Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет имени
Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Робототехники и комплексной автоматизации»
КАФЕДРА «Системы автоматизированного проектирования (РК-6)»

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине «Вычислительная математика»

Студент:	Горохова Алексадра Сергеевна
Группа:	РК6-56Б
Тип задания:	лабораторная работа
Тема:	Интерполяция Лагранжа

Студент ____________ подпись, дата Горохова А.С. Фамилия, И.О.

Преподаватель ____________ подпись, дата ____________ Фамилия, И.О.

Москва, 2022

Содержание

Интерполяция Лагранжа

Задание

Задача 1 (интерполирование полиномами Лагранжа)
Дана функция

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2} \tag{1}$$

где $x \in [-1; 1]$. Также дана рациональная функция, известная как аппроксимация Паде:

$$f_{n,m}(x) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{m} a_j x^j}{1 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k x^k} \tag{2}$$

где $x \in [-1; 1]$.
Требуется (базовая часть):
1. Разработать функцию $l\_i(i, x, x\_nodes)$, которая возвращает значение i-го базисного полинома Лагранжа, заданного на узлах с абсциссами x_nodes, в точке x.
2. Написать функцию $L(x, x\_nodes, y\_nodes)$, которая возвращает значение интерполяционного полинома Лагранжа, заданного на узлах с абсциссами x_nodes и ординатами y_nodes, в точке x.
3. Для равномерно расположенных узлов вывести на экран одновременно графики $f(x)$ и полученного интерполяционного полинома $L(x)$ для следующих количеств узлов: 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23. В результате это должно дать 7 пар графиков. Опишите, что наблюдается при увеличении количества узлов?
4. Повторить предыдущий пункт для чебышевских узлов. В чем разница между интерполяцией Лагранжа функции $f(x)$ на основе равномерно расположенных узлов и чебышевских? Сделать выводы.
Требуется (продвинутая часть):
1. Сгенерировать 100 функции $f_{n,m}(x)$, где целые степени $n, m \in [7; 15]$ и вещественные коэффициенты $a_j, b_k \in [0; 1]$ генерируются случайным образом для каждой из функции.
2. Для нескольких из сгенерированных функций вывести на экран одновременно графики $f_{n,m}(x)$ и соответствующего интерполяционного полинома $L(x)$, построенного по N равномерно расположенным узлам, где N выбирается по собственному усмотрению, но должно быть не меньше 5. На том же графике выведите $L(x)$, построенного по N чебышевским узлам.
3. Для каждой из функции, сгенерированных в предыдущем пункте, найдите интерполяционные полиномы $L(x)$, построенные по $N \in \{1, 2, ..., 30\}$ равномерно расположенным узлам и чебышевским узлам. Для каждого N рассчитайте расстояние между $f_{n,m}(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L_∞. Рассмотрите несколько графиков зависимости этого расстояния для равномерных и чебышевских узлов от N и сделайте по ним вывод. Добавьте в отчет один характерный график, который наглядно демонстри-

рует верность вашего вывода.
4. Объясните, что такое аппроксимация Паде и до какой степени предложенный метод генерации случайных функций $f_{n,m}(x)$ позволяет обобщить выводы предыдущего пункта на произвольные функции.

Цель выполнения лабораторной работы

Исследовать эффект Рунге и влияние количества узлов и их расположения на построение интерполяционного полинома Лагранжа..

1 Базовая часть

Лабораторная работа была выполнена на языке программирования Python с использованием библиотек: numpy, matplotlib.

Задание 1, базисный полином Лагранжа

Была разработана функция $l\_i(i, x, x\_nodes)$, программная реализация которой представлена на листинге 1. Она вычисляет i - ый базисный полином Лагранжа по формуле:

$$l_i(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{3}$$

Функция получает на вход: i-ый номер базисного полинома Лагранжа, x - точку, принадлежащую отрезку $[-1; 1]$, и x_nodes - массив узлов полинома. На каждой итерации цикла for, при выполнении условия $j \neq i$, промежуточный результат домножается на дробь $\frac{x - x_j}{x_i - x_j}$.

Листинг 1. - Функция вычисления значения i-го базисного полинома Лагранжа в точке x

```
def l_i(i, x, x_nodes):
  l_i = 1
  for j in range(len(x_nodes)):
      if j!=i:
            l_i *= (x - x_nodes[ j ])/(x_nodes[ i ] - x_nodes[ j ])
  return l_i
```

Задание 2, интерполяционный полином Лагранжа

Код в листинге 2 иллюстрирует реализацию функции $L(x, x\_nodes, y\_nodes)$, которая возвращает значение интерполяционного полинома Лагранжа, заданного на узлах с абсциссами x_nodes и ординатами y_nodes, в точке x. Функция получает на вход: x - точку, в которой необходимо вычислить полином, x_nodes - массив абсцисс узлов, y_nodes - массив ординат узлов. На каждой итерации цикла for к промежуточному результату прибавляется произведение ординаты i - го узла на i - ый базисный полином Лагранжа.

Листинг 2. - Функция вычисления значения интерполяционного полинома Лагранжа в точке x

```
def L(x, x_nodes, y_nodes):
  L = 0
  for i in range(len(x_nodes)):
      L += y_nodes[i] * l_i(i, x, x_nodes)
  return L
```

Задания 3 и 4, графики интерполяционного многочлена Лагранжа

Координаты чебышевских узлов считаются по формуле:

$$x_i = \cos(\frac{2 \cdot i - 1}{2 \cdot n} \cdot \pi), i \in [1; n] \tag{4}$$

Для вычисления координат чебышевских узлов была написана функция $cheb(n) -> list$, представленная на листинге 3, которая принимает на вход количество узлов n и возвращает массив заданного количества чебышевских узлов.

