

Versuch 353

Das Relaxationsverfahren eines RC-Kreises

Sadiah Azeem

sadiah.azeem@tu-dortmund.de

Nils Metzner

nils.metzner@tu-dortmund.de

Durchführung: 16.11.2021

Abgabe: 23.11.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Theorie | 3 |
| 1.1 | Relaxationsgleichung | 3 |
| 1.2 | Auf- und Entladevorgaenge am Kondensator | 3 |
| 1.3 | Auf- und Entladevorgaenge bei Wechselspannung | 3 |
| 1.4 | Integration im RC-Kreis | 4 |
| 2 | Durchführung | 4 |
| 2.1 | Vorbereitungsaufgaben | 4 |
| 2.2 | Aufgaben | 4 |
| 2.3 | Aufbau | 4 |
| 3 | Messwerte | 6 |
| 4 | Auswertung | 11 |
| 5 | Diskussion | 16 |
| 6 | Anhang | 16 |
| | Literatur | 16 |

1 Theorie

Die Relaxation eines Systems ist der Übergang aus dem ausgelenkten in den Ausgangszustand. In diesem Versuch ist das zu untersuchende System ein RC-Schaltkreis.

Die Entladung des Kondensators durch einen Strom, der durch den Widerstand fließt, ist ein Beispiel für die Relaxation.

1.1 Relaxationsgleichung

Die allgemeine Relaxationsgleichung besteht aus der beschränkten Größe $A(t)$, der Proportionalitätskonstante $c < 0$ und den konstanten Werten $A(0)$ und $A(\infty)$.

c variiert je nach Relaxationsvorgang und gibt Auskunft über die Geschwindigkeit des Entladeprozesses.

Die Änderungsrate von A wird als proportional zur Auslenkung angenommen:

$$\frac{dA}{dt} = c[A(t) - A(\infty)] \quad (1)$$

diese Gleichung wird dann mit dt multipliziert und dann über das Intervall $[0; t]$ integriert. Es ergibt sich:

$$\ln \frac{A(t) - A(\infty)}{A(0) - A(\infty)} = ct \Leftrightarrow A(t) = A(\infty) + [A(0) - A(\infty)] \cdot \exp(ct) \quad (2)$$

1.2 Auf- und Entladevorgänge am Kondensator

Die klassische Elektrodynamik bringt die grundlegenden Beziehungen $I = \frac{U}{R}$ und $U_C = \frac{Q}{C}$ hervor.

Daraus lässt sich die Änderungsrate $\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}Q(t)$ der Kondensatorladung bestimmen.

Unter der Randbedingung, dass bei einem Entladeprozess $Q(\infty) = 0$ gelten muss, ergibt sich nach den gleichen Umformungen, wie bei der allgemeinen Relaxationsgleichung (1)

$$Q(t) = Q(0) \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (3)$$

$\frac{1}{RC}$ ist hier die Zeitkonstante (wie oben c).

1.3 Auf- und Entladevorgänge bei Wechselspannung

Die angelegte Wechselspannung $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$ lässt sich als periodische Anregung beschreiben, wie sie auch aus der Mechanik bekannt ist.

Zwischen U_G und U_C bildet sich der Phasenversatz $\varphi(\omega)$, sodass U_C wie folgt beschrieben werden kann:

$$U_C = A(\omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi(\omega)) \quad (4)$$

1.4 Integration im RC-Kreis

Bei geeigneten Frequenzen $\omega \gg RC$ und Spannungen $|U_C| \gg |U_G|$ erhält man durch die integrierende Funktion des RC-Gliedes

$$U_C = \frac{1}{RC} \int_0^t U(\tau) d\tau \quad (5)$$

[1]

2 Durchführung

2.1 Vorbereitungsaufgaben

In V353 sind keine Vorbereitungsaufgaben vorgesehen.

2.2 Aufgaben

In Teil **a)** soll die Zeitkonstante des RC-Gliedes mit Hilfe der Schaltung in Abbildung 1 bestimmt werden.

Dazu werden Auf- und Entladevorgänge des Kondensators durch eine Rechteckspannung herbeigeführt und auf dem Oszilloskop die Kondensatorspannung in Abhängigkeit davon beobachtet.

Die Teilaufgabe **b)** sieht vor, dass man die Schaltung aus Abbildung 2 die Generatorspannung in Sinusform umstellt.

