реализация алгоритма средствами C++17 является достаточно громоздкой, ниже приведена только блок-схема (рис. 2.1) описываемого алгоритма.

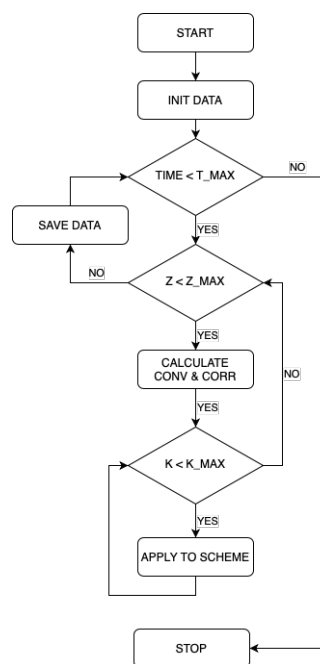


Рис. 2.1 Схема последовательного исполнения

Стоит отметить, что описываемый метод решения исходной задачи относится к так называемым memory-bounded алгоритмам. Поэтому для более эффективного доступа к памяти, и как следствие, более эффективному исполнению, становится важным правильно расположить циклы по времени, пространственной координате и гармоникам.

```
for (t=0; t < t_limit; ++t)
{
    for (z=0; z < z_limit; ++z)
    {
        //! Умножаем на соответствующие k-коэффициенты
        calculate_coefs_corr_and_conv(values_1[z], t);
        //! Вычисляем свертки и корреляции
        calculate_all_corr_and_conv(values_1[z], t);
        for (k=0; k < k_limit; ++k)
        {
            //! Применяем схему для соответствующих z, k и функции источника
            values_2[z][k] = apply_scheme(values_1[z][k], t, f);
        }
    }
    //! Сохраняем результат вычисления шага t+1
    save(values_2);
    //! Значения шага t+1 задаем как исходные для следующего шага
    swap(values_1, values_2);
}
```

Для реальных численных задач число шагов по  $z$  координате обычно значительно больше, чем число гармоник используемых для расчетов, так же вычисление сумм типа свертки требует больше машинного времени, чем вычисление самих коэффициентов разностной схемы. Таким образом "бутылочным горлышком" такого алгоритма является скорость вычисления сумм типа свертки и корреляций для каждого из узлов по  $z$  координате.

Реализация эффективных операций сверток и корреляций может потребовать от программиста глубоких знаний архитектуры целевой вычислительной платформы, поэтому для вычислений было принято решение использовать, хорошо зарекомендовавшую себя библиотеку Intel MKL, которая предоставляет процедуры для эффективного вычисления сверток/корреляций.

## **2.3 Параллельный алгоритм**

Для проведения численных экспериментов с полномасштабной моделью(с большим количеством узлов расчетной сетки и шагов по времени) требуется значительное число вычислительных ресурсов. Поэтому, чтобы получить приемлимое время расчетов для эксперимента, потребовалось провести распараллеливание исходной последовательной программы.

В настоящее время, существует множество различных многоядерных вычислительных комплексов, в числе которых, как комплексы с общей памятью, так и вычислительные кластера, в самом общем случае, с гетерогенными узлами.

В данной работе вычисления и изучение результатов распараллеливания проводились, как на персональном компьютере с процессором Intel Core i9 2,4 ГГц и 32 Гб DDR4 памяти, так и на отдельных серверах с общей памятью ЦКП ССКЦ ИВМиМГ СО РАН.

Также стоит отметить, что одним из основных требований к исходной программе была ее переносимость между различными платформами, что позволило провести большое количество численных экспериментов на различных вычислительных системах, без необходимости в существенной доработке исходной программы.

### **2.3.1 Параллельная реализация с использованием OpenMP**

Для распараллеливания исходной схемы итерации в цикле по координате  $z$  распределяются между параллельными потоками средствами распараллеливания и блокирующей синхронизации OpenMP.

Заметим, что такой вариант распараллеливания не является наиболее эффективным из-за того, что не дает программисту полного контроля над исполнением параллельной программы, в частности над операциями синхронизации, которые при данном "наивном" варианте распараллеливания занимают значительную часть времени расчета. Однако такой подход позволяет получить значительное ускорение исполнения программы, при минимальной модификации исходного пользовательского кода.