Листинг 3. - Функция вычисления координат n чебышевских узлов

```
def cheb(n) -> list:
    return(np.array([np.cos((2*i - 1) / (2 * n) * np.pi) for i in range(1, n + 1)]))
```

Для равномерно расположенных и чебышевсих узлов выведем одновремено графики функции $f(x)$ и полученных интерполяционных полиномов $L(x)$. Для более наглядного представления графики, построенные по равномерно распределенным узлам, приводятся в одной координатной плоскости с графиками, построенными по чебышевским узлам. На рисунках 1 - 7 представлены графики для количества интерполяционных узлов $N = \{5, 8, 11, 14, 17, 20, 23\}$, зеленым цветом выделены графики интерполяционного полинома, построенного по равномерно расположенным узлам, синим - графики интерполяционного полинома, построенного по чебышевским узлам, серым - функция $f(x)$.

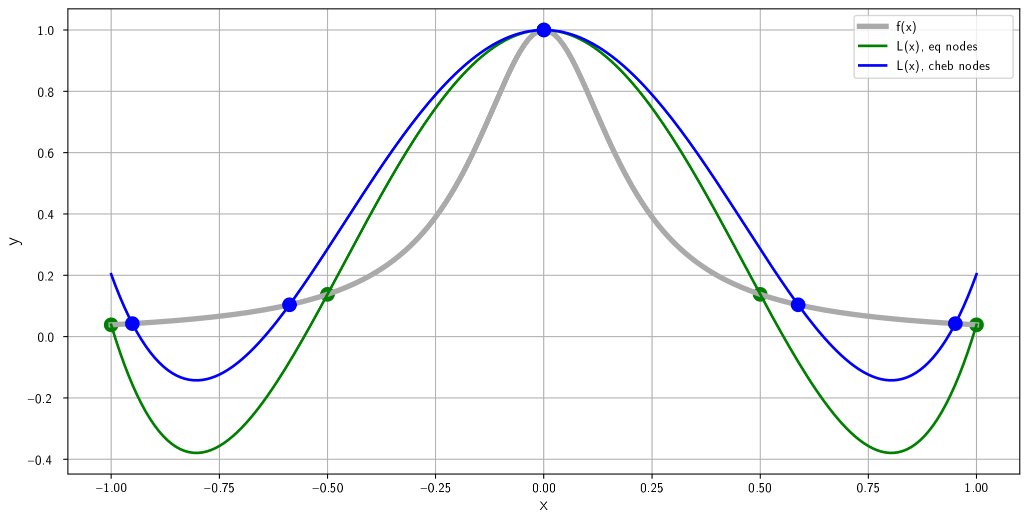

Рис. 1. Графики функции $f(x)$ и полученных полиномов $L(x)$ для $N = 5$

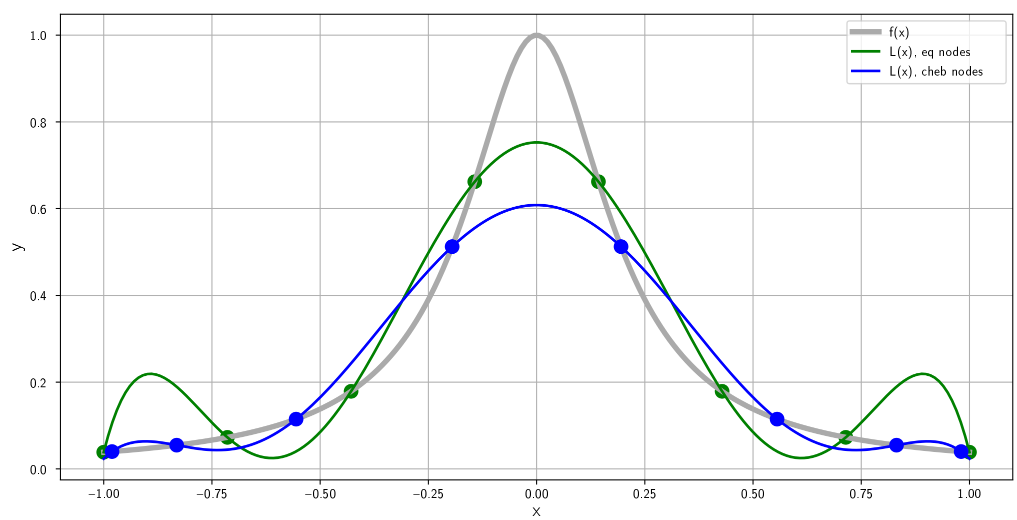

Рис. 2. Графики функции $f(x)$ и полученных полиномов $L(x)$ для $N = 8$

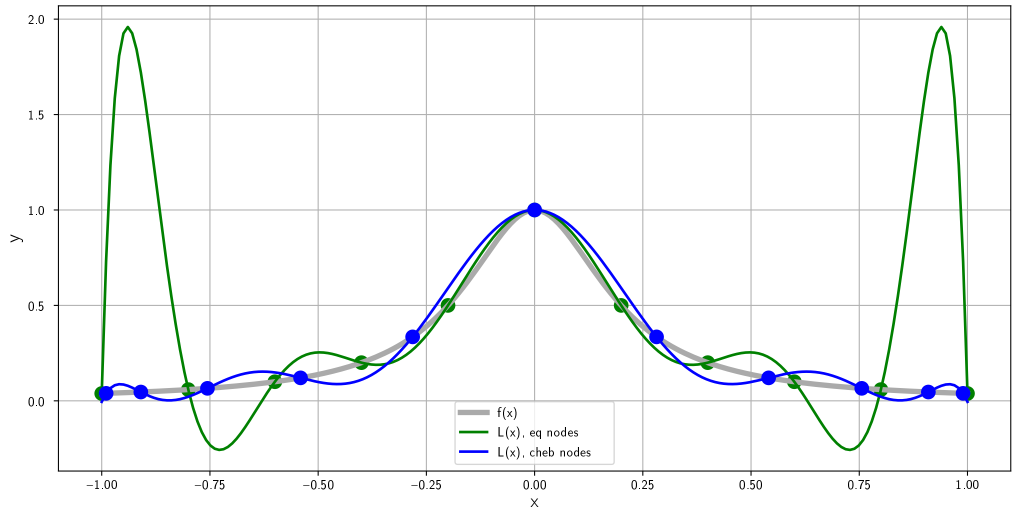

Рис. 3. Графики функции $f(x)$ и полученных полиномов $L(x)$ для $N = 11$

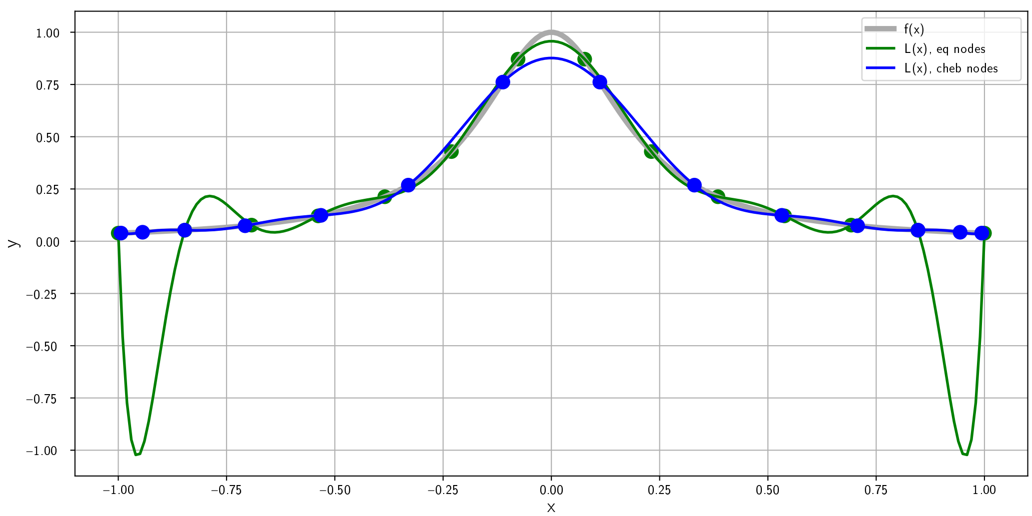

