

Parte I

Movimiento armónico con 1 grado de libertad

Todo movimiento podemos clasificarlo como acotado o no acotado. Los movimientos acotados son los que nos van a interesar analizar en estas primeras secciones. Además de los movimientos acotados también vamos a describir los movimientos oscilatorios, es decir los cuales que varían de forma estable (o no, esto ya depende de la definición precisa) respecto a estado de equilibrio (donde las razones dinámicas, las fuerzas, se balancean).

1. Movimiento armónico simple

En general en la física al querer describir un evento en particular, uno comienza por un modelo, algo palpable donde podamos describir exactamente todas los parámetros relevantes del sistema. Posteriormente uno intentará reconocer esos parámetros en los sistemas más complejos a analizar y así uno modeliza la situación en particular, por ende comencemos por modelizar el movimiento armónico más simple que podamos.

1.1. El modelo

Un movimiento tal puede ser el de un sistema masa-resorte, donde valgan multitud de aproximaciones: la masa es puntual, su movimiento es unidimensional el resorte responde según la ley de Hooke (“la fuerza elástica es proporcional a la elongación”), y no existen otras interacciones que afecten a la partícula en la dirección del movimiento (ni fricción, ni gravedad). Poniendo el origen en la posición donde el resorte está a su longitud natural y llamando x a la coordenada de movimiento y k a la constante elástica del resorte, a partir de la segunda ley de Newton se obtiene la ecuación de movimiento:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t)$$

Todas las aproximaciones fueron hechas a fin de que la ecuación de movimiento (que es una ecuación diferencial para una función de una variable) tenga esta forma: **lineal**, pues todos sus términos son un múltiplo constante de x o sus derivadas, **homogénea**, pues no hay término independiente de x , y *más fácil de resolver* que si incorporásemos fricción.

Quizás sea conocida la solución a esta ecuación de movimiento:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi_0),$$

con $\omega_0^2 = k/m$ la *frecuencia angular de oscilación*, y A, ϕ_0 constantes dependientes de las condiciones iniciales $x(0)$ y $\dot{x}(0)$, pero queremos poder obtenerla de una forma sistemática. Observemos que A y ϕ_0 no aparecen en la ecuación de movimiento; es decir, esa ecuación de movimiento (solita) tiene infinidad de soluciones, una por cada valor distinto de A o de ϕ_0 que se nos ocurra.

Puesto que la ecuación diferencial (de movimiento) es *lineal* y *homogénea*, un resultado teórico establece que el conjunto de soluciones (que es un conjunto de funciones) es un **espacio vectorial de dimensión n** , donde n es el orden de la ecuación (en este caso $n = 2$, porque la derivada de mayor orden que figura es la segunda). Eso quiere decir, por un lado, que una combinación lineal cualquiera de soluciones ($\alpha x_1 + \beta x_2$, con x_1, x_2 soluciones y α, β escalares arbitrarios) es una nueva solución. Por el otro, que existe una **base** con n funciones, tales que cualquier solución se puede escribir como (una única) combinación lineal de las mismas.

Sin embargo, un conjunto enorme lleno de soluciones no da la evolución del sistema físico que se está estudiando: se necesita *una* función $x(t)$, la función $x(t)$ que va a determinar el movimiento de la partícula. Por suerte, se puede saber más: a partir de las **condiciones iniciales**, se puede ver que existe una *única* solución en todo ese conjunto que las satisfaga, y que en definitiva será la evolución del sistema, que buscamos. Un resultado teórico establece que, para que la solución quede unívocamente determinada, es necesario y suficiente imponer n condiciones iniciales (en este caso, nos referimos a $x(0)$ y $\dot{x}(0)$). (Si se imponen menos, habrá más de una solución que las satisfaga; si se imponen más, es posible que ninguna solución lo haga).

Nos proponemos hallar una base para las soluciones de la ecuación. Para ello, bastará encontrar $n = 2$ funciones que sean l.i. (linealmente independientes); luego la solución general será una combinación lineal general de las mismas. En toda esta materia estudiamos sistemas lineales; es decir, que dan lugar a ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Resolverlos “a mano”, por integración, puede ser complicado, engorroso, imposible o simplemente más largo.

La alternativa es “intuir” la *forma* de una solución (o pedirle al de al lado que nos la sople), con algunos parámetros “libres”, y “**proponerla**” reemplazándola en la ecuación que se quiere que resuelvan. De esa manera, uno llega a un absurdo si propuso cualquier verdura; y si no, lo más probable es que se hayan obtenido ciertas condiciones acerca de los parámetros libres que, si son satisfechas, darán lugar a una hermosa solución. (Después habrá que encontrar más, hasta llenar una base, y entonces escribir la solución general como una combinación lineal).

Así, atendiendo a la linealidad de la ecuación, proponemos:

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

para ver quién es λ . Derivando dos veces, es $\ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t} = \lambda^2 x(t)$ y reemplazando en la ecuación de movimiento:

$$\begin{aligned}\lambda^2 x(t) &= -\frac{k}{m} x(t) \\ \lambda^2 &= -\frac{k}{m} \quad (\text{pues } x(t) \neq 0),\end{aligned}$$

lo cual quiere decir que no existe $\lambda \in \mathbb{R}$ para que la solución sirva. ¡Pero nadie nos obliga a que $\lambda \in \mathbb{R}$! Todo lo que hemos dicho y hecho es válido también si $\lambda \in \mathbb{C}$; lo bueno de este caso es que no hay ningún problema: se puede tomar

$$\lambda = i\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \lambda = -i\sqrt{\frac{k}{m}},$$

resultando

$$x(t) = e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \quad x(t) = e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}.$$

¡De yapa hemos obtenido otra solución, tal que juntas son l.i.! Entonces, escribiendo $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ya se puede escribir la solución general del sistema:

$$x(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t},$$

con A y B unas constantes que dependen de las condiciones iniciales.

Así y todo, hay un par de problemas con la solución general que hemos obtenido. Lo principal es que $x(t)$ no es necesariamente una función real; pero la solución a nuestro problema *debe* serlo, porque en él no estamos admitiendo posiciones complejas.

No hay que desesperar: la solución general ahí escrita tiene sentido y va a funcionar. Se puede demostrar (haciendo la cuenta en este caso, o de forma bastante más general) que, si las condiciones iniciales son reales, entonces A y B (¡que son complejos!) terminarán tomando valores adecuados que hagan que la expresión de $x(t)$ dé siempre como resultado un número real.

¿Realmente? Tenemos $x(0), \dot{x}(0) \in \mathbb{R}$; como $x(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}$, $\dot{x}(t) = i\omega_0[Ae^{i\omega_0 t} - Be^{-i\omega_0 t}]$; reemplazando, $x(0) = A + B$, $\dot{x}(0) = i\omega_0(A - B)$. Se despejan $A = [x(0) + \frac{\dot{x}(0)}{i\omega_0}]/2$, $B = [x(0) - \frac{\dot{x}(0)}{i\omega_0}]/2$. Volviendo a reemplazar en x :

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{2} \left[x(0) + \frac{\dot{x}(0)}{i\omega_0} \right] e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2} \left[x(0) - \frac{\dot{x}(0)}{i\omega_0} \right] e^{-i\omega_0 t} \\ &= x(0) \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0} \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} \\ &= x(0) \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (\in \mathbb{R})\end{aligned}$$

Aun así, si todas las soluciones admisibles son reales, resultaría quizás más cómodo trabajar con una base de soluciones reales. Lo bueno es que podemos obtenerla a partir de nuestras soluciones complejas. En efecto, puede demostrarse que si una función compleja es solución de una ecuación (o sistema) lineal y homogénea, entonces, su **parte real** y su **parte imaginaria** (que son funciones reales) también son solución.

Como $\operatorname{Re} e^{ix} = \cos x$ y $\operatorname{Im} e^{ix} = \sin x$, tomando partes real e imaginaria de una de las soluciones complejas obtenidas más arriba, obtenemos las nuevas soluciones

$$x(t) = \cos \omega_0 t \quad x(t) = \sin \omega_0 t,$$

que, como son l.i., forman base, de manera que la solución general se puede reescribir:

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t,$$

con A, B dependientes de las condiciones iniciales (que, para las mismas condiciones iniciales, serán valores distintos que para la otra forma de escribir la solución general, más arriba).

Una forma más compacta de expresar la solución general consiste en poner

$$x(t) = \tilde{A} \cos(\omega_0 t + \phi_0),$$

y dejar que \tilde{A}, ϕ_0 queden determinadas por las condiciones iniciales. ¿Por qué habría de funcionar esto? Porque para cualesquiera A, B que resulten de las condiciones iniciales en la ecuación de antes, existen \tilde{A}, ϕ_0 tales que las dos expresiones sean idénticas (y por lo tanto, sirva la que estoy proponiendo). Haciendo el desarrollo del coseno de la suma y distribuyendo:

$$\begin{aligned}x(t) &= \tilde{A} \cos \phi_0 \cos \omega_0 t + (-1) \tilde{A} \sin \phi_0 \sin \omega_0 t \\ &= A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t,\end{aligned}$$

para lo cual basta pedir $A = \tilde{A} \cos \phi_0$ y $B = -\tilde{A} \sin \phi_0$, de donde se pueden despejar (¡siempre!) algún \tilde{A} y ϕ_0 válidos. Esto es general: cualquier combinación lineal de un seno y un coseno (de un mismo argumento) se puede expresar como una cierta **amplitud** (\tilde{A}) por un único coseno (o seno) del mismo argumento, salvo quizás una **fase inicial** ϕ_0 . De esta manera recuperamos la forma de la solución que (quizás) conocíamos de antes.

Otras escrituras Esta forma nos perseguirá continuamente, por lo que podría convenir disponer de formas adicionales de escribirla para poner en juego la que más convenga usar en cada situación. Puede demostrarse la equivalencia entre las siguientes formas:

$$\begin{aligned} A \cos \omega t + B \sin \omega t \\ \tilde{A} \cos(\omega t + \phi) \\ C e^{i\omega t} + \overline{C} e^{-i\omega t} \\ \operatorname{Re}(D e^{i\omega t}) \end{aligned}$$

con $A, B \in \mathbb{R}$, $C, D \in \mathbb{C}$ y las siguientes relaciones entre los parámetros:

$$\begin{aligned} A = \tilde{A} \cos \phi = 2 \operatorname{Re} C = \operatorname{Re} D \\ -B = \tilde{A} \sin \phi = 2 \operatorname{Im} C = \operatorname{Im} D \end{aligned}$$

Por ejemplo, veamos cómo llegar de la segunda a la cuarta:

$$\begin{aligned} \tilde{A} \cos(\omega t + \phi) &= \tilde{A} \operatorname{Re}(e^{i(\omega t + \phi)}) && (\text{pues } \cos \alpha = \operatorname{Re} e^{i\alpha}) \\ &= \operatorname{Re}(\tilde{A} e^{i(\omega t + \phi)}) && (\text{pues } \tilde{A} \in \mathbb{R}) \\ &= \operatorname{Re}(\tilde{A} e^{i\phi} e^{i\omega t}) \end{aligned}$$

Llegamos a la forma buscada si llamamos $D = \tilde{A} e^{i\phi} \in \mathbb{C}$. Como $D = \tilde{A} e^{i\phi} = \tilde{A}(\cos \phi + i \sin \phi)$ y $\tilde{A} \in \mathbb{R}$, se sigue que $\operatorname{Re} D = \tilde{A} \cos \phi$ y $\operatorname{Im} D = \tilde{A} \sin \phi$. Además resulta $|D| = |\tilde{A}|$. Lo especial de esta representación es que terminamos depositando en un solo número (complejo, D) toda la información sobre la amplitud y la fase inicial, que podemos encontrar, respectivamente, en su módulo y su argumento.

