Parte I

Ánalisis de Fourier

Llegado a este punto esta bueno recalcar las cosas que nos fuimos encontrando en el camino del ánalisis de vibraciones:

1. Si un número finito de fuerzas armónicas actÃºan sobre un sistema linear, la solución estacionaria del sistema $\psi(t)$ resulta en la superposición de las soluciones de cada fuerza particular a su frecuencia ω respectiva. O sea, vale el principio de superposición.

2. A su vez en el caso de análisis de varios grados de libertad por un $N > 1$ también vale el principio de superposición sobre los *modos normales* del sistema con frecuencias los autovalores.

3. El movimiento armónico es fácilmente extendible a modelizar casos de la vida rutinaria

Entonces es claro que el movimiento armónico al cual le dedicamos tanto esfuerzo es un movimiento que vale la pena poder extender a sistemas no lineales. A esto se dedica el presente capítulo, a presentar de la manera mas didácticamente posible, pero sin perder el rigor matemático en el camino, el **Ánalisis de Fourier** (Jean-Baptiste Joseph Fourier ($1768 - 1830$), matemático y físico francés conocido por sus trabajos sobre la descomposición de funciones periódicas en series trigonométricas convergentes llamadas Series de Fourier, método con el cual consiguió resolver la ecuación del calor. La transformada de Fourier recibe su nombre en su honor) que permite presentar toda función (con ciertas condiciones leves) como suma infinita o infinitesimal de armónicas.
Para esto vamos a repasar primero la estructura y propiedades de los espacios vectoriales con producto interno de dimensión finita y luego extenderemos dimensión infinita para presentar a las series de Fourier como una simple combinación de los elementos de la base infinita, para luego ver una motivación del paso de la serie discreta a la continua y luego poder entender la definición de la transformada de Fourier, para finalizar calculando algunas transformadas y algunas propiedades.

1. Espacios vectoriales con producto interno

Considerando que lo típico para el estudiante de Física de la FCEyN es cursar $F2$ con Mate 2, su único recuerdo de espacios con producto interno es el CBC, por lo que iremos de lo más básico y adelantaremos un poco apurados:

1.1. Espacios vectoriales y productos internos

La estructura básica es el *Espacio lineal*a veces denominado Espacio vectorial sobre un *cuerpo de escalares K*. Este cuerpo K sera específicamente en nuestro caso $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Los elementos del espacio vectorial V son llamados *vectores*. Formalmente, un espacio $V \neq \emptyset$ sobre un cuerpo K es un espacio vectorial sii cumple:

1. **Adición de vectores**: Existe una operación llamada suma, generalmente notada como $+$ que satisface

$$\forall\ u, v \in V \longrightarrow u + v \in V$$

2. **Asociatividad**: $\forall u, v, w \in V \longrightarrow (u + v) + w = u + (v + w)$

   Ejercicio interesante: La línea anterior habla de la 3-asociatividad de una operación (o sea asociativa para 3 elementos), probar que para toda operación $*$ asociada a un conjunto $A \neq \emptyset$ (Nótese $(A, *)$) se tiene $*$ es 3-asociativa $\leftrightarrow$ $*$ es n-asociativa

3. **Elemento neutro de la suma**: Existe un elemento neutro para la suma, que notaremos $\vec{0}$ y llamaremos *cero* que cumple $\vec{0} + v = v \quad \forall v \in V$

4. **Inverso aditivo**: Se tiene $\forall v \in V \quad \exists! w \in V\ /v + w = \vec{0}$. A ese w lo llamamos el inverso aditivo o "menos v"de v y lo notamos $(-v)$

5. **Conmutatividad de la suma**: $\forall v, w \in V\ u + v = v + u$
   (**Nota:** Las propiedades antes provistas denotan que $(V, +)$ es un *grupo abeliano* (En honor a Niels Henrik Abel ($1802 - 1829$) fue un matemťico noruego. Es célebre fundamentalmente por haber probado en 1824 que no hay ninguna fŕmula para hallar los ceros de todos los polinomios generales de grados en términos de sus coeficientes y en el de las funciones elípticas, ámbito en el que desarrolló un método general para la construcción de funciones periódicas recíprocas de la integral elíptica)

6. **Multiplicación por escalares**: $\forall v \in V\ k \in K\ ak \in V$
   Nota importante: Por dios notemos que la operación *producto por escalares* es una aplicación $* : V \times K \to V$ **<u>NO</u> en K!!**

7. **Distributividad del producto con respecto a la suma**: $\forall a \in K\ \forall v, w \in V\ a\,(v+w) = av + aw$
8. **Distributividad de la suma respecto al producto** $\forall a, b \in K\ \forall v \in V\ \ (a+b)\,.v = av + bv$ y $a\,(bv) = (ab)\,v$
9. **Elemento neutro para .**: $\forall v \in V\ \exists! \overline{a} \in K\ /\ \overline{a}v = v$ a ese elemento de K lo llamamos escalar unitario o *uno* y lo notamos $\overline{a} = 1$

Habiendo definido un espacio vectorial, todo subconjunto $W \subseteq V$ que cumpla:

1. $\vec{0} \in W$
2. $av + w \in W\ \forall v, w \in W\ a \in K$

Se le llamará un *subespacio* del espacio vectorial V y tiene la propiedad que **es un espacio vectorial en sí mismo**.