Рис. 4. Графики функции $f(x)$ и полученных полиномов $L(x)$ для $N = 14$

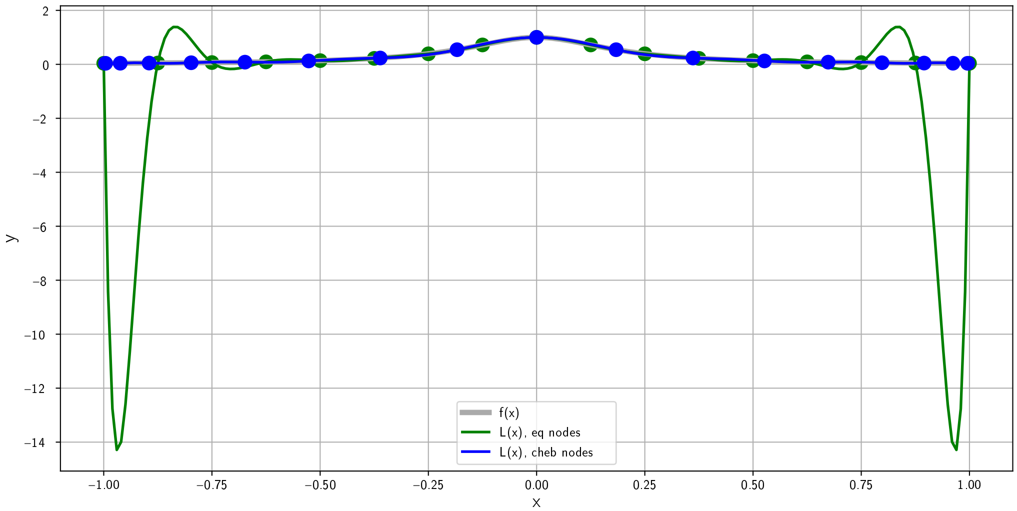

Рис. 5. Графики функции $f(x)$ и полученных полиномов $L(x)$ для $N = 17$

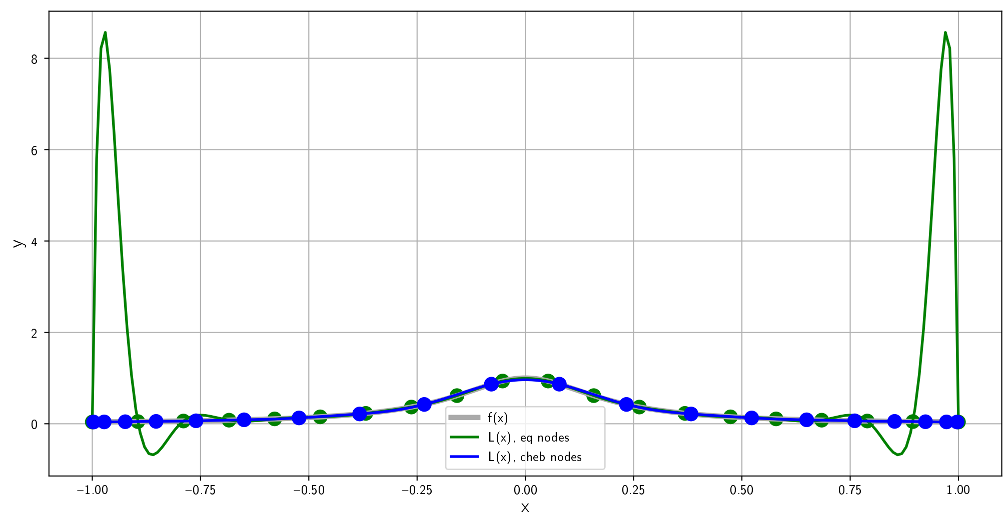

Рис. 6. Графики функции $f(x)$ и полученных полиномов $L(x)$ для $N = 20$

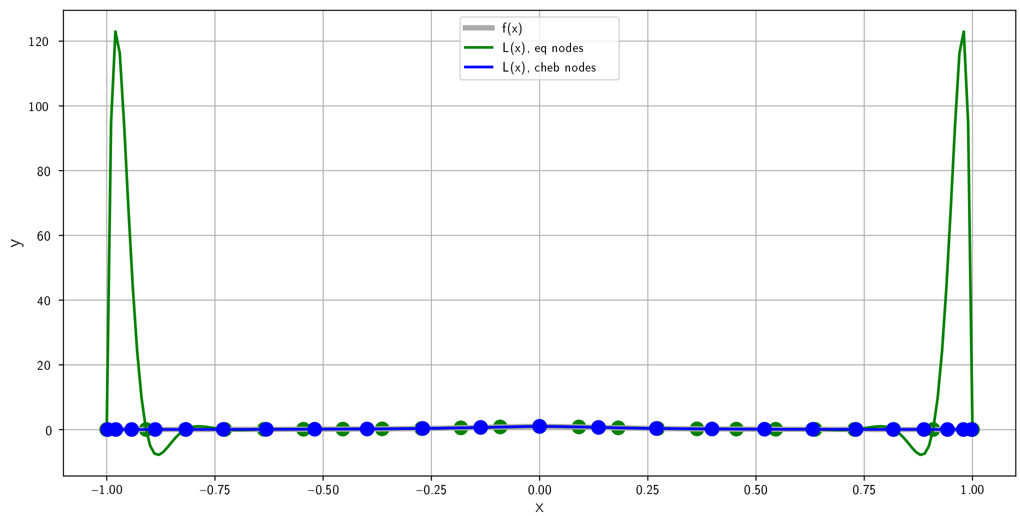

Рис. 7. Графики функции $f(x)$ и полученных полиномов $L(x)$ для $N = 23$

Заметим, что:

1. увеличение количества равномерно распределенных узлов приводит к возникновению осцилляции на концах интервала интерполяции. Этот эффект называется феноменом Рунге. Он описывает нежелательные осцилляции, возникающие при интерполяции полиномами высоких степеней, когда погрешность интерполяции возрастает при увеличении количества узлов интерполяции;

2. при интерполяции по чебышевским узлам осцилляций не возникает.

2 Продвинутая часть

Задание 1, генерация функций

Для генерации функций необходимо было сформировать список с параметрами для каждой рациональной функции, известной как аппроксимация Паде. Для хранения параметров каждой функции был разработан класс *Params*, реализация которого представлена на листинге 4. Поля класса соответствуют необходимым для формирования аппроксимации Паде коэффициентам.