Pequeñas oscilaciones El sistema masa-resorte es quizás una triste excusa para abordar este movimiento, que puede surgir en un contexto bastante más general. Los ingredientes principales serán: un movimiento unidimensional (coordenada x), la existencia de una *posición de equilibrio* x_0 donde la aceleración de la partícula es nula, y la existencia de una *fuerza restitutiva* de carácter *conservativo*. Todas estas características aparecen en el sistema masa-resorte, pero también en muchas otras situaciones.

Suponemos que la dinámica del sistema está gobernada por dicha fuerza conservativa. (Es decir, no hay fuerzas no conservativas; y esa fuerza conservativa puede en realidad ser una resultante). Entonces, se puede definir un *potencial* $V = V(x)$ de manera que la fuerza se expresa siempre como $f(x) = -\frac{dV}{dx}(x)$. Además se tendrá la propiedad de que su suma con la energía cinética $T = T(x, t)$ es constante (H , la *energía mecánica*). Como en la posición de equilibrio ($x = x_0$) la aceleración es nula, $f(x_0) = 0$ con lo cual $\frac{dV}{dx}(x_0) = 0$, o sea que x_0 es punto crítico de V .

La restituidad de la fuerza tiene que ver con que el sentido de f será tal que intente “devolver” al sistema a la posición de equilibrio ante apartamientos suficientemente pequeños. Se dice, en ese caso, que el equilibrio es **estable**. (Para concretar, supongamos que x crece hacia la derecha). Entonces, para cada x en un cierto entorno de x_0 (i.e., suficientemente cerca de x_0), se tendrá: si $x > x_0$ (apartamiento a la derecha), $f(x) < 0$ (fuerza a la izquierda); y si $x < x_0$, entonces $f(x) > 0$. En cualquier caso, lo que se tiene es que $f(x)(x - x_0) < 0$ en un entorno de x_0 , que es la condición de *equilibrio estable*.

En términos del potencial V , la condición de equilibrio estable se expresa como $\frac{dV}{dx}(x)(x - x_0) > 0$ en un entorno de x_0 . Mediante un razonamiento analítico (por ejemplo, usando el teorema del valor medio) puede probarse que entonces el potencial V debe tener un *mínimo local* en x_0 .

A través de un diagrama de potencial en función de la coordenada x , puede verse que, para valores suficientemente pequeños de la energía H , el movimiento del sistema está restringido a un entorno de x_0 y está sujeto a una fuerza que lo mantiene acelerando siempre en esa dirección. Es decir, el movimiento que resulta de esta situación representa una **oscilación** alrededor de x_0 .

Hagamos un desarrollo en polinomio de Taylor para el potencial V alrededor de x_0 :

$$V(x) = V(x_0) + \frac{dV}{dx}(x_0)(x - x_0) + \frac{d^2V}{dx^2}(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2} + R(x),$$

donde $R(x)$ es un resto (que tiende a 0 cuando $x \rightarrow x_0$). Para continuar haremos dos suposiciones sobre los sistemas con los que nos gustará trabajar en adelante. Primero, que su dinámica es tal que el término $\frac{d^2V}{dx^2}(x_0)$ es no nulo. Segundo, que nos encontramos en una situación de **pequeñas oscilaciones**: o sea, que nos movemos en x en un entorno de x_0 suficientemente chico para que el término $R(x)$, que va (a lo sumo) como $(x - x_0)^3$, sea *despreciable* respecto del término que va como $(x - x_0)^2$, dejándonos con la igualdad aproximada:

$$V(x) = V(x_0) + \frac{d^2V}{dx^2}(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2} \quad \left(\frac{dV}{dx}(x_0) = 0 \right)$$

en el entorno de x_0 . La validez de la igualdad depende de lo despreciable que se pueda considerar el error $R(x)$. Si bien la forma de $R(x)$ está dada por la dinámica del sistema, el que el error sea despreciable o no depende de factores

experimentales: la precisión. La aproximación es buena (en un sentido experimental) si el error es suficientemente chico como para que la precisión del experimento no detecte la diferencia. Al aumentar la precisión del experimento, disminuye el rango de validez de la aproximación, es decir, el tamaño del entorno de x_0 donde vale la igualdad.

Por la estabilidad del equilibrio, vimos que V tiene un mínimo local en x_0 , lo cual, cuando $\frac{d^2V}{dx^2}(x_0) \neq 0$, obliga a que $\frac{d^2V}{dx^2}(x_0) > 0$. Llamemos $k = \frac{d^2V}{dx^2}$ a este valor positivo. Retomando $m\ddot{x} = f(x) = -\frac{dV}{dx}$, derivando nuestra expresión del potencial se obtiene la ecuación de movimiento:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}(x - x_0),$$

que (como $k, m > 0$) tiene forma idéntica a la ecuación del oscilador masa-resorte, salvo por el término x_0 , que puede tomarse como nulo eligiendo un origen de coordenadas apropiado.

Lo importante del asunto es que pudimos lograr llegar a una ecuación de movimiento lineal (que ya conocemos) a partir del problema más general de oscilación alrededor de un punto de equilibrio estable, mediante la aproximación de pequeñas oscilaciones.

En los problemas, lo más corto termina siendo escribir las fuerzas involucradas en lugar del potencial. Para que la ecuación de movimiento, si es posible, sea lineal, bajo la aproximación de pequeñas oscilaciones, conviene desarrollar las expresiones en polinomio de Taylor alrededor de la posición de equilibrio para agrupar todos los términos lineales y descartar los de orden superior, con la misma excusa que usamos en el desarrollo de V . Algunos problemas no admiten aproximación lineal de primer orden.

Remarcamos que, en pequeñas oscilaciones, el interés puede estar puesto en la evolución de una coordenada o variable que (por algún motivo) resulte incómodo llamar x . En ese caso, una notación usual consiste en llamar a la nueva variable ψ y ubicarla de manera tal que $\psi = 0$ corresponda a la posición o situación de equilibrio. Entonces la ecuación de movimiento cobra la forma

$$\ddot{\psi} = -\omega_0^2 \psi \quad (1.1)$$

y a ψ se le suele llamar **perturbación**.

La constante positiva ω_0 , que ocupa el lugar de $\sqrt{k/m}$, es la *frecuencia (angular) de oscilación*, y un hecho de alcance bastante general es la siguiente relación con los parámetros del sistema:

$$\omega_0^2 = \frac{\text{restitución}}{\text{perturbación.inercia}} \quad (1.2)$$

$$[\omega_0^2] = \frac{[\text{Unidad de Fuerza restauradora}]}{[\text{Unidad de masa}][\text{Unidad de desplazamiento}]}$$

Ejercicio vital : *Convénzase de la formula representada antes y note su utilidad*

En el caso del oscilador lineal masa-resorte, esta relación se manifiesta en que la restitución por unidad de perturbación está dada por k , la inercia por m , y ω_0^2 por k/m .

Una propiedad importante de ω_0 en estos osciladores es que no depende de la energía total (la cual, a su vez, depende de las condiciones iniciales), lo cual no sucede en todos los osciladores. En general la frecuencia de oscilación (si se da la casualidad de que el movimiento es periódico) depende de las condiciones iniciales.

Energía Ahora veamos la energía del oscilador en general, considerando que $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, siendo k y m las magnitudes que correspondan dependiendo del caso.

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\psi}(t)^2 + \frac{1}{2}k\psi(t)^2 \quad (1.3)$$

Por lo que tenemos

$$\dot{E} = m\dot{\psi}(t)\ddot{\psi}(t) + k\psi(t)\dot{\psi}(t) \quad (1.4)$$

$$\dot{\psi}(t) \neq 0 \implies m\ddot{\psi} + k\psi = 0.$$

Qué es exactamente la ecuación de movimiento que vale $\forall t \in \mathbb{R}$ Con la solución 1.1 observamos que la energía se conserva y que tiene la siguiente expresión

$$E(t) = \frac{1}{2}kA^2 \quad (1.5)$$

es decir, que una de las condiciones iniciales depende de la energía inicial.

1.2. Movimiento armónico simple en la física

Analicemos algunos casos donde podamos modelar con lo visto antes!

Péndulo simple Lo hacemos rápido para no aburrir. Consideramos una masa puntual m atada a un punto fijo mediante una cuerda inextensible, de masa despreciable y longitud l que es libre de oscilar en un solo plano, sujeta a la gravedad g . (El experimentador deberá decidir si este es un modelo adecuado para la situación física que estudia). Si elegimos como perturbación al ángulo θ (con signo) que forma el hilo con la vertical, a partir de la descomposición de las fuerzas se obtiene la ecuación de movimiento

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta,$$

que no es lineal, ni tiene siquiera solución que se pueda expresar usando funciones conocidas.

En el caso de pequeñas oscilaciones, la aproximación a primer orden, que consiste en poner $\sin \theta \approx \theta$, da lugar a

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \theta,$$

que sí es lineal, aunque valga *solamente* para pequeñas oscilaciones. En el laboratorio se encuentra que la solución es una aproximación aceptable para ángulos menores a 10 grados.

Ejercicio resuelto: Oscilaciones transversales de una masa unida a dos resortes Consideremos el arreglo de la figura 1: una masa m unida a dos resortes idénticos (k, l_0) que le salen de lados opuestos; los extremos de los resortes están fijos en paredes, y las paredes están a una distancia entre sí de $2a$. (De esta manera, si la masita está en el medio la longitud de cada resorte es a). Despreciamos gravedad y rozamiento.

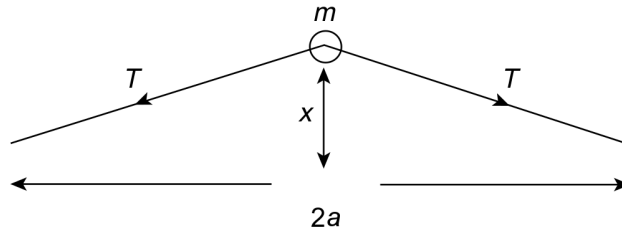


Figura 1: Esquema del ejercicio de una masita moviéndose transversalmente

Consideramos, por el momento, sólo oscilaciones unidimensionales. En muchos casos tendremos sistemas que se puede considerar que tienen una dirección definida. En este caso, nos tenemos que imaginar que la “dirección del sistema” sería la de la recta que atraviesa todo el sistema cuando la masita está en el medio.

Una vez fijada esta dirección, vamos a distinguir, en relación a ella, dos tipos posibles de movimiento (que ni a palos serán los únicos) del integrante o los integrantes del sistema: **longitudinal** es un movimiento enteramente contenido en dicha dirección; **transversal** es un movimiento realizado exclusivamente en direcciones perpendiculares a la del sistema.

