Parte I
Interferencia y Difracción

1. Interferencia

El proceso de interferencia consiste en la superposición de una o más ondas, y vamos a hacer hincapie en las ondas electromagnéticas (teniendo que considerar la naturaleza vectorial de las ondas). Para empezar el análisis consideremos dos fuentes puntuales monocromáticas separadas más de una longitud de onda (para despreciar efectos de difracción) y veamos como interaccionan en un punto lo suficientemente alejado (por distancia real o por medio de lentes) para que sea un frente plano. En ese punto el campo eléctrico será

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{o_1} e^{i(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}-\omega t+\epsilon_1)} + \mathbf{E}_{o_2} e^{i(\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r}-\omega t+\epsilon_2)}.$$

Aca consideramos que las ondas tiene el mismo plano de polarización (y son linealmente polarizadas) para simplificar el análisis. Consideremos que la intensidad del campo eléctrico como el cuadrado de dicha magnitud vectorial, es decir

$$E^2 = \mathbf{E}\cdot\mathbf{E} = \|\mathbf{E}_1\|^2 + \|\mathbf{E}_2\|^2 + 2\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2 = I_1 + I_2 + 2\mathbf{E}_{o_1}\cdot\mathbf{E}_{o_2} e^{i\omega t} e^{i(\epsilon_1+\epsilon_2)} e^{i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{r}},$$

y si consideramos el promedio temporal de la intensidad (lo que se llama irradiancia relativa) obtenemos que el termino final no depende del tiempo (ya que integramos en un periodo mucho más grande que $\frac{2\pi}{\omega}$) y que la irradiancia queda

$$I = \langle\|\mathbf{E}_1\|^2\rangle_T + \langle\|\mathbf{E}_1\|^2\rangle_T + \mathbf{E}_{o_1}\cdot\mathbf{E}_{o_2}\cos((\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{r}+\epsilon_1-\epsilon_2) \tag{1.1}$$

y en el caso que los campos tengan el mismo plano de oscilación nos queda que

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\delta) \tag{1.2}$$

donde δ representa la diferencia de camino óptico y de fase inicial de las ondas que se superponen. Un caso de mucha importancia practica es cuando las fuentes tienen la misma irradiancia, lo que terminamos obteniendo la siguiente expresión

$$I = 2I_0\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \tag{1.3}$$

Los puntos donde la interferencia es máxima o minimia (llamada, respectivamente, destructiva o constructiva) forman una superficie que podemos encontrar de la siguiente forma (para un frente de onda esférico producto de una fuente puntual, considerando que la distancia es suficientemente grande para despreciar cambios de la amplitud)

$$\delta = 2n\pi \qquad \Rightarrow \qquad r_1 - r_2 = \frac{2n\pi+\epsilon}{k} = n\lambda + \frac{\epsilon}{k} \tag{1.4}$$

$$\delta = (2n+1)\pi \qquad \Rightarrow \qquad r_1 - r_2 = \frac{(2n+1)\pi+\epsilon}{k} \tag{1.5}$$

ecuaciones que corresponden hiperboloides de revolución.

El análisis que hicimos acá corresponde a dos ondas de extensión infinita, la cual es generada por una fuente de forma continua. Pero en general las fuentes generan de forma intermitente, durante un tiempo determinado, que vamos a llamar tiempo de coherencia. La coherencia es la capacidad de interferir de forma correcta con dos fuentes, que se va a dar dependiendo solamente de las frecuencias temporales y la frecuencias espaciales (además de la polarización). Volviendo, el tiempo de coherencia va a determinar las componentes del paquete de onda, por lo que va a determinar qué tan pura va a ser el espectro y por lo tanto que tan visibles van a ser las franjas (ya que solo interfieren ondas de la misma frecuencia temporal, como ya vimos). La coherencia espacial, mientras tanto, determina cuanto varia en el tiempo la fase relativa entre dos puntos del espacio fijos, que va a venir determinado por la forma del frente de onda y la fuente. También la coherencia se da, para una onda vectorial como la luz, si la superposición comparten componentes de polarización, como vimos en la ecuación 1.1

Existen varios tipos de interferómetros, que dividimos por el tipo de proceso físico que efectuan, división de frente de onda o división de amplitud.