Gemessen werden soll hier die Amplitude $A(\omega)$ der Kondensatorspannung $U_C = A(\omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi(\omega))$ in Abhängigkeit der Frequenz der Sinusspannung.

c) ist die Bestimmung der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Generatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz der Sinusspannung.

Es wird erneut die Schaltung aus Abbildung 2 genutzt.

Die Messwerte für **b)** und **c)** konnten in einem Messdurchgang genommen werden, bei dem die Frequenz in kleinen Schritten erhöht wird.

In Teilaufgabe **d)** wird bewiesen, dass die vorliegende Schaltung 3 als Integrator genutzt werden kann.

Hierzu stellt man nacheinander eine Rechteck-, Dreieck- und Sinusspannung am Generator ein und dokumentiert die Kondensatorspannung, die proportional zum Integral der Generatorspannung über die Zeit sein sollte.

2.3 Aufbau

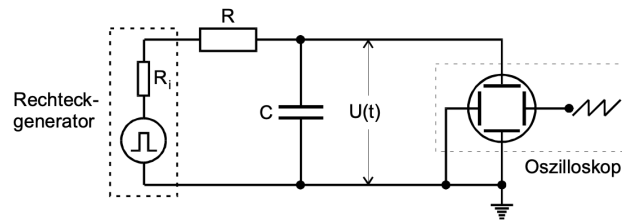


Abbildung 1: Das Ersatzschaltbild zu Teilaufgabe a)

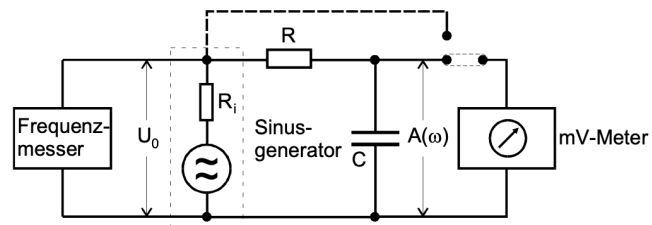


Abbildung 2: Das Ersatzschaltbild zu Aufgabe b) und c)

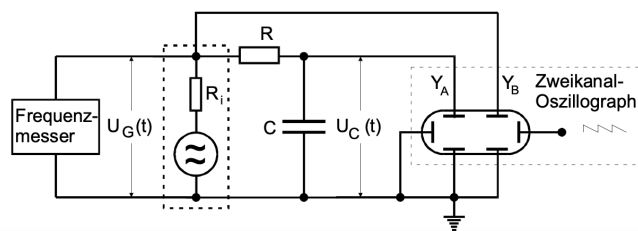


Abbildung 3: Das Ersatzschaltbild zu Teilaufgabe d)

3 Messwerte

Tabelle 1: Die Tabelle mit allen vor Ort aufgenommenen Messdaten.

| f / kHz | U_c / V | U_G / V | $a / \mu\text{s}$ | $b / \mu\text{s}$ |
|------------------|------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| 0,110 | 7,5 | 3,5 | 400 | 4000 |
| 0,189 | 6 | 3,5 | 300 | 2200 |
| 0,250 | 5 | 3,5 | 300 | 1700 |
| 0,2995 | 4 | 3,5 | 250 | 1400 |
| 0,4008 | 3,4 | 3,6 | 200 | 1000 |
| 0,514 | 2,2 | 3,6 | 160 | 840 |
| 0,998 | 1,6 | 3,6 | 100 | 440 |
| 2,051 | 0,8 | 3,6 | 40 | 200 |
| 3,12 | 0,6 | 3,6 | 40 | 140 |
| 5,17 | 0,25 | 3,6 | 20 | 80 |
| 9,08 | 0,2 | 3,6 | 4 | 16 |
| 22,34 | 0,08 | 3,6 | 4 | 20 |
| 30,37 | 0,06 | 3,6 | 4 | 14 |
| 35,15 | 0,05 | 3,6 | 4 | 12 |
| 40,09 | 0,04 | 3,6 | 4 | 12 |
| 42,33 | 0,04 | 3,6 | 2 | 10 |
| 44,05 | 0,04 | 3,6 | 2 | 10 |
| 46,16 | 0,04 | 3,6 | 2 | 10 |
| 48,32 | 0,04 | 3,6 | 2 | 10 |
| 51,24 | 0,03 | 3,6 | 2 | 8,5 |

