Parte I

Un ánalisis integratorio: Modelado de ondas en el agua

En esta parte pareció propicio finalizar ondas mecánicas con el ejemplo que más pensamos cuando nos dicen ondas: ondas en el agua, que son, en general dispersivas. La forma de poder encarar este objetivo es analizar la geometría del movimiento ondulatorio en el agua, analizar sus restricciones para poder atacar la física del movimiento (O sea de algún modo poder plantear las ecuaciones de Newton que es lo único que sabemos aún) para hallar la relación de dispersión que nos dará el tipo de ecuación de ondas regente y finalizar con algunos casos extremos que nos permitirán palpar lo que estamos modelizando.

1. La naturaleza del movimiento ondulatorio

Supongamos un canal rectangular infinito de altura h donde está el agua. Observamos que en equilibrio la superficie superior es plana y horizontal; hasta que por alguna brisa se excita algún modo y se forma una onda armónica. Aunque lo único que podamos observar sea una onda transversal al plano de la superficie del agua, *toda* la masa de agua esta participando de algún modo en una onda **longitudinal**. De no ver esto revisarlo ya que es vital entender la onda es longitudinal. Describiremos, como siempre, los desplazamientos del equilibrio con la función ψ.

Propiedades del agua Veamos algunas propiedades del agua que nos ayudaran en nuestro modelo (ya tomamos como sabidas las dadas en el estudio de la cocina de microondas). Desde el punto de vista del movimiento ondulatorio, las propiedades que resaltan son

1. Es muy díficil de comprimir
2. Fluye fácilmente

Númericamente la compresibilidad del agua en condiciones estándar es de $5{,}10^{-10} m^2 N{-}1$, además si pudiésemos apilar toda una columna de agua de 1 m entonces la presión resultante (unos $10^4 Nm{-}2$) aumentarían su densidad en 0,05, o sea nada, por lo que no es osado asumir que en nuestros casos el agua es un fluido *incompresible* (que es muy distinto a incomprensible jaja).
La facilidad con la que un fluido fluye (ohhhhh) viene de su *viscosidad* que proviene del amortiguamiento y por ende llevará a una *atenuaciíon* del movimiento ondulatorio (Repasar los cap anteriores!). Supongamos, sin embargo, que nuestro fluido no presente viscosidad. La incompresibilidad va a presentar serias restricciones al movimiento, ya que si en algún momento tenemos una partícula que se mueve hacia abajo, la partícula circundante debe moverse *al costado* pues sino se apilarían llevando a una compresión del fluido!! Por ende analicemos dicho movimiento

1.1. Consideraciones generales

Supongamos un eje coordenado cartesiano con el eje y vertical, con $y = 0$ la superficie, y el eje z representando el avance de la onda (Notemos con un movimiento en dos dimensiones basta pues por simetría para pequeñas vibraciones el eje x se comportará de la misma manera al z).
Para el plano yz cada partícula de agua va a recorrer una trayectoria dada por $r = (y, z)$ que podemos especificar por los desplazamientos $\psi_y(y, z, t)$ y $\psi_z(y, z, t)$, estimemos algunas afirmaciones para movimientos armónicos en la superficie de estas dos funciones:

1. El agua se presenta en un estado estacionario, por lo que tanto ψ_y como ψ_z presentan la frecuencia ω de la onda viajera de la superficie
2. Es natural pensar que los argumentos de las funciones presenten un término $\omega t - kz$ pues son ondas viajeras en álgun sentido general de todo el fluido. A su vez al no saber de la dependencia con y, supongamos que *son independientes de y*, o sea que si en un estado de equilibrio tenemos una pila de partículas, éstas se mueven conjuntamente al haber una perturbación y aunque la perturbación avance **la posición relativa de la pila de partículas respecto a ellas mismas es siempre constante!**.
3. Si imaginamos el momento en que $\psi_y = 0$ entonces ahí $\dot{\psi}_y$ es máxima y entonces el mayor rearreglo horizontal debe realizarse, por lo que suponemos que ψ_z es máximo por lo que estimamos *ψ_y y ψ_z estan en cuadratura*
4. Esperamos que el movimiento del agua acrecente su suavidad al ir adentrándonos con profundidades mayores, por lo que a distancia infinita no debería haber dependencia de la distancia por lo que las amplitudes horizontal y verticla estimamos que *sólo dependen de y*