Ahora consideramos oscilaciones unidimensionales longitudinales de la masita. O sea, la masita está engarzada en un alambre recto (sin rozamiento) perpendicular a la dirección del sistema. Pongamos un sistema de referencia a lo largo de ese alambre, con $\psi = 0$ cuando la masita está “en el medio” (los resortes, alineados). Para hallar la ecuación de movimiento hay que escribir adecuadamente la fuerza de cada resorte en función de ψ y proyectarla adecuadamente en el sentido de movimiento.

La fuerza de cada resorte es $-k(l - l_0)$ en la dirección del resorte, pero l depende de ψ . De hecho, a partir de un dibujo hecho para la masa en una posición ψ , a partir de un triángulo rectángulo sale $l = \sqrt{a^2 + \psi^2}$ para cada resorte.

Para proyectar la fuerza en la dirección del alambre, consideramos momentáneamente el ángulo θ entre el resorte y el alambre. Entonces, para hacer la proyección basta multiplicar por $\cos \theta$; pero $\cos \theta = \frac{\psi}{l}$. Luego, la ecuación de movimiento resulta ser:

$$\ddot{\psi} = -\frac{2k}{m}(l - l_0)\frac{\psi}{l} = -\frac{2k}{m}\left(1 - \frac{l_0}{l}\right)\psi$$

$$\ddot{\psi} = -\frac{2k}{m}\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{a^2 + \psi^2}}\right)\psi$$

Es una ecuación que no es lineal en ψ . No hay chance de resolverla sin restringirnos a la situación de *pequeñas oscilaciones*.

Una advertencia: para hacer pequeñas oscilaciones alrededor de un punto de equilibrio (pensamos hacerlo en $\psi = 0$, que en la ecuación de movimiento da $\ddot{\psi} = 0$, como debe ser), debe asegurarse que sea de equilibrio estable. En esta situación, la estabilidad del equilibrio en $\psi = 0$ excluye necesariamente que $a < l_0$. Uno podría llegar a imaginarse que si en la posición de equilibrio los resortes están comprimidos, cuando se corre un poquito la partícula los resortes

intentarán seguir descomprimiéndose, para lo cual la alejarán más aun. Alternativamente, se puede calcular la derivada de $\ddot{\psi}$ respecto de ψ y ver que para que la misma sea negativa en $\psi = 0$ se debe tener $a \geq l_0$.

Para hacer pequeñas oscilaciones, hay que considerar ψ muy chiquito, es decir, mucho menor que algún parámetro finito que intervenga en el problema. En este caso la comparación entra en juego en el radicando $a^2 + \psi^2$; entonces pediremos que $|\psi| \ll a$. Una alternativa para trabajar consiste en tomar el término problemático no lineal $1 - \frac{l_0}{\sqrt{a^2 + \psi^2}}$

y hacerle un desarrollo en polinomio de Taylor (como función de ψ) alrededor de 0 hasta el segundo término no nulo. Una forma más rápida involucra el siguiente truquito: si $|\psi| \ll a$ entonces $|\psi|/a \ll 1$ (y sus potencias naturales también), así que intentaremos “intercalar” un término así. Lo hacemos en la raíz:

$$\frac{l_0}{\sqrt{a^2 + \psi^2}} = \frac{l_0}{a\sqrt{1 + (\psi/a)^2}} = \frac{l_0}{a} \left[1 + \left(\frac{\psi}{a} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

y como $(\psi/a)^2 \ll 1$, usamos la famosa aproximación $(1 + \epsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\epsilon$ para $|\epsilon| \ll 1$. Resulta:

$$\frac{l_0}{\sqrt{a^2 + \psi^2}} \approx \frac{l_0}{a} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\psi}{a} \right)^2 \right]$$

El paso que queda es mezclar esto en la ecuación de movimiento, agrupar términos por potencias de ψ y tirar todos los de orden superior al lineal:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= -\frac{2k}{m} \left[1 - \frac{l_0}{a} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\psi}{a} \right)^2 \right) \right] \psi \\ \ddot{\psi} &= -\frac{2k}{m} \left[\left(1 - \frac{l_0}{a} \right) + \frac{l_0}{2a^3} \psi^2 \right] \psi \end{aligned}$$

El segundo término del corchete dará lugar a un ψ^3 , así que se tira. Finalmente:

$$\ddot{\psi} = -\frac{2k}{m} \left(1 - \frac{l_0}{a} \right) \psi \quad (1.6)$$

que corresponde a un oscilador lineal con $\omega_0^2 = \frac{2k}{m} (1 - \frac{l_0}{a})$, con solución general ya conocida. NOTemos entonces que en el caso en el que podamos tomar la aproximación de resorte *slinky* en el que $l_0 \ll a$ obtenemos que $\omega_l^2 = \omega_t^2$ lo cual se le llama una *degeneración* y es consecuencia que ahora el sistema presenta una nueva simetría respecto a los ejes de oscilación. (Aclaración: Hacer el ejercicio de oscilaciones longitudinales para poder verificar lo dicho)

Se presenta un problema en el lamentable caso en que $l_0 = a$: nuestra ecuación final da $\ddot{\psi} = 0$ constantemente, lo cual no es una aproximación satisfactoria (ψ debería ser una traslación, sería un equilibrio indiferente!). En ese caso, el término lineal es nulo y el de ψ^3 no lo es; ¡entonces este último no es despreciable! (Nada es despreciable frente a 0, salvo quizás 0). La forma correcta de hacer pequeñas oscilaciones en ese caso consiste en conservar ese término:

$$\ddot{\psi} = -\frac{k}{ma^2} \psi^3,$$

ecuación que no es lineal y que no pretendemos resolver. Este es un ejemplo de situación que no admite aproximación lineal.

Oscilaciones verticales de un flotador Si conocemos el teorema de Arquímedes (para el empuje de cuerpos sumergidos), podemos aprovecharlo para estudiar esta situación. Lo recordamos en una de sus versiones prácticas: si un cuerpo está (por lo menos parcialmente) sumergido en un fluido de densidad ρ , experimentará debido a éste una fuerza E , llamada *empuje*, opuesta a la gravedad g y de módulo:

$$E = \rho g V_s,$$

donde V_s es el volumen de la parte del cuerpo que está sumergida. (Es común interpretar el factor $\rho V_s = m_d$ como la “masa del líquido desalojado” y por lo tanto a $E = m_d g$ como igual al “peso del líquido desalojado”, dando lugar al enunciado más popular del teorema de Arquímedes).

Imaginemos un cuerpito cilíndrico que flota en la superficie del agua, un fluido de densidad ρ como vemos en la figura 2. Llamemos m a su masa, L a su extensión longitudinal y S a su superficie transversal, y pongamos un sistema de referencias como el que se ve en la figura, con $y = 0$ en la superficie libre. Supongamos, para que sea posible la flotación, que el cuerpo es menos denso que el agua ($m/(SL) = \rho$).

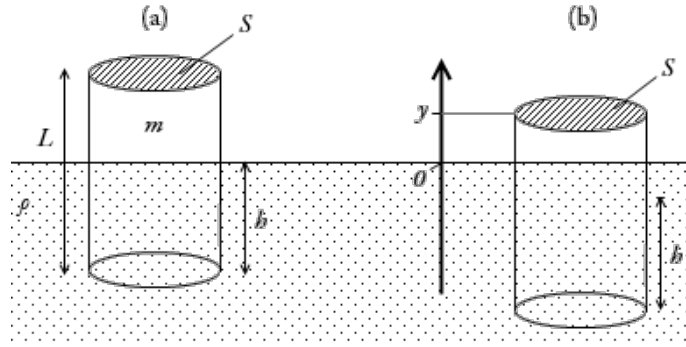


Figura 2: Esquema del ejercicio de un cilindro flotando en un fluido

Ahora bien: si llamamos y a la posición del extremo superior del cuerpo, resulta que $L - y$ es la longitud del cacho de cilindro que se encuentra sumergido, de modo que el volumen sumergido es $V_s = S(L - y)$ (siempre que $y < L$). Entonces, calculando el empuje e introduciéndolo (junto al peso) en la segunda ley de Newton resulta la ecuación de movimiento:

$$m\ddot{y} = \rho g S(L - y) - mg$$

(En realidad el miembro de la derecha es $m\ddot{y}_{cm}$, pero hemos igualado $\ddot{y} = \ddot{y}_{cm}$ porque el cuerpito es rígido y no rota). Reordenando un poco:

$$\ddot{y} = -\frac{\rho g S}{m}(y - L) - g = -\frac{\rho g S}{m}\left(y - L + \frac{m}{\rho S}\right)$$

La intrincada artimaña aquí empleada tiene la finalidad de hacer ver que: (i) el punto $y = L - \frac{m}{\rho S}$ corresponde al equilibrio; (ii) el cambio de variable $\psi = y - L + \frac{m}{\rho S}$ convierte a la ecuación de movimiento en esta otra:

$$\ddot{\psi} = -\frac{\rho g S}{m}\psi,$$

que es lineal y homogénea, y es la del oscilador armónico, con frecuencia $\omega_0^2 = \frac{\rho g S}{m}$. Notar que llegamos a ella sin hacer uso de la aproximación por pequeñas oscilaciones: la solución es exacta (siempre que cumpla $y < L$; de lo contrario la ecuación de movimiento ¡tiene otra forma!).

Si nos interesa la variable original y , se la puede recuperar deshaciendo el cambio de variable. Una vez hallado ψ , se tendrá $y = \psi + L - \frac{m}{\rho S}$.

Observación: ω_0^2 se puede escribir como g/h , con h la profundidad del cuerpo sumergido en equilibrio.

Vibraciones acústicas Consideremos una lámpara con un volumen en el bulbo v y un tubo anexo de largo l y superficie lateral a como en la figura 3, a su vez supongamos que el volumen del tubo la es mucho menor que v . Entonces:

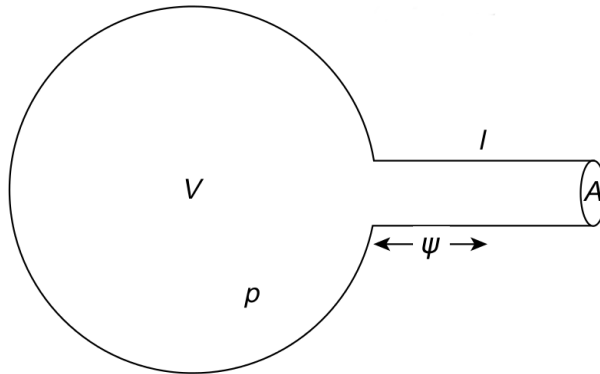


Figura 3: Esquema del sistema presentado para vibraciones acústicas

La masa del aire en el tubo es $la\rho$ y mediremos su desplazamiento *hacia adentro* con la cantidad ψ . Llamemos a la diferencia neta de presión p , entonces por la segunda ley de Newton tenemos:

$$(la\rho)\ddot{\psi} = -ap$$

Ahora hallemos la relación entre ψ y p , que estará dada por la *compresibilidad* del aire:

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right) \quad (1.7)$$

Para el aire en la lamparita el cambio de volumen es $\frac{a\psi}{v}$. Por lo que podemos decir

$$\kappa \approx \frac{a\psi}{vp}$$

Que lleva a:

$$\omega_0 \approx \sqrt{\frac{a}{lv\rho\kappa}} \quad (1.8)$$

Observación: Se obtuvo esa frecuencia usando la formula que se recuerda revisar, siempre vale la pena!