El inteferómetro por división de frente de onda más común es el de Young, el cual consiste en una fuente coherente que pasa por dos ranuras muy estrechas. Haciendo el análisis geométrico, considerando la aproximación paraxial de los rayos obtenemos que la franjas están distanciadas

$$\Delta y = \frac{L}{d}\lambda \tag{1.6}$$

que obtenemos sabiendo que la diferencia de camino óptico tiene que ser igual a $m\lambda$, lo que obtenemos que los máximos están en

$$y_m = \frac{L}{d}m\lambda \tag{1.7}$$

y por lo tanto la irradiancia será

$$I = 4I_o \cos^2\left(\frac{yd\pi}{L\lambda}\right) \tag{1.8}$$

Los demás interferómetros por división de frente de onda se puede reducir al interferómetro de Young, haciendo consideranciones respecto a las fases de las fuentes (ya que si se usa espejos la fase cambia en π si es razante, es decir ángulo de incidencia mayor a 90°). Podemos enumerar en estos interferómetros al espejo de Lloyd (donde se genera una fuente nueva con un espejo donde incide razante la fuente), el doble espejo de Fresnel (que son dos espejos planos que generan dos fuentes a partir de una, que terminar interfiriendo en una zona definida del espacio) o el biprisma de Fresnel (un primsa doble que genera una franja.

Los interferómetros por división de amplitud consisten en dividir la onda en dos partes por medio de un espejo, y luego unirlas (generando una diferencia de camino óptico) en algún punto. Vamos a diferenciar interferómetros por reflexión pura o con refracción (estos últimos son creados por películas dieléctricas).

Analizaremos primeros los de refracción, que corresponde a la interferencia producto de una película dieléctrica. Parte de los haces (consideramos que son originarios de una fuente puntual coherente) son reflejadados además de transmitidos, por lo que analizando un haz incidente observamos un reflejado y luego un transmitdo que también será reflejado y que finalmente saldá con el mismo ángulo que incidió; si logramos con una lente converger el primer rayo y el segundo rayo reflejado tendremos franjas de interferencia dependientes de la diferencia de camino óptico, que finalmente depende del ángulo de incidencia (por lo que se llaman franjas de igual inclinación) de la siguiente manera

$$\Delta LCO = 2nd\cos(\theta_t) \tag{1.9}$$

De esta forma es posible utilizar una fuente extensa para lograr franjas con la misma inclinación, siempre que se logre la coherencia temporal.

El otro tipo de franjas se denomina de igual espesor y se logra considerando el camino óptico de un haz que indice sobre una película de diferentes espesores, como puede ser una mancha de aceite sobre el agua. Debido a que el camino óptico varia dependiendo del espesor de película, varía el patrón. Interferómetros de este estilo pueden ser el de cuña, que genera un patrón sobre una una de las caras, o los anillos de Newton.

Un interferómetro puramente por reflexión, es decir con espejos solamente, es una variación del interferómetro de Michelson, el cual usando dos espejos y un divisor de haz (que podemos pensar como un espejo semiplateado, genera dos fuentes virtuales que podemos ir corriendo obteniendo diferentes patrones de interferencia.

Otros tipos de interferómetros generan interferencia por medio de varios haces, como ser el interferómetro de Fabry-Perot.

2. Difracción

Difracción es un proceso donde la luz (o cualquier onda) se desvían de su recorrido recto, debido a que se encuentra con una obstáculo fijo. Tenemos que considerar que el principio de Huygens no considera esta situación, lo que pasa al obstruir el paso de una onda, por lo que tenemos que completarlo, como hizo Fresnel. El principio de Huygens-Fresnel determina que todo punto de un frente de onda sin obstrucción inmediata es una fuente de ondas esféricas de la misma frecuencia que la onda inicial y la amplitud de la onda un tiempo posterior va a ser la superposición de los trenes de ondas nuevos (aún considerando amplitud y fase).

Vamos a despreciar los aspectos electromagnéticos de la difracción con una pantalla opaca (que denominamos Σ) con una abertura, donde la pantalla generará ondas reflejadas por la oscilación de sus dipolos. Si la longitud de onda es relativamente comparable con la abertura veremos en la cercanía (lo que se denomina campo cercano o difracción de Fresnel) una sombra parecida a la fuente, con algunas deformaciones. Al ir alejando la pantalla encontramos que en un momento la sombra genera un patrón extendido que no varía más (solamente de amplitud). Este caso se denomina campo lejano o difracción de Fraunhoffer. Lo que pasa en la difracción de Fresnel es que la superposición de ondas, que depende de la fase, tiene una componente angular, alterando de forma considerablemente el campo, pero a larga distancia solo depende de la posición donde se forma la franja y la forma de las franjas dependerán solamente de la forma de la abertura de forma lineal.