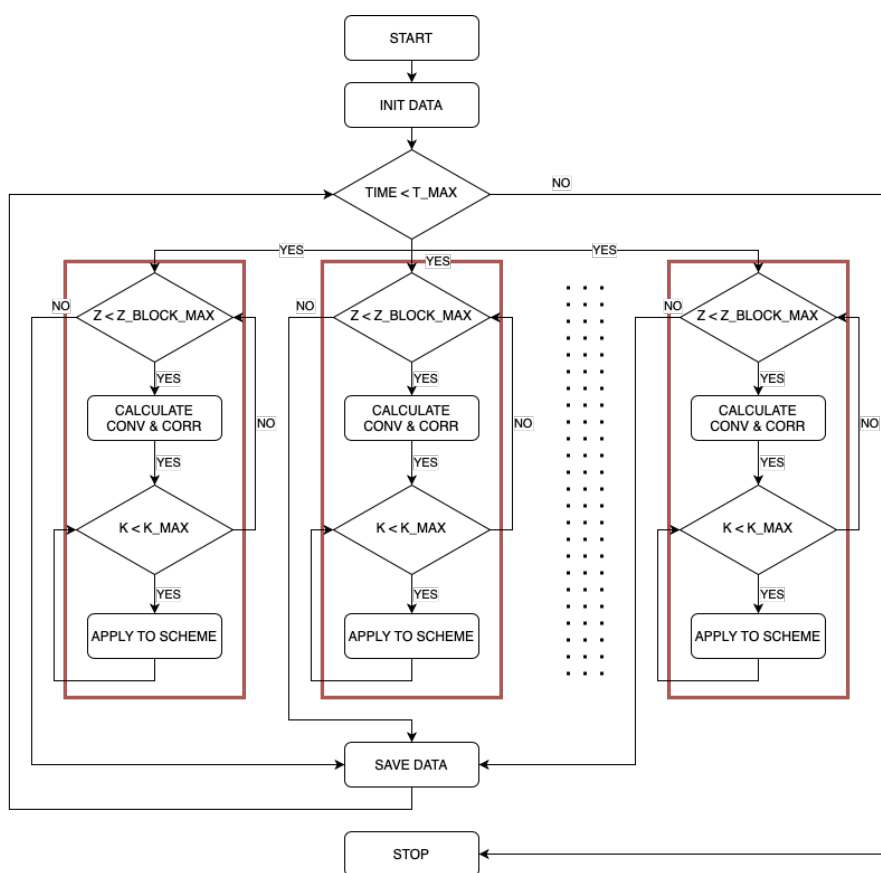


Рис. 2.2 Схема параллельного исполнения

### 2.3.2 Параллельная реализация с использованием системы LuNA

Необходимым требованием к параллельной программе является эффективность ее работы. Эффективность понимается в смысле времени выполнения, расхода памяти, нагрузки на коммуникационную подсистему и т.п. Поэтому написание оптимальной программы для гетерогенных систем, реализующей представленный численный алгоритм, удовлетворяющей требованиям описанным выше, может представлять значительные трудности. Так как исследователю приходится решать задачи из области системного программирования, которые не относятся к хорошо знакомой ему прикладной предметной области. В связи с этим, актуальным становится автоматизация конструирования параллельной программы. Одним из возможных решений, которое позволяет избежать описанных выше трудностей, может быть система фрагментированного программирования LuNA, разработанная лабораторией Синтеза параллельных программ под руководством В.Э.Малышкина.

Описание исходной программы для системы LuNA происходит в несколько этапов:

- Описание наборов выходных/выходных фрагментов вычислений и данных, связанных информационными зависимостями на любом из доступных языков программирования (C, C++, Fortran);
- Описание фрагментированной программы на функциональном языке LuNA (приложение А);
- Исполнение скомпилированного кода на системе LuNA RTS;

Алгоритм исполнения программы состоит из следующих шагов, которые могут повторяться:

- Фрагмент вычислений исполняется, при условии, что все его выходные фрагменты данных готовы.

- После завершения вычислений выходные фрагменты получают свои значения.
- После того, как были вычислены все фрагменты данных, программа завершается.

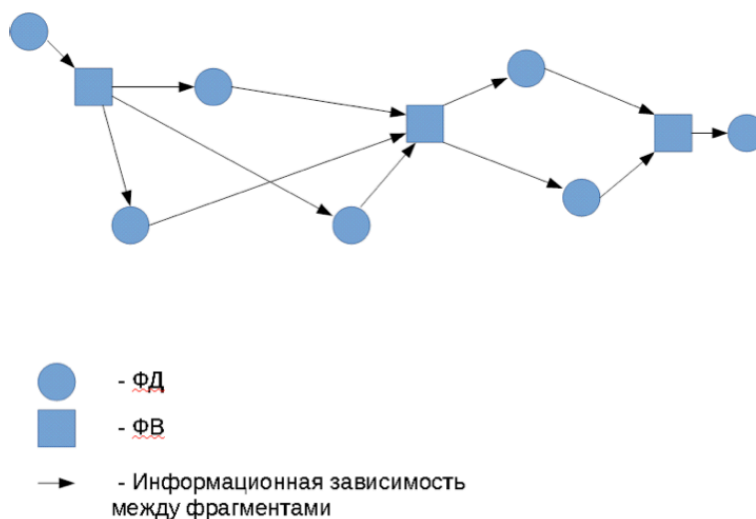


Рис. 2.3 Схема исполнения фрагментированной программы

Фрагменты вычислений являются аналогами функций процедурных языков программирования, а фрагменты данных – переменных единственного присваивания. Поток управления для программ на LuNA не задан, фрагмент вычислений исполняется только если все его входные фрагменты данных получили значения [8].

Средства C++ позволяют реализовать описание пользовательских фрагментов-вычислений в виде динамической библиотеки, для дальнейшего динамического связывания(dynamic linking) с параллельным программным кодом, сгенерированным компилятором системы LuNA, согласно соглашению о вызовах языка C.