Definición: Sea V un K espacio vectorial y $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$ entonces el vector u se dice *combinación lineal* de los vectores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ sii $\exists a_1, a_2, \cdots, a_n \in K$ tal que:

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

Y a la colección de todos los u que son combinación lineal de $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$ le llamamos el *espacio generado por los vectores* $v_1, v_2, \cdots, v_n$ y se nota $\langle v_1, v_2, \cdots, v_n \rangle$ notemos es un subespacio de V.

Definición: Sea V un K espacio vectorial. Los vectores $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$ se les dice *linealmente independientes* si la ecuación:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = \vec{0}\ a_1, a_2, \cdots, a_n \in K$$

Vale solo para $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ De otra forma se dice los vectores son *linealmente dependientes*.

Se sigue de la definición de independencia lineal que:

$$v_1, v_2, \cdots, v_n \text{ son linealmente independientes}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall i \leq n\ v_i \text{ no es combinación lineal de los otros vectores } v_1, v_2, \cdots, v_{i-1}, v_{i+1}, \cdots, a_n$$

Definición: Un conjunto finito $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$ se les dice una *base* de V si son linealmente independientes y $\langle v_1, v_2, \cdots, v_n \rangle = V$. En dicho caso al número natural n se le llamará *dimensión* de V y se nota $\dim_K(V) = n$.

Observación: Tanto para dimensión finita como infinita no hay problema de definición de combinación lineal ya que siempre representa la existencia de una cantidad *finita* de escalares en K para los cuales se cumple la ecuación.

Teniendo estas nociones introduzcamos el producto interno.

Definición: Sea V un $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ espacio vectorial. Un *producto interno* en V es una aplicación $\phi:\ V \times V \to K\ \ \phi(u,v) = \langle u, v \rangle$ que cumple:

1. $\forall v, w \in V\ \langle v, w \rangle \geq 0$
2. $\forall v \in V\ \langle v, v \rangle = 0 \longleftrightarrow v = \vec{0}$
3. $\forall u, v, w \in V\ \forall a, b \in K\ \langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle$
4. $\forall v, w \in V\ \langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$

Y a todo espacio vectorial dotado de un producto interno se le llama un *espacio vectorial con producto interno*. Algunas de las propiedades básicas se desprenden de la definición son:

1. $\forall u, v, w \in V\ \forall a, b \in K\ \langle u, av + bw \rangle = \overline{a}\langle u, v \rangle + \overline{b}\langle u, w \rangle$
2. $\forall u, v \in V\ \forall a \in K\ \langle au, av \rangle = |a|^2 \langle u, v \rangle$
3. $\forall v \in V\ \langle \vec{0}, v \rangle = 0 \in K$

Ejemplos:

1. El espacio euclídeo $V = R^n$ fijamos la base canónica $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ tenemos definidos los vectores $\vec{x} = \sum_{i=0}^{n} x_i e_i = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $\vec{y} = \sum_{i=0}^{n} y_i e_i = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ con el producto interno con el vector de peso $\vec{p}$:

$$\langle x, y \rangle_p = \sum_{i=0}^{k} p_i.x_i.y_i$$

   Y en el caso particular de que $p_i = 1$ $\forall i \leq n$ tenemos

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

   Observación: De este simple ejemplo notamos algo vital para el producto interno que resulta ser *vital* fijar primero una base sobre la cual trabajamos.

2. Sea $V = C[a, b]$ el espacio vectorial de las funciones continuas $f: [a, b] \to \mathbb{C}$ con la usual suma y multiplicación de funciones. Aquí definimos el producto interno para $f, g \in C[a, b]$:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

   Nota: Esta espacio vectorial es de dimensión infinita y hallar una base para dicho espacio excede ampliamente los objetivos de hasta un curso de álgebra lineal, sin embargo el que le interese puede buscarlo en cualquier texto formal de Espacios Métricos, aquí simplemente asumiremos que existe y nos basaremos en él ciegamente.

1.2. Espacios normados

Definición: Sea V un K espacio vectorial. Una *norma* en V se le llama a una aplicación $\eta: V \to \mathbb{R}_+$ que notamos como $\eta(v) = \|v\|$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $\forall v \in V$ $\|v\| \geq 0$
2. $\|v\| = 0 \longleftrightarrow v = \vec{0}$
3. $\forall v \in V$ $a \in \mathbb{C} \|av\| = |a| \|v\|$
4. **Desigualdad triangular**: $\forall u, v, w \in V \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Que justamente nos permiten decir que dados $u, v \in V$ $\|u - v\|$ es una *distancia* en V entre u y v, de donde $\|v\|$ es la distancia al $\vec{0}$. (**Aclaración**: Una distancia es una función $d: V \times V \to \mathbb{R}_+$ que cumple los items $1, 2, 4$ de antes pero en vez de 3 solo pide que la función d sea *simétrica*, es decir, que $d(x, y) = d(y, x)$ $\forall x, y \in V$).Notemos que a partir de una norma puedo definir una distancia pero no todas las distancias son normas

Desigualdad de Cauchy-Schwartz-Bunyakovski: Sea V un K espacio vectorial con producto interno, entonces $\forall u, v \in V$ se da:

