Parte I

Aproximación continua y ondas unidimensionales

1. Aproximación continua

2. Ondas estacionarias

Consideremos una cuerda de cuentas capaces de hacer oscilaciones transversales. Para describir ese sistema utilizamos el método de la sección de muchos grados de libertad, considerando pequeñas oscilaciones, por lo que la fuerza de la partícula n es $\frac{-2T_0\psi_n}{ma}$ (siendo a la distancia inicial entre masas y $T_0 = k(a-l_0)$, la tensión inicial de cada resorte), entonces obtenemos la siguiente expresión

$$\ddot{\psi}_n = \frac{T_0}{ma}(\psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n)$$

y la relación de dispersión será (considerando que $x_n = na$)

$$2\cos(ka) = 2\left(1 - 2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{ka}{2}\right)\right) = 2 - \frac{ma}{T_0}\omega^2$$

es decir

$$\omega^2 = \frac{4T_0}{ma}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

si tomamos el límite con $N \to \infty$ y $a \to 0$, encontramos que $\psi_n(t) \to \psi(x,t)$, mientras $\psi_{n+1}(t) \to \psi(z+a,t)$ y $\psi_{n-1}(t) \to \psi(z-a,t)$. La ecuación diferencial del problema queda

$$\partial_{tt}\psi(x,t) = \frac{T_0}{ma}(\psi(x+a,t) - 2\psi(x,t) + \psi(x-a,t) = \frac{T_0 a}{m}\partial_{xx}\psi(x,t)$$

expresión que encontramos expandiendo en serie las funciones en $x+a$ y $x-a$. Observemos que la relación de dispersión queda

$$\omega^2 = \frac{4T_0}{ma}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{ka}{2}\right) \approx \frac{4T_0}{ma}\left(\frac{ka}{2}\right)^2 = \frac{T_0 a k^2}{m}$$

es decir que la relación de dispersión indica que la frecuencia espacial es proporcional a frecuencia temporal o número de onda.

La ecuación que quedó se denomina ecuación de onda clásica, y en general la escribimos de la siguiente forma

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} \qquad \partial_{tt}\psi(x,t) = c^2\partial_{xx}\psi(x,t) \tag{2.1}$$

donde c^2 es la velocidad de propagación de la onda en el medio (que para un la cuerda es $c^2 = \dfrac{T_0}{\rho}$, siendo ρ la densidad lineal de masa), que se relaciona con la siguiente relación de dispersión

$$\omega = c\,k \tag{2.2}$$

Para obtener una solución para esta ecuación de onda proponemos $\psi(x,t) = A(x)\sin(\omega t + \phi)$, por lo que obtenemos la siguiente ecuación

$$\frac{d^2A(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}A(x) = A''(x) + k^2A(x) = 0$$

que sabemos resolver, lo que obtenemos como solución general una superposición de soluciones oscilatorias

$$\psi(x,t) = \sum_{i,j}(c_i\,\mathrm{sen}(k_i x) + c_j\cos(k_j x))\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) \tag{2.3}$$

y cada constante c_i va a depender de las condiciones de contorno del problema, además de los modos posibles (es decir los valores posibles de k y ω). Esta ecuación corresponde a ondas estacionarias, nombre que tendrá sentido cuando observemos las ondas propagantes.

Para condiciones iniciales tenemos que descomponer la función de la forma inicial en las componentes obtenidos de la solución **??**, por medio de las series de Fourier, es decir

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}[(A_n\,\mathrm{sen}(nk_1x) + B_n\cos(nk_1x))\,\mathrm{sen}(\omega_n t + \phi)] \tag{2.4}$$

siendo $\omega_n = ck_n$ (la relación de dispersión de la ecuación de onda) y A_n y B_n

$$A_n = \frac{1}{\tau}\int_a^{a+\tau} \psi(x,0)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2n\pi}{\tau}x\right)dx \qquad B_n = \frac{1}{\tau}\int_a^{a+\tau} \psi(x,0)\cos\left(\frac{2n\pi}{\tau}x\right)dx \tag{2.5}$$

mientras B_0 es

$$B_0 = \frac{1}{\tau}\int_a^{a+\tau} \psi(x,0)dx \tag{2.6}$$

La constante τ representa la periodicidad de la función $\psi(x,0)$, que vendrá definido por el tamaño del problema físico (para una cuerda en general será L o $2L$, siendo L el largo de la cuerda), y a es donde empieza el sistema físico, que en general se puede disponer que $a = 0$. También podemos escribir la serie de Fourier de forma exponencial, es decir

$$\psi(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{2n\pi}{\tau}x}\,\mathrm{sen}(\omega_n t + \phi) \tag{2.7}$$

Como todo problema mecánico, vamos a describir la energía de la onda estacionaria. La energía la tenemos que pensar como una densidad, es decir que se deriva de una integral sobre la coordenada espacial. La energía cinética la podemos encontrar como

$$T = \frac{1}{2}\int \rho\,(\partial_t\psi(x,t))^2 dx \tag{2.8}$$

siendo ρ la densidad de masa lineal (ya que $\rho dx = dm$), o lo que corresponda dependiendo del caso, y la energía potencial podemos verla como

$$V = \frac{1}{2}\int \lambda\,(\partial_x\psi(x,t))^2 dx \tag{2.9}$$

siendo para una cuerda libre la constante $\lambda = T_0$ (la tensión de la cuerda). En la sección referida a reflexión de ondas analizaremos el caso de la onda reflejada, por medio de un argumento físico y la energía de una onda propagante que, como veremos en la sección siguiente, es una solución m
as general de la ecuación de ondas

3. Ondas propagantes

Existe una solución más general a la ecuación de ondas clásicas, que contempla una solución estacionaria (ondas estacionarias) en medios de propagación limitados y una solución propagante. Dicha solución es la siguiente

$$\psi(x,t) = \psi_1(x-ct) + \psi_2(x+ct) \tag{3.1}$$

donde ψ_1 avanza en x con el tiempo y ψ_2 retrocede. El perfil de la onda va a depender de la función inicial, pero en general vamos a trabajar con soluciones armónicas, es decir

$$\psi(x,t) = \Re\left(Ae^{i(-kx+\omega t)} + Be^{i(kx+\omega t)}\right) = A\cos(\omega t - kx) + B\cos(\omega t + kx) \tag{3.2}$$

Veamos que pasa con la expresión de la energía (ecuaciones **??** y **??**) con la solución general **??**

$$E = T + V = \frac{1}{2}\int \rho c^2(\psi_1' - \psi_2')^2 dx + \frac{1}{2}\int \lambda(\psi_1' + \psi_2')^2 dx.$$

Consideremos que $\psi_2 = 0$, es decir que tenemos solo propagación para un sentido y que la propagación es armónica, entonces queda

$$E(x,t) = \frac{1}{2}\Re(A)\left(\int \rho\omega^2\Re\left(e^{i(-kx+\omega t)}\right)^2 dx - \int \lambda k^2\Re\left(e^{i(-kx+\omega t)}\right)dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho\omega^2}{2k} - \frac{\lambda k^2}{2k}\right)\Re(A)\,\mathrm{sen}(2(-kx+\omega t)) \tag{3.3}$$

donde vemos que la energía avanza en el tiempo siguiendo una forma armónica, contrario a lo que observamos en las ondas estacionarias (la solución con una onda propagándose para un sentido y para otro).