universität wien

Fakultät für Mathematik

Arman Sadeghi Rad
Matrikelnummer 12223560
Einführung in das mathematische Arbeiten
Wintersemester 2022/2023

Übungsblatt 5A

Aufgabe 1.

Lösung (1)**.**

$$a < b \xRightarrow{\text{O1}} 0 = a + (-a) < b + (-a) \Rightarrow 0 < b - a.$$

Ebenso gilt $0 < d - c$. Danach gemäß O1:

$$(b+d) - (a+c) = b - a + d - c > d - c > 0 \Rightarrow (b+d) - (a+c) > 0 \Rightarrow \boxed{a + c < b + d}.$$

Lösung (2)**.**

$$a < b \xRightarrow{6.3.2(\text{i})} b - a > 0, c > 0 \xRightarrow{\text{O2}} (b-a)c = bc - ac > 0. \tag{1}$$

$$c < d \xRightarrow{6.3.2(\text{i})} d - c > 0, b > 0 \xRightarrow{\text{O2}} (d-c)b = bd - bc > 0. \tag{2}$$

nach Lösung von (1) und die Ungleichungen von 1 und 2 gilt

$$bc - ac + bd - bc = bd - ac > 0 + 0 = 0 \Rightarrow ac < bd.$$

Aufgabe 2.

Lösung (1)**.** Beginnen wir den Beweis mit einem Lemma.

Lemma. Wenn $a > b > 0$ und $c \geq d > 0$ dann $ac > bd$ und $ac = bd$ ist unmöglich.

Beweis. Angenommen, es gibt a, b, c und d mit solchen Ungleichheiten, dass $ac = bd$. dann gilt $c = \frac{bd}{a} = \frac{b}{a}d$. Aus $b^{-1} > a^{-1}$ kann man folgern, dass $1 = b^{-1}b > ba^{-1} = \frac{b}{a}$. Aber $d > 0$ und daher $c = \frac{b}{a}d < d$. Und es ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass $c \geq d$. □

$x \geq a > 1 \Rightarrow x > 1$ und $x \geq a$. Daher $x^2 > a$. Die Aussage $x^n > a$ kann man durch vollständige Induktion beweisen. Sei $x^2 > a$ die Annahme und $x^n > a$ die Behauptung, aus den Ungleichheiten $x^n > a$ und $x > 1$ und Lemma, kann man folgern, dass auch $x^{n+1} > a$ gilt. und die Aussage wird bewiesen.

Lösung (2)**.**

$$b < 1 \xRightarrow{\text{Aufgabe 1.2}} b^2 < 1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow b^{n-1} < 1 \Rightarrow 1 - b^{n-1} > 0 \xRightarrow[\text{O2}]{b>0} b - b^n > 0 \Rightarrow b^n < b.$$

Aufgabe 3.

Lösung (1)**.** $b > a$.

$$\frac{a + b + |a - b|}{2} = \frac{a + b + b - a}{2} = b = \max\{a, b\}.$$

□

$a > b$.

$$\frac{a+b+|a-b|}{2} = \frac{a+b+a-b}{2} = a = \max\{a,b\}.$$

$\square$

a=b.

$$\frac{a+a}{2} = \frac{a+b+a-b}{2} = a = \max\{a,b\} = b.$$

$\square$

Aufgabe 4. Angenommen, dass $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} A_m$ geringer als 1 ist. Dann gibt es eine positive rationale Zahl β, die $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} A_m = 1-\beta$. Dann $1-\frac{\beta}{2}$ ist auch eine rationale Zahl die im Intervall $(0,1)$ liegt. Nehmen wir an, dass $q_k = 1-\frac{\beta}{2}$. Dann $q_k \in A_k$ und $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} A_m$ könnte nicht $1-\beta$ sein, weil $1-\frac{\beta}{2} > 1-\beta$. Ähnlicherweise ist auch die Aussage $\inf\limits_{m\in\mathbb{N}} A_m = 0$ richtig.

Aufgabe 5.

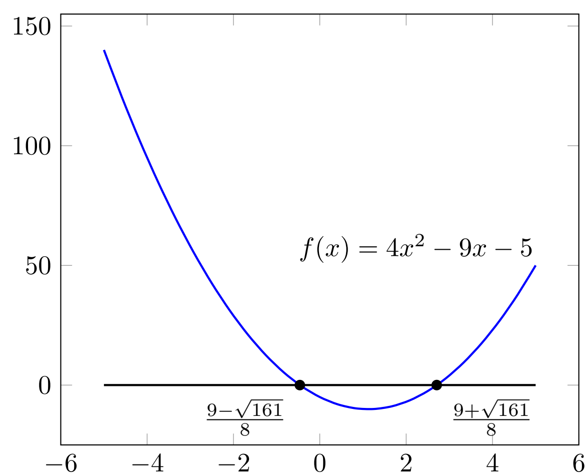
Lösung (1).

$$\left.\begin{array}{rcl} 5-3x \le 2x+1 & \Rightarrow & x \ge \frac{4}{5} \\ 2x+1 \le 3x-7 & \Rightarrow & x \ge 8 \end{array}\right. \Rightarrow x \ge 8$$

Lösung (2).

$$\begin{array}{rcll} 2x-3 = 4x+9 & \Rightarrow & 2x = -12 & \Rightarrow x = -6 \\ 3-2x = 4x+9 & \Rightarrow & 6x = -6 & \Rightarrow x = -1 \end{array}$$

Lösung (3). $f(x) = 4x^2 - 9x - 5 \Rightarrow r_1 = \frac{9-\sqrt{161}}{8}, r_2 = \frac{9+\sqrt{161}}{8}$.