Листинг 4. - Класс *Params*

```
class Params:
  def __init__(self, n, m, a_j, b_k):
      self.n = n
      self.m = m
      self.a_j = a_j
      self.b_k = b_k
```

Для генерации параметров аппроксимации Паде была разработана функция *generate_params*(), код которой представлен на листинге 5. В ней с помощью методов *np.random.randint* и *np.random.sample* библиотеки *numpy* генерируются соответствующие коэффициенты n, m, a_j, b_k. Функция возвращает экземпляр класса *Params*.

Листинг 5. - Функция генерации параметров аппроксимации Паде

```python
def generate_params():
  n = np.random.randint(7, 16)
  m = np.random.randint(7, 16)
  a_j = np.random.sample(m, )
  b_k = np.random.sample(n, )
  return Params(n, m, a_j, b_k)
```

Функция *generate_params*() выполняется при заполнении списка параметров для каждой рациональной функции. В результате ее запуска в цикле генерируется список параметров *params_list* для 100 рациональных функций, элементами которого являются экземпляры класса *Params*.

Для вычисления аппроксимации Паде по значениям узлов x и параметрам n, m, a_j, b_k была написана функция $pade(x, *params\_list)$, код которой представлен на листинге 6. В ней реализовано вычисление аппроксимации Паде по формуле .