Entonces todo esto se peude decir que esperamos que los desplazamientos sean de la pinta:

$$\psi_y(y,z,t) = A_y(y)\cos(\omega t - kz) \quad \psi_z(y,z,t) = A_z(y)\sin(\omega t - kz) \tag{1.1}$$

Notemos que desplazamientos como los dados, se tiene que $\forall y, z, t$ de (1.1) vale

$$(\frac{\psi_y}{A_y})^2 + (\frac{\psi_z}{A_z})^2 = 1$$

Por lo que **para el movimientos suave ondulatorio del agua, cada partícula realiza una trayectoria de una elipse con centro en el punto de equilibrio**. Como el desplazamiento del punto de equilibrio no es un parámetro medible fácilmente, es preferible utilizar la velocidad del fluido para representarlo, por lo que si suponemos pequeñas oscilaciones podemos decir que

$$\begin{gathered} v_y(y,z,t) \approx \dot{\psi_y} = -\omega A_y(y)\sin(\omega t - kz) \\ v_z(y,z,t) \approx \dot{\psi_z} = \omega A_z(y)\cos(\omega t - kz) \\ \Updownarrow \\ \psi_y, \psi_z \ll y, z \quad \forall t \end{gathered} \tag{1.2}$$

Ahora nos tenemos que preguntar luego de todo lo deducido con los dedos, como son las formas de las elipses? aquí es donde entra nuestro conocimiento de las propiedades del agua para imponer restricciones.

1.2. La incompresibilidad

Vamos a deducir las condiciones matemáticas que dicen que un fluido es incompresible. Para una superficie S cerrada y *suave*(Decimos una superficie es suave si presenta plano tangente en todo punto y varía uniformemente) que encierra un volumen dado $V = \int_S \rho(x,y,z)dV$ se tiene que un fluido es incompresible si el flujo a través de S con frontera Ω es nulo $\forall S = Im\{T(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^3\}$. Es decir que

$$\oiint_\Omega \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \forall S$$

Y, si recordamos todos el teorema de Gauss-Ostrogradsky tenemos entonces que $\forall S$ con frontera $\partial S = \Omega$ el campo $\vec{v}$ es $\mathcal{C}^1$ y entonces

$$\nabla \cdot \vec{v} = \mathbf{div}\ v = \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{1.3}$$

Johann Carl Friedrich Gauss (1777?1855), fue un matemático, astrónomo, geodesta, y físico alemán que contribuyó significativamente en muchos campos, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la estadística, el álgebra, la geodesia, el magnetismo y la óptica. Considerado **el príncipe de las matemáticas** y **el matemático más grande desde la antiguedad**, Gauss ha tenido una influencia notable en muchos campos de la matemática y de la ciencia, y es considerado uno de los matemáticos que más influencia ha tenido en la Historia. Fue de los primeros en extender el concepto de divisibilidad a otros conjuntos. Gauss fue un niño prodigio, de quien existen muchas anécdotas acerca de su asombrosa precocidad. Hizo sus primeros grandes descubrimientos mientras era apenas un adolescente en el bachillerato y completó su magnum opus, Disquisitiones Arithmeticae a los veintiún años (1798), aunque no sería publicado hasta 1801. Fue un trabajo fundamental para que se consolidara la teoría de los números y ha moldeado esta área hasta los días presentes.

