Parte I

Relaciones de dispersión y ondas en medios dispersivos

1. Ondas especiales

El análisis hecho hasta ahora, en general, asumió perturbaciones que son solución de la ecuación de onda clásica. Ahora vamos a analizar un caso particular donde la ecuación de ondas no es la clásica y además es dispersiva.
Consideremos N péndulos con misma masa acoplados con resortes de constante k. Hacemos el análisis dinámico (aplicado las leyes de Newton) considerando que el número N es muy grande (así como se hizo en la sección **??**).

$$m\ddot{\psi}_n = -\frac{mg}{l}\psi_n + k(\psi_{n+1} - \psi_n) - k(\psi_n - \psi_{n+1})$$

y si hacemos el pasaje al continuo obtenemos

$$\psi_{n+1} \to \psi(x+a,t) = \psi(x,t) + a\partial_x\psi + a^2\partial_{xx}\psi$$

y lo mismo para ψ_{n-1}, con lo que obtenemos

$$\partial_{tt}\psi(x,t) = -\omega_0^2\psi(x,t) + \frac{Ka^2}{m}\partial_{xx}\psi(x,t) \tag{1.1}$$

que se denomina ecuación, de ondas, de Klein-Gordon. Si proponemos la solución $\psi(x,t) = A(x)e^{i(\omega t+\phi)}$ obtenemos

$$\frac{ka^2}{m}\frac{d^2A}{dz} - (\omega_0^2 - \omega^2)A(z) = 0$$

ecuación que tiene solución exponencial pura (solución que decimos está en la zona reactiva) para $\omega > \omega_0$ y una solución armónica para $\omega < \omega_0$ (decimos que es la zona activa).
Para encontrar la relación de dispersión propongamos una solución al caso discreto y luego hagamos el paso al límite continuo. Si proponemos $\psi_n = A_n e^{i\omega t}$, obtenemos la relación

$$m\omega^2 A_n = \frac{mg}{l}A_n - K(A_{n+1} + A_{n-1} - 2A_n),$$

para la cual proponemos $A_n = Ae^{ikan}$, con lo que nos queda

$$m\omega^2 = \frac{mg}{l} + 4K\operatorname{sen}^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

que en el límite nos queda

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{Ka^2}{m}k^2 = \omega_0^2 + c^2k^2 \tag{1.2}$$

es decir que que existe una dispersión, ya que $k \neq c^{-1}\omega$.

1.1. Paquetes de ondas

Veamos como se mueven dos ondas armónicas, propagandose para el mismo sentido, con frecuencias muy parecidas, es decir que la pertubación será

$$\psi(x,t) = Ae^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + Be^{i(\omega_2 t - k_2 x)}$$

Para eso definimos la frecuencias promedios y las desviaciones

$$\omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2} \quad \Delta\omega = \frac{\omega_1-\omega_2}{2} \qquad k = \frac{k_1+k_2}{2} \quad \Delta k = \frac{k_1-k_2}{2} \tag{1.3}$$

por lo que la pertubación queda

$$\psi(x,t) = (A+B)e^{i(\omega t - kx)}\left(e^{i(\Delta\omega t - \Delta kx)} + e^{-i(\Delta\omega t - \Delta kx)}\right) = (A+B)e^{i(\omega t - kx)}\cos(\Delta\omega t - \Delta kx) \tag{1.4}$$

es decir que se da una pulsación de la ampltidud de la perturbación con frecuencia ω y k.
La velocidad de cada una de estas componentes es igual a $c = \frac{\omega}{k}$. En ese caso la velocidad del paquete modulante, que denominamos velocidad de grupo, es

$$c_g = \frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}. \tag{1.5}$$

Si las perturbaciones se mueven a diferentes velocidades entonces (ya que la relación de dispersión no es lineal) la modulación se va deformando con el tiempo, además que la velocidad de grupo puede ser más rápida o más lenta que la velocidad de fase. Para ver eso consideremos que la velocidad de grupo es una función del número de onda o la frecuencia angular, es decir

$$c_g = c_g(\omega) = c_g(k) \quad \Rightarrow \quad \Delta c_g = c_g(k) - c_g(k_0) = \left.\frac{dc_g}{dk}\right|_{k_0} \Delta k = \left.\frac{d^2\omega}{dk^2}\right|_{k_0} \Delta k$$

por lo tanto la diferencia espacial es

$$\Delta x = x - x(t=0) = \left.\Delta x\right|_{t=0} + \Delta c_g t$$

es decir que si la velocidad de grupo cambia la frecuencia espacial o temporal el paquete se va deformando con el paso del tiempo.
La ecuación de onda que permite que suceda este evento se denomina dispersiva, ya que el paquete de onda se va deformando en el tiempo.
Ahora pasamos a describir una perfil de onda general, o paquete de onda, por medio del análisis de Fourier. Un perfil de onda físicamente posible (que sea continuo y que tenga longitud mucho menor que el medio de propagación) se puede descomponer en una base del espacio (en este caso vamos a utilizar exponenciales $e^{i\omega t}$ o e^{ikx})

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)B(k)e^{i(kx-\omega t)}d\omega dk = \mathcal{F}^{-1}[\hat{\psi}(k,t)]\mathcal{F}^{-}1[\hat{\psi}(x,\omega)] \tag{1.6}$$

donde definimos la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ y su inversa $\mathcal{F}^{-1}$ de la siguiente forma

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt \tag{1.7}$$

donde llamamos espectro a la función $\hat{f}$.
Podemos usar tablas de transformadas para encontrarlas, ya que una la transformada es lineal, y también verifica algunas propiedades más interesantes (ver apéndice). Una propiedad muy importante es la relación entre el ancho de banda en frecuencia y en tiempo (o en frecuencia espacial y la posición), que determina una relación de incerteza; una señal muy definida en frecuencia no va a estar definida en tiempo, como por ejemplo una delta de Dirac

$$\delta(x) = \begin{cases}\infty & x = 0\\ 0 & x \neq 0\end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)dx = f(0)$$

tiene una transformada igual una señal armónica, que no está definida en frecuencia espacial (vale lo mismo para tiempo o haciendo la antitransformada). La relación general que se encuentra es

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2} \tag{1.8}$$

que determina la dispersión espacial (o temporal) conociendo la dispresión en frecuencia (o ancho de banda) y visceversa. Es una relación fundamental que mantiene la información entre transformaciones hechas.