قسمت اول

مدل سیستم: آنچه واقعاً کنترل می‌کنیم

مجموعه: گزارش پیشرفت مشاور — بررسی عمیق

مدت: ۸ تا ۱۰ دقیقه

راوی: مجری تنها

منابع: بخش‌های ۱.۱ تا ۴.۱ گزارش مشاور

افتتاحیه: آونگ معکوس مضاعف چیست؟

بگذارید از پایه‌ای‌ترین سوال شروع کنیم: ما دقیقاً چه چیزی را کنترل می‌کنیم؟

یک چرخ‌دستی خرید تصور کنید. حالا یک جارو را به بالای آن ببندید — به صورت عمودی ایستاده. این جارو در پایه لولا شده است، می‌تواند جلو و عقب بچرخد. حالا یک جارو دوم را به بالای اولی متصل کنید، آن هم لولا شده. نتیجه: یک چرخ‌دستی که چپ و راست می‌رود، یک آونگ پایینی که می‌چرخد، و یک آونگ بالایی که مستقل از اولی می‌چرخد.

وظیفه شما: هر دو جارو را عمودی نگه دارید در حالی که چرخ‌دستی می‌تواند جابجا شود. دقیقاً یک ورودی کنترلی دارید — یک نیروی افقی روی چرخ‌دستی، حداکثر ۱۵۰ نیوتن در هر جهت.

این است DIP یا آونگ معکوس مضاعف. و کنترل آن واقعاً دشوار است. سیستم کم‌عملگر است — یک نیرو دارید اما سه چیز را همزمان مدیریت می‌کنید. ذاتاً ناپایدار است — اگر یک لحظه رهایش کنید همه چیز می‌افتد. و

فیزیک دو آونگ به هم متصل، با روش‌هایی که ریاضیات آن را به‌هم‌ریخته می‌کند، غیرخطی است.

بردار حالت: شش عددی که همه‌چیز را توضیح می‌دهند

قبل از اینکه یک معادله بنویسیم، باید تعریف کنیم «حالت سیستم» یعنی چه.

در هر لحظه، حالت DIP کاملاً با شش عدد توصیف می‌شود:

- موقعیت افقی چرخ‌دستی، x
- زاویه آونگ اول نسبت به عمودی، theta-1
- زاویه آونگ دوم نسبت به عمودی، theta-2
- سرعت چرخ‌دستی، x-dot
- سرعت زاویه‌ای آونگ اول، theta-1-dot
- سرعت زاویه‌ای آونگ دوم، theta-2-dot

این است بردار حالت شما — شش عدد در یک بردار ستونی. وقتی هر شش صفر باشند، هر دو آونگ کاملاً عمودی هستند و چرخ‌دستی ساکن است. این تعادلی است که می‌خواهیم حفظ کنیم.

چرا این مهم است؟ چون هر کنترل‌گری که می‌سازیم این شش عدد را ورودی می‌گیرد و یک نیرو خروجی می‌دهد. تمام پیچیدگی SMC، تنظیم PSO، و آنالیز پایداری به این خلاصه می‌شود: «با توجه به این شش عدد الان، چه نیرویی به چرخ‌دستی وارد کنم؟»

معادلات حرکت: مکانیک لاگرانژی

حالا نوبت فیزیک است. معادلات حرکت از مکانیک لاگرانژی می‌آیند — همان چارچوب ریاضی که برای توصیف همه چیز از مدارهای سیاره‌ای تا بازوهای رباتیک استفاده می‌شود. نتیجه برای سیستم ما این است:

M(q) q-dotdot + C(q, q-dot) q-dot + G(q) + friction = Bu

بگذارید جمله به جمله باز کنیم.

ماتریس اینرسی

یک ماتریس متقارن سه در سه است، و نکته کلیدی اینجاست: **به پیکربندی جاری بستگی دارد.** با نوسان آونگ‌ها، اینرسی موثر سیستم تغییر می‌کند. گزارش بیان می‌کند این تغییر ۴۰ تا ۶۰ درصد در فضای کار عملیاتی است. یعنی اینرسی سیستم بین دو پیکربندی تقریباً دو برابر می‌شود. کنترل‌گری که این را نادیده بگیرد شکست خواهد خورد.

جمله کوپلینگ کلیدی در M عبارت است از: ۲ برابر m2 برابر l1 برابر lc2 برابر کسینوس (theta-1 minus theta-2). وقتی دو آونگ در زوایای مشابه‌اند، این کوپلینگ بزرگ است. وقتی در زوایای مختلفند، علامتش عوض می‌شود. این همان چیزی است که آونگ مضاعف را اساساً سخت‌تر از آونگ تنها می‌کند — دو آونگ دائماً از طریق این کوپلینگ به هم فشار وارد می‌کنند.

ماتریس کوریولیس و گریز از مرکز

اینها نیروهایی هستند که از چارچوب مرجع دوار ناشی می‌شوند — همان نیرویی که آب را در ظرفشویی به صورت مارپیچ پایین می‌کشد. در DIP، این جملات با مجذور سرعت‌های زاویه‌ای و حاصل‌ضرب متقاطع سرعت‌ها متناسب‌اند. وقتی همه چیز ساکن است صفر هستند، و با شروع نوسان آونگ‌ها رشد می‌کنند. یک جمله ژیروسکوپی کوچک هم — ضریب ۰۱.۰ — برای ثبت کوپلینگ متقاطع بین سرعت‌های زاویه‌ای آونگ‌ها وجود دارد.