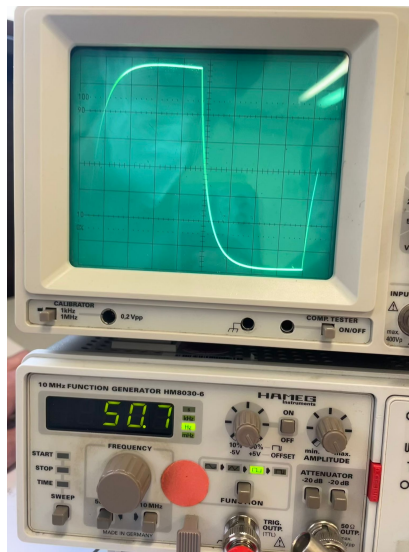


Abbildung 4: Der Entladungsprozess des Kondensators.

Tabelle 2: Eine Tabelle mit den aufgenommenen Messdaten aus Abbildung ?? des Entladungsprozesses des Kondensators.

| U_c / V | t / ms | $\ln(\frac{U_c}{U_0})$ | U_c / V | t / ms | $\ln(\frac{U_c}{U_0})$ |
|------------------|-----------------|------------------------|------------------|-----------------|------------------------|
| 3,4 | 0,04 | -0,057 | 1,6 | 0,3 | -0,811 |
| 3,2 | 0,08 | -0,118 | 1,4 | 0,34 | -0,944 |
| 3 | 0,09 | -0,182 | 1,2 | 0,48 | -1,099 |
| 2,8 | 0,1 | -0,251 | 1 | 0,53 | -1,281 |
| 2,6 | 0,13 | -0,325 | 0,8 | 0,62 | -1,504 |
| 2,4 | 0,16 | -0,405 | 0,6 | 0,73 | -1,792 |
| 2,2 | 0,19 | -0,492 | 0,4 | 0,9 | -2,197 |
| 2 | 0,24 | -0,588 | 0,2 | 1,1 | -2,890 |
| 1,8 | 0,28 | -0,693 | 0,1 | 1,4 | -3,584 |

Tabelle 3: Eine Tabelle mit den Wertepaaren für Aufgabenteil b)

| f / kHz | $\frac{U_c}{U_0} / \text{V}$ |
|------------------|------------------------------|
| 0,110 | 2,083 |
| 0,189 | 1,667 |
| 0,250 | 1,389 |
| 0,2995 | 1,111 |
| 0,4008 | 0,944 |
| 0,514 | 0,611 |
| 0,998 | 0,444 |
| 2,051 | 0,222 |
| 3,12 | 0,167 |
| 5,17 | 0,069 |
| 9,08 | 0,056 |
| 22,34 | 0,022 |
| 30,37 | 0,017 |
| 35,15 | 0,014 |
| 40,09 | 0,011 |
| 42,33 | 0,011 |
| 44,05 | 0,011 |
| 46,16 | 0,011 |
| 48,32 | 0,011 |
| 51,24 | 0,008 |

Tabelle 4: Eine Tabelle mit den Wertepaaren für Teilaufgabe c) mit den aus den Messwerten von a und b aus Tabelle 1 mit Formel (??) berechneten φ .

| f / kHz | φ / rad |
|-----------|-----------------|
| 0,110 | 0,6283 |
| 0,189 | 0,8568 |
| 0,250 | 1,1088 |
| 0,2995 | 1,122 |
| 0,4008 | 1,2566 |
| 0,514 | 1,1968 |
| 0,998 | 1,428 |
| 2,051 | 1,2566 |
| 3,12 | 1,7952 |
| 5,17 | 1,5708 |
| 9,08 | 1,5708 |
| 22,34 | 1,2566 |
| 30,37 | 1,7952 |
| 35,15 | 2,0944 |
| 40,09 | 2,0944 |
| 42,33 | 1,2566 |
| 44,05 | 1,2566 |
| 46,16 | 1,2566 |
| 48,32 | 1,2566 |
| 51,24 | 1,4784 |

