1. Ondas en varias dimensiones

Para generalizar escribimos, de forma natural, la ecuación de ondas clásica en el espacio euclidio.

$$\nabla^2\psi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\psi(\mathbf{r},t) \tag{1.1}$$

donde el operador ∇^2 se denomina laplaciano y vale

$$\nabla^2 = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz} \tag{1.2}$$

La solución que vamos a manejar corresponde a la propagación de una onda en un sentido (fuera de la fuente) con perfil armónico, es decir

$$\psi(\mathbf{r},t) = A(\mathbf{r})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \tag{1.3}$$

donde el numero de onda k pasa a ser un vector que determina la dirección de propagación de la onda, cuyo modulo sigue verifcando la relación de dispersión. De esa forma podemos tener varios frentes de ondas posibles, siendo un frente de onda la región del espacio con la misma fase a un mismo tiempo (es decir la región del espacio que verifica $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = \text{cte}$).
Si tenemos una fuente puntual el frente de onda será esférico podemos ensayar en la ecuación de ondas la siguiente solución, que es isotrópica,

$$\psi(\mathbf{r},t) = f(r)e^{i(\omega t-kr)}$$

con lo que obtenemos

$$\frac{df}{dr} + \frac{f}{r} = 0$$

que tiene por solución

$$A(\mathbf{r}) = \frac{A}{r} \tag{1.4}$$

es decir que la amplitud decae con la distancia como una homográfica. La intensidad de la onda la podemos encontrar como el cuadrado de la amplitud, por lo que la intensidad de cae como r^{-2}, como es de esperar ya que la superficie de una esfera de propoprcional al radio cuadrado.
Podemos hacer el mismo análisis para una fuente cilindrica, pero es más complejo, por lo que presentamos la solución final

$$A(\mathbf{r}) = \frac{A}{\sqrt{\rho}}. \tag{1.5}$$

Finalmente un fente de onda plano tiene la siguiente amplitud

$$A(\mathbf{r}) = A \tag{1.6}$$

es decir un fente de onda plano mantiene la amplitud

1.1. Reflexión de ondas planas

Consideremos que una onda plana incide en una superficie plana interfaz de dos medios con diferentes velocidades de propagación (en este punto la onda plana ayuda al análisis simplificado pero las ecuaciones tienen validez general). El $\mathbf{k}$ está contenido en el plano xz y la interfaz está dispuesta en el eje $z = 0$, lo que nos permite resolver el problema ayudandonos de la simetría.
La onda incidente tiene la siguiente forma (considerando que no se desplaza en el eje y)

$$\psi(x,y,z,t) = Ae^{i(\omega t-k_x x-k_z z)}$$

y en el punto $z = 0$ valdrá

$$\psi(x,y,z=0,t) = Ae^{i(\omega t-k_x x)}$$

como esperabamos. Sabemos que $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$, por lo que $k_z = \pm\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$, es decir existe dos posibles rayos que verifican la relación en $z = 0$, una es la incidente y otra es la reflejada. La onda reflejada se propaga con el mismo k_x y k_z con signo cambiado, por lo que tiene el mismo ángulo respecto a la normal al plano, es decir

$$\theta_i = \theta_r \tag{1.7}$$

ecuación que se conoce con la ley de reflexión especular.
Consideremos que la onda transmitida sufre un cambio en su amplitud dependiendo de un coeficiente de transmisión T independiente de la posición o del tiempo, el cual va a depende finalmente de la física de la interfaz y la onda. Además que por continuidad el número de ondas en el eje x debe ser igual de ambos lados. Es decir que la señal transmitida será

$$\psi_t(x,y,0,t) = ATe^{i(\omega t-k_{i_x}x)} = Be^{i(\omega t-k_{2_x})}$$

lo que nos lleva a que

$$k_{1_x} = k_{2_x} = k_1\,\text{sen}(\theta_i) = k_2\,\text{sen}(\theta_t) = n_1\,\text{sen}(\theta_i) = n_2\,\text{sen}(\theta_t) \tag{1.8}$$

donde definimos $n_i = \frac{ck_i}{\omega} = \frac{c_i}{c}$ como el indice de refracción.