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$$

De Viktor Yakovlevich Bunyakovsky $(1804 - 1889)$ fue un matemático ruso que trabajó en mecánica teórica y la teoría de números , y se le atribuye un descubrimiento temprano de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, demostrando el caso de dimensión infinita en 1859, muchos años antes de Hermann Schwarz sobre el tema.
Como observación útil es de remarcar que dado un producto interno siempre podemos definir una norma como $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ usando la desigualdad de Chauchy-Schwarz como herramienta para probar la desigualdad triangular. Pero no todas las normas provienen de un producto interno, y tenemos como ejemplo a:

$$\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_i| \ 1 \leq i \leq n\}$$

Que es llamada *norma infinito* o norma uniforme

En general si una norma cumple la llamada *regla del paralelogramo* proviene de un producto interno. Es más vale que:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \Longleftrightarrow \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$

Definición: Sea V un K espacio vectorial con producto interno. Entonces si dados $u, v \in V$ se tiene $\langle u, v \rangle = 0$ se dice que los vectores u y v son *ortogonales* y lo notaremos $u \perp v$.

Definición: Sea V un K espacio vectorial con producto interno. Entonces un conjunto finito $\{u_k\}_{k=1}^n$ o un conjunto infinito $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ de vectores de V se le dice un *conjunto ortogonal* sii $u_k \neq \vec{0}$ y $u_i \perp u_k$ $\forall i \neq k$. Si además $\|u_i\| = 1$ $\forall i$ se le llama un *conjunto ortonormal*.

Es claro que dado un conjunto ortogonal podemos pasarlo a un conjunto ortonormal denotando $e_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$, donde además se verifica que $\langle u_1, u_2, \ldots, u_n\rangle = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n\rangle$ y se cumplen las siguientes propiedades:

Proposición: Sea V un K espacio vectorial con producto interno, entonces dado un subespacio $W \subseteq V$ generado por el conjunto ortogonal $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ (respectivamente ortonormal) entonces $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es un conjunto linealmente independiente

Demostración:
Sea $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n\rangle = W \subseteq V$ un conjunto ortogonal entonces $\vec{0} = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ y se tiene que $\forall i \leq n$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \vec{0}, v_k\rangle \\ &= \langle \sum_{i=1}^{n} a_iv_i, v_k\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i\langle v_i, v_k\rangle \\ &= a_k\langle v_k, v_k\rangle \\ &= a_k\|v_k\|^2 \end{aligned}$$

Como $\|v_k\|^2 \neq 0 \implies a_k = 0\ \forall k$

$\square$

Proposición: Sea V un K espacio vectorial y sea $(e_k)_{i=1}^{n} = \mathcal{B}$ una base ortogonal de V, entonces se tiene que:

$$\forall v \in V\ \ v = \sum_{i=1}^{n} a_ie_ia_i = \frac{\langle v, e_i\rangle}{\|e_i\|^2}$$

Demostración: Sea $v \in V$ entonces:

$$\begin{aligned} \langle v, e_k\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} a_ie_i, e_k\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i\langle e_i, e_k\rangle \\ &= a_i\|e_k\| \end{aligned}$$

$$\implies \quad a_i = \frac{\langle v, e_k\rangle}{\|e_k\|^2}$$

$\square$

Este último resultado es muy importante en nuestro estudio ya que en general dado un subespácio $W \subseteq V$ con una base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ los coeficientes en una base dada son una combinación de *todos* los vectores de la base, sin embargo en las bases ortogonales sólo dependen cada uno de su respectivo coeficientes.

Teorema de Pitágoras: Sea V un K espacio vectorial con producto interno, y sea $(e_k)_{i=1}^{n} = \mathcal{B}$ una base de V. Entonces se ve que:

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_ie_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\|e_i\|^2$$

Cuya demostración es simple y sigue el espíritu de las dos anteriores. Finalmente cabe preguntarse si dado una base $\mathcal{B} = (v_i)_{i=1}^{n}$ de V se puede hallar una base $\mathcal{B}' = (e_i)_{i=1}^{n}$ ortogonal (respectivamente ortonormal) tal que $\langle v_i\rangle_{i=1}^{k} = \langle e_i\rangle_{i=1}^{k}\ \forall k \leq n$. Y la respuesta es que sí y el teorema que lo demuestra es el de *Ortogonalización de Gramm-Schmidt* cuya demostración es simple y aburrida y se deja al lector que la lea de cualquier lado.

Finalmente antes de adentrarnos en los espacios vectoriales de dimensión infinita analicemos lo siguiente: Sea V un K espacio vectorial con producto interno y sea $\mathcal{B} = (v_i)_{i=1}^{k}$ una base ortogonal de $W \subseteq V$, entonces dado $u \notin W\ u \neq \sum_{i=1}^{n} a_ie_i$. En ese caso se define a la *proyección ortogonal* de u sobre W como

$$p_W(u) = \sum_{i=1}^{n} a_ie_i$$

Que cumple las siguientes propiedades de nuevo aburridas de demostrar:

1. $\langle u - p_W(u), w\rangle = 0 \; u \in V \; \forall w \in W$
2. $\|u - p_W(u)\| \leq \|u - w\| \; \forall w \in W$

   Por lo que la proyección ortogonal es el vector *más cercano* al subespácio W dado y la distancia se realiza (En general la distancia de un punto a un conjunto se define como un ínfimo y a veces no se realiza en la teoría general de espacios métricos)