Tabelle 5: Die Wertepaare für den Polarplot

| $\frac{U_c}{U_0} / \text{V}$ | φ / rad |
|------------------------------|------------------------|
| 2,083 | 0,6283 |
| 1,667 | 0,8568 |
| 1,389 | 1,1088 |
| 1,111 | 1,122 |
| 0,944 | 1,2566 |
| 0,611 | 1,1968 |
| 0,444 | 1,428 |
| 0,222 | 1,2566 |
| 0,167 | 1,7952 |
| 0,069 | 1,5708 |
| 0,056 | 1,5708 |
| 0,022 | 1,2566 |
| 0,017 | 1,7952 |
| 0,014 | 2,0944 |
| 0,011 | 2,0944 |
| 0,011 | 1,2566 |
| 0,011 | 1,2566 |
| 0,011 | 1,2566 |
| 0,011 | 1,2566 |
| 0,008 | 1,4784 |

4 Auswertung

Es wurden aus ?? die Werte in Tabelle 2 entnommen.

Nach Gleichung (??) folgt für die lineare Regression:

$$\ln\left(\frac{U_c}{U_0}\right) = -\frac{1}{RC} \cdot t + b. \quad (6)$$

Woraus die Zeitkonstante RC bestimmt wird.

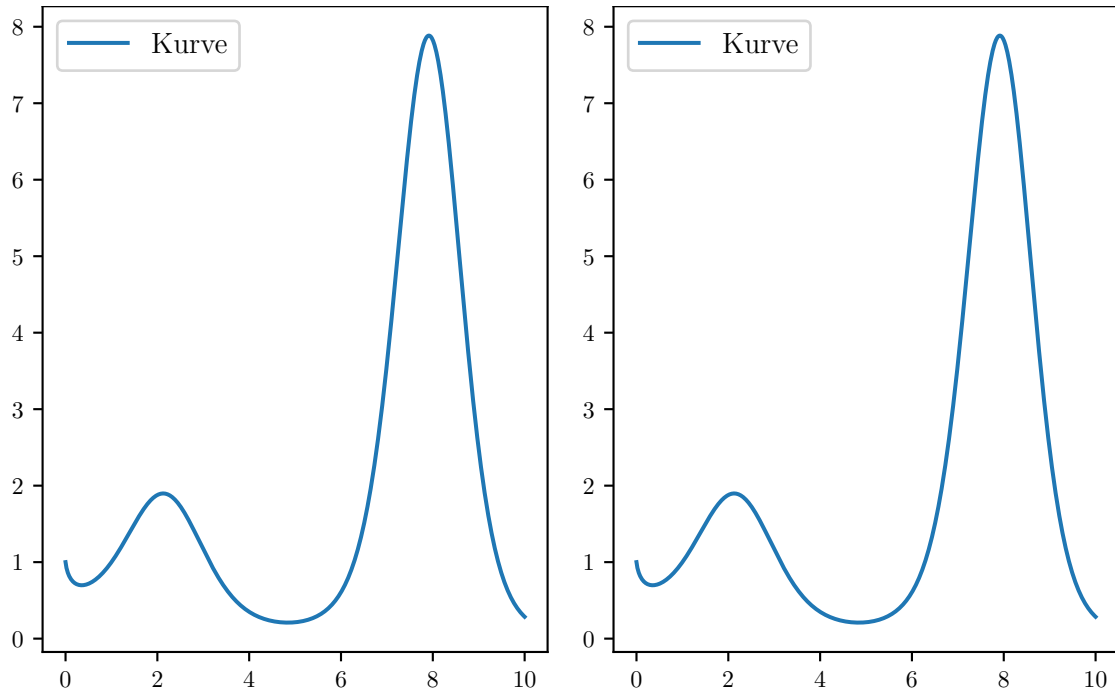


Abbildung 5: Lineare Regression nach (6) und Messdaten aus Tabelle 2 zur Bestimmung der Zeitkonstante RC über den Entladungsprozess des Kondensators.