Преимуществом такого подхода к описанию параллельной программы является его простота. Программисту не требуется решать задачи прикладного



системного программирования, которые могут возникнуть, например, при использовании средств MPI. Задачи балансировки нагрузки, обмена границами и т.п. возьмет на себя система.

Полагая, что размер  $N$  сетки по  $z$  соотносится с размерами фрагментов  $M$  и их количеством  $K$ , следующим образом  $N = M * K$ , вычислительный процесс может быть реализован аналогичным с (Рис. 2.2) образом. Главным отличием будет то, что в самом общем случае, каждый фрагмент может быть исполнен на любом из доступных узлов, в произвольном порядке, не нарушающем информационных зависимостей.

Отдельно отметим практическую значимость такого подхода. Повышение уровня программирования, что является целью разработки LuNA [8], достигается за счет следующих задач, решаемых системой исполнения:

- Асинхронный запуск фрагментов-вычислений.
- Выбор запускаемых фрагментов-вычислений из списка готовых фрагментов-вычислений.
- Локальная балансировка нагрузки.
- Порождение, распределение по распределенной памяти фрагментов данных. Сборка мусора.
- Обработка исключительных ситуаций. Отказоустойчивость.

## 2.4 Адаптация и оптимизация под архитектуры

Не смотря на то, что параллельная реализация с использованием средств OpenMP и Intel MKL дает существенный выигрыш, по сравнению с последовательной реализацией, чтобы добиться пиковой производительности нужно

учитывать особенности архитектуры конкретной вычислительной системы, и применять точечные оптимизации отдельных программных процедур.

### 2.4.1 Оптимизации с использованием векторных расширений

Одними из популярных способов такого рода оптимизаций является использование специальных инструкций процессора, так называемых векторных расширений (SIMD), которые позволяют ускорить исполнение процедур, например, посредством разворачивания циклов или использования специальных векторных регистров и операций над ними.

Библиотека OpenMP позволяет векторизовать пользовательский код с помощью специальных директив препроцессора C++, а средства современных компиляторов позволяют получать отчеты о векторизации на этапе компиляции. Например, флагами компиляции `-Rpass="loop|vect"` `-Rpass-missed="loop|vect"` `-Rpass-analysis="loop|vect"` для компилятора LLVM Clang.

Пример векторизованного средствами OpenMP кода на C++, для функции вычисления коэффициентов для последующего вычисления сумм типа сверток.

```
inline auto apply_corr_factor(
    const Grid1D& input,
    const Precision mult,
    Grid1D& result) noexcept
{
    #pragma omp simd
    for (auto k_idx = 0u; k_idx < input.size(); ++k_idx)
    {
        result[k_idx] = mult
            * static_cast<Precision>(input.size() - k_idx)
            * input[k_idx];
    }
}
```

При таком подходе набор используемых векторных инструкций, параметры разворачивания циклов и другие, будут подобраны библиотекой автоматически, что может быть не эффективно для некоторых программных процедур. Поэтому в данной работе исследовался вариант с ручной векторизацией, что позволило незначительно, но все же ускорить исполнение пользовательских функций.

Вариант с ручной векторизацией с использованием векторных расширений AVX2.

```
inline auto apply_corr_factor(
    const Grid1D& input,
    const Precision mult,
    Grid1D& result) noexcept
{
    static_assert(sizeof(Grid1D::value_type) == 8u);
    for (auto idx = 0u; idx < input.size() / 4u; ++idx)
    {
        inline const auto k_idx = idx * 4u;
        inline auto input_data = _mm256_load_pd(input.data() + k_idx);
        inline const auto factors_data = _mm256_set_pd(
            mult * static_cast<Precision>(input.size() - k_idx - 3u),
            mult * static_cast<Precision>(input.size() - k_idx - 2u),
            mult * static_cast<Precision>(input.size() - k_idx - 1u),
            mult * static_cast<Precision>(input.size() - k_idx));
        inline const auto factorized = _mm256_mul_pd(input_data, factors_data);
        _mm256_store_pd(result.data() + k_idx, factorized);
    }
    for (
        auto k_idx = input.size() - input.size() \% 4u;
        k_idx < input.size();
        ++k_idx)
    {
        result[k_idx] = mult
            * static_cast<Precision>(input.size() - k_idx)
            * input[k_idx];
    }
}
```

}

Для сравнения результатов различных векторизаций использовалась библиотека Google Benchmark.