1.3. Sistemas ortonormales infinitos

Sea V un espacio vectorial con producto interno, asumiremos en adelante que $\dim_K(V) = \infty$. Sea $\{e_1, e_2, \ldots\}$ un sistema ortonormal con un número infinito de vectores, nos encontramos con que el concepto de base es problemático al menos. Entonces por ahora no podemos decir que el sistema ortonormal dado es una base de V o siquiera un sistema de generadores. Veamos que tenemos siendo muy cuidadosos:

Desigualdad de Bessel: Se tiene $\forall u \in V$ la serie $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle u, e_i\rangle|^2$ converge y, además, se tiene que vale

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle u, e_i\rangle|^2 \leq \|u\|^2$$

(Friedrich Wilhelm Bessel $(1784-1846)$ fue un matemático alemán, astrónomo, y sistematizador de las funciones de Bessel [las cuales, a pesar de su nombre, fueron descubiertas por Daniel Bernoulli])

Demostración Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} |\langle u, e_i\rangle|^2$ Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ la suceción de sumas parciales resulta ser $\|p_{W_n}(u)\|^2$ con $W_n = \langle e_i\rangle_{i=1}^{n}$
Por Pitágoras que no demostramos en dimensión finita (así los obligo a buscarla) sabemos que:

$$\|u\|^2 = \|p_{W_n}(u)\|^2 + \|u - p_{W_n}(u)\|^2$$

Por lo que $\|p_{W_n}(u)\|^2 \leq \|u\|^2$ entonces la sucesión de sumas parciales esta acotada superiormente, y como es monótona creciente se sigue por completitud que converge. Es decir

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |\langle u, e_i\rangle|^2 \leq \|u\|^2$$

□

En el caso de darse la igualdad decimos que vale la *Igualdad de Parseval*. Inmediatamente podemos entonces decir que:

Lema de Riemann-Lebesgue: Sea V un K espacio vectorial con producto interno y sea $\{e_1, e_2, \ldots\}$ un sistema ortonormal infinito. Entonces para cada $u \in V$ se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \langle u, e_n\rangle = 0$$

(Georg Friedrich Bernhard Riemann $(1826-1866)$ fue un matemático alemán que realizó contribuciones muy importantes en análisis y geometría diferencial, se aburrió e invento las sumas, algunas de ellas allanaron el camino para el desarrollo más avanzado de la relatividad general. Su nombre está conectado con la función zeta, hipótesis de Riemann, la integral de Riemann, el lema de Riemann, las variedades de Riemann, las superficies de Riemann y la geometría de Riemann; en resumen un groso).

Demostración: De la desigualdad de Bessel se tiene que la serie converge, lo que necesariamente indica que el argumento tiende a 0, entonces vale el resultado

□

Uno de los primeros problemas que nos encontramos al querer definir una base de V es el significado de *combinación lineal infinita*. Es decir, supongamos V un K espacio vectorial con producto interno y un sistema infinito ortonormal $\{v_1, v_2, \ldots\}$ $v_i \in V \; \forall i \in \mathbb{N}$ y una secuencia de escalares $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ $a_i \in K \; \forall i$. A su vez no nos compliquemos mucho y tomemos que los sistemas son secuencias ordenadas (a pesar que en un conjunto no hay orden), entonces podemos dar un significado a la expresión "$\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$"que es una suma infinita de vectores y no de escalares!! Es más si le llegamos a dar sentido a esa suma, necesitamos que se mantengan algunas propiedades de las bases, como la unicidad de coeficientes, por ejemplo. Para esto presentamos:

Definición: Sea $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ una suceción infinita de vectores en un espacio vectorial normado V. Diremos que la suceción *converge en norma* o en *media cuadrática* a un vector $v \in V$ cuando se tiene que

$$Dado\ \epsilon > 0\ \exists m(\epsilon)\ \ /\forall m \geq m(\epsilon) \Longrightarrow \|v - v_m\| < \epsilon$$

Lo que nos deja

Definición: Sea $\{v_1, v_2, \ldots\}$ una suceción infinita de vectores en un espacio vectorial normado V y sea $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ una suceción de escalares. Entonces decimos que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n v_n$ converge en norma a $v \in V$ y escribimos $v = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n v_n$ cuando se tiene que las sumas parciales $w_m = \sum\limits_{n=1}^{m} a_n v_n$ convergen en norma a v. Es decir:

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n \iff \lim_{m \to \infty} \|v - w_m\| = 0$$

Y la expresión que v esta generado por $\{v_1, v_2, \ldots\}$ se extiende a $\exists \{a_i\}_{i=1}^{\infty}\ a_i \in K \forall i$ tal que se tenga que $\|v - \sum\limits_{n=1}^{m} a_n v_n\|$ tienda a cero cuando m tiende a infinito.
Ahora estamos en condiciones de definir LA propiedad que vamos a tener que asumir del sistema trigonométrico al tener que trabajar con las series de Fourier que es la de un sistema cerrado o total:

Definición: Sea $\{v_1, v_2, \ldots\} = W$ un sistema ortonormal infinito en un K espacio vectorial V con producto interno. Diremos que el sistema es *cerrado* o *total* en V si $\forall v \in V$ se tiene que:

$$\lim_{m \to \infty} \|v - \sum_{i=1}^{m} \langle v, v_i \rangle v_i\| = 0$$

Que si recordamos que el vector $\sum\limits_{i=1}^{m} \langle v, v_i \rangle v_i$ es la proyección ortogonal de v sobre W, por lo que un sistema es cerrado en V si y solo si para todo elemento de V tenemos una combinación lineal infinita que converge en norma a ese elemento.

