universität wien

Fakultät für Mathematik

Arman Sadeghi Rad
Matrikelnummer 12223560
Einführung in das mathematische Arbeiten
Wintersemester 2022/2023

Übungsblatt 2A

Aufgabe 1.

1.

p	q	$(p \Rightarrow q) = (\neg p \vee q)$	$(\neg q \Rightarrow \neg p) = (q \vee \neg p)$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	F	T	T
F	T	T	T

2.

p	$\neg(\neg p)$	p
T	$\neg(\neg T) = \neg F = T$	T
F	$\neg(\neg F) = \neg T = F$	F

Aufgabe 2. 1. $\neg p \vee q$ ist das Äquivalent für $p \Rightarrow q$ und $p \vee \neg q$ ist das Äquivalent für $\neg p \Rightarrow \neg q$. Und $\neg p \vee q \neq p \vee \neg q$.

2.

$$\begin{cases} \neg(p \Rightarrow q) = \neg(\neg p \vee q) = p \wedge \neg q \\ \neg p \Rightarrow \neg q = \neg(\neg p) \vee \neg q = p \vee \neg q \end{cases} \implies p \vee \neg q \neq p \wedge \neg q \implies \neg(p \Rightarrow q) \neq \neg p \Rightarrow \neg q$$

Aufgabe 3. 1.

$$\begin{aligned}(\neg p \vee q) \wedge (q \Rightarrow r) &= (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \\ &= ((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \vee ((\neg p \vee q) \wedge r) \\ &= ((\overset{F}{\cancel{\neg q \wedge q}}) \vee (\neg q \wedge \neg p)) \vee ((\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)) \\ &= (\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}((\neg p \vee q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q)) &= (((\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q)) \\ &= \neg((\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)) \vee (\neg p \vee q) \\ &= ((q \vee p) \wedge (p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee (\neg p \vee q)\end{aligned}$$

Wir nennen dieser Satz P und dessen Wahrheitstabelle ist

p	q	r	P
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

Daher ist P eine Tautologie.

2.

$$\begin{aligned}(r \Rightarrow p) \wedge \neg p &= (\neg r \vee p) \wedge \neg p \\ &= (\neg p \wedge \neg r) \vee \cancel{(\neg p \wedge p)}^{F} \\ &= \neg p \wedge \neg r\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}((r \Rightarrow p) \wedge \neg p) \Rightarrow \neg r &= (\neg(\neg p \wedge \neg r)) \vee \neg r \\ &= p \vee r \vee \neg r \\ &= p \vee T = T\end{aligned}$$

Daher ist dieser Satz eine Tautologie.

3.

$$\begin{aligned}q \vee (q \Rightarrow p) &= q \vee (\neg q \vee p) \\ &= (q \vee \neg q) \vee p \\ &= T \vee p = T\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}(q \vee (q \Rightarrow p)) \Rightarrow p &= (T \Rightarrow p) \\ &= p\end{aligned}$$

Daher ist dieser Satz, weder eine Tautologie, noch eine Kontradiktion.

Aufgabe 4. 1. $Q(16)$ ist wahr. Weil $4^2 = 16$ aber $Q(17)$ ist falsch, Weil es keine natürliche Zahl gibt, die die Quadratwurzel von 17 ist. Daher $Q(16) = T$ und $Q(17) = F$. Dann gilt $Q(16) \wedge \neg Q(17) = T \wedge \neg F = F$.

2. Diese Aussage ist falsch. Es gibt ein Gegenbeispiel. Nehmen wir an, dass $n = 1$ und $m = 4$. Dann $Q(1)$ und $Q(4)$ sind wahr, Denn $1 = 1^2$ und $4 = 2^2$. Aber $Q(1+4) = Q(5)$ ist falsch. Denn 5 keine natürliche Quadratwurzel hat.

3. Die Aussage ist wahr. nehmen wir an, dass $\sqrt{m} = k$ und $\sqrt{n} = l$. Dann $\sqrt{m \cdot n} = \sqrt{m}\sqrt{n}$ und wenn eine von $\sqrt{m}$ und $\sqrt{n}$ nicht eine natürliche Zahl ist, dann ist auch $\sqrt{mn}$ keine natürliche Zahl. Und wenn beide natürlich sind, wird $\sqrt{mn}$ auch eine natürliche Zahl. Daher ist die Aussage wahr.