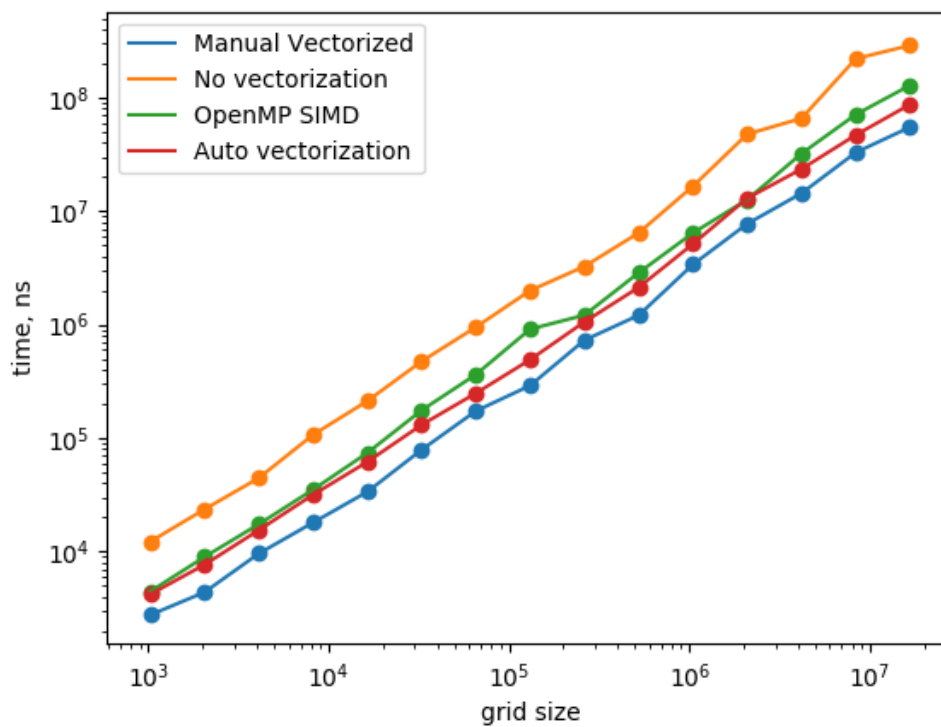


Рис. 2.4 Результаты векторизации для Intel Intel Core-i9(16 X 2300 MHz CPUs)  
L3 Unified 16384 KiB

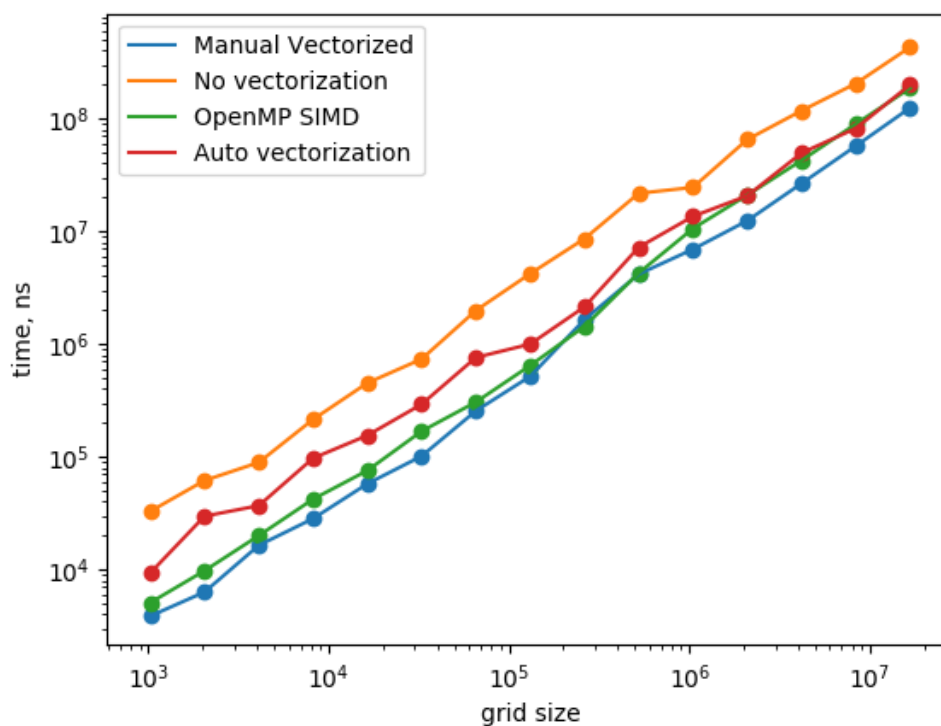


Рис. 2.5 Результаты векторизации для GCC Intel Core-i9(16 X 2300 MHz CPUs L3 Unified 16384 KiB)