1.3. La no-viscosidad

Como estamos suponiendo que nuestro fluido no presenta viscosidad, entonces como originalmente estaba en reposo podemos afirmar que cualquier perturbación **no puede generar momento angular** en nuestro fluido. La rotación sólo puede generarse por fuerzas transversales que no existen en un fluido no viscoso. Por ende podemos decir que la *circulación* a través de toda curva debe ser nula. Matemáticamente, Sea C una curva suave (presenta recta tangente en todo punto que varía continuamente) siendo borde de una superficie plana S, o sea $C = \partial S$ entonces

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \forall \mathcal{C}$$

y aquí si recordamos el Teorema de Stokes, suponiendo nuevamente que $\vec{v}$ es un campo $\mathcal{C}^1$ entonces tenemos la condición que se llama de *irrotabilidad* o de fluido **irrotacional**

$$\nabla \times \vec{v} = \mathbf{rot}\ v = \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} = 0 \tag{1.4}$$

Sir George Gabriel Stokes, primer Baronet $(1819 - 1903)$ fue un matemático y físico irlandés que realizó contribuciones importantes a la dinámica de fluidos (incluyendo las ecuaciones de Navier-Stokes), la óptica y la física matemática (incluyendo el teorema de Stokes). Fue secretario y luego presidente de la Royal Society de Inglaterra.

1.4. La forma de las elipses

Ahora apliquemos las relaciones (1.3) y (1.4) halladas antes y algunas otras condiciones de contorno a nuestras expresiones (1.2) para v_y y v_z lo que nos dara información de las amplitudes. Aplicando (1.3) tenemos que:

$$-\omega \frac{dA_y}{dy}(y)\sin(\omega t - kz) - k\omega A_z(y)\sin(\omega t - kz) = 0$$

Y cancelando el factor $\omega \sin(\omega t - kz)$ tenemos

$$\Longrightarrow \frac{dA_y}{dy}(y) - kA_z(y) = 0 \tag{1.5}$$

Análogamente con (1.4) obtenemos

$$\frac{dA_z}{dy}(y) - kA_y(y) = 0 \tag{1.6}$$

Suponiendo las amplitudes $A_y, A_z \in \mathcal{C}^2$ entonces podemos derivar la primera ecuación con respecto a y y reemplazar la segunda en la primera obteniendo

$$\frac{d^2A_y}{dy^2} - k^2 A_y = 0$$

$$\Longrightarrow A_y(y) = A' e^{ky} + B' e^{-ky}$$

Y ahora nos falta hallar nuestras condiciones de contorno para A' y B'. En la superficie $y = 0$ tenemos que:

$$\psi_y(0, z, t) = (A' + B')\cos(\omega t - kz)$$

Entonces llamando a $A_y(0) = A = A' + B'$. Por otro lado cuando $y = -h$ en el fondo del canal no puede haber movimiento vertical solo lateral por lo que

$$A_y(-h) = 0 = A' e^{-hk} + B' e^{kh}$$

Y entonces resolvemos este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{aligned} A' &= \frac{Ae^{kh}}{e^{kh} - e{-}kh} \\ B' &= -\frac{Ae^{-kh}}{e^{kh} - e{-}kh} \end{aligned}$$

Lo que nos lleva a la ecuación de la amplitud

$$A_y(y) = \frac{A\left[e^{k(h+y)} - e^{-k(h+y)}\right]}{e^{kh} - e{-}kh} = \frac{A\sinh\left[k(h+y)\right]}{\sinh kh} \tag{1.7}$$

$$A_z(y) = \frac{A\left[e^{k(h+y)} + e^{-k(h+y)}\right]}{e^{kh} - e{-}kh} = \frac{A\cosh\left[k(h+y)\right]}{\sinh kh} \tag{1.8}$$

Y eso nos indica que la forma de las elipses es mas horizontal y achatadas, factor que va aumentando al aumentar la profundidad como función de $\tanh[k(h + y)]$ llegando a que en el fondo el movimiento es sólo horizontal con el agua yendo de adelante para atrás.No obstante en fluidos viscosos en general existe una çapa límite"sobre la cual pasa este efecto y allí hay vórtices horizontales que son los responsables de las famosas crestas del mar en la arena de una playa.