Листинг 6. - Функция вычисления аппроксимации Паде по значению узла x и ранее сгенерированным параметрам

```python
def pade(x, *params_list):
  sum_a_j = 0
  sum_b_k = 0
  for obj in params_list:
    for j in range(obj.m):
      sum_a_j += obj.a_j[j] * x ** j
    for k in range(1, obj.n):
      sum_b_k += obj.b_k[k] * x ** k
  return sum_a_j / (1 + sum_b_k)
```

Функция $pade(x, *params\_list)$ вызывается при формировании списка ординат для аппроксимации Паде соответственно и узлов интерполяционных полиномов, построенных по равномерно расположенным и чебышевским узлам.

Задание 2, графики аппроксимации Паде и интерполяционных полиномов

На рисунках 8 - 11 представлен вывод аппроксимации Паде и интерполяционных полиномов $L(x)$, построенных по $N = 7$ равномерно распределенным и $N = 7$ чебышевским узлам, для каждой четвертой рациональной функции. Для наглядности представления аппроксимация Паде выделена бирюзовым цветом, построенный по равномерно распределенным узлам интерполяционный полином Лагранжа - фиолетовым, по чебышевским - синим.

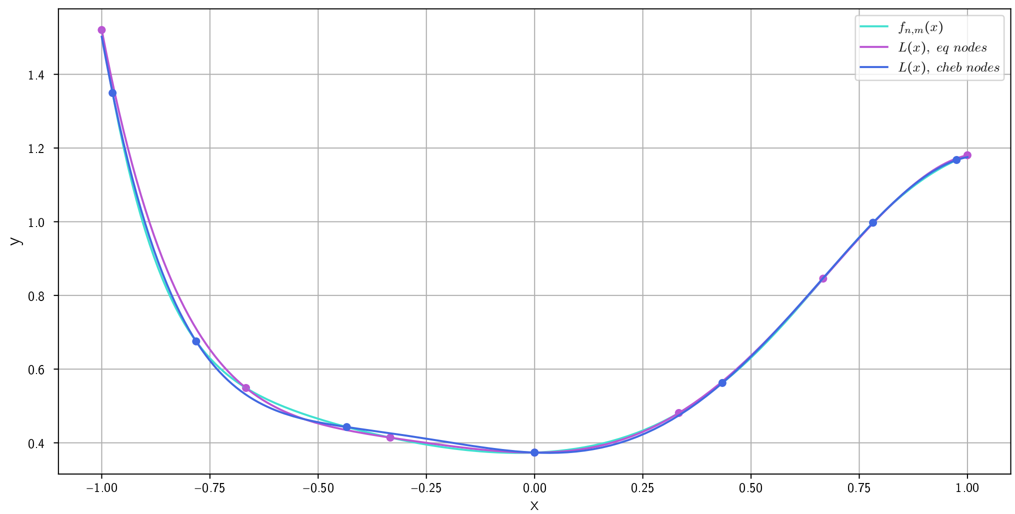

Рис. 8. Графики $f_{n,m}(x)$ и полученных полиномов $L(x)$, построенных по N $= 7$ равномерно распределенным и чебышевским узлам

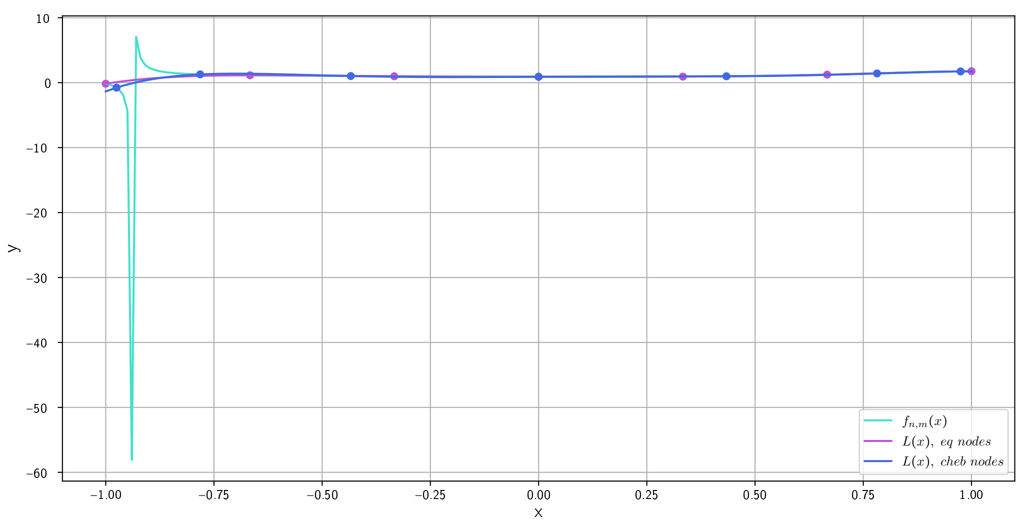

Рис. 9. Графики $f_{n,m}(x)$ и полученных полиномов $L(x)$, построенных по N $= 7$ равномерно распределенным и чебышевским узлам

