

Parte I

Introducción matemática

A lo largo de nuestro viaje nos encontraremos y tendremos que amigarnos con los números complejos, por lo que es conveniente poder introducirlos ahora con un cierto formalismo para luego poder referirnos a ellos con comodidad.

1. El cuerpo \mathbb{C} de los números complejos

Consideremos el conjunto \mathbb{R}^2 con las operaciones

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$
$$(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu).$$

Es muy fácil comprobar las propiedades asociativa y conmutativa de las operaciones asíâ definidas y la distributiva del producto respecto de la suma. El elemento neutro de la suma es $(0, 0)$ y $(1, 0)$ es la unidad del producto. Además, $(-x, -y)$ es el opuesto de (x, y) , y $\forall (x, y) \neq (0, 0)$ tiene inverso

$$(x, y) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = (1, 0).$$

Todas estas propiedades se resumen en que $(\mathbb{R}^2; +; \cdot)$ es un *cuerpo*, que representamos por \mathbb{C} y les llamamos a sus elementos números complejos.

1.1. Forma binómica de un numero complejo

El símbolo usual (x, y) para representar pares ordenados en la estructura de \mathbb{R}^2 como \mathbb{R} espacio vectorial no es conveniente para representar números complejos (calculate cualquier potencia grande y lo vas a notar). Pero observemos que

$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$$
$$(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0).$$

Es decir que los números complejos de la forma $(x, 0)$ se comportan respecto a la suma y multiplicación definidas para los complejos como números reales respecto a su suma y multiplicación (O sea $\mathbb{R} \times \{0\}$ es un subcuerpo de \mathbb{C} isomorfo a \mathbb{R}). Esto nos permite la identificación $(x, 0) = x$. Por otro lado al número complejo $(0, 1)$ lo representaremos por i , la unidad imaginaria (término acuñado por Descartes (1596-1650), padre de los ejes coordenados) y con ello tenemos

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Y ahora podemos escribir a todo número complejo como

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy,$$

que le llamamos la forma binómica de un numero complejo donde $x = \operatorname{Re} z$ y $y = \operatorname{Im} z$

Observación: Acabamos de ver que $i^2 = -1$ pero eso ni cerca nos permite escribir $i = \sqrt{-1}$, ya que si lo hacemos y manejamos a la raíz como estamos acostumbrados llegamos a que

$$-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{-1 \cdot -1} = \sqrt{1} = 1$$

$\Rightarrow -1=1$ Abs! Fíjense que en realidad si escribimos $i = \sqrt{-1}$ no podemos interpretar a -1 como número real (ya que estos no tienen raíz cuadrada de negativos) sino como -1 complejo, por lo que *estamos usando raíces de números complejos sin siquiera haberlas definido y presuponiendo que mantienen las propiedades de los números reales*. Antes de escribir $i = \sqrt{-1}$ tenemos que saber que significa $\sqrt{z} \forall z \in \mathbb{C}$ y ahí se ve que $\sqrt{zw} = \sqrt{z}\sqrt{w}$ generalmente no es válida $\forall z, w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$.

Observación 2: No existe un orden en \mathbb{C} ! Es importante remarcar que en los complejos no existe una relación de orden como \leq ya que, si la hubiese

$$0 < i^2 = -1 \implies 0 < 1 + -1 = 0 \text{ Abs!}$$

Por lo tanto hay que tener cuidado con escribir relaciones de orden en \mathbb{C} .

1.2. Módulo y conjugado de un número complejo

Dado un número complejo $z = x + iy$ se puede definir su reflexión con respecto al eje real pensándolo como \mathbb{R} espacio vectorial, que resulta en el *conjugado* de un número complejo: $\bar{z} = x - iy$. Por otro lado también en la misma línea de razonamiento se define el *módulo* de z como $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Intuitivamente se ve al módulo como la mera norma euclídea, lo que nos lleva a verificar el módulo cumple las condiciones de una norma y definimos la *distancia* entre dos números complejos como $|z - w| \forall z, w \in \mathbb{C}$.

