Parte I

Introducción matemática

A lo largo de nuestro viaje nos encontraremos y tendremos que amigarnos con los números complejos, por lo que es conveniente poder introducirlos ahora con un cierto formalismo para luego poder referirnos a ellos con comodidad.

1. El cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos

Consideremos el conjunto $\mathbb{R}^2$ con las operaciones

$$(x,y)+(u,v)=(x+u,y+v)$$
$$(x,y).(u,v)=(xu-yv,xv+yu).$$

Es muy fácil comprobar las propiedades asociativa y conmutativa de las operaciones asíÂ definidas y la distributiva del producto respecto de la suma. El elemento neutro de la suma es $(0,0)$ y $(1,0)$ es la unidad del producto. Además, $(-x,-y)$ es el opuesto de (x,y), y $\forall(x,y)\neq(0,0)$ tiene inverso

$$(x,y).(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2})=(1,0).$$

Todas estas propiedades se resumen en que $(\mathbb{R}^2;+;.)$ es un *cuerpo*, que representamos por $\mathbb{C}$ y les llamamos a sus elementos números complejos.

1.1. Forma binómica de un numero complejo

El símbolo usual (x,y) para representar pares ordenados en la estructura de $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}$ espacio vectorial no es conveniente para representar números complejos (calculate cualquier potencia grande y lo vas a notar). Pero observemos que

$$(x,0)+(y,0)=(x+y,0)$$
$$(x,0).(y,0)=(xy,0).$$

Es decir que los números complejos de la forma $(x,0)$ se comportan respecto a la suma y multiplicación definidas para los complejos como números reales respecto a su suma y multiplicación (O sea $\mathbb{R}\times\{0\}$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}$ isomorfo a $\mathbb{R}$). Esto nos permite la identificación $(x,0)=x$. Por otro lado al número complejo $(0,1)$ lo representaremos por i, la unidad imaginaria (término acuñado por Descartes (1596-1650), padre de los ejes coordenados) y con ello tenemos

$$i^2=(0,1).(0,1)=(-1,0)=-1.$$

Y ahora podemos escribir a todo número complejo como

$$z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,1).(y,0)=x+iy,$$

que le llamamos la forma binómica de un numero complejo donde $x=\mathcal{R}e\ z$ y $y=\mathcal{I}m\ z$
Observación: Acabamos de ver que $i^2=-1$ pero eso ni cerca nos permite escribir $i=\sqrt{-1}$, ya que si lo hacemos y manejamos a la raíz como estamos acostumbrados llegamos a que

$$-1=i^2=i.i=\sqrt{-1}.\sqrt{-1}=\sqrt{-1.-1}=\sqrt{1}=1$$

$\Longrightarrow$-1=1 *Abs*! Fíjense que en realidad si escribimos $i=\sqrt{-1}$ no podemos interpretar a -1 como nḿero real (ya que estos no tienen raíz cuadrada de negativos) sino como -1 complejo, por lo que *estamos usando raíces de números complejos sin siquiera haberlas definido y presuponiendo que mantienen las propiedades de los números reales.* Antes de escribir $i=\sqrt{-1}$ tenemos que saber que significa $\sqrt{z}\ \forall\ z\in\mathbb{C}$ y ahí se ve que $\sqrt{zw}=\sqrt{z}\sqrt{w}$ generalmente no es válida $\forall\ z,w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^+$.
Observación 2: No existe un orden en $\mathbb{C}$! Es importante remarcar que en los complejos no existe una relación de orden como $\leq$ ya que, si la hubiese

$$0<i^2=-1\Longrightarrow\ 0<1+-1=0\ Abs!$$

Por lo tanto hay que tener cuidado con escribir relaciones de orden en $\mathbb{C}$.