Proposición: El sistema ortonormal infinito $\{v_1, v_2, \ldots\} = W$ es cerrado en el K espacio vectorial V con producto interno **si y solo si** $\forall v \in V$ se tiene:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle u, e_i \rangle|^2 = \|u\|^2$$

Es decir **la propiedad de un sistema de ser cerrado en V es equivalente a que $\forall v \in V$ valga la igualdad de Parseval**.

Proposición: Para cada m natural, sea $V_m = \langle e_1, \ldots, e_m \rangle$ y $u_m = p_{V_m}(u)$ sea la proyección ortogonal de u en V_m. Entonces del teorema de Pitágoras sabemos que:

$$\|u\|^2 = \|u_m\|^2 + \|u - u_m)\|^2$$

Por lo que se tiene

$$\|u - u_m)\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} |\langle u, e_i \rangle|^2$$

Por lo que se puede ver que

$$\lim_{m \to \infty} \|u - u_m)\|^2 \iff \lim_{m \to \infty} \|u\|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} |\langle u, e_i \rangle|^2$$

Que justamente dice que el sistema es cerrado en V sii vale la igualdad de Parseval.

$\square$

Otra propiedad importante de los sistemas infinitos es la de *completitud.*

Definición: Sea $\{v_1, v_2, \ldots\} = W$ un sistema ortonormal infinito en un K espacio vectorial V con producto interno. Diremos que el sistema es *completo* si solo el vector cero $(\vec{0} = v)$ cumple con:

$$\langle v, v_i \rangle = 0\ i \in \mathbb{N}$$

Claramente la propiedad de completitud es copada, y díficil de conseguir, o sea, supongamos un sistema ortonormal infinito y le quitamos un vector, ya ese sistema no es ni completo ni cerrado, pero sigue siendo infinito, lo que implica que hay un factor mas importante que la cardinalidad en este asunto de los infinitos. Es más puede que tengamos un sistema que sea cerrado y completo, pero que el ritmo de convergencia.ª algunos elementos del espacio sea insuficiente y no nos sirve de todos modos.
Antes de pasar a la próxima sección e introducir a las Series de Fourier notemos que claramente un sistema cerrado es completo pero no viceversa, ya que suponiendo es cerrado basta con reemplazar en la igualdad de Parseval $v = 0$ y leesto es completo.

2. Series de Fourier

En ésta sección vamos a introducir las Series de Fourier como una representación o approximación de ciertas funciones en un intervalo finito. Justamente esto es posible debido a que el sistema trigonométrico es un sistema ortonormal infinito cerrado, como definimos antes, y entonces toda f puede ser aproximada por una combinación lineal infinita de dichos elementos del sistema.

2.1. Definiciones

Sea $E[-\pi, \pi]$ al conjunto de las funciones complejas continuas a trozos. Recordemos una funciones $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ la llamamos *continua a trozos* si tiene **a lo sumo** un número finito de discontinuidades y , además existen los límites laterales en todo punto. Es decir

Definición 2.1

$$\textit{Dada } f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C} \quad \exists \lim_{x \to x_i} f(x) \ \forall i \leq n \in \mathbb{N} \textit{ y sea } A = \{x_i \in [-\pi, \pi] \ / \lim_{x \to x_i} \neq f(x_i))\} \Longrightarrow |A| < \infty$$

Entonces decimos f es continua a trozos

Notemos que f puede no estar definida en las discontinuidades de salto. Es simple ver que $E[-\pi, \pi]$ es un espacio vectorial y si definimos como producto interno

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{pi}^{\pi} f(x) \, .\overline{g(x)} dx$$

Tenemos que $E[-\pi, \pi]$ es un espacio vectorial con producto interno.

Teorema 2.2 *La secuencia de funciones*

$$\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \ldots\}$$

es un sistema ortonormal infinito en E

2.2. Existencia y unicidad de la serie de Fourier

Y este sistema es importante por que es cerrado en E, el cual vale por el:

Teorema 2.3 ***Teorema de Stone-Weirstrass***
Sea M un espacio métrico compacto y $A \subset \mathcal{C}(M; \mathbb{C})$ un subálgebra autoadjunta que contiene las constantes y separa los puntos de M. Entonces toda función continua compleja $f : M \to \mathbb{C}$ puede ser uniformemente aproximada por funciones pertenecientes a A

Corolario 2.4 *Sea M un espacio métrico compacto y $S \subset \mathcal{C}(M; \mathbb{R})$ un conjunto que separa puntos. Entonces toda función continua $f : M \to \mathbb{R}$ puede ser uniformemente aproximada por polinomios de las funciones de S*

Específicamente podemos tomar los polinomios trigonométricos

$$p(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt + b_k \sin kt$$

que constituyen un subálgebra de $\mathcal{C}([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$ que contiene constante pero que no separa los puntos pues $p(-\pi) = p(\pi)$ para todo polinomio trigonométrico p; sin embargo, salvo ese caso en general para $x \neq 0 \ y \neq 2\pi \ si \ p(x) = p(y) \Longrightarrow x = y$ Por lo que se puede probar que en virtud del corolario mostrado el subálgebra de polinómios trigonométricos es densa en $\mathcal{C}(S^1; \mathbb{R})$ denotando S^1 como la circunferencia unitaria y entonces toda función continua $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ (y en general a $\mathbb{C}$) es uniformemente aproximada por los polinomios dados que llamaremos el **desarrollo de Fourier**.