Propiedades: Se puede verificar

1. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
2. $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
3. $|zw| = |z| \cdot |w|$
4. $|z + w| \leq |z| + |w|$

entre otras. Finalmente vale remarcar

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= |z|^2 \\ \implies \forall z \in \mathbb{C}, z^{-1} &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} \end{aligned}$$

1.3. Forma polar de un número complejo

Dado que todo complejo $z = x + iy \neq 0$ presenta un módulo no nulo, uno puede escribir

$$z = |z| \cdot \frac{x + iy}{|z|}.$$

Como el segundo factor está en la circunferencia unidad, se tiene que $\frac{x + iy}{|z|}$ tiene una relación biunívoca con $\cos t + i \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$. A este t se le llama el *argumento principal* del número z y notemos que aunque su definición no acarrea ambigüedades, la función $\arg z$ resulta discontinua. A la representación

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad r \in \mathbb{R}^+, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

se le llama *forma polar de un número complejo* z .

2. Exponencial compleja

Consideremos la serie $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ que, aplicando el criterio del cociente, sabemos que converge para todo z complejo. Entonces llamamos *exponencial compleja* a la función

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbb{C})$$

2.1. Propiedades

Se cumplen las siguientes propiedades cuya demostración, en función de la definición de la exponencial compleja, no le resultara dificultosa al lector

1. $\exp'(z) = \exp(z)$
2. $\exp(0) = 1$
3. $\exp(x) = e^x$ para $x \in \mathbb{R}$ con lo que se justifica $\exp(z) = e^z$ $z \in \mathbb{C}$
4. $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$
5. $e^z \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$
6. Si $z = x + iy \implies e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos(y) + i \sin(y))$

2.2. Otras funciones complejas útiles y forma exponencial

A partir de la exponencial compleja podemos obtener las funciones seno y coseno complejos, que como se imaginarán, nos serán muy útiles; para luego poder dar la forma mas común de representar un número complejo tanto notacional como gráficamente:

Nosotros sabemos que $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^{it} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(it)^k}{k!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \cdot t^{2k}}{2k!} + i \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \cdot t^{(2k+1)}}{(2k+1)!} \right) \\ &= \cos(t) + i \sin(t) \end{aligned}$$

$$\implies e^{iz} + e^{-iz} = 2 \cdot \cos(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\implies \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Y análogamente $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

Con lo cual tenemos una nueva manera de representar un número complejo que la llamaremos *forma exponencial* a saber $z = |z| \cdot e^{i\theta} \quad \theta \in [0, 2\pi)$.

En general nosotros sabemos de F1 que la solución del oscilador armónico la podemos escribir como $\psi(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ donde A era la amplitud y φ era la fase de la solución, pero si extendemos el coseno también se puede escribir como $\psi(t) = A_f \cdot \cos(\omega \cdot t) + B_c \cdot \sin(\omega \cdot t)$ donde f representa a estar en fase y c a estar en cuadratura. Sin embargo, con el nuevo formalismo complejo tenemos otra forma de representar las soluciones, que será la más útil veremos y es la razón por la que se introdujo el tema antes, $\psi(t) = \text{Re}\{A \cdot \exp(\omega \cdot t + \varphi)\}$ $A \in \mathbb{R}$ o $\psi(t) = \text{Re}\{A \cdot \exp(\omega \cdot t)\}$ $A \in \mathbb{C}$ donde ahora podemos elegir muy a gusto tener una amplitud con o sin la fase incluida, y sobre todo podemos evitarnos todas las propiedades trigonométricas y cambiarlas por exponenciales que son más simples de manipular.