Daher muss x im Intervall $[r_1, r_2]$ sein.

Lösung (4).

$$\frac{5+x}{5-x} - 2 = \frac{3x-5}{5-x} \le 0. \Rightarrow x > 5 \text{ oder } x \le \frac{5}{3}.$$

Dann ist die Lösungsmenge, die Menge $(-\infty, \frac{5}{3}] \cup (5, \infty)$.

Lösung (5).

$$\begin{array}{lll} \frac{2x-1}{3-2x} < \frac{1}{2} & \Rightarrow & x \in (-\infty, \frac{5}{6}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty) \\ \frac{2x-1}{3-2x} > \frac{1}{3} & \Rightarrow & x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\} \end{array} \Rightarrow x \in (-\infty, \frac{5}{6}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$$

Lösung (6).

$$\begin{array}{rll} x+4 \le 6 & \Rightarrow & x \le 2 \\ 5x+4 \ge 6 & \Rightarrow & x \ge \frac{2}{5} \end{array} \Rightarrow x \in [\frac{2}{5}, 2]$$

Lösung (7).

$$\begin{array}{rcl} 3x+4 \le x+8 & \xRightarrow{x \ge -\frac{4}{3}} & x \le 2 \\ -3x-4 \le x+8 & \xRightarrow{-8 \le x < -\frac{4}{3}} & x \ge -4 \\ 3x+4 \ge x+8 & \xRightarrow{x < -8} & x > 2 \end{array} : ((-\infty, 2] \cap (-\frac{4}{3}, +\infty)) \cup ([-8, -\frac{4}{3}) \cap [-4, +\infty)) \cup (-\infty, -8) \cap (2, +\infty)$$

$$= [-4, 2] \setminus -\frac{4}{3}$$

Aufgabe 6.

Lösung. 1. $|ab| = -ab$

$$\begin{aligned} (a+b)^2 \ge 0 &\iff a^2 + b^2 + 2ab \ge 0 \\ &\iff a^2 + b^2 \ge -2ab \\ &\iff \frac{a^2+b^2}{2} \ge -ab = |ab|. \end{aligned}$$

2. $|ab| = ab$

$$\begin{aligned} (a-b)^2 \ge 0 &\iff a^2 + b^2 + 2ab \ge 0 \\ &\iff a^2 + b^2 \ge 2ab \\ &\iff \frac{a^2+b^2}{2} \ge ab = |ab|. \end{aligned}$$

Aufgabe 7.

Lösung. Die Operation ist Wohldefiniert genau dann wenn $(a, b), (a', b'), (a'', b'') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$(a, b) \sim (a', b') \Rightarrow [(a, b)] \otimes [(a'', b'')] \sim [(a', b')] \otimes [(a'', b'')].$$

$$\begin{aligned} (a, b) \sim (a', b') &\Longrightarrow a + b' = a' + b \xrightarrow[\times a'']{\times b''} \begin{cases} ab'' + b'b'' = a'b'' + bb'' \\ aa'' + b'a'' = a'a'' + ba'' \end{cases} \\ &\Longrightarrow (aa'' + b'a'') + (a'b'' + bb'') = (a'a'' + ba'') + (ab'' + b'b'') \\ &\Longrightarrow [(a, b)] \otimes [(a'', b'')] \sim [(a', b')] \otimes [(a'', b'')] \end{aligned}$$

Aufgabe 8.

Lösung (1)**.**

$$a < b \xRightarrow[a \leq a]{\text{Aufgaben 1.2 und Lemma}} a^2 < ab$$

$$a < b \xRightarrow[b \leq b]{\text{Aufgaben 1.2 und Lemma}} ab < b^2.$$

Daher $a^2 < ab < b^2$.

Lösung (2)**.**

$$a < b \xRightarrow{\text{O1}} a + a < a + b \Rightarrow 2a < a + b \Rightarrow a + b - 2a > 0 \xRightarrow[\text{O2}]{2^{-1}>0} 0 < \frac{a+b}{2} - a \Rightarrow \frac{a+b}{2} > a.$$

$$a < b \xRightarrow{\text{O2}} a + b < b + b \Rightarrow a + b < 2b \Rightarrow a + b - 2b < 0 \xRightarrow[O2]{2^{-1}>0} \frac{a+b}{2} - b < 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} < b.$$

Daher $a < \frac{a+b}{2} < b$.