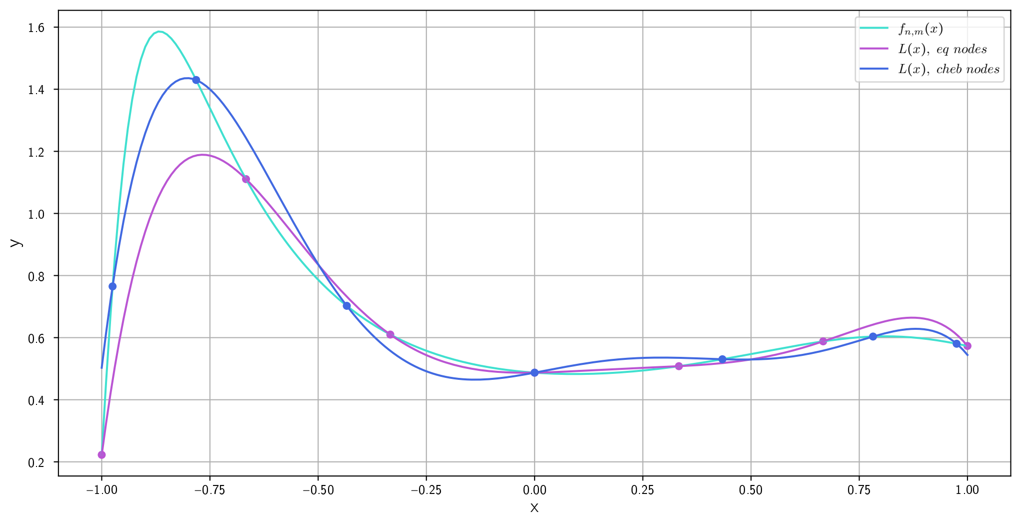

Рис. 10. Графики $f_{n,m}(x)$ и полученных полиномов $L(x)$, построенных по N = 7 равномерно распределенным и чебышевским узлам

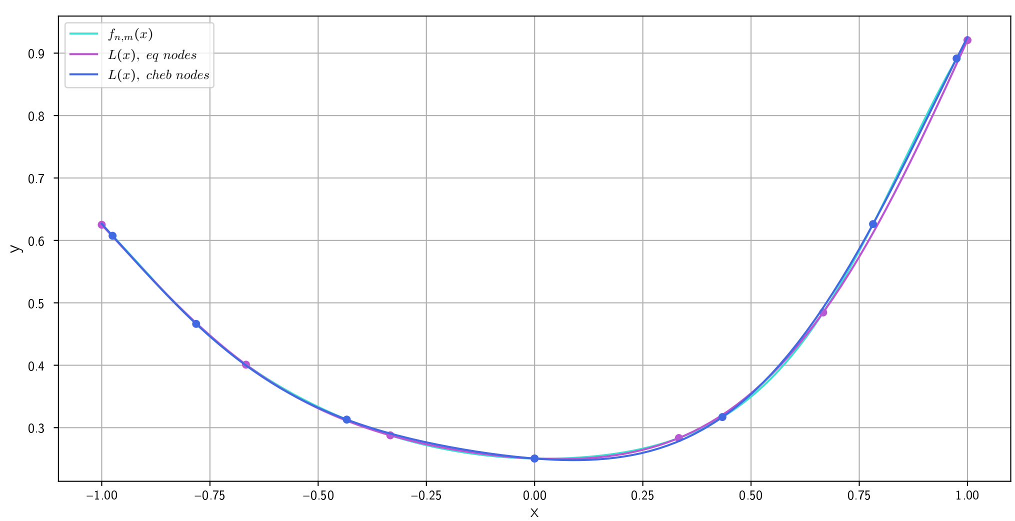

Рис. 11. Графики $f_{n,m}(x)$ и полученных полиномов $L(x)$, построенных по N = 7 равномерно распределенным и чебышевским узлам

На рисунке 9 у аппроксимации Паде образовался разрыв. Это объясняется тем, что знаменатель $1 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k x^k$ аппроксимации Паде может принимать значение 0, когда $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k x^k = -1$. В таком случае интерполянт строится неверно, так как интерполяция проводится для функции без разрывов на заданном интервале.

Задание 3, расчет расстояний между аппроксимацией Паде и интерполяционными полиномами

Расстояние между аппроксимацией Паде и интерполяционными полиномами вычисляется с помощью равномерной нормы. Другими словами ищется максимальная по модулю разность между аппроксимацией и интерполяционными полиномами, построенными по равномерно расположенным и чебышевским узлам.

На графиках 12 - 15 представлена зависимость расстояний между аппроксимацией Паде и ее интерполяцией от количества узлов $N \in \{1, 2, ..., 30\}$. Для наглядности представление график зависимости расстояния между аппроксимацией Паде и ее интерполянтом, построенным по равномерно распределенным узлам, от количества узлов обозначен розовым цветом, между аппроксимацией Паде и ее интерполянтом, построенным по чебышевским узлам - синим.