Que compresibilidad?? Antes de verificar numéricamente la formula 1.7 tenemos que pensar que compresibilidad usamos, ya que el volumen **no** solo depende de la presión sino que *también* de la temperatura. Primero debemos analizar *que pasa* con la temperatura mientras sucede nuestro cambio de presión. Una posibilidad es que no haya cambios en la temperatura, lo que nos llevaría a usar la *compresibilidad isotérmica* κ_T ; que pasaría si los cambios fuesen tan lentos que el flujo de calor es intercambiable a todo tiempo.

La otra posibilidad es que los cambios sean muy rápidos, llevando a una *compresibilidad adiabática* sin flujo de calor en si, κ_S . Claramente $\kappa_S \leq \kappa_T$ pues demanda mas presión comprimir un gas si además se calienta. Finalmente le daremos la mano derecha a la compresión adiabática experimentalmente.

Evaluación numérica Suponiendo gases ideales, se tiene que $pV^\gamma = \text{cte}$, con $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ Por lo que por 1.7 tenemos

$$\kappa_S = \frac{1}{\gamma p}.$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} pV &= RT \implies \rho = \frac{M}{V} = \frac{Mp}{RT} \\ \implies p\kappa_S &= \frac{M}{\gamma} RT \\ \omega_0 &\approx \sqrt{\left(\frac{a}{lv}\right) \left(\frac{\gamma RT}{M}\right)} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Es útil notar que la frecuencia aumenta con $T^{1/2}$ pero es independiente de p . Esto ocurre porque tanto la masa como la "fuerza del resorte" que es inversamente proporcional a κ_S (que aquí es el aire en el bulbo) son proporcionales a p .

En general esperamos otras frecuencias un comportamiento parecido con otros factores geométricos distintos a $\frac{a}{lv}$. Si insertamos valores obtenemos un $\omega_0 \approx 500 \text{s}^{-1}$ que se escucha como un grave *plop!*

Vibraciones del Plasma Un plasma es un gas con partículas parcial o totalmente ionizadas, pero que se mantiene eléctricamente neutro. Para imaginarnos como puede vibrar simplemente basta con irradiar con luz UV un gas muy finamente durante un tiempo t . La luz UV al ser ionizante desacopla los electrones de las partículas de gas obteniéndose el plasma con N iones positivos y electrones por unidad de volumen de plasma. Luego basta encender un campo eléctrico ortogonal a la proyección de la luz UV haciendo que tanto los electrones como los iones positivos se muevan (como $m_p \gg m_e$ ignoraremos el movimiento de los iones positivos). Luego de un tiempo t la capa de electrones se desplaza ψ produciendo una capa negativa sin balancear de $-eN\psi$ por unidad de área. Aquí ya basta con apagar el campo externo y hemos generado un campo interno:

$$E = \left(\frac{Ne}{\epsilon_0} \right) \psi$$

Que produce una fuerza eléctrica de retorno $F = -eE$ para cada electrón, llevando a la ecuación de movimiento para cada electrón:

$$\ddot{\psi} + \left(\frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0} \right) \psi = 0$$

Llevando a una frecuencia

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{m_e \epsilon_0}} \cdot \sqrt{N} \quad (1.10)$$

Podemos imaginar el conjunto de electrones como un fluido oscilante. Como casi todos los parámetros, excepto N son constantes en 1.10 podemos tomar a la frecuencia de oscilación del plasma como una medida de la densidad electrónica en un plasma particular. Finalmente, para posteriores usos:

$$\frac{e^2}{m_e \epsilon_0} = 3,18,10^3 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \quad (1.11)$$

Aunque parezca ficticio, este proceso sucede naturalmente y espontáneamente en la ionosfera, capa de la atmósfera a unos ≈ 60 km. Allí podemos identificar dos capas distintivas, la mas baja (la D) con un $N \approx 10^9 \text{ m}^{-3}$ al mediodía. Por otro lado la capa mas alta (la capa F_2) toma valores de $N \approx 10^{12} \text{ m}^{-3}$, entonces con la ayuda de 1.10 y 1.11 podemos obtener frecuencias $\omega_0 \approx 2,10^6 \text{ s}^{-1}$ ($\nu_o \approx 300 \text{ kHz}$) para la capa D y de $\omega_0 \approx 6,10^7 \text{ s}^{-1}$ ($\nu_o \approx 10 \text{ MHz}$) para la capa F_2 . Estas frecuencias son típicamente de radio y luego veremos que es lo que ayuda a las ondas de radio cortas poder reflejarse en la capa F_2 y entonces poder transmitirse a zonas lejanas a pesar de la curvatura de la Tierra.

2. Movimiento armónico simple amortiguado

En general nuestro modo de analizar las oscilaciones hasta ahora era bastante *naive* considerando que la energía se conservaba siempre y no existían fuerzas disipativas, ahora vamos a complicar un poco más el modelo y vamos a poder explicar mucho más sucesos...

2.1. El modelo

Tomamos un oscilador armónico de los de antes, y lo sumergimos en fluido en reposo. Debido a la viscosidad del fluido, aparecerá sobre el cuerpo una fuerza **retardadora**, opuesta a la velocidad relativa del cuerpo, y que *en primera aproximación* sea proporcional a la misma. Llamando ψ al desplazamiento del cuerpo respecto del equilibrio, debido al rozamiento viscoso aparece una fuerza de la pinta $-b\dot{\psi}$, con $b > 0$ una constante, que da lugar, en la ecuación de movimiento, a un término que va como $-\gamma\dot{\psi}$, con $\gamma = b/m$.

La ecuación de movimiento resulta ser:

$$\ddot{\psi} = -\omega_0^2 \psi - \gamma \dot{\psi} \quad (2.1)$$

que, como es lineal, podemos intentar resolver hallando una base de soluciones proponiendo, como antes:

$$\psi(t) = e^{\lambda t}.$$

Al reemplazar ψ y sus derivadas en la ecuación de movimiento para hallar los posibles λ se obtiene

$$\begin{aligned} \lambda^2 e^{\lambda t} + \gamma \lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} &= 0 & \text{pero } e^{\lambda t} \neq 0 : \\ \lambda^2 + \gamma \lambda + \omega_0^2 &= 0 \end{aligned}$$

La expresión del miembro izquierdo se llama *polinomio característico* (en la variable λ) de la ecuación diferencial. Los $\lambda \in \mathbb{C}$ que sirvan deberán ser raíces de ese polinomio. Como es de grado 2, se pueden hallar con la fórmula:

$$\lambda = -\frac{\gamma}{2} \pm \beta = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \quad (2.2)$$

El comportamiento de la solución, cuando tomemos parte real, dependerá de que λ sea real o no, lo cual depende directamente del signo de $\beta^2 = (\gamma/2)^2 - \omega_0^2$.

Entonces, según los parámetros del sistema (¡y nunca las condiciones iniciales!), se distinguen tres tipos de soluciones. Si $\gamma/2 < \omega_0$, se dice que el movimiento será *subamortiguado*; si $\gamma/2 > \omega_0$, se llama *sobreamortiguado*; y si $\gamma/2 = \omega_0$, se llama *críticamente amortiguado* o se dice que hay *amortiguamiento crítico*.

Movimiento subamortiguado Para el caso $\gamma/2 < \omega_0$, $\beta^2 < 0$; entonces β es imaginario puro:

$$\beta^2 = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \beta = \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} = \pm i\omega,$$

donde llamamos $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$. Así,

$$\lambda = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega.$$

Entonces, una solución (compleja) debe ser de la forma

$$\psi(t) = e^{(-\frac{\gamma}{2} + i\omega)t} = e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{i\omega t}. \quad (2.3)$$

Tomando parte real y parte imaginaria obtenemos dos soluciones:

$$\psi(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega t, \psi(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin \omega t$$

que, como son base, permiten expresar la solución general:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega t + Be^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin \omega t \\ &= e^{-\frac{\gamma}{2}t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \\ &= e^{-\frac{\gamma}{2}t} (\tilde{A} \cos(\omega t + \phi_0)), \end{aligned}$$

con \tilde{A}, ϕ_0 dependientes de las condiciones iniciales. La solución se trata de una oscilación armónica, “apantallada” por el factor $e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ que tiende a 0 cuando $t \rightarrow +\infty$. Interpretando $\tilde{A}e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ como una “amplitud variable”, se puede decir que esta solución es una oscilación armónica con amplitud decreciente en el tiempo. Notar que la frecuencia ω de esta oscilación es distinta de la del oscilador “libre” ω_0 , por la presencia del término $\gamma/2$.

Decaimiento de la energía La fuerza retardadora que incorporamos es de carácter *disipativo*, pues al ser siempre contraria a la velocidad, lo es al desplazamiento, de manera que siempre realiza trabajo negativo; es decir, se pierde energía mecánica E , es disipada por la fuerza. Para conocer su evolución se puede calcular el trabajo W de la fuerza disipativa entre el instante 0 y cualquier momento t :

$$E(t) - E(0) = W = \int_0^t F(t) \dot{\psi}(t) dt, \quad (2.4)$$

donde $F(t) = -m\gamma\dot{\psi}$ es la fuerza disipativa y el integrando $F(t)\dot{\psi}(t)$ es la potencia. Podría calcularse $E(0)$, hallar $\dot{\psi}$ y evaluar la integral. Pero un camino más directo sale de la expresión de E como suma de la energía cinética y el potencial:

$$E = T + V = \frac{1}{2}(m\dot{\psi}^2 + k\psi^2) = \frac{1}{2}m(\dot{\psi}^2 + \omega_0^2\psi^2) \quad (2.5)$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \psi(t) &= Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \phi_0) \\ \psi(t)^2 &= A^2 e^{-\gamma t} \cos^2(\omega t + \phi_0); \\ \dot{\psi}(t) &= Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} (-\frac{\gamma}{2} \cos(\omega t + \phi_0) - \omega \sin(\omega t + \phi_0)) \\ &= -Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \sqrt{(\frac{\gamma}{2})^2 + \omega^2} \cos(\omega t + \phi_0 + \theta) \\ &= -Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \omega_0 \cos(\omega t + \phi_0 + \theta) \\ \dot{\psi}(t)^2 &= A^2 e^{-\gamma t} \omega_0^2 \cos^2(\omega t + \phi_0 + \theta), \end{aligned}$$

donde usamos que $-(\gamma/2) \cos(\omega t + \phi_0) - \omega \sin(\omega t + \phi_0)$ puede expresarse como un único término oscilante con amplitud $\sqrt{(\gamma/2)^2 + \omega^2} = \omega_0$ y desfase θ .

Reemplazando en E y tomando factor común resulta:

$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 e^{-\gamma t} (\cos^2(\omega t + \phi_0) + \cos^2(\omega t + \phi_0 + \theta))$$

Como podemos ver en 2.1 la fuerza de resistencia siempre se opone al movimiento, constantemente quitando energía a nuestro oscilador. ¡Veamos esto! Similarmente a lo hecho en 1.4 llegamos a que

$$\dot{E} = \dot{\psi} (m\ddot{\psi} + s\psi)$$

Y entonces por 2.1 tenemos

$$\dot{E} = -b\dot{\psi}^2 \leq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.6)$$

Lo que nos muestra de manera muy clara como siempre se va perdiendo energía, dependiendo linealmente del factor amortiguante!