1.2. Módulo y conjugado de un número complejo

Dado un número complejo $z = x + iy$ se puede definir su reflexión con respecto al eje real pensándolo como $\mathbb{R}$ espacio vectorial, que resulta en el *conjugado* de un número complejo: $\overline{z} = x - iy$. Por otro lado también en la misma linea de razonamiento se define el *módulo* de z como $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Intuitivamente se ve al módulo como la mera norma euclídea, lo que nos lleva a verificar el módulo cumple las condiciones de una norma y definimos la *distancia* entre dos números complejos como $|z - w| \; \forall \; z, w \in \mathbb{C}$.
Propiedades: Se puede verificar

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
2. $\overline{zw} = \overline{zw}$
3. $|zw| = |z|.|w|$
4. $|z + w| \leq |z| + |w|$

entre otras. Finalmente vale remarcar

$$z.\overline{z} = |z|$$

$$\implies \forall \; z \in \mathbb{C}, z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|}$$

1.3. Forma polar de un número complejo

Dado que todo complejo $z = x + iy \neq 0$ presenta un módulo no nulo, uno puede escribir

$$z = |z|.\frac{x + iy}{|z|}.$$

Como el segundo factor esta en la circunferencia unidad, se tiene que $\dfrac{x+iy}{|z|}$ tiene una relación biunívoca con $\cos t + i \sin t \;,\; t \in [0, 2\pi)$. A este t se le llama el *argumento principal* del número z y notemos que aunque su definición no acarrea ambiguedades, la función $\arg z$ resulta discontinua. A la representación

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta \;,\; r \in \mathbb{R}^+ \;,\; \theta \in [0, 2\pi)$$

se le llama *forma polar de un número complejo z*.

2. Exponencial compleja

Consideremos la serie $\sum_{n\geq 0} \dfrac{z^n}{n!}$ que, aplicando el criterio del cociente, sabemos que converge para todo z complejo. Entonces llamamos *exponencial compleja* a la función

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \;\; (z \in \mathbb{C})$$

2.1. Propiedades

Se cumplen las siguientes propiedades cuya demostración, en función de la definición de la exponencial compleja, no le resultara dificultosa al lector

1. $exp'(z) = exp(z)$
2. $exp(0) = 1$
3. $exp(x) = e^x$ para $x \in \mathbb{R}$ con lo que se justifica $exp(z) = e^z \; z \in \mathbb{C}$
4. $e^{z+w} = e^z.e^w$
5. $e^z \neq 0 \; \forall \; z \in \mathbb{C}$
6. Si $z = x + iy \implies e^z = e^x.e^{iy} = e^x.(\cos(y) + i\sin(y))$

2.2. Otras funciones complejas útiles y forma exponencial

A partir de la exponencial compleja podemos obtener las funciones seno y coseno complejos, que como se imaginarán, nos serán muy útiles; para luego poder dar la forma mas común de representar un número complejo tanto notacional como gráficamente:
Nosotros sabemos que $\forall\ t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
e^{it} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(it)^k}{k!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1^(k)).t^{2k}}{2k!} + i.\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k.t^(2k+1)}{(2k+1)!} \right) \\
&= \cos(t) + i\sin(t)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad e^{iz} + e^{-iz} = 2.\cos(z)\ \forall\ z \in \mathbb{C}$$

$$\Longrightarrow \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Y análogamente $\sin(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
Con lo cual tenemos una nueva manera de representar un número complejo que la llamaremos *forma exponencial* a saber $z = |z|.e^{i\theta}\ \theta \in [0, 2\pi)$.
En general nosotros sabemos de F1 que la solución del oscilador armónico la podemos escribir como $\psi(t) = A.\cos(\omega.t + \varphi)$ donde A era la amplitud y φ era la fase de la solución, pero si extendemos el coseno también se puede escribir como $\psi(t) = A_f.\cos(\omega.t) + B_c.\operatorname{sen}(\omega.t)$ donde f representa a estar en fase y c a estar en cuadratura. Sin embargo, con el nuevo formalismo complejo tenemos otra forma de representar las soluciones, que será la más útil veremos y es la razón por la que se introdujo el tema antes, $\psi(t) = \mathcal{R}e\{A.\exp(\omega.t + \varphi)\}\ A \in \mathbb{R}$ o $\psi(t) = \mathcal{R}e\{A.\exp(\omega.t)\}\ A \in \mathbb{C}$ donde ahora podemos elegir muy a gusto tener una amplitud con o sin la fase incluida, y sobre todo podemos evitarnos todas las propiedades trigonométricas y cambiarlas por exponenciales que son más simples de manipular.