3. Fasores

Dado que ya sabemos que podemos escribir al desplazamiento como $\psi(t) = \text{Re}\{A \cdot \exp(\omega \cdot t + \varphi)\}$ En el caso de tener que sumar dos vibraciones con misma frecuencia puede resultar más simple trabajar con las relaciones geométricos involucradas (Gracias al isomorfismo que antes probamos entre el plano \mathbb{R}^2 y \mathbb{C}). Una de estas maneras es representar a los desplazamientos en los famosos diagramas de Argand como vectores móviles. Ya sabemos que el factor $\omega t + \phi$ varía uniformemente con el tiempo y el desplazamiento resulta de la proyección de dicho vector en el eje, ie: $\psi(t) = \langle \vec{z}, \vec{\mathcal{R}ez} \rangle$. Por ende graficando el módulo de ψ como un vector, con un ángulo ϕ respecto al eje real y que se desplace en la dirección antihoraria con un ángulo ωt representaríamos en el eje real al desplazamiento $\psi(t)$ como podemos ver en la figura 1, este vector rotante se le llama *fasor*

Luego en el caso de querer sumar dos vibraciones $\psi = \psi_1 + \psi_2$ podemos representar el nuevo fasor de ψ_2 con el eje de coordenadas **en el fin del anterior**, tal como hacíamos con la suma de vectores. Es más como cuando trabajamos en la forma polar vimos que el producto de complejos resulta en el producto de sus módulos y la suma de sus argumentos, el producto de fasores resulta en el producto de sus módulos y la suma de sus fases iniciales $\phi_1 + \phi_2$.

Y para que sirve? Simple, cuando tenemos una relación entre vibraciones que debe valer para todo tiempo las podemos especializar en $t = 0$ por ejemplo, y podemos traducir la ecuación en fasores y de allí poder verificar A y ϕ que lo cumplan para ese t y por ende deben valer $\forall t$

4. Identidades útiles

Para finalizar ésta sección sería útil presentar algunas de la identidades mas utilizadas en el trascurso del apunte y poder demostrarlas brevemente:

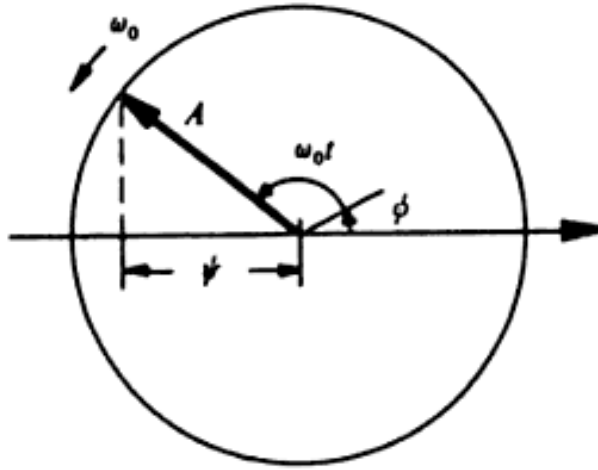


Figura 1: El fasor que genera $\psi(t)$. a $t = 0$ el vector está a un ángulo ϕ del eje

$$1. \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx = \pi$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx &= \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2x)}{2} dx \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dx + \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2x)}{2} dx \\ &= \frac{2\pi}{2} + \frac{(\sin(4\pi) - \sin(0))}{4} = \pi + 0 = \pi \end{aligned}$$

$$2. \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx = \pi$$

$$3. \int_0^{2\pi} \cos(x) \sin(x) dx = 0$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(x) \sin(x) dx &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin(2x)}{2} dx \\ &= \left(\frac{-\cos(2x)}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{4} (\cos(0) - \cos(4\pi)) = 0 \end{aligned}$$

$$4. (1 + \epsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\epsilon + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\epsilon^2 \quad (|\epsilon| < 1) \text{ Donde generalmente se toma solamente el primer orden, ie: } (1 + \epsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\epsilon$$

$$f(\epsilon) = (1 + \epsilon)^\alpha \implies f(\epsilon) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{2} + \frac{f''(0)}{6}$$