universität wien
Fakultät für Mathematik

Arman Sadeghi Rad
Matrikelnummer 12223560
Einführung in das mathematische Arbeiten
Wintersemester 2022/2023

Übungsblatt 1A

Aufgabe 1. Formuliere die Verneinung der gegebenen Aussage:

1. Alle Babies sind niedlich.
2. Zwei Personen im Raum haben heute Geburtstag.
3. Alle Anwesenden sprechen Deutsch oder Englisch.

Lösung.
1. Es gibt ein Baby, dass nicht neidlich ist.
2. Es gibt nur eine Person im Raum, die heute Geburtstag hast, oder es gibt keine.

2'. Es gibt maximal eine Person im Raum, die heute Geburtstag hast.

3. Anwesenden können weder Deutsch noch Englisch sprechen.

Aufgabe 2. Schreibe mithilfe des Summenzeichens:

1. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n$
2. $1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \ldots + 2^{-n}$
3. $1 - 2 + 3 - \ldots 9 - 10$

Lösung.
1. $\sum_{i=1}^{n} i$
2. $\sum_{i=0}^{n} 2^{-i}$
3. $\sum_{i=1}^{10} i(-1)^{i+1}$

Aufgabe 3. Verwende Summen- und Produktschreibweise, um das Folgende darzustellen:

1. Die Summe der ersten 100 geraden natürlichen Zahlen.
2. Das Produkt der ersten 100 natürlichen Zahlen, die durch 3 teilbar sind.

Lösung.
1. $\sum_{i=1}^{50} 2 \cdot i$
2. $\prod_{i=1}^{33} 3 \cdot i$

Aufgabe 4. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ und sei $\delta_{i,j}$ das Kronecker-Symbol.

Berechne:

1. $\sum_{i,j=1}^{3} \delta_{i,j} a_{ij}$
2. $\sum_{i,j=1}^{3} \delta_{i,j+1} a_{ij}$
3. $\sum_{i,j=1}^{3} \delta_{i+1,j} a_{ij}$

Lösung. Kronecker-Symbol ist eine mathematische Funktion die das Wert 1 bei der Gleichheit der Indizes i und j annimmt und sonst den Wert 0 hat. Das kann man so zeigen:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

1.

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{3} \delta_{i,j} a_{ij} =& 1 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_(22) + 1 \cdot a_{33} \\ &+ 0 \cdot a_{12} + 0 \cdot a_{13} + 0 \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{23} + 0 \cdot a_{31} + 0 \cdot a_{32} \\ =& a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + 5 + 9 = 15 \end{aligned}$$

2. In ähnlicher Weise sollten wir die Matrixelemente, die dem Term $i = j + 1$ entsprechen, in die Summe einbeziehen:

$$\sum_{i,j=1}^{3} \delta_{i,j+1} a_{ij} = a_{21} + a_{32} = 4 + 8 = 12$$

3.

$$\sum_{i,j=1}^{3} \delta_{i+1,j} a_{ij} = a_{12} + a_{23} = 2 + 6 = 8$$

Aufgabe 5. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} (2 \cdot k + 1) = (n+1)^2.$$

Lösung. Erstens: beweisen wir, dass das für den Fall $n = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{1} (2 \cdot k + 1) &= 2 \cdot 0 + 1 + 2 \cdot 1 + 1 \\ &= 4 = (1+1)^2\end{aligned}$$

Zweitens: Nehmen wir an, dass dies für den Fall n gilt, und prüfen wir, ob es richtig ist:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} (2 \cdot k + 1) &= \sum_{k=0}^{n} (2 \cdot k + 1) + (2 \cdot (n+1) + 1) \\ &= \underbrace{(n+1)^2}_{t^2} + (2 \cdot \underbrace{(n+1)}_{t} + 1) \\ &= t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2 = ((n+1)+1)^2\end{aligned}$$

Damit ist die Aussage für alle $n \geq 1$ bewiesen. $\square$

Aufgabe 6. Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass gilt:

$$1 + n \cdot x \leq (1+x)^n$$

Lösung. *Induktionsanfang.* Der Induktionsanfang ergibt sich unmittelbar:

$$1 + x \leq (1+x)^1$$

□

Induktionsbehauptung. Aus der Voraussetzung

$$1 + nx \leq (1+x)^n$$

sollten wir beweisen, dass:

$$1 + (n+1)x \leq (1+x)^{n+1}$$

Induktionsschritt.

$$\begin{aligned} 1 + (n+1)x \leq (1+x)^{n+1} &\iff 1 + nx + x \leq (1+x)^n(1+x) \\ &\iff \underbrace{1 + nx}_{P} + \underbrace{x}_{R} \leq \underbrace{(1+x)^n}_{Q} + \underbrace{x(1+x)^n}_{S} \end{aligned}$$

$1+nx \leq (1+x)^n$ is die Voraussetzung, deswegen richtig. Nun sollten wir nur beweisen, dass $x \leq x(1+x)^n$ richtig ist. Dies gelingt folgendermaßen:

$$\left\{ \begin{array}{l} x > -1 \Rightarrow (1+x)^n > 0 \\ x \geq x \end{array} \right. \Rightarrow x(1+x)^n \geq x$$

Dann ist die Aussage für alle $n \geq 1$ bewiesen. □

Aufgabe 7. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche davon sind falsch? Gibt es Aussagen die eine falsche oder unpräzise Annahme haben? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung.

1. Falsch. Zwischen 1 und 2 gibt es keine natürliche Zahl. Im Allgemeinen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zahlen, gibt es keine andere natürliche Zahl.
2. Richtig.
3. Falsch. in den Spannungen wie $(n, m) \quad n \neq m$ gibt es kein kleinstes Element.
4. Richtig.
5. Richtig.
6. Richtig.
7. Falsch. Die Aussage "*Die ersten drei rationalen Zahlen*" ist bedeutungslos, weil die Menge von rationalen Zahlen unzählig ist.
8. Richtig.
9. Falsch. Die Aussage umfasst die Behauptung, dass die Menge der reelle Zahlen ein Ende hat.