Aufgabe 5. Wenn $n < l$, dann ist die beiden Seiten 0 und die Aussage ist wahr. Nehmen wir an, dass $n \geq l$. Wir verwenden Induktion so, dass der Induktionsanfang der Fall $n = l$ ist.

$$n = l \Rightarrow \sum_{k=l}^{n=l} \binom{k}{l} = \binom{l}{l} = 1 = \binom{l+1}{l+1}$$

Wir behaupten, dass sind Aussage für den Fall n wahr ist. Dann ermittlen wir, ob die Aussage auch für den Fall $n+1$ wahr ist.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=l}^{n+1} \binom{k}{l} &= \sum_{k=l}^{n} \binom{k}{l} + \binom{n+1}{l} \\
&= \binom{n+1}{l+1} + \binom{n+1}{l} \\
&= \binom{n+2}{l+1}
\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 6. 1.

$$\prod_{k=1}^{n} [k \cdot (k+1)] = [1 \cdot 2 \cdots n] \cdot [(1+l) \cdots (2+l) \cdots (n+l)]$$

2. Da $l \geq 1$ fixiert ist, können wir die vollständige Induktion durch n vorantrieben.

Induktionsanfang.

$$\prod_{k=1}^{1} [k \cdot (k+l)] = 1 \cdot (1+l) = 1 + l = \frac{1! \cdot (1+l)!}{l!} = \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdots \cancel{l} \cdot (1+l)}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdots \cancel{l}}$$

$\square$

Induktionsschritt.

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1} [k \cdot (k+l)] &= \left(\prod_{k=1}^{n} [k \cdot (k+l)] \right) \cdot (n+1) \cdot (n+1+l) \\
&= \frac{n! \cdot (n+l)!}{l!} \cdot (n+1) \cdot (n+1+l) \\
&= \frac{n! \cdot (n+1) \cdot (n+l)! \cdot (n+1+l)}{l!} \\
&= \frac{(n+1)! \cdot (n+1+l)!}{l!}
\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 7. 1.

$$
\begin{aligned}
(\neg p \wedge (q \vee p)) \wedge r &= ((\neg p \wedge q) \vee \cancelto{F}{(\neg p \wedge p)}) \wedge r \\
&= (\cancelto{\neg p \wedge q}{(\neg p \wedge q) \vee F}) \wedge r \\
&= \neg p \wedge q \wedge r
\end{aligned}
$$

$$
(q \wedge r) \vee p = (p \vee q) \wedge (p \vee r) \neq \neg p \wedge q \wedge r
$$

p	q	r	$\neg p \wedge q \wedge r$	$(q \wedge r) \vee p$
T	T	T	F	T
T	T	F	F	T
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

Daher ist die Gleichung falsch.

2.

$$
\begin{aligned}
(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) = \\
&(\neg p \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)) \wedge (\neg q \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)) \\
&\wedge (\neg r \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)) \\
&= \\
&((\neg p \vee \neg q) \wedge \cancelto{\neg p}{(\neg p \vee \neg p)} \wedge (\neg p \vee r)) \\
&\wedge (\cancel{(\neg q \vee \neg p)} \wedge \cancelto{\neg q}{(\neg q \vee \neg q)} \wedge (\neg q \vee r)) \\
&\wedge ((\neg r \vee \neg p) \wedge (\neg r \vee \neg q) \wedge \cancelto{T}{(\neg r \vee r)})
\end{aligned}
$$

Da es eine $\neg p$ Aussage gibt, enthält die Aussage

$$
p \wedge (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)
$$

eine $p \wedge \neg p = F$ Aussage. Da die Aussagen mit $\wedge$ verknüpft sind und eine der Aussagen eine Kontradikition ist, wird die ganze Aussage falsch. Daher ist die in Frage kommenden Aussage, die eine Negierung von der oben genannten Aussage ist, eine Tautologie. Dann gilt

$$
\neg(p \wedge (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)) = \mathbf{1}.
$$