Es ergibt sich aus der linearen Regression in Abbildung 5:

$$RC = (0.39001 \pm 0.00056)\text{ms}$$

$$b = 0.030872 \pm 0.021421.$$

Anschließend wurde die Zeitkonstante RC mit den Wertepaaren der Relativamplitude $\frac{U_c}{U_0}$ und der Generatorfrequenz f aus Tabelle 3 mithilfe der folgenden Ausgleichsrechnung nach (??) bestimmt:

$$\frac{U_c}{U_0} = e^{(-a \cdot f + b)}. \quad (7)$$

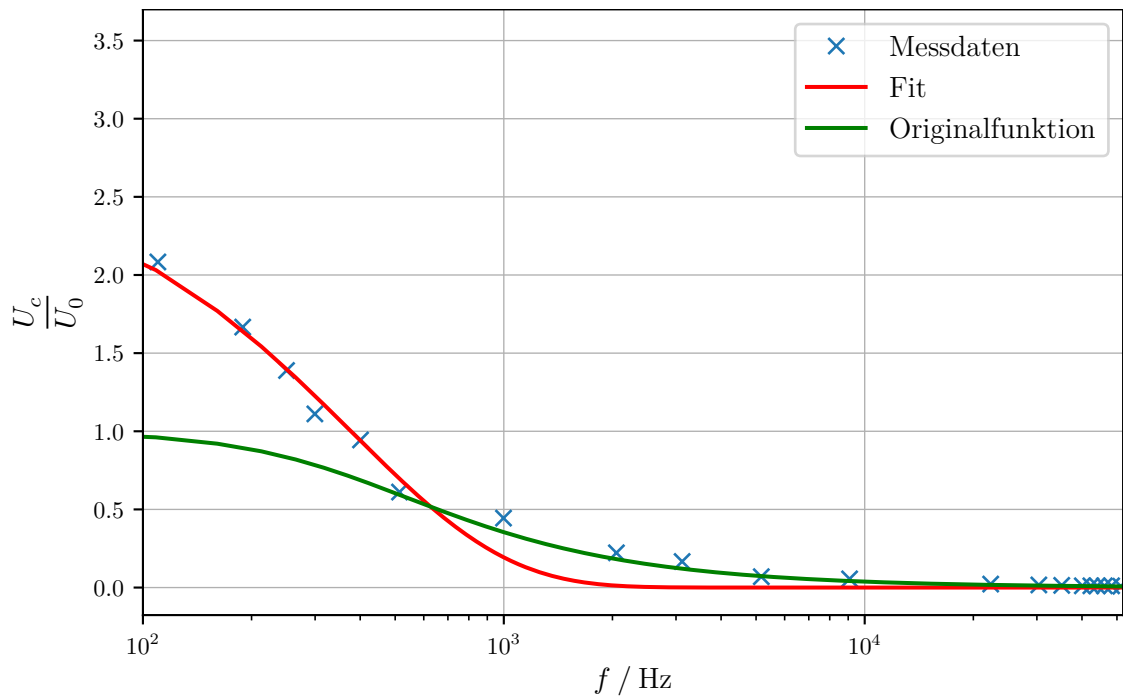


Abbildung 6: Hier sind die Wertepaare aus Tabelle 3 die Ausgleichsrechnung nach (7) und die Originalfunktion nach eqref mit dem berechneten RC in einem halblogarithmischen Diagramm aufgetragen.

Wobei bei dieser Ausgleichsrechnung die Zeitkonstante $RC = a$ ist.

Es ergeben sich die Parameter a und b der Ausgleichsrechnung zu:

$$a = (2.6401 \pm 0.2442)\text{ms} = RC$$

$$b = 0.99545 \pm 0.06030$$

Die dritte Methode, die Zeitkonstante RC zu bestimmen, basiert auf einer Ausgleichsrechnung zu den Wertepaaren der Phasenverschiebung φ und der Generatorfrequenz f aus Tabelle 4.

Diese Ausgleichsrechnung ergibt sich in diesem Fall nach (??) zu:

$$\varphi = a \cdot \arctan(b \cdot t). \quad (8)$$

Wobei hier die Zeitkonstante $RC = b$ ist. Bei dieser Ausgleichsrechnung ergeben sich die