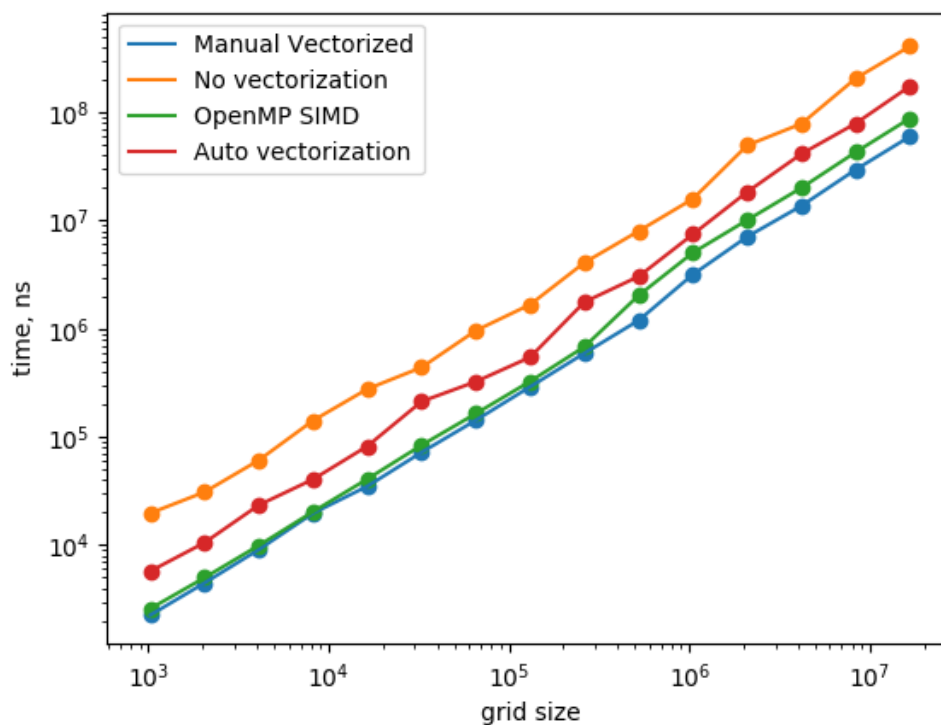


Рис. 2.6 Результаты векторизации для Clang Intel Core-i9(16 X 2300 MHz CPUs L3 Unified 16384 KiB)

### 2.4.2 Сравнение автовекторизации различных компиляторов

Современные компиляторы, при правильно заданных опциях компиляции, достаточно хорошо векторизуют код, при этом от программисту не требуется никаких дополнительных вмешательств от разработчика ПО. Поэтому еще одной темой представляющей интерес является сравнение производительности кода, скомпилированного различными компиляторами.

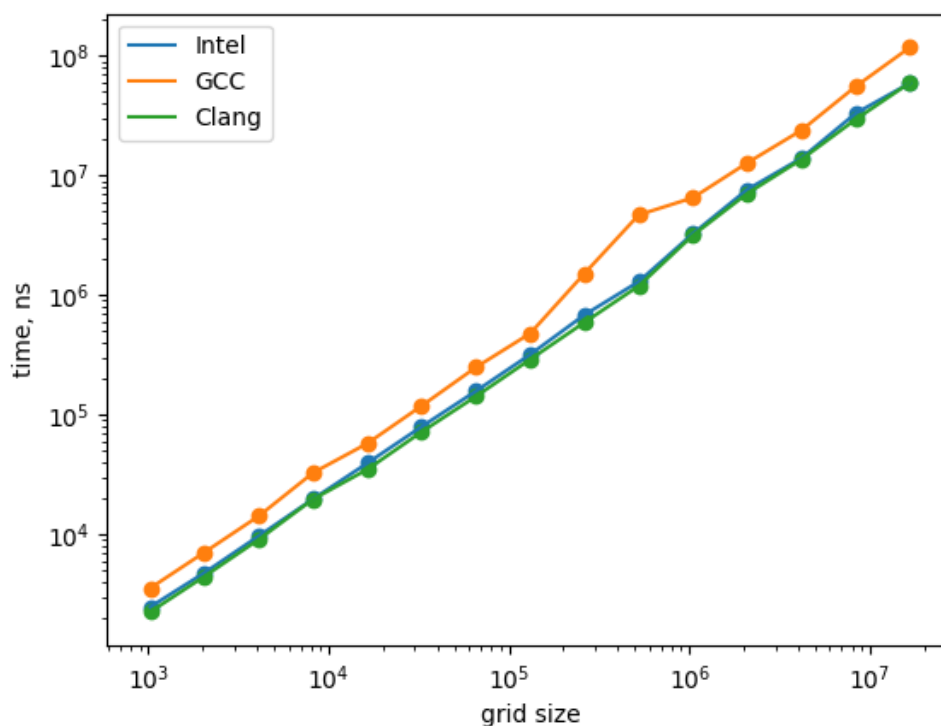


Рис. 2.7 Сравнение автовекторизации Intel Core-i9(16 X 2300 MHz CPUs) L3 Unified 16384 KiB

### 2.4.3 Выравнивание памяти

Еще одним широкоприменяемым способом ускорения исполнения векторизованного кода является выравнивание виртуальных адресов для динамически аллоцируемых объектов. Этот способ позволяет организовать более эффективный

доступ к памяти вычислительной системы, по средствам более эффективной утилизации кэшей L3, L2, L1.

Стандартный аллокатор памяти C++(`std::allocator`) выравнивает объекты, аллоцируемые динамически, на размер их типа, огрубляя полученное значение до ближайшей степени двойки. Однако полученное таким образом значение выравнивания не может превосходить платформенно-зависимого значения `sizeof(std::max_align_t)`, обычно равное 16 байтам.

Для большинства AVX/SSE инструкций отсутствуют требования к выравниванию операндов в памяти. Однако разработчиками этих расширений рекомендуется следить за выравниванием на размер операнда во избежание значительного снижения производительности.