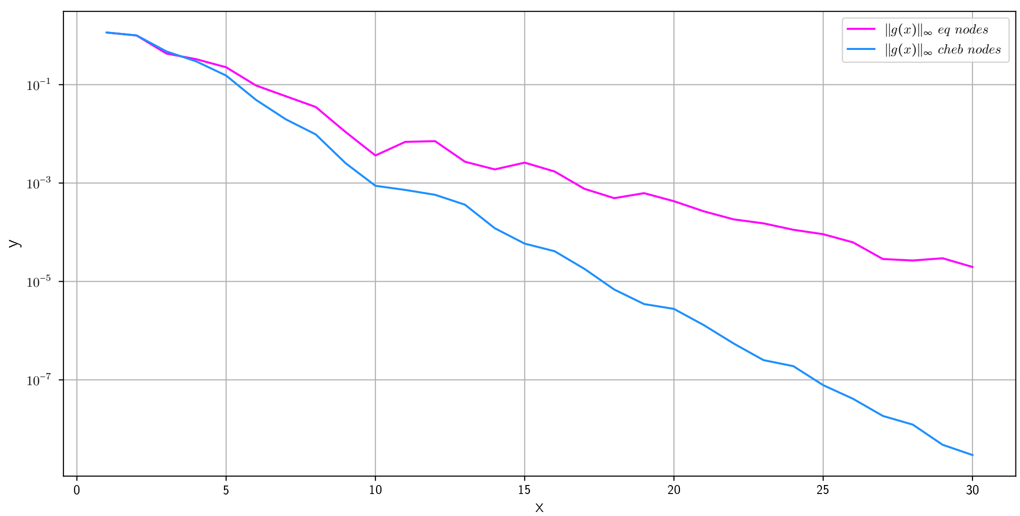

Рис. 12. График зависимости расстояний между аппроксимацией Паде и ее интерполяцией от количества узлов для функции, представленной на рисунке 8

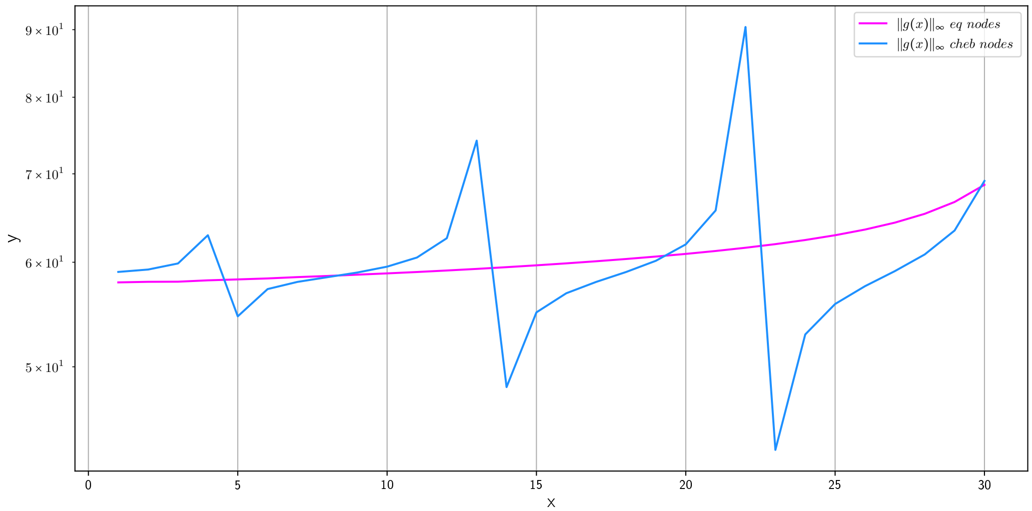

Рис. 13. График зависимости расстояний между аппроксимацией Паде и ее интерполяцией от количества узлов для функции, представленной на рисунке 9

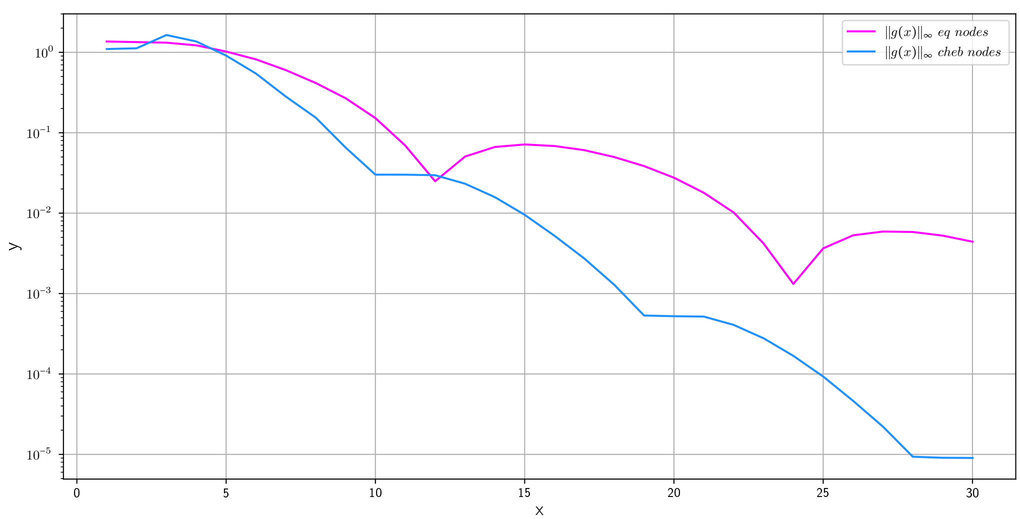

Рис. 14. График зависимости расстояний между аппроксимацией Паде и ее интерполяцией от количества узлов для функции, представленной на рисунке 10