Sí, es complicado pero si asumimos lo anterior (que igual valía comentarlo aunque no demostramos el teorema se demuestra en Cálculo Avanzado) podemos entonces ver que el sistema trigonométrico es cerrado o total en E y entonces anteriormente vimos que si $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un sistema ortonormal, podemos representar $f \in E$ como una suma de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$$

De la cual veamos los coeficientes:

1. Si $e_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ entonces:

$$\langle f, e_n \rangle e_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1}{\sqrt{2}}dt\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

2. Si $e_n(x) = \sin nx$ $n \in \mathbb{N}$ entonces:

$$\langle f, e_n \rangle e_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt\right)\sin nx$$

3. Si $e_n(x) = \cos nx$ $n \in \mathbb{N}$ entonces:

$$\langle f, e_n \rangle e_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt\right)\cos nx$$

Por lo que la serie dada antes tiene la forma de

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{2.1}$$

donde

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_n & = & \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \ n \in \mathbb{N} \\ \\ b_n & = & \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \ n \in \mathbb{N} \end{array}\right. \tag{2.2}$$

Lo que nos lleva entonces finalmente a notar que la famosa Serie de Fourier no es mas que tomar un sistema ortonormal y representar una combinación lineal cualquiera de una base dada, no mais!! Veamoslo tranca:

Definición 2.5 *Sea $f \in E$ Entonces la serie(2.1) associada a f, con a_n y b_n como en (2.2) es llamada la* Serie de Fourier *de f y escribimos:*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Observación 2.6 *a*

1. *La notación del término constante como $\dfrac{a_o}{2}$ es simple notación estándar y luego veremor la utilidad.*
2. *Notemos en la definición de la serie de Fourier notamos que $f(x) \sim$ a la serie de Fourier, pues no hay necesidad que la serie converga a la función para algún punto, y menos aún a $f(x)$*
3. *Podemos definir una relación de equivalencia entre funciones $f, g \in E$ dada por*

$$f \equiv g \iff f(x) = g(x) \ \ \forall x \in [-\pi, \pi]$$

salvo para finitos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Y se justifica por la norma del espacio dado que la integral no se modifica por finitos puntos

Vale notar que en los casos particulares que $f(x) = f(-x)$, o sea, f sea *par* tenemos que $b_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, u el caso alternativo en que $f(x) = -f(-x)$, o sea, f sea *impar* tenemos que $a_n = 0 \ n \in \mathbb{N}$. Es más en el caso común de $F2$ en que la extensión de la funci”on sea par o impar pero la función **en sí** tengo una paridad tenemos que solo los modos pares u impares actuan en el desarrollo de Fourier que habrá que analizar en particular.

No hablaremos aquí mucho más como la deigualdad de Bessel o o el lema de Riemann-Lebesgue la igualdad de Parseval en este caso particular de espacio de Hilbert en este apunte ya que resulta inútil para nuestro uso; simplemente quería introducir formalmente a las Series de Fourier, no una exposición completa de sus propiedades y el análisis de los distintos de convergencia (materia que realmente a los físicos les chupa un huevo XD).

Finalmente dada $f \in E[a,b]$ se puede ver que se puede extender a cualquier intervalo finito la serie de Fourier mediante traslaciones y homotecias como

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi x}{b-a} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{b-a} \tag{2.3}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_n & = & \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi x}{b-a} dx \ n \in \mathbb{N} \\ \\ b_n & = & \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2n\pi x}{b-a} dx \ n \in \mathbb{N} \end{array} \right. \tag{2.4}$$

3. Integral y Transformada de Fourier

Antes de poder presentar la transformada de Fourier nos conviene hacer un pequeño repaso de integración en $\mathbb{C}$ y dos o tres resultados importantes que nos lleven a poder definir correctamente lo que conocemos como Transformada de Fourier.

3.1. Integración de funciones de variable real y campo complejo

Diremos que una función $\phi: \ [a,b] \to \mathbb{C}$ es integrable Riemann en el intervalo $[a,b]$, y escribiremos $\phi \in R([a,b])$, si las funciones $\mathcal{R}e(\phi)$ y $\mathcal{I}m(\phi)$ son integrables Riemann en $[a,b]$ (en el sentido que conocemos, ya que son funciones reales de variable real definidas en un intervalo) en cuyo caso definimos la integral de ϕ en $[a,b]$ como el número complejo

$$\int_a^b \phi(t)dt = \int_a^b \mathcal{R}e\{\phi(t)\}dt + i \int_a^b \mathcal{I}m\{\phi(t)\}dt$$

Es claro que una condición necesaria para la integrabilidad de ϕ es la acotación. La integrabilidad se puede caracterizar en los siguientes términos:

Teorema 3.1 ***Criterio de integrabilidad de Lebesgue***
Sea $\phi: \ [a,b] \to \mathbb{C}$ una función acotada. Entonces $\phi \in R([a,b])$ si, y sólo si, ϕ es continua casi por doquier en $[a,b]$. En particular, toda función acotada y continua salvo en un número finito de puntos es integrable.