Поэтому в рамках данной работы был реализован класс `aligned_allocator` - аллокатор выравненный на 16 и 32 байт для SSE и AVX/AVX2 расширений соответственно. Класс был реализован в соответствии с требованиями на интерфейс аллокатора C++17, поэтому может быть использован совместно с любым контейнером из стандартной библиотеки, например, с контейнером `std::vector`.

### 3 ТЕСТИРОВАНИЕ РАЗРАБОТАННОГО ПО

В главе производится сравнение параллельной и последовательной программ реализующих, рассматриваемый в данной работе, спектрально-разностный метод. Приводятся результаты исследований параллельной программы сгенерированной системой LuNA. Также представлено сравнение времени работы программ реализующих спектрально-разностный алгоритм и его конечно-разностного аналога. (todo reference).

#### 3.1 Сравнение времени работы последовательной и параллельной реализаций

Время работы спектрально-разностного алгоритма, при фиксированных физических параметрах среды и временном интервале, зависит от 2 параметров: от размера сетки по  $z$  координате и от количества рассматриваемых гармоник.

Если положить, что количество узлов по  $z$  координате равно  $N$ , а количество рассматриваемых гармоник равно  $K$ , то асимптотическая оценка времени работы последовательного алгоритма составит  $O(N \cdot K)$ . Однако на реальных численных задачах количество гармоник  $K \ll N$ , это означает, что сложность алгоритма в среднем составит  $O(N \cdot const) = O(N)$ .

Если рассмотреть идеальную систему с  $T$  физическими вычислительными ядрами, то при достаточно большой значении  $N$ , ожидаемое ускорение согласно Закону Амдала не превзойдет величины  $S = \frac{1}{\frac{T}{N} + \frac{1-T}{T}}$

Для эксперимента была взята система с 8 физическими ядрами ( $T = 8$ ), значения сетки по  $z$  варьировались от  $2^8$  до  $2^{16}$ . Также для того, чтобы показать,



что асимптотическая оценка сложности может быть показательной для оценки сложности алгоритма, варьировалось число рассматриваемых гармоник.

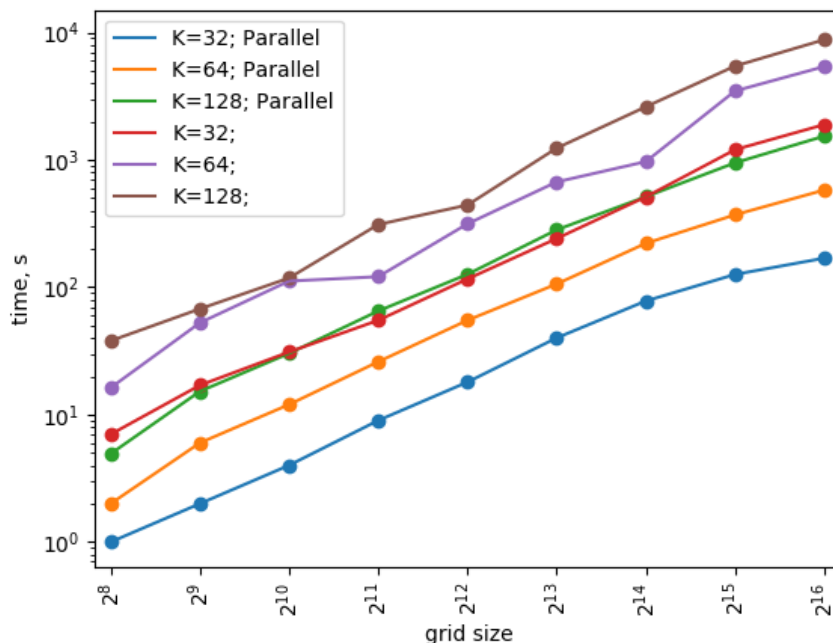


Рис. 3.1 Сравнение последовательной и параллельной реализации

В результате распараллеливания удастся добиться прироста производительности примерно в 6-7 раз. Тогда как ожидаемое значение  $S$  по закону Амдала составляет 7,5-8 для рассматриваемых сеток.

Другим интересным результатом является, что при достаточно большом количестве рассматриваемых гармоник наиболее эффективный результат дает комбинация Intel MKL и OpenMP.