La ecuación anterior es válida para todos los tipos de amortiguamiento, en específico para obtener $E(t)$ en el caso subamortiguado basta poner ?? en la expresión de la energía. No obstante nos interesa más el decaimiento de energía en un periodo completo de medición, que se define como

$$\langle E \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_{t=0}^{t=T} E(t) dt \quad (2.7)$$

Y en nuestro caso resulta ser

$$\langle E \rangle \approx \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 e^{-\gamma t} \quad (2.8)$$

Lo que nos da a una perdida fraccional de energía

$$-\frac{1}{\langle E \rangle} \cdot \frac{d\langle E \rangle}{dt} \approx \gamma \quad (2.9)$$

Punto donde empieza a ponerse interesante la definición del gamma como factor del amortiguamiento.

Valor Q En vez de andar usando el valor $\frac{\gamma}{2\omega_0}$ para definir cuando hay amortiguamiento suave, es preferible definir un factor que cumpla nuestro requerimientos, al cual le llamaremos *factor de calidad*:

$$Q \equiv \frac{\omega_0}{\gamma}$$

Por lo que podemos decir que nuestro sistema va a estar suavemente amortiguado cuando $Q > \frac{1}{2}$. Próximamente veremos nuevas ventajas de la definición del factor de calidad.

Movimiento sobreamortiguado Si volvemos a 2.2 y ahora consideramos que $\gamma > 2\omega_0$ obtenemos que las dos raíces de la ecuación característica son ambas reales y negativas! Como en general es mas cómodo trabajar con cantidades positivas definamos

$$\begin{aligned} \mu_1 \equiv -p_1 &= \frac{1}{2}\gamma + \sqrt{\left(\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2\right)} \\ \mu_2 \equiv -p_2 &= \frac{1}{2}\gamma - \sqrt{\left(\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2\right)} \end{aligned}$$

De lo que se ve que $\mu_1 > \frac{\gamma}{2} > \omega_0$ tanto como $\mu_1 \mu_2 = \omega_0^2$ y entonces $\mu_2 < \omega_0$. Obteniendo unas soluciones

$$\psi(t) = A e^{(-\mu_1 t)} + B e^{(-\mu_2 t)} \quad (2.10)$$

Aquí podemos analizar un caso interesante que es el hecho que A y B **no necesariamente** son positivos! Cuando tenemos el hecho que (por las condiciones iniciales!) son de signo distinto, podemos llegar a tener que la masita pase *una vez* la posición de equilibrio y luego el movimiento muera, mientras que si son ambos positivos o negativos esto nunca ocurriera y nunca llegara a la posición de equilibrio la masita; hecho y derecho este movimiento es *aperiódico*.

Movimiento críticamente amortiguado Finalmente cuando $\gamma = 2\omega_0$ obtenemos una sola solución exponencial, que por cuestión de independencia lineal matemáticas terminamos teniendo estas soluciones

$$\psi(t) = (A + Bt) e^{-\omega_0 t} \quad (2.11)$$

Observación 1: Físicamente podemos pensar en el caso subamortiguado, haciendo crecer el valor de γ y pensar que las soluciones cumplen continuidad. En este caso podemos ver que al aumentar γ la frecuencia ω_f se hace casi nula, perdiendo toda la curvatura y eso nos da una idea que la otra solución independiente debe ser una linea recta!

Observación 2: Matemáticamente podemos analizar el problema hallando la forma de Jordan de la matriz del sistema de ecuaciones diferenciales y de ahí se obtiene el termino lineal.

Mucho mas no diremos aquí salvo que notemos que el decaimiento es *máximo* en el caso críticamente amortiguado, dado que es linealmente exponencial.

Para terminar de cerrar la idea de este modelo, nada mejor que un gráfico, como el de la figura 4 dónde tenemos los tres tipos de movimientos amortiguados para parámetros prefijados (cambiandolos simplemente cambias las escalas del tiempo y espacio). **Aclaración:** ahora es momento de ver todas los chirimbolos que definimos, y poder observar los patrones referidos

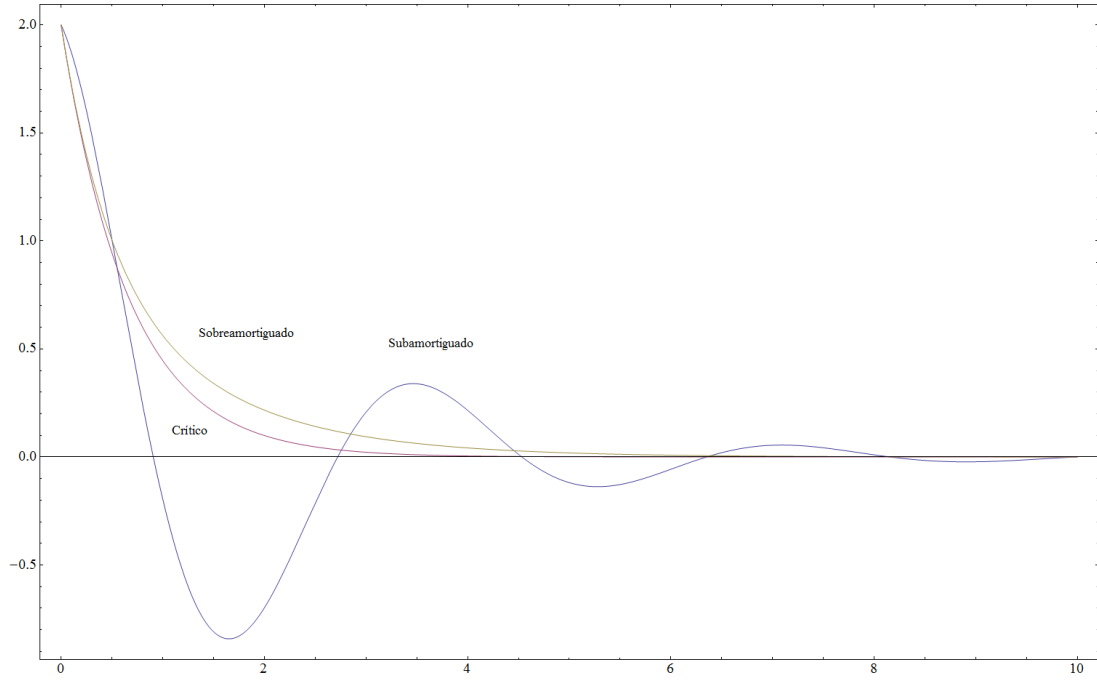


Figura 4: Tres tipos de movimientos amortiguados

2.2. El movimiento amortiguado en la física

Análogamente a lo anterior verificaremos algunos casos donde podemos modelar con un movimiento amortiguado simple de algún tipo.

Amortiguamiento por colisiones Volviendo a nuestro amigo el plasma visto antes, ahí pudimos ver que el origen del movimiento oscilatorio resultaba del comportamiento cooperativo de los electrones con una velocidad determinada $\dot{\psi}$. Sin embargo entonces no consideramos la *agitación térmica* que azarosamente produce una agitación que podría colisionar con los electrones contiguos, produciendo una dispersión con dirección al azar y, por ende, dejando de participar del grupo de electrones que aportan a la vibración en si. Esta *pérdida* de electrones a la vibración del plasma debe ser proporcional a la densidad N presente, y debe tener un tiempo característico de decaimiento τ_c . Podemos estimar:

$$-\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = \frac{1}{\tau_c}$$

Pero en contraparte a los otros tipos de amortiguamiento vistos, aquí **no hay decaimiento en amplitud** sino en la densidad de electrones participantes. Por ende, en analogía a 2.9 podemos estimar

$$\gamma_c = \frac{1}{\tau_c}$$

Amortiguamiento en la ionosfera En la ionosfera los electrones son mas que proclives a colisionar con moléculas neutras, y la tasa de colisiones debe ser proporcional a N_m y a la velocidad de los electrones. La ultima esta dada por v_{temp} que, vimos, supera a $\dot{\psi}$. Entonces:

$$\gamma_c = \sigma_c (N_m v_{temp}) \quad (2.12)$$

Con σ_c una constante de proporcionalidad, tiene unidades de área y puede pensarse como el área efectiva de choque dada por las moléculas a los electrones; cuyo valor experimental ronda los $\sigma_c \approx 10^{-19} m^2$. El factor N_m debe ser alto si hay una presión alta y temperatura baja (son moléculas neutras de la atmósfera), por ende suponiendo gases ideales:

$$N_m = \frac{p}{kT} \quad (2.13)$$

Con k la constante de Boltzmann. Por otro lado suponiendo cada contribución cuadrática aporta $\frac{1}{2}kT$, los electrones al tener 3 grados de libertad obtenemos

$$\frac{1}{2} m_e v_{temp}^2 \approx \frac{3}{2} kT$$

Con lo que

$$v_{temp} \approx \sqrt{\frac{3kT}{m_e}} \quad (2.14)$$

Juntando todo tenemos que

$$\gamma_c \approx \sqrt{\frac{3\sigma_c^2}{m_e k}} p T^{-\frac{1}{2}}$$

La presión en la capa D de la ionosfera es de $p \approx 0,5 Nm^{-2}$ y la temperatura $T \approx 200K$ con lo que tenemos $\gamma_c \approx 2,10^6 s^{-1}$ que si recordamos lo calculado previamente, son similares, por lo que las vibraciones del plasma en la capa D tienen un $Q \sim 1$.

En la capa F_2 por otro lado tenemos $p \approx 10^{-10} Nm^{-2}$ y $T \approx 2000K$ con lo cual, dado que además $\omega_{0F} \sim 10 \cdot \omega_{0D}$, tenemos que $Q \gg 1$ para la capa F_2 lo que resulta muy importante para las radiofrecuencias.

Amortiguamiento por fricción Finalmente para terminar esta sección nos pareció importante analizar el caso del amortiguamiento por la fuerza de rozamiento usual que experimentamos por el contacto entre dos superficies dadas. Si analizamos una masita, vemos que la ecuación de movimiento resulta ser

$$m\ddot{\psi} = \begin{cases} -s\psi - F_d & \text{si } \dot{\psi} > 0; \\ -s\psi + F_d & \text{si } \dot{\psi} < 0. \end{cases}$$

Que se parece mas a una ecuación libre que una amortiguada, dado que F_d es invariante con respecto al modulo de $\dot{\psi}$. Una forma de desacoplar este sistema es proponiendo el cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned} \psi_d &= \psi + \frac{F_d}{s} \\ \psi_i &= \psi - \frac{F_d}{s} \end{aligned}$$

Nos permite escribir

$$\begin{aligned} \ddot{\psi}_d + \omega_0^2 \psi_d &= 0 \\ \ddot{\psi}_i + \omega_0^2 \psi_i &= 0 \end{aligned}$$

Para los movimientos a la derecha e izquierda respectivamente, y vemos ya están plenamente desacoplados y el movimiento de la masita se compone de *medio ciclos* yendo de ψ_d a ψ_i y viceversa, teniendo que, dada una amplitud inicial A_1 cada movimiento para en $A_1 - 2k\frac{F_d}{s}$ $k \in \mathbb{Z}$ con la amplitud efectiva decayendo *linealmente* con el numero de ciclos completados. Finalmente el movimiento se detendrá cuando al final de un *medio ciclo* se obtenga que $m\ddot{\psi} < |F_e|$ con F_e la fuerza de rozamiento estático.