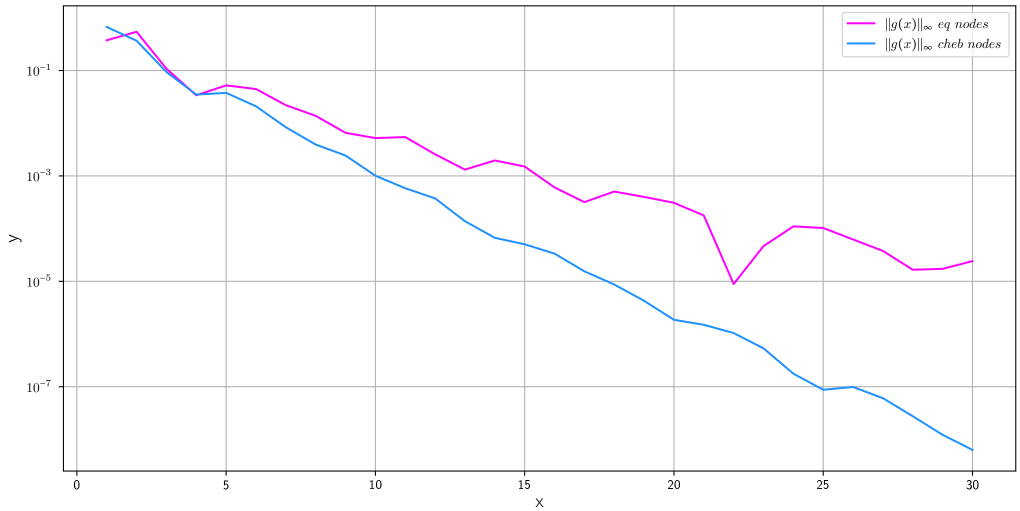

Рис. 15. График зависимости расстояний между аппроксимацией Паде и ее интерполяцией от количества узлов для функции, представленной на рисунке 11

На основании приведенных графиков можно сделать вывод: расстояние между аппроксимацией Паде и ее интерполянтом, построенным по равномерно распределенным узлам, больше, чем расстояние между аппроксимацией Паде и ее интерполянтом, построенным по чебышевским узлам. Это делает построение интерполяции по чебышевским узлам более предпочтительным. Наиболее наглядно это демонстрирует график, изображенный на рисунке 12.

На рисунке 13 представлен график зависимости расстояний от количества узлов для разрывной функции. Видно, что в случае формирования функции, имеющей разрыв, невозможно дать адекватную и однозначную оценку расстояния между аппроксимацией Паде и ее интерполяцией.

Задание 4, аппроксимация Паде

Аппроксимация Паде является методом приближенного вычисления значения функции, при котором приближения функции могут быть получены в виде рациональных функций. Метод заключается в представлении функции в виде отношения двух полиномов. Их коэффициенты определяются коэффициентами разложения функции в ряд Тейлора.

Можно обобщить выводы о зависимости расстояния между функцией и ее интерполянтами на произвольные функции. С помощью аппроксимации Паде возможна генерация полинома не более 15 - ой степени.

Заключение

1. Реализована функция вычисления i - го базисного полинома Лагранжа.

2. Реализована функция вычисления полинома Лагранжа, заданного на узлах с абсциссами x_nodes и ординатами y_nodes, в точке x.

3. Выведены одновременно графики $f(x)$ и $L(x)$ для равномерно распределенных и чебышевских узлов. При увеличении количества равномерно распределенных узлов увеличивается осцилляция на концах интервала интерполяции. При увеличении количества чебышевских узлов такое явление не наблюдается.

4. Описана программная реализация генерации случайных функций.

5. Выведены интерполяционные полиномы, построенные по равномерно распределенным и чебышевским узлам, для 4-х различных функций $f_{n,m}(x)$ из сгенерированных ранее.

6. Найдены интерполяционные полиномы $L(x)$, построенные по $N \in \{1, 2, ..., 30\}$ равномерно распределенным и чебышевским узлам. Описано вычисление расстояний между $f_{n,m}(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве. Проведено сравнение зависимостей расстояний между интерполируемыми функциями и интерполянтами, построенными по равномерно распределенным и чебышевским узлам, от количества узлов. Сделан соответствующий вывод.

7. Дано определение аппроксимации Паде. Выводы, сделанные в 3 пункте продвинутой части, обобщены на произвольные функции.

Список использованных источников

1. Першин А.Ю. Лекции по курсу «Вычислительная математика». Москва, 2018-2021. С. 140. URL: https://archrk6.bmstu.ru/index.php/f/810046.

2. Соколов, А.П. Инструкция по выполнению лабораторных работ (общая). Москва: Соколов, А.П., 2018-2021. С. 9. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

3. Соколов, А.П. Инструкция по выполнению заданий к семинарским занятиям (общая). Москва: Соколов, А.П., 2018-2022. С. 7. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

4. Першин А.Ю. Сборник задач семинарских занятий по курсу «Вычислительная математика»: Учебное пособие. / Под редакцией Соколова А.П. [Электронный ресурс]. Москва, 2018-2021. С. 20. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

5. Першин А.Ю., Соколов А.П. Сборник постановок задач на лабораторные работы по курсу «Вычислительная математика»: Учебное пособие. [Электронный ресурс]. Москва, 2021. С. 54. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

Выходные данные

Горохова А.С.Отчет о выполнении лабораторной работы по дисциплине «Вычислительная математика». [Электронный ресурс] — Москва: 2022. — 17 с. URL: https://sa2systems.ru:88 (система контроля версий кафедры РК6)

Постановка: *доцент кафедры РК-6, PhD А.Ю. Першин*

Решение и вёрстка: *студент группы РК6-56Б, Горохова А.С.*

2022, осенний семестр