



Übungsblatt 5B

Aufgabe 1. Der größte gemeinsame Teiler von a und m ist $\text{ggT}(a, m)$. Daher ist auch die Aussage

$$\text{ggT}\left(\frac{a}{\text{ggT}(a, m)}, \frac{m}{\text{ggT}(a, m)}\right) = 1$$

richtig. Nach einem Satz von der Vorlesung gibt es $p, q \in \mathbb{Z}$, sodass

$$\frac{a}{\text{ggT}(a, m)}p + \frac{m}{\text{ggT}(a, m)}q = 1. \quad (1)$$

Nach einer Multiplikation mit b wird hergeleitet, dass

$$abp \frac{1}{\text{ggT}(a, m)} + mbq \frac{1}{\text{ggT}(a, m)} = b$$

und in der Restklasse von m

$$abp \frac{1}{\text{ggT}(a, m)} \equiv b \pmod{m} \quad (2)$$

Für die Gleichungen 1 und 2 in der Restklasse von m , gelten auch $p + km$ wenn $k \in \mathbb{Z}$. aber wenn $k = \text{ggT}(a, m)$ dann gilt

$$ab(p + m \text{ggT}(a, m)) \frac{1}{\text{ggT}(a, m)} = abp \frac{1}{\text{ggT}(a, m)} + m \frac{\text{ggT}(a, m)}{\text{ggT}(a, m)} \equiv abp \frac{1}{\text{ggT}(a, m)} \equiv b \pmod{m}.$$

Daher gibt es nur $\text{ggT}(a, m)$ Lösungen die mod m inkongruent sind.