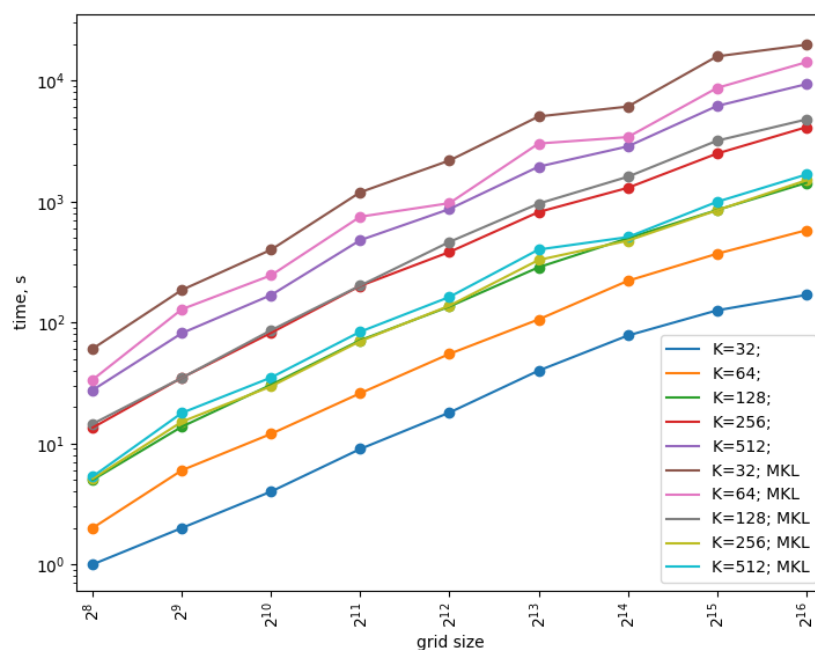


Рис. 3.2 Сравнение параллельных реализаций с/без использования Intel MKL

Отдельный интерес представляет тест масштабируемости параллельной реализации с использованием OpenMP. Он показывает, что величина  $T(N)/T(1)$ , где  $T(N)$  - время работы программы для  $N$  потоков, а  $T(1)$  - время ее последовательного исполнения, растет с увеличением числа потоков  $N$ , что говорит о сильной масштабируемости рассматриваемой параллельной реализации.

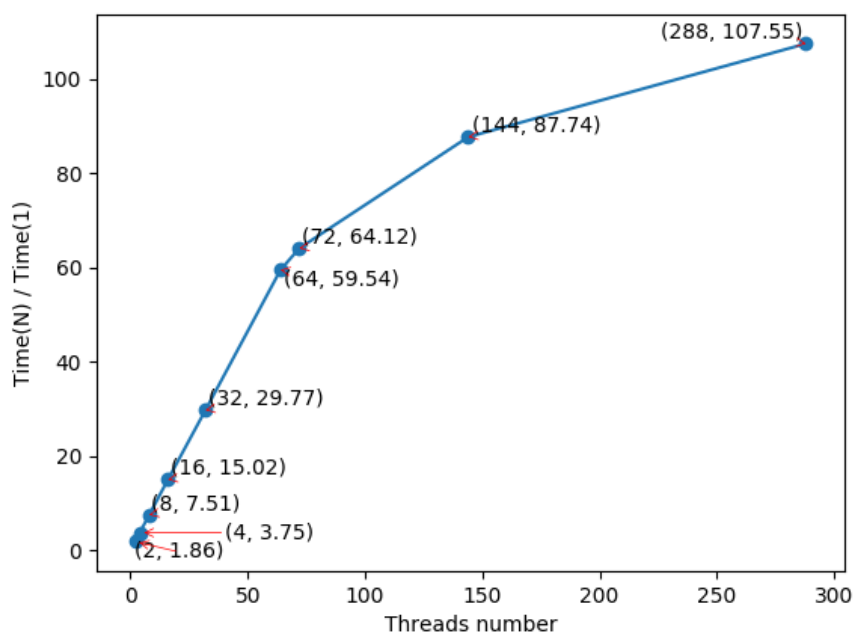


Рис. 3.3 Тест масштабируемости OpenMP

### 3.2 Сравнение OpenMP и LuNA параллельных реализаций

В работе произведено сравнение производительности параллельной программы реализованной средствами OpenMP вручную и программы автоматически сконструированной системой LuNA для одного узла с общей памятью автоматически (количество фрагментов равно количеству физических ядер CPU этого узла).

### 3.3 Сравнение с конечно-разностным методом

Отдельным вопросом интересующим исследователя является вычислительная эффективность спектрально-разностного подхода. Для этого необходимо при фиксированных параметрах рассматриваемой среды и временном интервале, подобрать количество гармоник таким образом, чтобы численные решения обоих алгоритмов были эквиваленты.

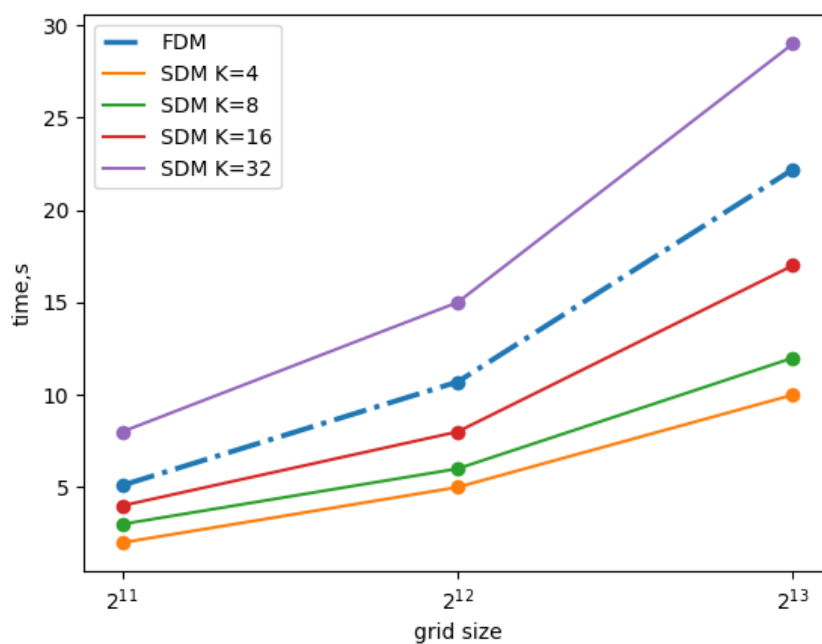


Рис. 3.4 Сравнение времени работы спектрально-разностного и конечно-разностного методов для различного числа гармоник