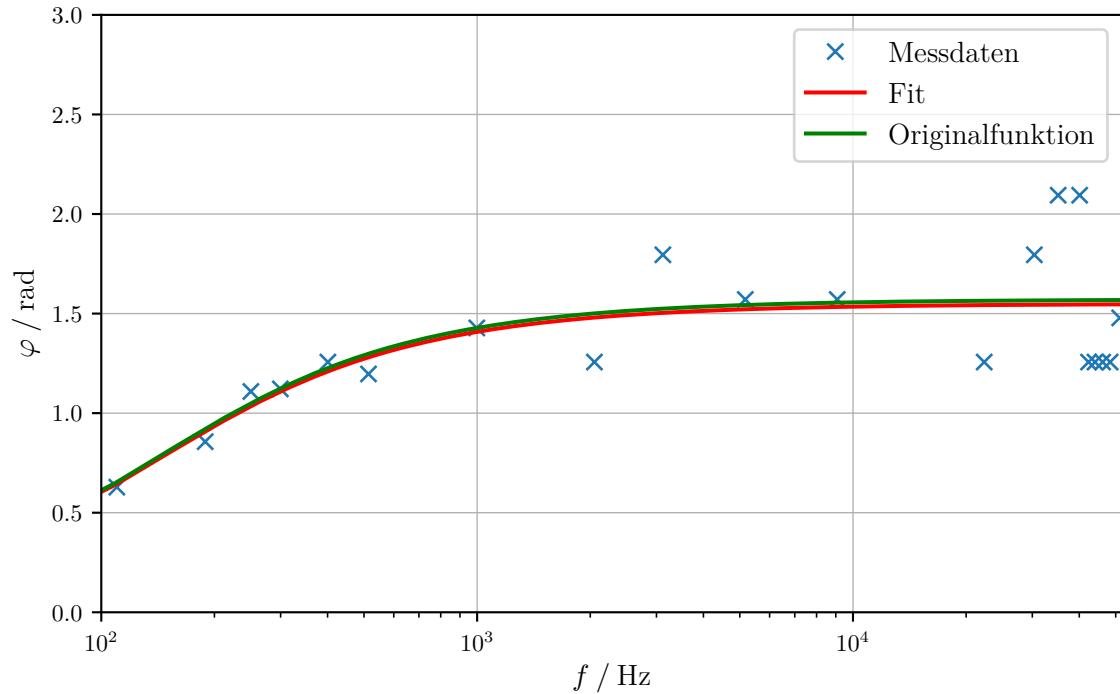


Abbildung 7: Hier sind die Wertepaare aus Tabelle 4, die Ausgleichsrechnung nach (8) und die Originalfunktion nach (??) mit eingesetztem RC in einem halblogarithmischem Diagramm aufgetragen.

Parameter a und b zu:

$$a = 0.9862 \pm 0.0464$$

$$b = (6.9641 \pm 2.0824)\text{ms} = RC$$

Die Abhängigkeit der Relativamplitude $\frac{U_c}{U_0}$ von der Phase φ ergibt sich nach (??) zu:

$$\frac{U_c}{U_0} = \cos(\varphi).$$

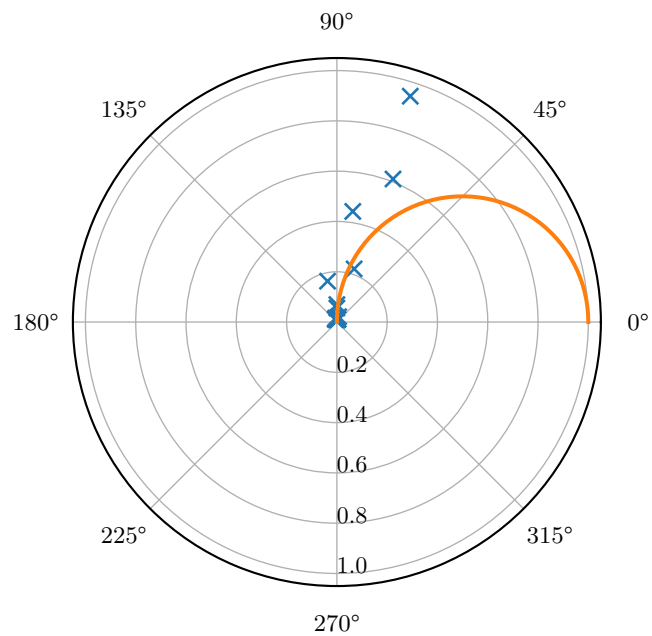
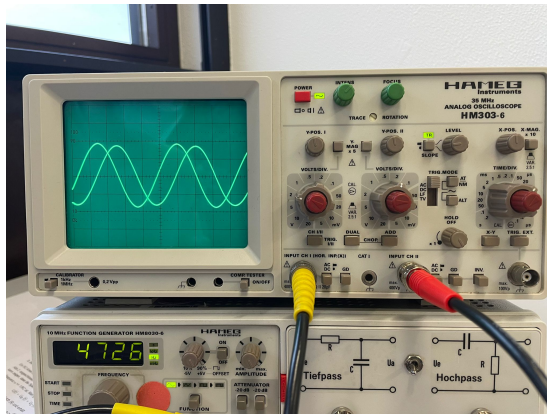
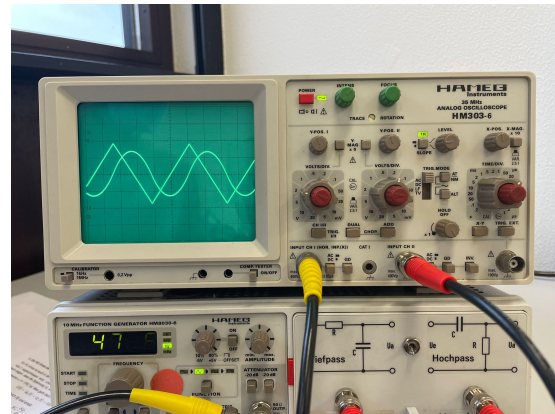


