Parte I

Movimiento armónico con muchos grados de libertad

En este apartado vamos a estudiar los sistemas con varios grados de libertad, enlazados con relaciones lineales, por lo que vale el **principio de superposición**. (**Recordatorio:** Dado un sistema lineal con coeficientes constantes, si ψ_1 y ψ_2 son soluciones de $\overset{\cdot}{\overrightarrow{X}} = \mathbf{A}\overrightarrow{X}$, entonces $\psi_1 + \psi_2$ son solución). Como el sistema es lineal, la ecuación que vamos a resolver la podemos condensar en la siguiente relación (en coordenadas generalizadas)

$$\ddot{\vec{\psi}} = \sum_i C_i \psi_i = C_i \psi_i = A\vec{\psi} \tag{0.1}$$

y como son lineales tienen como soluciones una superposición o suma de soluciones armónicas, que denominamos modos normales

$$\vec{\psi}(t) = \sum_i c_i v_i e^{i(\omega_i t + \phi_i)} = \sum_i c_i v_i \operatorname{sen}(\omega t + \phi_i) \tag{0.2}$$

es decir un modo normal es una solución donde todas las partes se mueven a una frecuencia idéntica, con fase inicial igual u opuesta a la inmediatamente contigua, pero con una relación de amplitud característica de cada modo. Para obtener la solución anterior tenemos que probar la solución $\vec{\psi}(t) = \mathbf{c}e^{i\omega t}$, con lo que obtenemos

$$\omega^2 \mathbf{c} = A\mathbf{c} \tag{0.3}$$

que es una ecuación que nos representa los *autovalores* de la matriz del problema $\mathbf{A}$ con autovectores $\mathbf{c}$, que van a indicar la relación de amplitudes para cada partícula en cada modo normal; y claramente podemos resolverla como aprendimos en álgebra lineal. Las coordenadas que dejan diagonal al la matriz A, es decir que desacopla el sistema, se denominan coordenadas normales, y a veces es posible por simple inspección obtenerlas (resolviendo el problema más fácilmente).

1. Superposición de vibraciones

En general

2. Pulsaciones

Consideremos un sistema con dos modos de oscilación con frecuencias muy parecidas (aunque tiene validez exacta la fórmula posterior, no tiene mucha importancia física si no son parecidas) con sus partes en un caso general de oscilación, es decir que el movimiento es suma de ambos modos. En ese caso definimos la frecuencia de modulación como

$$\omega_{mod} = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2} \tag{2.1}$$

y la frecuencia de portadora o promedio

$$\omega_p = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \tag{2.2}$$

Con esas dos frecuencias podemos reescribir de la siguiente forma el movimiento de cada parte (consideramos que la fase y la amplitud son iguales, en caso contrario simplemente cambia el valor de la amplitud, que pasa a ser $A_1 + A_2$)

$$\psi = A_{mod}(t) \operatorname{sen}(\omega_p t) = 2A \operatorname{sen}(\omega_{mod} t) \operatorname{sen}(\omega_p t) \tag{2.3}$$

La formula anterior tiene validez para cualquier suma de dos señales armónicas muy cercanas, y para darnos una idea de la forma

3. Oscilaciones de sistemas de muchos grados de libertad

Al ir agrandando la cantidad de grados de libertad es necesario tener otro método para describir dicho sistema. El sistema general que usamos para describir el problema es

$$\ddot{\psi}_n = c_{n-1}\psi_{n-1} + c_{n+1}\psi_{n+1} + c_n\psi_n \tag{3.1}$$

es decir lo definimos como una relación de recurrencia, independiente del elemento móvil elegido (se considera que todas las masas y los resortes son iguales, por simplicidad). Proponiendo como solución

$$\psi_n(t) = A_n \cos(\omega t - \phi) \tag{3.2}$$

obtenemos una relación de recurrencia para las amplitudes

$$\omega^2 + c_n = \frac{c_{n-1}A_{n-1} + c_{n+1}A_{n+1}}{-A_n} \tag{3.3}$$

Para la cual proponemos $A_n = \cos(kx_n) = \Re(e^{ikx_n})$, siendo $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ la frecuencia espacial o número de onda (y λ la longitud de onda), obteniendo

$$\frac{c_{n+1}e^{ikx_{n+1}} + c_{n-1}e^{ikx_{n-1}}}{-e^{ikx_n}} = \omega^2 + c_n \tag{3.4}$$

que es una relación entre la frecuencia temporal y la frecuencia espacial, lo que se denomina relación de dispersión. Luego hay que aplicarle condiciones de contorno al problema, es decir cuanto vale la coordenada ψ_0 y ψ_N (siendo N la cantidad de elementos), obteniendo el valor de frecuencia espacial y por lo tanto los modos de oscilación (frecuencias temporales) posibles.