Численные эксперименты показывают, что время работы обоих алгоритмов сравнимы при количестве гармоник приблизительно равном 16.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения квалификационной работы бакалавра был реализован и изучен спектрально-разностный алгоритм, для вычисления сейсмических полей в задачах геофизики.

Разработано последовательное и параллельное программное обеспечение(ПО), эффективно реализующие спектрально- разностный метод на современных многоядерных вычислительных системах.

Проведено тестирование времени работы и масштабируемости разработанного ПО, как на персональных компьютерах, так и на специализированных вычислительных системах ЦКП ССКЦ ИВМиМГ СО РАН.

Реализовано сравнение исследуемого спектрального-разностного подхода с аналогичным ему конечно-разностным.

На защиту выносятся следующие пункты:

- Реализация последовательного алгоритма для решения 2D задачи о моделировании распространения плоских упругих волн на языке C++.
- Реализация параллельного спектрально-разностного алгоритма для систем с общей памятью средствами OpenMP. В том числе результаты исследований ускорения исполнения параллельного кода с использованием SIMD расширений современных процессоров.
- Реализация параллельного алгоритма для системы фрагментированного программирования LuNA
- Тестирование и анализ разработанного ПО и полученных с его помощью результатов.

В дальнейшие планы входит более подробное исследование поведения алгоритмы в гетерогенных средах, а также подбор оптимальной фильтрации для улучшения точности получаемого в результате расчетов решения. Также будет продолжена работа над эффективной реализацией параллельной программы средствами системы фрагментированного программирования LuNA.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Intel Россия Каталог программных продуктов семейства Intel [Электронный ресурс] // URL: <https://intel.com>
2. Караваев Д. А. Численное моделирование 3D волновых полей в задачах сейсмического зондирования вулканических структур// Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Новосибирск, 2011. С. 19-21.
3. Глинский Б. М., Караваев Д. А., Ковалевский В. В., Мартынов В. Н. Численное моделирование и экспериментальные исследования грязевого вулкана «Гора Карабетова» вибросейсмическими методами // Вычислительные методы и программирование. Москва, 2010.
4. Мартынов В. Н. Волновые поля от сосредоточенных источников в трансверсально-изотропных средах // Физика земли. № 11, 1986.
5. Новацкий В. Теория упругости // Москва, Мир, 1975, 872с.
6. Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости // Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1959, 365 с.
7. Шемякин Е.И. Динамические задачи теории упругости и пластичности // Курс лекций для студентов. - НГУ, Новосибирск, 1968. -336 с.
8. С.В. Мачульскис Разработка и реализация алгоритмов статического анализа фрагментированных программ // Квалификационная работа, Новосибирск, 2015, С. 16-17

## ПРИЛОЖЕНИЕ



## ПРИЛОЖЕНИЕ А

## ИСХОДНЫЙ КОД ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ НА ЯЗЫКЕ LUNA

```

import init_env(int #fgnum, int #fgsize, name) as init_env;
import check_env(value #env, int #fgnum, int #size) as check_env;
import init_values(int #fgnum, int #fgsize, name) as init_values;
import check_values(value #values, int #fgnum, int #size) as check_values;
import calculate_one_step(
    value #prev_values,
    value #env,
    int #t_idx,
    int #fgnum,
    int #fgsize,
    int #fgcount,
    name #values) as calculate_one_step;
import check_one_step(
    value #prev_values,
    value #values,
    value #env,
    int #t_idx,
    int #fgnum,
    int #fgsize,
    int #fgcount) as check_one_step;

##const FG_SIZE 512
##const FG_COUNT 4
##const T_IDX_LIMIT 1024

sub main() {
    df env, values, last_iter;
    init_env($FG_COUNT, $FG_SIZE, env);
    check_env(env, $FG_COUNT, $FG_SIZE);
    for fg_num = 0..$FG_COUNT-1 {
        init_values(fg_num, $FG_SIZE, values[0][fg_num]);
    }
}

```

```

}
while (int(it < $T_IDX_LIMIT)), it = 0 .. out last_iter {
  for fg_num = 0..$FG_COUNT-1 {
    calculate_one_step(
      values[it][fg_num],
      env,
      it,
      fg_num,
      $FG_SIZE,
      $FG_COUNT,
      values[it + 1][fg_num]) --> (values[it][fg_num]);
  }
}
for fg_num = 0..$FG_COUNT-1 {
  save_fg(values[last_iter][fg_num]) --> values[last_iter][fg_num];
}
}

```