3. Movimiento armónico forzado

Finalmente para completar nuestro estudio de las oscilaciones con un grado de libertad consideraremos el movimiento con posibilidad de aplicar fuerzas externas, que por motivos explicados luego al ver análisis de Fourier, podemos suponer senoidal.

3.1. El modelo

Aquí vamos a ampliar el modelo antes visto al agregarle una fuerza externa *dependiente del tiempo* $F(t)$ que podemos considerar armónica por motivos que veremos luego en el análisis de Fourier:

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

Con esta fuerza nueva actuante la ecuación de movimiento se torna:

$$\ddot{\psi} + \omega_0^2 \psi + \gamma \dot{\psi} = F(t) \quad (3.1)$$

Como sabemos de la teoría de ecuaciones diferenciales toda solución $X(t) = X_h(t) + X_p(t)$ es la suma de la solución del sistema *homogéneo* y una solución particular cualquiera. Si analizamos un poco el modelo notamos que ya tenemos la $X_h(t) = \psi(t)$ es la solución del sistema amortiguado, por ende nos basta averiguar la solución particular, para esto supongamos ya paso un tiempo $t \gg \frac{1}{\gamma}$, en este caso tenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_h(t) = 0$$

Y por ende estaremos estudiando la solución particular al considerar el que llamamos el **estado estacionario** de la solución $X(t)$.

Estados estacionarios Intuitivamente sabemos que si la fuente externa pone la frecuencia de oscilación del sistema finalmente, pero que el sistema va a responder mejor si es parecida su frecuencia natural ω_0 . Proponiendo como solución particular $\psi = Ce^{i\omega t}$ tenemos la intuición que aunque el desplazamiento no necesariamente esta en fase con la fuerza, al menos la diferencia de fase **ya alcanza un valor constante**.

Enfoque 1 Entonces obtenemos la siguiente ecuación algebraica $(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)C = \frac{F_0}{m} = A$, por lo que la amplitud es

$$C = \frac{A(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} = \frac{A(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} - i \frac{A\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} \quad (3.2)$$

Recordatorio: Para obtener la amplitud C se uso la relación ya dispuesta que

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|}$$

Lo que nos da la solución

$$\psi_p(t) = \text{Re}(C) \cos(\omega t) + \text{Im}(C) \sin(\omega t) = C \cos(\omega t + \phi) \quad (3.3)$$

que no tiene constante de integración (Re es la parte real y Im es la parte imaginaria) ya que dichas aparecen solamente en la solución homogénea. Además la solución homogénea decae por lo que luego de un tiempo (denominado transitorio) pasa a un estado estable o estacionario donde predomina la solución particular. La fase ϕ indica como esta desfasado el movimiento de la solución particular de la solución homogénea. Cabe notar que aquí $\text{Im}C$ resulta que esta en cuadratura con la fuerza $F(t)$ y $\text{Re}(C)$ esta en fase con la fuerza, es costumbre notar a la componente en cuadratura como A_{abs} (de amplitud absorbente) y a la componente en fase como A_{el} (de amplitud elástica). Con lo que queda

$$\psi_p(t) = A_{abs} \sin(\omega t) + A_{el} \cos(\omega t) \quad (3.4)$$

Donde la componente absorbente se vuelve máxima en las frecuencias cercanas a la natural del sistema (después veremos que tan cercanas) y la elástica es prácticamente nula; y viceversa fuera de la zona de ω_0 . Esto nos lleva a decir que la componente absorbente es la dominante en la zona de $\omega \sim \omega_0$ y la elástica fuera de ella. El otro factor notorio es que A_{el} cambia el signo al pasar ω_0 y esto representa un cambio en el modo de vibración del sistema que luego se volverá mas frecuente analizar (con 1 masa lo remarcamos y no le veremos mucho significado físico ya que la amplitud decae fuera de ω_0).

Para simplificar la notación uno suele definir la **impedancia mecánica** de un sistema como

$$Z = m \left(\gamma\omega + i \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega} \right) \right) \quad (3.5)$$

Donde a la parte real le llamamos **resistencia** y a la imaginaria **reactancia**. Con lo cual en 3.2 nos queda

$$C = \frac{-iA}{Z}$$

Entonces observemos que $C = \frac{\dot{\psi}}{i\omega}$ con lo que tenemos

$$F(t) = m ((\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)) \frac{\dot{\psi}}{i\omega}$$

Recordatorio: Lo anterior provino de la ecuación característica del sistema forzado

Con lo que reagrupando conseguimos la siguiente relación que justifica la definición de impedancia:

$$F = Z\dot{\psi} \quad (3.6)$$

Con lo que la impedancia mecánica es la fuerza necesaria para producir velocidad unitaria en un oscilador!!

Enfoque 2 El segundo enfoque posible para obtener la amplitud de la solución particular ψ_p consiste en el uso de fasores o Diagramas de Argand (Jean Robert Argand (1768 -1822) matemática talentoso que introdujo el concepto de representar a los números complejos como punto de un \mathbb{R} espacio vectorial isomorfo a \mathbb{R}^2). Para esto uno representa el modulo de su numero complejo y con el angulo ϕ representa el desfase de del próximo numero respecto al primero, pero dado que estamos en un estado estacionario donde la diferencia de fase $\varphi = cte$ podemos diagramar a $t = 0$ y todo el diagrama conjunto rotara $\forall t$ haciendo valido nuestro calculo de las sumas iniciales.

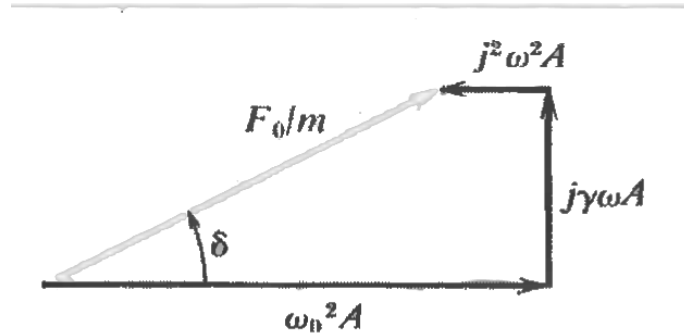


Figura 5: Representación fasorial de la ecuación del oscilador forzado

Del gráfico 5 (llamando $j = i$, la unidad imaginaria, y a $\delta = -\phi$, la fase) fácilmente se ve que primero que $-\pi < \phi < 0$ por lo que *el desplazamiento siempre esta retrasado a la fuerza impulsora en ϕ* . Por otro lado viendo el triangulo rectángulo dado se ve:

$$\tan \phi = \frac{-\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.7)$$

Que notemos no contiene en ningún lado a F_0 por lo que la diferencia de fase **solo depende de la frecuencia impulsora**. Por otro lado aplicando pitágoras obtenemos

$$A^2 = C^2 \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2 \right)$$

De donde obtenemos

$$C = A \sqrt{\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \quad (3.8)$$

Para simplificarnos la vida podemos utilizar la que se llama *curva de respuesta*:

$$R(\omega) = \frac{\gamma^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad (3.9)$$

Que, si notamos, para un sistema muy poco amortiguado $Q \ll \frac{1}{2}$ $\omega \sim \omega_0$ se puede aproximar muy bien por la curva que llamamos *Lorentziana* que se define como

$$L(\omega) = \frac{\frac{\gamma^2}{4}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{\gamma^2}{4}} \quad (3.10)$$

Con lo cual tenemos para, respectivamente, las amplitudes de la posición, velocidad y aceleración:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{F_0}{b\omega} \right) \sqrt{R(\omega)} \\ A\omega &= \left(\frac{F_0}{b} \right) \sqrt{R(\omega)} \\ A\omega^2 &= \left(\frac{F_0\omega}{b} \right) \sqrt{R(\omega)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Con lo que se ve que la velocidad alcanza su máximo en $\omega = \omega_0$ pero la posición lo alcanza a un valor un poco menor y la aceleración a un valor un poco mayor, como se puede ver en la figura 6. (los valores se pueden hallar derivando,

etc, etc...). A su vez vemos que para $\omega < \omega_0$ $\frac{F_0}{k} \leq \psi$ y para $\omega > \omega_0$ $\frac{F_0}{m} \leq \ddot{\psi}$. Que esta bueno analizar y se lo dejamos al lector! (sino tiene todo servido che!)

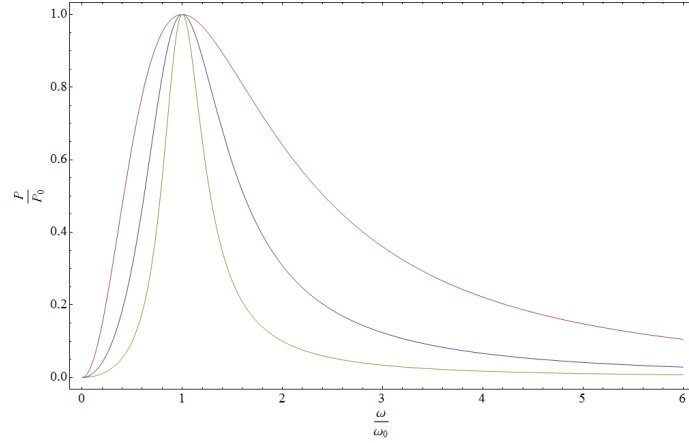


Figura 6: Respuesta en frecuencia de un oscilador forzado, para la velocidad, para diferentes valores de Q

Y ahora decimos listo, pero para y la impedancia? y buen vamos a ver que onda con este nuevo enfoque en que nos puede aportar algo nuevo (para lo viejo ya vimos todo lo otro).