Para estudiar el proceso de difracción vamos a considerar una línea de N osciladores todos coherentes distanciados d. Consideramos que el campo es lejano, por lo que usamos todos haces paralelos. La suma será

$$E = E_o(r)\sum_{j=1}^{N} e^{i(kr_j-\omega t)} = E_o(r)e^{i(kr_1-\omega t}\left(1+\sum_{j=2}^{N} e^{ik(r_j-r_1)}\right) = E_o(r)e^{i(kr_1-\omega t}\left(1+\sum_{j=2}^{N}\left(e^{i\delta}\right)^2\right)$$

donde usamos que $\delta = kd\,\mathrm{sen}(\theta)$, por lo que es deducible que $n\delta = k(r_n - r_1)$. La serie anterior converge en la siguiente expresión

$$E = E_o(r)e^{-i\omega t}e^{i\left(kr_1+(N-1)\frac{\delta}{2}\right)}\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

y por lo tanto la intensidad será

$$I = I_o\frac{\mathrm{sen}^2(N\delta/2)}{\mathrm{sen}^2(\delta/2)}$$

donde observamos que para $N=2$ obtenemos el patrón de interferencia (ecuación 1.3) Ahora consideremos una fuente lineal, es decir el caso anterior pero la distancia entre fuentes es diferencial. Un diferencial de campo lo podemos escribir

$$dE = \frac{\varepsilon}{R} e^{i(kr-\omega t)} dy$$

donde definimos la eficacia de la fuente $\varepsilon = r\|E\|$ y consideramos que el vector $r \approx R$, el del centro de la fuente al punto en cuestión. Para la fase de la fuente debemos escribir la distancia

$$r = \sqrt{R^2 + y^2 - 2Ry\,\mathrm{sen}(\theta)} = R - y\,\mathrm{sen}(\theta) + \frac{y^2}{2R}\cos^2(\theta) + \ldots$$

donde usamos los primeros terminos de la expansión. Lo que nos queda finalmente es la siguiente integral

$$E(P) = \frac{\varepsilon}{R}\int_{-b/2}^{b/2} e^{i(k(R-y\,\mathrm{sen}(\theta))-\omega t)} dy$$

que finalmente vale (considerar que $\mathrm{sen}(\theta)$ es constante)

$$E = \frac{\varepsilon b}{R}\frac{\mathrm{sen}(kb/2\,\mathrm{sen}(\theta))}{kb/2\,\mathrm{sen}(\theta)} e^{i(kR-\omega t)} \tag{2.1}$$

y por lo tanto la irradiancia de una dicha fuente será

$$I(kb/2\,\mathrm{sen}(\theta) = \beta) = I(0)\mathrm{senc}^2(\beta) \tag{2.2}$$

El análisis acá llevado a cabo es válido para una rendija fina, despreciando la difracción debido al tamaño de dicha.
Para N cantidad de rendijas podemos encontrar que el campo distante es igual al encontrado para una rendija, multiplicado por la expresión que obtuvimos para los N osciladores, es decir

$$E = C\mathrm{senc}(\beta) e^{i(-kR+\omega t-(N-1)\alpha)} \frac{\mathrm{sen}(N\alpha)}{\mathrm{sen}(\alpha)} \tag{2.3}$$

donde $\alpha = \frac{ka\,\mathrm{sen}(\theta)}{2}$, siendo a la distancia entre rendijas. De esta forma el patrón que se obtiene es el producto del patrón de una rendija con el patrón generado por una fuente puntual en cada rendija, resolución que tiene de caracter general al considerar la óptica de Fourier. La irradiancia resultante será por lo tanto

$$I(\theta) = I(0)\mathrm{senc}^2(\beta)\left(\frac{\mathrm{sen}(N\alpha)}{\mathrm{sen}(\alpha)}\right)^2 \tag{2.4}$$

expresión funcional que observamos en la figura 1, donde vemos que los máximos principales se encuentran donde la interferencia es máxima ($\alpha = k\pi$), mientras entre máximos habrá $N-1$ máximos secundarios ($\alpha = \frac{(2n+1)\pi}{2N}$ que maximiza el denominador de la parte de interferencia). Finalmente observamos que la interferencia es modulada por la figura de difracción.
Para resolver aberturas bidimensionales consideremos un diferencial de campo producto de un diferencial de superficie