1.5. Casos extremos

Finalmente podemos y vale la pena remarcar los dos casos extremos de movimientos del agua con profundidades grandes y pequeñas

Los movimientos en aguas profundas Si el movimiento ocurre en aguas mucho mas profundas que la longitud de onda ($kh \gg 1$) y a nosotros nos interesa el agua de la superficie ($|y| \ll h$) entonces podemos usar

$$\sinh kh \approx \frac{1}{2}e^{kh}$$

$$\sinh[k(h+y)] \approx \cosh[k(h+y)] \approx \frac{1}{2}e^{kh}$$

Entonces ahora tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \psi_y(y,z,t) & \approx & Ae^{yk}\cos[\omega t - kz] \\ \psi_z(y,z,t) & \approx & Aeyk\sin[\omega t - kz] \end{array}$$

Entonces podemos ver que ahora las elipses se tornaron circunferencias cuyo diámetro decrece exponencialmente al ir aumentando la profundidad y el movimiento es casi nulo a profundidades mayores a $\frac{1}{k}$ porlo que *en aguas profundas las ondas no perturban el agua a mas de una longitud de onda de la superficie* que es aprovechado muy bien por las industrias petroleras al hacer sus estaciones de extracción marítimas.

Aguas poco profundas En el otro extremo tenemos las aproximaciones

$$\sinh kh \approx kh$$

$$\sinh[k(h+y)] \approx k(h+y)$$

$$\cosh[k(h+y)] \approx 1$$

Y entonces tenemos que los desplazamientos seran del tipo

$$\begin{array}{rcl} \psi_y(y,z,t) & \approx & A(1+\frac{y}{h})\cos[\omega t - kz] \\ \psi_z(y,z,t) & \approx & A\frac{1}{kh}\sin[\omega t - kz] \end{array} \tag{1.9}$$

Y ahora la amplitud horizontal es más o menos la misma a todas profundidades mientras que la amplitud vertical decae linealmente con la profundidad por lo que *las ondas de aguas poco profundas resultan ser casi del todo longitudinales* con una masa de agua que simplemente empuja adelante y hacia atrás su alrededor.

2. La relación de dispersión

Hasta ahora hemos descubierto como describir el movimiento de un canal estrecho de agua con ondas viajeras sinusoidales en sus superficie, pero sin embargo todavia no sabemos qué tipo de sinusoidales podemos tener. Para poder obtener la relación de dispersión debemos involucrar las leyes de Newton en algún lado!
Dentro de la mecánica de fluidos el análogo de las leyes de Newton resulta en el *teorema de Bernoulli* que aplica a situaciones estacionarias, lo que quiere decir que la velocidad del fluido sea independiente del tiempo para todo tiempo, o sea $v(x,y,z,t) = v(x,y,z)\ \forall t$; condición que no cumplen nuestras velocidades 1.2.
Daniel Bernoulli $(1700-1782)$ fue un matemático, estadístico, físico y médico holandés-suizo. Destacó no sólo en matemática pura, sino también en las llamadas aplicadas. Hizo importantes contribuciones en hidrodinámica y elasticidad.

Sin embargo aplicando la transformación $z' = z - \frac{\omega t}{k}$ las velocidades pasan a ser.

$$\begin{gathered} v_y(y,z') = \omega A_y(y)\sin kz' \\ v_z(y,z') = \omega A_z(y)\cos\left(kz' - \tfrac{\omega}{k}\right) \end{gathered} \tag{2.1}$$

y ahora si tenemos velocidades estacionarias, o sea cambiamos nuestra manera de ver al fluido y pasamos de ver una partícula y seguirla a pararnos nosotros y ver como pasan todas por un lugar.
Entonces l teorema de Bernoulli nos dice que el total de energía por unidad de masa resulta:

$$W = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + V \tag{2.2}$$

con p la presión, V la energía potencial por unidad de masa y ρ la densidad del fluído; y entonces presenta el mismo valor en todo punto de una *línea de corriente* que simplemente es un camino recorrido por una partícula de fluído en estado estacionario.
Hay dos contribuciones a la presión en la superficie, una es la atmosférica p_a que es constante en todo punto; y la otra es debido a la *tensión superficial*, que conlleva una diferencia de presión sobre cualquier frontera con curvatura. Dicha curvatura ocurre solo en el eje z con el radio de curvatura $1/(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2})$ y entonces la presión total resulta:

$$p = p_a - \sigma(\partial^2\psi/\partial z^2) \tag{2.3}$$

Con σ la tensión superficial (0,073 Nm^{-1} para la frontera aire agua a 20°) y el signo menos es debido a que una curvatura positiva indica una concavidad positiva y enotnces una **reducción** de la presión. Metiendo los desplazamientos en el nuevo sistema en la ecuación 2.3 tenemos.