Tal como definimos la función *real* de respuesta $R(\omega)$ vamos a definir otra función nueva de respuesta llamada *compliance* (**Aclaracion:** cualquier mejor traducción del ingles *compliance* es bienvenida). Dada una $\psi(t) = Ae^{i\omega t}$ $A \in \mathbb{C}$

$$K(\omega) = \frac{A}{F_0} \quad (3.12)$$

Entonces volviendo al diagrama podemos ver

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \frac{mA(\omega_0^2 - \omega^2)}{F_0} \\ \sin \phi &= \frac{mA\gamma\omega}{F_0} \end{aligned}$$

De lo que obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Re } K(\omega) &= \frac{A \cos \phi}{F_0} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \\ \text{Im } K(\omega) &= \frac{A \sin \phi}{F_0} = \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Y aunque se ve medio fea $K(\omega)$ la podemos hacer linda con un poquiito de cuentas y nos termina dando

$$K(\omega) = \frac{1}{(k - m\omega^2) + ib\omega} \quad (3.14)$$

Y aunque nos guste trabajar ne reales admitamos que trabajar con complejos puede ser mucho mas simple, ya que todos los denominadores al cuadrados al ser en general módulos nos los sacamos de encima! Finalmente recordando 3.5 tenemos que

$$Z(\omega) = \frac{1}{i\omega K(\omega)} = b + i \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right) \quad (3.15)$$

Y entonces veamos que $Z(\omega_0) = b \in \mathbb{R}$ con lo cual en general es muy común para hallar la frecuencia natural de un sistema, hallar $\omega \in \mathbb{R} / Z(\omega) \in \mathbb{R}$. Lo importante es que **una impedancia real implica que la velocidad esta en fase con la fuerza impulsora.**

Ahora que analizamos ambos enfoques, ya podemos asegurar conseguimos la solución ψ_p (se acuerdan eso queríamos nosotros?) y podemos analizar como varia la solución en los diferentes casos que llamaremos *amortiguamiento suave* cuando $Q > \frac{1}{2}$ y *amortiguamiento fuerte* cuando $Q \ll \frac{1}{2}$

Amortiguamiento suave Recordemos 3.11 de donde podemos ver un efecto importante, cerca de ω_0 todas las amplitudes resultan significativas, y la fase cambia drásticamente (notar de 3.7 como varia de 0 a $-\pi$ en la zona que llamaremos *de resonancia*. De la fase podemos destacar que en $\omega = \omega_0$ $\phi = -\frac{\pi}{2}$ por lo que el desplazamiento retrasa a la fuerza en cuadratura y entonces, como habíamos visto antes, **en la resonancia la velocidad esta en fase con la fuerza y la impedancia resulta real**. Si consideramos el caso de frecuencias muy bajas ($\omega \ll \omega_0$) tenemos

$$\begin{aligned}\phi &\approx 0 \\ A &\approx \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k} \\ \psi &\approx \left(\frac{F_0}{k}\right) \cos \omega t\end{aligned}\quad (3.16)$$

Notemos que ni m ni γ esta involucrados acá lo que nos lleva a decir que a frecuencias bajas el movimiento se encuentra *controlado por el resorte*, y es fácil de entender. La masa tiene muy poca aceleración haciendo que la mayoría de la fuerza impulsora se contrarreste con la fuerza de retorno del resorte, provocando entonces que el desplazamiento este en fase con la fuerza, como 3.16 verifica. Por otro lado a altas frecuencias ($\omega \gg \omega_0$) tenemos

$$\begin{aligned}\phi &\approx -\pi \\ A &\approx \frac{F_0}{m\omega^2} \\ \psi &\approx \left(\frac{F_0}{m\omega^2}\right) \cos \omega t\end{aligned}\quad (3.17)$$

Y decimos que el movimiento es *controlado por la masa* donde el resorte básicamente no hace nada y todo lo hace la fuerza impulsora, por lo que los resultados de 3.17 es de esperar.

Lo ultimo a notar es que

$$\lim_{\substack{\gamma \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow \omega_0}} A(\omega) = \infty$$

Por lo que decimos el movimiento en $\omega \sim \omega_0$ es *limitado por la resistencia* (Como el imperio galáctico =P)

La resonancia provee amplificación, una redistribución de la vibración podríamos decir, y en que factor sino en Q , que nos daba la suavidad del amortiguamiento $Q \equiv \frac{\gamma}{\omega_0}$

Energía y Potencia Como nos podemos imaginar para todo tiempo el amortiguamiento esta sacando energía de nuestro sistema, lo que tiene que ser repuesto por la fuerza impulsora del estado estacionario. Entonces veamos la potencia asociada al oscilador forzado, en el régimen estacionario donde $\psi \approx \psi_p$, la cual es igual a

$$P(t) = F(t)\dot{\psi}(t) = A \sin(\omega t) \omega (-\mathcal{R}e(C) \sin(\omega t) + \mathcal{I}m(C) \cos(\omega t)) \quad (3.18)$$

De donde terminamos teniendo

$$P = -F_a \dot{\psi} = b \dot{\psi}^2 \quad (3.19)$$

Que es la potencia instantánea, pero si la calculamos sobre varios periodos, o sea el promedio temporal como definimos en 2.7 en un periodo $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ tenemos

$$\begin{aligned}\langle P \rangle &= b \langle \dot{\psi}^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} b \left(\frac{F_0}{b} \right)^2 R(\omega)\end{aligned}$$

Y entonces...

$$\langle P \rangle = \frac{F_0^2}{2b} R(\omega)$$

Y adquiere su máximo en $\omega = \omega_0$, que es, **recordamos**, cuando A_{abs} es máximo, $A_{el} = 0$, $|\dot{\psi}|$ es máximo, $\phi = -\frac{\pi}{2}$, por lo que $\varphi_{\dot{\psi}/F} = 0$ y la velocidad esta en fase con la fuerza, por lo que $Z = b \in \mathbb{R}$. Finalmente podemos ver que la frecuencia donde se obtiene la mitad de la potencia en resonancia, es decir semi-potencia, es

$$\omega_{sp}^2 = \omega_0^2 \pm \gamma \omega \quad (3.20)$$

Razón principal por lo que a γ se le llama el *ancho del sistema*

Sobre amortiguamiento Nosotros sabemos que si $Q > \frac{1}{2}$ en general el movimiento es aperiódico y asintóticamente $\psi \rightarrow 0$, sin embargo bajo una fuerza impulsora puede haber efectos interesantes. En general las soluciones halladas en 3.11 son validas para todo tipo de amortiguamiento. Para darnos una idea imaginemos el caso extremo ($\gamma \gg \omega_0$ $Q \ll 1$) En general esperamos halla un desplazamiento apreciable para $\omega \ll \omega_0$ por lo que

$$R(\omega) \approx \frac{\gamma^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^4}}{1 + \gamma^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^4}} \quad (3.21)$$

Y aquí es donde introducimos un nuevo termino, el *tiempo de relajación* del sistema como

$$\tau_r \equiv \frac{\gamma}{\omega_0^2} = \frac{b}{k} \quad (3.22)$$

Que era el tiempo que tardaba en que la amplitud decaiga $\frac{1}{e}$ en todo sistema amortiguado, y es muy característico de los sistemas sobre amortiguados. Con este nuevo factor tenemos

$$R(\omega) \approx \frac{\tau_r^2 \omega^2}{1 + \tau_r^2 \omega^2} \quad (3.23)$$

Que notemos ahora es mas simple analizar $R(\omega)$ ya que es cercana a 0, luego a valores de $\tau_r \omega \sim 1$ crece y luego rápidamente tiende a 1. Esto interesa ya que, como vimos, $\langle P \rangle \propto R(\omega)$ por lo que en los sistemas muy fuertemente amortiguados tenemos que elegir una frecuencia tal que $\omega \tau_r \gg 1$ para que el sistema absorba potencia, hecho aprovechado muy bien en la **cocina por microondas**.

3.2. El movimiento armónico forzado en la física

Nuevamente intentaremos aplicar el modelo a situaciones algo mas reales, que serán dos muy importantes en la vida diaria: **la dispersión de la luz y los fundamentos de la cocina por microondas**.

La dispersión de la luz Cuando una onda electromagnética avanza en el espacio, esta generada por un campo eléctrico oscilante que produce una vibración forzada de los electrones de las partículas circundantes; estos, a su vez, al vibrar emiten radiación por si mismos. Esta radiación variara dependiendo que los electrones vibren *coherentemente* unos con otros (fenómeno complicado para el cual necesitamos saber electromagnetismo), o vibren *incoherentemente* produciendo el fenómeno de **dispersión o scattering de la luz**, que es el proceso podemos modelar aquí. Para ello estimemos ω_0 y γ con una burda aproximación clásica y veamos que obtenemos...

Estimación de ω_0 Imaginemos al núcleo compuesto de un único protón con su nube electrónica dispersa, que supondremos circular y uniforme con una carga total $-e$. Entonces

$$q_\psi = e \left(\frac{|\psi|}{R} \right)^3$$

Y entonces recordando la formula para la fuerza eléctrica

$$\begin{aligned} |F| &= e \frac{q_\psi}{4\pi\epsilon_0 \psi^2} \\ &= |\psi| \left(\frac{e^2}{R^3 4\pi\epsilon_0} \right) \end{aligned}$$

De donde podemos obtener el estimado de

$$\begin{aligned} k &= \frac{|F|}{|\psi|} = \frac{e^2}{R^3 4\pi\epsilon_0} \\ \omega_0 &= \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e R^3}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Con estos valores tendríamos un $\omega_0 \approx 4,5 \cdot 10^{16} s^{-1}$ ($\nu_0 \sim 10^{16} Hz$) que caería en el ultravioleta por lo que podemos estimar en general que la luz blanca que dispersa tiene un $\omega < \omega_0$ aproximadamente.

Estimación de γ De resultados teóricos anexos se sabe que la potencia media emitida por un emisor que vibra armónicamente es

$$\langle P \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \quad (3.25)$$

Donde p_0 es la amplitud del momento dipolar (que termina valiendo eA para un electrón vibrando con amplitud A). De acá lo importante es que

$$\langle P \rangle \propto \omega^4 \quad (3.26)$$

Recordemos que necesitamos γ que resulta de 2.9. Recordemos de la misma sección que

$$\langle E \rangle \approx \frac{1}{2} m_e \omega_0^2 A^2$$

Por lo que

$$\gamma = \frac{\langle P \rangle}{\langle E \rangle} \approx \frac{\omega_0^2 e^2}{6\pi\epsilon_0 m_e c^3} \quad (3.27)$$

Habiendo sustituido $\omega \approx \omega_0$ pues consideramos vibraciones libres para los electrones. Tomando todos los valores terminamos obteniendo $\gamma \approx 1,3 \cdot 10^{10} s^{-1}$ que nos lleva a $Q \sim 10^6$ indicando un sistema muy poco amortiguado. Resumiendo *la dispersión de la luz blanca resulta de una frecuencia por debajo de la natural y en un sistema muy poco amortiguado.*

Dispersión de Rayleigh La dispersión fuera de la resonancia se la llama de *Rayleigh* (John William Strutt, tercer Baron de Rayleigh (1842-1919) premio nobel descubridor de los gases nobles y estudio las distribuciones probabilísticas y dispersión de la luz que lleva su nombre) y, dado que $\omega \ll \omega_0$ podemos decir que el movimiento esta controlado por el resorte, en la nomenclatura introducimos en sistemas poco amortiguados en el modelo. Por esto *la amplitud de vibración es independiente de la frecuencia incidente, o sea del color de la luz dispersante.* Sin embargo, la eficiencia de dispersión depende fuertemente de la frecuencias (revisar 3.26) con lo que la dispersión sera mas fuerte para los violetas u azules que para los rojos. Todas estas aproximaciones valen para un espacio donde las moléculas estén lo suficientemente alejadas respecto a las longitudes de onda que manejamos para que la emisión sea incoherente, como ocurre en la **estratósfera** llevando a explicar porque el cielo es azul. (**Pregunta inteligente:** Si la dispersión de Rayleigh es mayor a mayor frecuencia, porque el cielo no es violeta?? **A investigar la respuesta!!**)

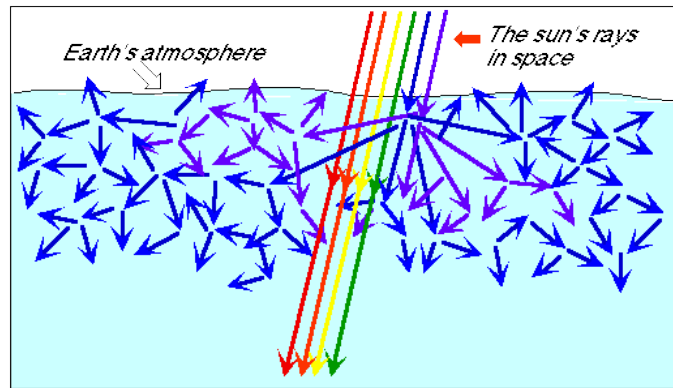


Figura 7: Esquema del scattering de Rayleigh de la luz blanca en la estratósfera

Suceptibilidad dieléctrica En la sección siguiente hallamos la rigidez con que un electrón está correspondido a un átomo o una molécula, y ésto se puede medir en cantidades macroscópicas a su vez por las fluctuaciones del campo eléctrico causado por una arreglo de átomos idénticos.