$$dE = \frac{\varepsilon}{R} e^{i(kr-\omega t)} dS.$$

En este caso la distancia r seguirá $r^2 = X^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2$, donde las coordenadas en mayúscula representan el punto P y las minusculas las coordenadas del plano de la abertura; de esta forma $r^2 = R^2 + (x^2+z^2) - 2(Yy - Zz)$ y si hacemos un desarrollo de Taylor a primer orden obtenemos que

$$r = R\left(1 - \frac{Yy - Zz}{R^2}\right)$$

por lo que la integral nos queda

$$E = \frac{\varepsilon}{R} e^{i(\omega t - kR)} \int_{\text{abertura}} e^{ik\frac{Yy-Zz}{R}} dS \tag{2.5}$$

que podemos escribir de la siguiente manera, consolidando las constantes en la función $A(x,y)$ y observamos que $k_Y = k\frac{Y}{R}$ y lo mismo para k_Z

$$E(x,y) = \iint A(x',y') e^{i(k_Y y + k_Z z)} dxdy \tag{2.6}$$

donde queda evidente que el campo finalmente va a ser la transformada de Fourier de la función A que llamamos función de abertura.
Haciendo la integral **??** para una ranura rectangular, con lado a en el eje z y lado b en el eje y, encontramos que tiene una irrandiancia compuesta por dos irradiancias en el eje y y en el eje z (ya que la integral se puede separar en virtud del teorema de Fubini), es decir

$$I(\beta_y = kbY/2R, \beta_y = kaZ/2R) = I(0)\mathrm{senc}^2(\beta_y)\mathrm{senc}^2(\beta_z) \tag{2.7}$$

Para una abertura circular, radio a, debemos escribir la integral en coordenadas esféricas y utilizar la función J_0 de Bessel, que es igual a

$$J_0(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iu\cos(v)}dv,$$

la cual al integrarla nos queda un campo igual a

$$E = \frac{\varepsilon e^{i(\omega t - kR)}}{kq} 2\pi a J_1\left(\frac{kaq}{R}\right)$$

donde q es la distancia en el plano imagen al punto P. De esta forma la irradiancia queda

$$I(\theta) = 4I_0 \frac{J_1^2(ka\,\mathrm{sen}(\theta))}{ka\,\mathrm{sen}(\theta)} \tag{2.8}$$

Acá podemos observar que el máximo central tiene una extensión radial, que numéricamente observamos igual a

$$q_1 = 1,22\frac{R\lambda}{2a} \tag{2.9}$$

valor que va a determinar, por ejemplo, el límite de una lente que enfoca en la pantalla (es decir $f \approx R$) debido a la difracción. La expresión anterior determina el criterio de Rayleigh para resolver imagenes; en este criterio es necesario que el máximo central del patrón de cada imagen esté el en minimo de la otra, así es posible diferenciar las dos fuentes.

2.1. Redes de difracción

Una red de difracción corresponde a un objeto con un patrón periodico que difracta de forma periodica la luz entrante, por medio de cambio periodo de fase u/o amplitud. Para las redes de amplitud, utilizamos la irradiancia de la ecuación 2.4, ya que una colección de N rendijas es básicamente una red de difracción por amplitud (sea por reflexión o transmisión). De esa forma nos queda que

$$a(\mathrm{sen}(\theta_m) - \mathrm{sen}(\theta_i)) = m\lambda \tag{2.10}$$

que es de caracter general, aún para las redes por cambio de fase (donde podemos encontrar la diferencia de camino óptico por medio de un esquema), donde θ_i es el ángulo de incidencia respecto a la normal de la red.
Finalmente definimos la resolución espectral de una red como la capacidad de generar máximos para longitudes de onda cercanas, es decir

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\mathrm{min}}} \tag{2.11}$$

y si consideramos el criterio de Rayleigh (que el máximo central de una longitud de onda esté en el primer minimo de la más cercana) obtenemos que

$$R = mN,$$

que finalmente nos queda

$$R = \frac{Na(\mathrm{sen}(\theta_m) - \mathrm{sen}(\theta_i)}{\lambda} \tag{2.12}$$

donde podemos deducir que en autocolimación ($\theta_i = -\theta_m = 90°$) logramos la mayor resolución espectral.