بردار گرانش

توجه کنید که G1 مساوی صفر است. این تقریب نیست — دقیقاً صفر است. گرانش عمودی عمل می‌کند و چرخ‌دستی افقی حرکت می‌کند؛ بر هم عمودند. جملات گرانش برای دو آونگ عبارتند از: منفی جرم مربوطه ضربدر گرانش ضربدر فاصله مرکز جرم ضربدر سینوس زاویه. اینها نیروهای بازگردنده‌ای هستند که همیشه می‌خواهند آونگ‌ها را به پایین بازگردانند.

مدل اصطکاک

لزج به علاوه کولمب. اصطکاک لزج با سرعت متناسب است — مثل کشیدن در عسل. اصطکاک کولمب مقاومت جهتی ثابت در برابر حرکت است — مثل اصطکاک ایستا. یک ناحیه مرده برای سرعت‌های کمتر از ده به توان منفی شش متر بر ثانیه وجود دارد تا از تکینگی ریاضی هنگام تغییر علامت تابع علامت سرعت جلوگیری شود.

[یادداشت صوتی:] این اعداد در سوالات مشاور مطرح می‌شوند. رایج‌ترین سوال: «چرا G1 صفر است؟» پاسخ: چرخ‌دستی افقی، گرانش عمودی — بر هم عمودند. «مقادیر اینرسی را چطور به دست آوردید؟» پاسخ: فرمول استاندارد میله نازک؛ I مساوی یک‌دوازدهم m ضربدر l به توان دو.

پارامترهای فیزیکی: این اعداد را حفظ کنید

گزارش ۱۴ پارامتر فیزیکی در دستگاه SI ارائه می‌دهد. اینها مقادیر دقیقی هستند که در هر شبیه‌سازی استفاده شده‌اند.

جرم چرخ‌دستی: ۵.۱ کیلوگرم. جرم لینک ۱: ۲.۰ کیلوگرم. جرم لینک ۲: ۱۵.۰ کیلوگرم. طول لینک ۱: ۴.۰ متر. طول لینک ۲: ۳.۰ متر. فاصله‌های مرکز جرم نصف طول لینک‌ها هستند: ۲.۰ و ۱۵.۰ متر. ممان‌های اینرسی: ۰۰۸۱.۰ و ۰۰۳۴.۰ کیلوگرم‌متر مربع. گرانش: ۸۱.۹ متر بر مجذور ثانیه. حداکثر نیروی کنترل: ۱۵۰ نیوتن. دوره کنترل: ۰۱.۰ ثانیه، یعنی کنترل‌گر با فرکانس ۱۰۰ هرتز کار می‌کند.

سه مدل: انتخاب ابزار درست

گزارش سه مدل ریاضی متمایز را مستند می‌کند که هر کدام برای هدف متفاوتی استفاده می‌شوند.

مدل ساده‌شده معادلات را حول تعادل عمودی خطی می‌کند. سینوس تتا را با تتا تقریب می‌زند، کسینوس تتا را با ۱، و جملات کوپلینگ را به ۷.۰ تا ۸.۰ مقدار کامل‌شان کاهش می‌دهد. اثرات ژیروسکوپی را هم حذف می‌کند. نتیجه ۱۰ تا ۵۰ برابر سریع‌تر شبیه‌سازی می‌شود. از این مدل منحصراً برای بهینه‌سازی PSO استفاده می‌کنیم، جایی که ۴۰ ذره هرکدام ۲۰۰ تکرار شبیه‌سازی ۱۰ ثانیه‌ای اجرا می‌کنند. روی مدل کامل غیرخطی، این بیش از ۸ ساعت طول می‌کشید. روی مدل ساده‌شده، در چند دقیقه تمام می‌شود.

مدل کامل غیرخطی همان است که توضیح دادیم. لاگرانژی کامل، تمام جملات کوپلینگ، کوریولیس، گریز از مرکز، ژیروسکوپی، و اصطکاک کامل. این مدلی است که در تمام نتایج بنچمارک، تمام اشکال منتشرشده، و تمام اعداد جداول مونت‌کارلو ظاهر می‌شود. وقتی گزارش می‌گوید STA در ۸۲.۱ ثانیه یکنواخت می‌شود، روی مدل کامل غیرخطی اندازه‌گیری شده است.

مدل مرتبه کاهش‌یافته از تجزیه مقدار تکین برای ایجاد یک تقریب مرتبه کاهش‌یافته استفاده می‌کند. دینامیک‌های غالب را حفظ می‌کند در حالی که سریع‌تر از مدل کامل اجرا می‌شود. در حالت HIL یا سخت‌افزار در حلقه استفاده می‌شود، جایی که بودجه محاسباتی بلادرنگ محدود است.

خطی‌سازی مدل ساده‌شده به صورت عددی از طریق تفاضل محدود با اپسیلون مساوی 10 به توان منفی ۸ محاسبه می‌شود. از ژاکوبین تحلیلی با فرم بسته استفاده نشده — مشتق نمادین ماتریس اینرسی کامل با تمام جملات کوپلینگ به قدری دست‌وپاگیر است که تمایز عددی انتخاب عملگراتری است.

نتیجه‌گیری

مدل سیستم جزئیتی نیست که بتوان از آن گذشت. اینرسی وابسته به پیکربندی، کوپلینگ کوریولیس بین آونگ‌ها، و غیرخطی‌بودن اصطکاک همان چیزهایی هستند که این مسئله را جالب می‌کنند و باعث می‌شوند کنترل‌گرهای خطی ساده شکست بخورند. هر کنترل‌گر در این پروژه با دانستن دقیق این مدل طراحی شده است.

در قسمت بعدی، این مدل را می‌گیریم و می‌پرسیم: با توجه به این معادلات، چطور یک سطح لغزش طراحی کنیم که آنالیز پایداری قابل کنترل باشد؟

منابع گزارش: بخش‌های ۱.۱ تا ۴.۱ — معادلات eq:state, eq:eom, eq:Mfull, eq:Cfull, eq:Gvec, eq:friction