$$p = p_a + \sigma k^2 A \cos kz' \tag{2.4}$$

Por el lado de la velocidad tenemos:

$$\begin{aligned} v^2 &= v_y^2(0,z') + v_z^2(0,z') \\ &= \omega^2 A^2 \left(\sin^2(kz') + \coth^2(kh)\cos^2(kz')\right) + \left(\tfrac{\omega}{k}\right)^2 - 2\omega^2(A/k)\coth(kh)\cos(kz') \end{aligned} \tag{2.5}$$

y para la energía potencial simplemente la gravitatoria

$$V = g\psi = gA\cos(kz') \tag{2.6}$$

Poniendo 2.5 , 2.6 , 2.4 en 2.2, despreciando los términos de orden mayor a 1 pues $kA \ll 1$ para ondas de amplitudes bajas, obtenemos:

$$W = \frac{p_a}{\rho} + (\frac{\sigma k^2}{\rho})A\cos kz' + \frac{1}{2}(\frac{\omega}{k})^2 - (\frac{\omega^2}{k})\coth khA\cos kz' + gA\cos kz'$$

que, según Bernoulli debe ser independiente de z' (valor constante en una línea de fluído) y eso valdrá si los términos que incluyen a $\cos kz'$ sean 0, lo que vale si:

$$\frac{\sigma k^2}{\rho} - \left(\frac{\omega^2}{k}\right)\coth(kh) + g = 0$$

Que se puede escribir de la manera:

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\sigma k^3}{\rho}\right)\tanh kh \tag{2.7}$$

Que es la relación de dispersión para ondas de baja amplitud

3. Ejemplos de ondas de agua

En esta sección discutiremos casos extremos de la relación de dispersión y ejemplos de ondas que la describen.

Aguas profundas y aguas sómeras

Dado que al profundidad del agua se mete en la relación de dispersión 2.7 vía $\tanh kh$, para aguas profundas ($kh \gg 1$) podremos decir

$$\tanh kh \approx 1$$

y la relación 2.7 se vuelve independiente de la profundidad.
En cambio, para aguas poco profundas puedo utilizar la expansión a primer orden:

$$\tanh = kh - \frac{1}{3}(kh)^3 + ... \quad \forall kh < \frac{\pi}{2}$$

3.1. Rizos

La relación de dispersion 2.7 presenta dos términos que representaran dos tipos de fuerza de retorno con distintos comportamientos en la superficie del fluído. La primera (que presenta a g y no a σ) nos va a indicar la tendencia del agua apilada en crestas a caer por la gravedad; mientras que la segunda representa la fuerza de la tensión superficial a que el fluído no se "desestructure"demasiado y tiende a achatar nuestras ondas. Podemos probar que para las ondas de éste título, que representan ondas cortas, es **solamente** significativo el término de la tensión superficial. Veamoslo! los dos términos se igualan cuando:

$$k^2 = \frac{\rho g}{\sigma}$$

$$\implies \lambda = 2\pi\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\rho g}\right)}$$

Cuyo valor es de 17 mm para agua a 20°, ondas con valores de λ mucho menores que éste van a tener una curvatura tan grande que el término dominante será el de la tensión superficial. Si entonces suponemos $\lambda \ll 17\ mm$ el término de la gravedad lo podemos despreciar y entonces suponiendo $kh \gg 1$ (que valdrá casi siempre pues miren la longitud de onda!!) tenemos:

$$w \approx \sqrt{\frac{\sigma k^3}{\rho}} \tag{3.1}$$

Y como $k^{3/2}$ es cóncava positiva tenemos un caso de dispersión **anómala**.
La velocidad de fase es:

$$v_\phi = w/k \approx \sqrt{\frac{\sigma k}{\rho}} = \sqrt{\frac{\sigma 2\pi}{\rho\lambda}}$$

Y las ondas con longitud de onda más corta viajan más rápido. Por otro la velocidad de grupo:

$$v_g = d\omega/dk \approx \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\sigma k}{\rho}} = \frac{3}{2}v_\phi$$

Como $v_g > v_\phi$ las ondas en general parece que viajan hacia atrás al propagarse.