Abbildung 8: Hier wurde die erwähnte Abhängigkeit der Relativamplitude von der Phase, sowie einige Wertepaare aus Tabelle 5 in ein Polardiagramm eingetragen.

Integration verschiedener Generatorspannungen bei einer Frequenz
 $f = 4726\text{Hz}$



(a) sin



(b) Sägezahn

Abbildung 9

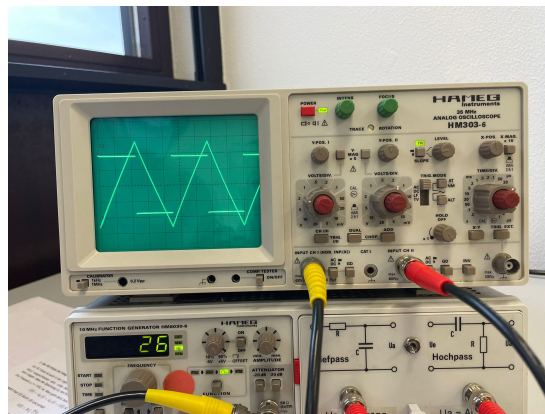


Abbildung 10: Rechteck

5 Diskussion

Bei der ersten Methode, die Zeitkonstante RC über den Entladungsprozess des Kondensators zu bestimmen, fällt sofort im Vergleich zu den anderen Messwerten zu RC auf, dass sich dieser um eine Zehnerpotenz von den anderen unterscheidet.

Diese Differenz kann darauf zurückgeführt werden, dass bei der ersten Methode am Funktionsgenerator der TTL-Output, und nicht, wie dann bei allen anderen, der 50Ω -Output verwendet wurde.

Außerdem bringt das Ablesen der Werte des Entladungsprozesses aus einem Bild eine zusätzliche Unsicherheit mit sich.

Die in Abbildung ?? erhaltene Kurve entspricht der theoretischen Erwartung eines exponentiellen Abfalls nach (??).

Die Werte, die sich für die Zeitkonstante bei den Methoden 2 und 3 ergeben, liegen beide im selben Bereich, wobei bei Methode ?? bei den Messwerten in Abbildung 6 auffällt, dass diese vor allem für niedrigere Frequenzen immer weiter von der Originalfunktion abweichen, aber bei höheren dieser sehr nahe sind.

HIER NOCH ABWEICHUNG FÜR KLEINE f ERKLÄREN!!

Beim Plot für Methode 3 ist nur die Abweichung von der Originalfunktion und der Ausgleichsfunktion für große Frequenzen auffällig, wie es allerdings auf ein Modulieren der TIME/DIV für große Frequenzen zwecks besserer Lesbarkeit auf dem Oszilloskopbildschirm zurückgeführt werden kann.

Dieselbe Abweichung zeigt sich ebenfalls im Polarplot, wo dennoch alle darin aufgetragenen Winkel wie zu erwarten zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen.

Ein Vergleich der bestimmten Zeitkonstanten mit dem korrekten Wert kann nicht durchgeführt werden, da die dafür erforderlichen Größen Kapazität C und Widerstand R des Tiefpassfilters nicht auf dem Gerät angegeben waren oder gemessen werden konnten.

Integrator erklären!!

6 Anhang

Literatur

- [1] *Versuch zum Literaturverzeichnis*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2014.