(Henri Léon Lebesgue $(1875-1941)$ fue un matemático francés. Lebesgue es fundamentalmente conocido por sus aportes a la teoría de la medida y de la integral. A partir de trabajos de otros matemáticos como Émile Borel y Camille Jordan, Lebesgue realiz”o importantes contribuciones a la teoría de la medida en 1901. Al año siguiente, en su disertación Intégrale, longueur, aire (Integral, longitud, área) presentada en la Universidad de Nancy, definió la integral de Lebesgue, que generaliza la noción de la integral de Riemann extendiendo el concepto de área bajo una curva para incluir funciones discontinuas. Este es uno de los logros del análisis moderno que expande el alcance del análisis de Fourier)
Y habiendo ya definido la integral de una función de variable real a valores complejos, notaremos como $E^1(\mathbb{R}) = E(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ y a $E^2(\mathbb{R}) = E(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ siendo $L^1(\mathbb{R}) \ y \ L^2(\mathbb{R})$ las funciones de módulo absolutamente integrales u en media cuadrática respectivamente, que notemos estos ultimos dos conjuntos son espacios vectoriales de $L^1 \ y \ L^2$ con normas:

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx \quad \|f\|_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$$

Entonces veamos un resultado clásico del análisis real que nos va a permitir intercambiar limites y derivadas con el signo integral (algo que en general quiere):

Teorema 3.2 ***Teorema de la convergencia Dominada de Lebesgue***
Sean $(f_n) \subset L^1(\mathbb{R}), \ g \in L^1(\mathbb{R}) \ y \ f: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ absolutamente integrable sobre intervalos finitos tales que:

- $f_n(x) \ \to \ f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $|f_n(x)| \leq |g(x)| \ \forall x \in \mathbb{R}$

Entonces:

1. $f \in L^1(\mathbb{R})$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$
   $(n \to \infty)$

3.2. Integral de Fourier

Entonces vimos como las series de Fourier pueden representar una cantidad considerable de funciones periódicas. Intentemos reemplazar la serie por una integral para las funciones no periódicas!! Sea $f : [-l,l] \to \mathbb{R} \ / \ f, f' \in E([-l,l])$ entonces:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

Donde tenemos

$$\begin{cases} a_n &= \dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)t\ dt \quad n \in \mathbb{N} \\ \\ b_n &= \dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\sin\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)t\ dt \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\left[\cos\left(\frac{k\pi}{l}t\right)\cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{l}t\right)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\right] dt \\ &= \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)x - \left(\frac{n\pi}{l}\right)t\right) dt \\ &= \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\left(\frac{k\pi}{l}(x-t)\right) dt \\ &= \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\left(k\frac{\pi}{l}(x-t)\right) dt \\ &= \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{l}F_l(k\frac{\pi}{l})\ dt \qquad = (\bigstar) \end{aligned}$$

si $F_l(y) = \int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\left(y\left(x-t\right)\right)\ dt$

Con lo cual pensemos en una partición de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $y_0 : 0 < y_1 = \frac{\pi}{l} < \ldots < y_k = \frac{k\pi}{l} < \ldots$ con la longitud de cada intervalito $\frac{\pi}{l}$ lo que sugiere pensar al segundo sumando de $(\bigstar)$ como una suma de Riemann de la función $F_l : \sum_{k=1}^{\infty} F_l\left(y_k\right)\Delta y_k\ dt$. Notemos que la norma de la partición tiende a cero cuando l tiende a infinito. Supongamos ahora que $f \in L^1(\mathbb{R})$, por lo que la función $f(t)\cos y\left(x-t\right) \in L^1(\mathbb{R})$, por lo que formalmente podemos decir que **uniformemente**:

$$F_l(y) \to F(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\cos y(x-t)\ dt\ (l \to \infty)$$

Por lo que podemos decir que claramente $F(y) \in R$ y entonces:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} F_l\left(y_k\right)\Delta y_k \ \to\ \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} F\left(y\right)\ dy$$

Y como se puede ver el primer sumando de $(\bigstar)$ tiende a cero cuando l tiende a infinito debido a que esa integral esta acotada por $\|f\|_1$ (Desigualdad de Bessel un poco modificada pero fácil de ver) se puede reescribir que:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} F(y)\ dy = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\left(y(x-t)\right)\ dt\ dy \tag{3.1}$$

Y con todos pasos formales logramos pasar de una representación discreta (la serie) a una continua (la integral). Finalmente para llegar al resultado lindo y compacto, aunque todo el laburo ya lo hicimos, podemos ver que $\cos(y(x-t))$ es par como función de y y entonces vale que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(x-t))\ dt \right)\ dy$$

Y si además suponemos que $g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin y(x-t)\ dt \in L^1(\mathbb{R})$ (Como casi siempre pasará e las funciones físicas) tenemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(y(x-t))\ dt \right)\ dy = 0$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(x-t))\ dt \right)\ dy + i \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(y(x-t))\ dt \right)\ dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iy(x-t)}\ dt \right)\ dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iyt}\ dt \right) e^{iyx}\ dy
\end{aligned}$$