Ondas gravitatorias en aguas profundas

Para toda onda con $\lambda \gg 17\ mm$ el efecto de la tensión superficial es despreciable y, por ahora, supongamos que $kh \gg 1$ donde entonces todas las partículas se moverán en círculos. Entonces

$$\omega \approx \sqrt{gk} \tag{3.2}$$

Y entonces presenta una dispersión **normal**, con velocidades:

$$\begin{array}{rcccl} v_\phi & \approx & \sqrt{g/k} & = & \sqrt{g\lambda/2\pi} \\ v_g & \approx & \frac{1}{2}\sqrt{g/k} & = & \frac{1}{2}v_\phi \end{array}$$

Y tenemos como primer y principal ejemplo de ondas de éste tipo a las del oleaje y en general este tipo nos permiten predecir tormentas a muchos km de distancia mediante las ondas que viajan a la velocidad de fase, mientras que la energía se transporta con el paquete a la velocidad de grupo, menor que la de fase (gracias a dios jaja)

3.2. Ondas gravitatorias en aguas sómeras

Estas ondas, como vimos, son aproximadamente longitudinales; entonces para $kh \ll 1$ de 2.7 tenemos:

$$\omega^2 = ghk^2\left(1 - \frac{1}{3}h^2k^2\right)$$

y aplicando el teo del binomio al termino de $(1-\epsilon)^{1/2}$ tenemos

$$\omega \approx ck - dk^3$$

con

$$\begin{array}{rcl} c & \equiv & (gh)^{1/2} \\ d & \equiv & \frac{1}{6}ch^2 \end{array} \tag{3.3}$$

Y obtenemos una dispersión **normal** pues $d > 0$, aunque en el caso donde podemos despreciar el término cúbico de la tangente hiperbólica tenemos:

$$v_g = v_\phi \approx c = (gh)^{1/2} \tag{3.4}$$

En cuyo caso tendríamos, recordando 1.9 tendríamos:

$$\dot{\psi}_z \approx (c/h)\psi \approx (g/h)^{1/2}\psi \tag{3.5}$$

Y la velocidad estaría en fase con el desplazamiento y con una proporción a éste constante para todas las frecuencias. Es más, éste factor es casi la impedancia característica del sistema (salvo un factor de densidad), por lo que podemos observar en ψ como una medida del aumento de la presión hidrostática del agua debajo.
El ejemplo mas característico de ondas en aguas sómeras representa a las vistas en la costa. Si la playa varía gradualmente, las ondas que se aproximan a la costa irían perdiendo velocidad porque h va decreciendo, lo que conlleva que su amplitud aumente para que la energía sea constante; aunque ésto no vale para ondas de amplitudes grandes, conocidas como olas, cuyo último destino es *romper* en la playa. Esta ejemplo llevado al extremo está en los *tsunamis* donde un terremoto en la placa oceánica genera una perturbación que cumple con lo que predijimos, salvo que en el

análisis exacto valen más términos de la tangente hiperbolica y la relación de dispersión no resulta tan simple, aunque el concepto es el mismo y es válido. Pero, ehmm, cómo? Esto no valía para ondas en aguas someras? Ah buen mis pequeños, es que estos terremotos generan ondas con longitudes de onda **tan** enormes que hasta el océano entero es un charco en relación y toda esa velocidad se transforma en amplitud con muy poca pérdida de energía, es más como la dispersión en general es baja pasa que la energía se concentra en unas pocas olas con los efectos conocidos.