En esta sección intentaremos formalizar el paso de las propiedades microscópicas de una molécula, y las propiedades macroscópicas del material que componen. Para simplicidad supongamos las moléculas son *no polares* y lo suficientemente alejadas para que el campo que produzca una no sea influenciado por el de la otra.

Campos constantes Supongamos un material dado se encuentra en un campo eléctrico constante de magnitud E , entonces va a inducir un campo de densidad de polarización con magnitud \mathcal{P} que en todo punto representa el momento dipolar por unidad de volumen. Entonces definimos:

$$\chi_e \equiv \frac{\mathcal{P}}{\epsilon_0 E} \quad (3.28)$$

que llamaremos *susceptibilidad eléctrica* de un material dado. Hay muchos efectos macroscópicos que nos permiten medir χ_e aunque el más simple es rellenar un capacitor (una disposición de dos conductores con carga opuesta) y medir la nueva capacidad (la cantidad de carga que puede almacenar con una dada diferencia de potencial eléctrico) de éste, que será la anterior aumentada en $1 + \chi_e$.

Entonces si llamamos a N como la densidad de electrones polarizables por el material por molécula por unidad de volumen, con una rigidez k , el desplazamiento producido por el campo E será eE/s dando un campo de polarización:

$$\mathcal{P} = Ne^2E/s$$

Dando una susceptibilidad:

$$\chi_e = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 s} = \left(\frac{\omega_p}{\omega_0} \right)^2 \quad (3.29)$$

Que vale definiendo:

$$\omega_p^2 \equiv (e^2/m_e\epsilon_0) N = (3,18,10^3 \text{ m}^3\text{s}^{-2})N \quad (3.30)$$

Podemos recordar de 1.10 y vemos una similaridad con un N definiendo la cantidad de electrones "en acción" por unidad de volumen; con la diferencia que allí los electrones están libres y aquí están retenidos al material.

Usando 3.29 podemos obtener la frecuencia de resonancia a partir de χ_e .

Campos alternos En un campo alterno seguramente será función de la frecuencia $\chi_e(\omega)$. En general podríamos adaptar 3.29 a un campo alterno cambiando $1/s$ por la compliancia $K(\omega)$ y tener, recordando 3.30:

$$\begin{aligned} \chi_e(\omega) &= m_e \omega_p^2 K(\omega) \\ &= \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Lo que produce a la susceptibilidad no solo dependiente de la frecuencia, sino también compleja! Y esto nos indicará que la polarización esta atrasada al campo alterno, lo que nos indica claramente absorción y entonces el material tenderá a calentarse. Claramente estos efectos serán observables en la zona de resonancia que cae en los 10^{15} Hz o más y por esto veremos mucho mas de estos efectos en la segunda parte cuando tratemos con ondas que alcancen estas frecuencias, las electromagnéticas.

Absorción de microondas por el agua El agua es un compuesto polar cuya formula es H_2O (wooo,posta?) y que, por ende, presenta tres efectos capaces de contribuir a la polarización total en el campo eléctrico circundante. El primero de estos es el cambio en el momento dipolar de los *electrones* de la molécula, efecto que ya discutimos. El segundo corresponde al efecto de la vibración molecular de los *átomos* con entre si, efecto que se puede visualizar en el infrarrojo (El que le gusta saber mas este efecto se explota en la identificación de moléculas sobretodo orgánicas en la espectroscopia de infrarrojo). Finalmente, la molécula *como un todo* puede vibrar respecto a su centro de masa generado por torque oscilante del campo eléctrico. Dado que ninguno de estos efectos entonces puede explicar el aumento de la potencia absorbida del agua en la zona de microondas (se empieza a comportar como un **cuerpo negro**), vamos a analizar las *rotaciones* de la molécula como efecto del torque del campo eléctrico que es un efecto que cae en las microondas. Para esto seguiremos los siguientes pasos

1. Estimaremos la tension torsional c que evita que el agua se alinee al campo eléctrico externo; lo que nos permitirá obtener un estimado de ω_0
2. Estimaremos la resistencia angular d de las fuerzas que evitan la rotación libre (análogo a b en el amortiguado lineal), lo que nos llevara a estimar γ y llegar a la conclusión que el sistema esta fuertemente amortiguado ($\gamma \gg \omega_0$)
3. Obtendremos vía c y d el tiempo de relajación para observar que $\tau_r \omega_0 > 1 \Leftrightarrow \omega \gtrsim 10^{10} \text{ Hz}$ que es exactamente la zona de las microondas.

Tensión térmica En la ausencia de un campo eléctrico externo, las moléculas de agua toman dirección al azar; pero al encender un campo hay una tendencia a alinear los momentos dipolares con el campo unilateralmente. No obstante, tenemos por otro lado la agitación térmica (viejo enemigo si recordamos el plasma, que no os preocupéis ya volverá a aparecer!) que restaura el movimiento al azar. Entonces dado un campo E y un momento dipolar p a un angulo θ tenemos

$$\langle E, p \rangle = p_E = p \cos(\theta)$$

Por otro lado del electromagnetismo clásico se obtiene

$$\langle p_E \rangle = \frac{p^2 E}{3kT} \quad (3.32)$$

Con el valor de $p \approx 6,1 \cdot 10^{30} \text{ Cm}$ (la del H_2O) a temperatura ambiente y un campo de $E = 10^5 \text{ Vm}^{-1}$

$$\frac{pE}{3kT} \sim 10^{-4}$$

Supongamos entonces que las moléculas de agua no interactúan unas con otras fuertemente, entonces para una molécula en un ángulo θ sin un campo externo, al encender el campo este producirá un $\delta\theta$ con:

$$\delta\theta = \frac{pE \sin \theta}{c}$$

Donde c es una tensión imaginada por un cable que es el que produce la tensión torsional y hallaremos c para que obtengamos un resultado como el experimental, luego con el momento de inercia ya tendremos el ω_0 . Entonces el encendido del campo produce un cambio en la polarización

$$\begin{aligned} p'_E &\equiv \delta p_E = -\frac{d}{d\theta}(p \cos(\theta)) \delta\theta \\ &= p \sin \theta \delta\theta \\ &= p^2 \sin^2 \theta \frac{E}{c} \end{aligned}$$

Como empezamos con una distribución al azar de ángulos θ entonces la distribución de θ es $\propto 2\pi \sin(\theta) d\theta$. Entonces:

$$\begin{aligned} \langle p'_E \rangle &= \frac{\left(\frac{p^2 E}{c}\right) \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta}{\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta} \\ &= \frac{\left(\frac{p^2 E}{c}\right) \left[\frac{1}{3} \cos^3 \theta - \cos \theta\right]_0^\pi}{[\cos \theta]_0^\pi} = \frac{2p^2 E}{3c} \end{aligned}$$

Como $\langle p'_E \rangle = \langle p_E \rangle$ de 3.32 tenemos ya un valor de c que corresponde a

$$c = 2kT$$

Entonces a temperatura ambiente $c \approx 8,10^{21} \text{ Nm}$. Ahora necesitamos el momento de inercia del agua para poder tener la frecuencia de resonancia pues $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{I}}$ (Aunque no lo pusimos de ejemplo el lector lo puede pensar como un engranaje oscilando libremente con un cable que le ejerce una fuerza de retorno $T_r \propto \psi$ con constante de proporcionalidad c). Si imaginamos al agua con el átomo de oxígeno central y dos pelotas representando los hidrógenos, su momento de inercia será

$$I \approx 2m_p R_{OH}^2$$

que toma el valor de $I \approx 3,5 \cdot 10^{-37} \text{ kgm}^2$ y por ende $\omega_0 \sim 10^{13} \text{ s}^{-1}$ es el valor de la frecuencia de resonancia

Ejercicio: Releer la demostración anterior hasta poder llegar a decir convincentemente que tiene sentido, cuando no lo logre recurra al libro, si lo logra, búsqieme a explicármela a mí.

Una estimación de γ No se preocupen este viene más corto y entendible jaja. El movimiento en general está amortiguado porque cada molécula de agua rotante tiene un *entorno* que arrastra al rotar y le va quitando energía intuitivamente, lo que tomamos por *viscosidad* del fluido. Supongamos que nuestra molécula de agua es esférica en un medio continuo viscoso, entonces queremos averiguar

$$T_r \equiv -d\dot{\psi} \quad (3.33)$$

Tomando el análogo de la fuerza amortiguante en 2.1. Como la fuerza T_d ejerce un torque sobre la superficie esférica, podemos estimar

$$T_r = R F_r$$

donde R es el radio de la esfera (que en química se le llama el **radio de Van der Waals** de la molécula) y F_r representa un promedio de las fuerzas amortiguantes sobre la molécula. Si consideramos al fluido laminar y que desliza por la molécula, entonces la velocidad del fluido es de $a\dot{\psi}$ y podemos suponer que esta cae a 0 en una distancia a dado que consideramos la interacción *solo* con las moléculas rondantes. Por ende

$$F_d \approx -(4\pi a^2) \eta \dot{\psi}$$

pues debe ser proporcional a la viscosidad, al área de la esfera y a la velocidad promedio del fluido que, suponiendo la caída lineal que dijimos, representa a $\nabla\psi = \dot{\psi}$; esto nos lleva a

$$d \approx 4\pi\eta a^3 \quad (3.34)$$

Y usando los valores experimentales tenemos que $d \approx 9,10^{32} Nms$. Por lo que

$$\gamma \equiv \frac{d}{I} \sim 10^{15} s^{-1}$$

Con lo que juntando todo $Q \sim 0,01 \ll 1$ y por ende el amortiguamiento es muy fuerte.

El tiempo de relajación Para definir el tiempo de relajación en las vibraciones rotacionales podemos ver 3.22 que es el factor de amortiguamiento sobre la constante de la fuerza de retorno, lo que lleva natural extenderlo a

$$\tau_r = \frac{d}{c}$$

con lo que

$$\tau_r \approx \frac{2\pi\eta a^3}{kT}$$

que nos da un valor de $\tau_r \approx 10^{-11} s$ y por ende obtenemos que $\omega\tau_r \sim 1 \leftrightarrow \omega \gtrsim 10^{11} s^{-1}$ que nos da una $\nu_0 \sim 10^{10} Hz$ que es la zona del microondas y por eso funciona el microondas! (woaaa, prefería no saber, no?)