universität wien

Fakultät für Mathematik

Arman Sadeghi Rad
Matrikelnummer 12223560
Einführung in das mathematische Arbeiten
Wintersemester 2022/2023

Übungsblatt 2B

Aufgabe 1. Angenommen, es gäbe solche Zahlen. dann $7|28m + 42n$ aber natürlich, 7 ist kein Teiler von 100. Daher ist es ein Widerspruch zu der Annahme, dass die Gleichung wahr ist.

Aufgabe 2. Indirekter Beweis. Angenommen, dass n, eine gerade Zahl und n^3 eine ungerade Zahl ist. n ist gerade. Dann gilt

$$n = 2k + 1 \Rightarrow n^3 = 8k^3 + 1 + 6k + 12k^2 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1$$

Es ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass n^3 gerade ist.

Aufgabe 3. Wir behaupten, dass $a = b$. $a|b$ ergibt $\exists k, b = ak$ und $b|a$ ergibt $\exists l, a = bl$. Dann gilt $a = (b)l = (ak)l$. Daher müssen k und l beide 1 sein und $a = b \cdot 1$ und $b = a \cdot 1$.

Aufgabe 4.

1. Gegenbeispiel. $2|2$ und $3|3$ aber $4 \not| 9$.
2. Gegenbeispiel. $2 \cdot 3|5 \cdot 6$ aber $2 \not| 5$.
3. $a|c$, dann gilt $c = ak$. $b|d$, dann gilt $d = bl$. Multiplizieren von den linken Seiten und den rechten Seiten ergibt $cd = klab$, dann gilt $ab|cd$.
4. Gegenbeispiel. $2 \cdot 2|4 \cdot 1$ aber $2 \not| 1$.

Aufgabe 5.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{42} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{16}) \\
&+ (\frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \ldots + \frac{1}{32}) + (\frac{1}{33} + \ldots \frac{1}{42}) \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}) \\
&+ (\frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \ldots \frac{1}{32}) + (\frac{1}{64} + \ldots + \frac{1}{64}) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} + 16 \cdot \frac{1}{32} + 10 \cdot \frac{1}{64} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 10 \cdot \frac{1}{64} \geq 3.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6. *Induktionsanfang.* Es gibt eine Primzahlfaktorisierung für 2. $2 = 2$. □

Induktionsschritt. Nehmen wir an, dass es eine Primzahlfaktorisierung für alle Zahlen bis n gibt. Dann beweisen wir, dass es auch eine für die Zahl n selbst gibt. Wäre n eine Primzahl, dann ist die Aussage selbsverständlich wahr. Wenn nicht, dann gibt es eine Faktorisierung wie $n = ab$ und $a, b < n$. Zufolge der Behauptung, gibt es eine Primzahlfaktorisierung für a und b wie $a = p_1 \cdots p_k$ und $b = q_1 \cdots q_l$. Dann gilt

$$n = ab = p_1 \cdots p_k \cdot q_1 \cdots q_l.$$

Es ist eine Primzahlfaktorisierung für n. $\square$

Aufgabe 7. Angenommen, dass es keine andere Primzahl gibt. Dann entweder ist $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ eine Primzahl oder nicht. Wäre sie eine Primzahl, dann gibt es nichts anderes zu beweisen. Aber wenn nicht, dann gibt es eine Primzahl p die deren Teiler ist. Angenommen das p eine von $p_1, \ldots, p_n$, z.B p_i ist, dann gilt

$$p_i | p_1 p_2 \cdots p_n + 1 \Rightarrow p_i | 1$$

Es ist ein Widerspruch. Daher sollte sich p von den anderen unterscheiden.