Lo que nos permite y motiva a hacer la siguiente definición:

Definición 3.3 *Dada $f \in E^1(\mathbb{R})$ se le llama **transformada de Fourier** de f a la función:*

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\ dt$$

3.3. Propiedades de la transformada y algunas transformadas útiles

Ahora que ya definimos y entendimos porqué la transformada de Fourier esta bueno ver algunas propiedades que nos van a simplificar la vida, para luego calcular algunas transformadas en particular y terminar en cómo se calculan en general, con herramientas del análisis complejo:

Propiedades

1. Si $f \in E^1(E)$, entonces $\widehat{f}$ es continua en $\mathbb{R}$ y $\lim\limits_{|x| \to \infty} \widehat{f}(\omega) = 0$ (Esto se demuestra intercambiando límites y integral con el Teo de la convergencia dominada de Lebesgue)
2. Como consecuencia de 1), $\widehat{f}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$ $\forall f \in E^1(\mathbb{R})$
3. Como dadas $f, g \in E^1(\mathbb{R}) \to af + bg \in E^1(\mathbb{R})$ se tiene que $\widehat{af + bg} = a\widehat{f} + b\widehat{g}$
4. Sea $f \in E^1(\mathbb{R})$ y tal que $\mathcal{I}mf \subset \mathbb{R}$ entonces
   - $\widehat{f}(-\omega) = \overline{\widehat{f}(\omega)}$

     $$\widehat{f}(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(-\omega)t}\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t) e^{-i\omega t}}\ dt = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\ dt} = \overline{\widehat{f}(\omega)}$$

   - Si además f es par, entonces $\widehat{f}$ es par y real

     $$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega y\ dt + i \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(t) \sin \omega y\ dt}_{Impar} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega y\ dt \in \mathbb{R}$$

     $$\widehat{f}(-\omega) = \overline{\widehat{f}(\omega)} = \widehat{f}(\omega)$$

   - Si f es impar, entonces $\widehat{f}$ es impar y puramente imaginaria con una demostración análoga a la anterior

5. Sean $f \in E^1(\mathbb{R})$ $a, b \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$ $g(x) = f(ax+b)$ entonces

$$\widehat{g}(\omega) = \frac{1}{|a|} e^{\frac{i\omega b}{a}} \widehat{f(\frac{\omega}{a})}$$

   En efecto hacer las cuentas con el cambio de variables $u = ax + b$ y sale solo

6. Sea $f \in E^1(R)$ $c \in \mathbb{R}$ entonces recordando que $e^x e^y = e^{x+y}$

$$\mathcal{F}(e^{-ict} f(t))(\omega) = \widehat{f}(s+c)$$

Y creo que las demás propiedades sobre las derivadas no serán muy útiles.

Tranformadas útiles Sea $f(x) = e^{-|x|}$ Entonces se ve claramente que $f \in E^1(R)$ entonces por paridad se ve que:

$$\mathcal{F}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-i\omega x}\ dx = 2 \int\limits_{0}^{\infty} e^{-|x|} \cos \omega x\ dx$$

Integremos dos veces por partes y usemos el hecho conocido que $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ y obtenemos:

$$\mathcal{F}(\omega) = 2 \left[1 - \omega^2 \int\limits_{0}^{\infty} e^{-|x|} \cos \omega x\ dx \right]$$

Lo cual resolviendo para la integral esa dada tenemos:

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{\pi\,(1+\omega^2)}$$

Por otro lado calculándola tediosamente se puede ver que $\mathcal{F}(e^{-x^2})(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$
Lo que nos lleva a decir que, usando todas las propiedades dadas:

$$\int_{\infty}^{\infty} e^{-\left(ax^2+bx\right)}\ dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}} \tag{3.2}$$

Para finalizar esta sección nos gustaría introducir la forma general del cálculo de la transformada de Fourier, para lo cual primero introduciremos un teorema importante

Teorema 3.4 ***Teorema de Cauchy***
Sea $f:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entonces si f es derivable en todo punto de un dominio conexo Ω, f es analítica

Teorema 3.5 ***Teorema de los Residuos***
Sea γ una curva simple cerrada, y asumamos que f es analítica en γ y su interior salvo finitos puntos $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Entonces se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z)\ dz = \sum_{k=1}^{n} Res\{f; z_k\}$$

Teorema 3.6 ***Cálculo de Tranformadas de Fourier***
Sea f analítica en $\mathbb{C}$ salvo finitos puntos $z_1, z_2, \ldots, z_m$ en el plano superior y $z_{m+1}, \ldots, z_n$ en el plano inferior. A su vez asumamos $f \in R$ y que $\lim\limits_{R\to\infty} \max\limits_{z \in C_R \cup C'_R} |f(z)| = 0$. Entonces:

$$\mathcal{F}(f)(\omega) \begin{cases} -i \sum\limits_{k=m+1}^{n} Res\{f\,(z)\, e^{-i\omega z}; z_k\} & w \geq 0 \\ \\ i \sum\limits_{k=1}^{m} Res\{f\,(z)\, e^{-i\omega z}; z_k\} & w \leq 0 \end{cases}$$