3. Fasores

Dado que ya sabemos que podemos escribir al desplazamiento como $\psi(t) = \mathcal{R}e\{A.\exp(\omega.t + \varphi)\}$ En el caso de tener que sumar dos vibraciones con misma frecuencia puede resultar más simple trabajar con las relaciones geométricos involucradas (Gracias al isomorfismo que antes probamos entre el plano $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$). Una de estas maneras es representar a los desplazamientos en los famosos diagramas de Argand como vectores móviles. Ya sabemos que el factor $\omega t + \phi$ varía uniformemente con el tiempo y el desplazamiento resulta de la proyección de dicho vector en el eje, ie: $\psi(t) = \langle \vec{z}, \widehat{\mathcal{R}ez} \rangle$. Por ende graficando el módulo de ψ como un vector, con un ángulo ϕ respecto al eje real y que se desplace en la dirección antihoraria con un ángulo ωt representaríamos en el eje real al desplazamiento $\psi(t)$ como podemos ver en la figura 1 , este vector rotante se le llama *fasor*
Luego en el caso de querer sumar dos vibraciones $\psi = \psi_1 + \psi_2$ podemos representar el nuevo fasor de ψ_2 con el eje de coordenadas **en el fin del anterior**, tal como hacíamos con la suma de vectores. Es más como cuando trabajamos en la forma polar vimos que el producto de complejos resulta en el producto de sus módulos y la suma de sus argumentos, el producto de fasores resulta en el producto de sus módulos y la suma de sus fases iniciales $\phi_1 + \phi_2$.

Y para que sirve? Simple, cuando tenemos una relación entre vibraciones que debe valer para todo tiempo las podemos especializar en $t = 0$ por ejemplo, y podemos traducir la ecuación en fasores y de allí poder verificar A y ϕ que lo cumplan para ese t y por ende deben valer $\forall t$

4. Identidades útiles

Para finalizar ésta sección sería útil presentar algunas de la identidades mas utilizadas en el trascurso del apunte y poder demostrarlas brevemente:

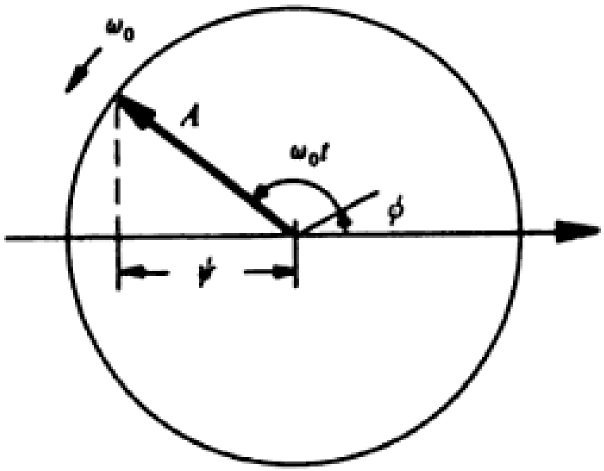

Figura 1: El fasor que genera $\psi(t)$. a $t=0$ el vector está a un ángulo ϕ del eje

1. $\int\limits_0^{2\pi} \cos^2(x)\ dx = \pi$

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{2\pi} \cos^2(x)\ dx &= \int\limits_0^{2\pi} \tfrac{1+\cos(2x)}{2}\ dx \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}\ dx + \int\limits_0^{2\pi} \tfrac{\cos(2x)}{2}\ dx \\ &= \tfrac{2\pi}{2} + \tfrac{(\sin(4\pi)-\sin(0))}{4} = \pi + 0 = \pi\end{aligned}$$

2. $\int\limits_0^{2\pi} \sin^2(x)\ dx = \pi$

3. $\int\limits_0^{2\pi} \cos(x)\sin(x)\ dx = 0$

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{2\pi} \cos(x)\sin(x)\ dx &= \int\limits_0^{2\pi} \tfrac{\sin(2x)}{2}\ dx \\ &= \left(\tfrac{-\cos(2x)}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\cos(0) - \cos(4\pi)\right) = 0\end{aligned}$$

4. $(1+\epsilon)^\alpha \approx 1+\alpha\epsilon+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\epsilon^2$ $\ (|\epsilon|<1)$ Donde generalmente se toma solamente el primer orden, ie: $(1+\epsilon)^\alpha \approx 1+\alpha\epsilon$

$$f(\epsilon) = (1+\epsilon)^\alpha \implies f(\epsilon) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{2} + \frac{f''(0)}{6}$$