

Versuch 354

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Sadiah Azeem

sadiah.azeem@tu-dortmund.de

Nils Metzner

nils.metzner@tu-dortmund.de

Durchführung: 21.12.2021

Abgabe: DATUM

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Gedämpfte Schwingungen des RC-Kreises	3
2.2 Erzwungene Schwingungen des RC-Kreises	5
3 Durchführung	6
4 Auswertung	8
5 Diskussion	9
Literatur	9

1 Zielsetzung

2 Theorie

2.1 Gedämpfte Schwingungen des RC-Kreises

Der gedämpfte Schwingkreis ist aus einem Widerstand R , einem Kondensator mit Kapazität C und einer Spule mit Induktivität L wie in Abbildung 1 dargestellt aufgebaut. Dabei schwingt die zugeführte elektrische Energie zwischen der Spule und dem Kondensator. Durch den Widerstand nimmt diese im zeitlichen Verlauf ab und wird in Wärme umgewandelt, daher handelt es sich um eine gedämpfte Schwingung.

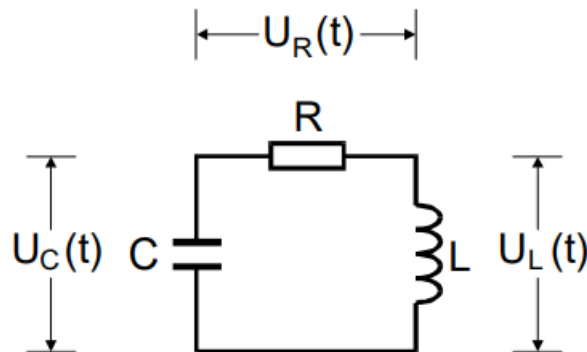


Abbildung 1: Der gedämpfte Schwingkreis. [6]

Aus Abbildung 1 folgt nach dem 2.Kirchhoffschen Gesetz

$$0 = U_R + U_C + U_L \quad (1)$$

für die Spannungen. Daraus folgt die Differentialgleichung der gedämpften Schwingung

$$0 = \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I$$

mit der Lösung

$$I(t) = e^{-2\pi\mu t} (U_1 e^{i2\pi\nu t} + U_2 e^{-i2\pi\nu t}). \quad (2)$$

Dabei sind

$$2\pi\mu = \frac{R_{Eff}}{2L} \quad (3)$$

$$2\pi\nu = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (4)$$

$$(5)$$

und i die imaginäre Zahl. Dabei wird bei ν zwischen zwei Spezialfällen unterschieden.

1. Fall: $\nu \in \mathbb{R}$

Dabei folgt für die Lösung der Differentialgleichung

$$I(t) = A_0 e^{-2\pi\mu t} \cos(2\pi\nu t + \eta). \quad (6)$$

Bei diesem Fall handelt es sich um den Schwingfall wie in Abbildung 2 dargestellt und die Abklingdauer beträgt

$$T_{ex} = \frac{R}{4\pi L}.$$

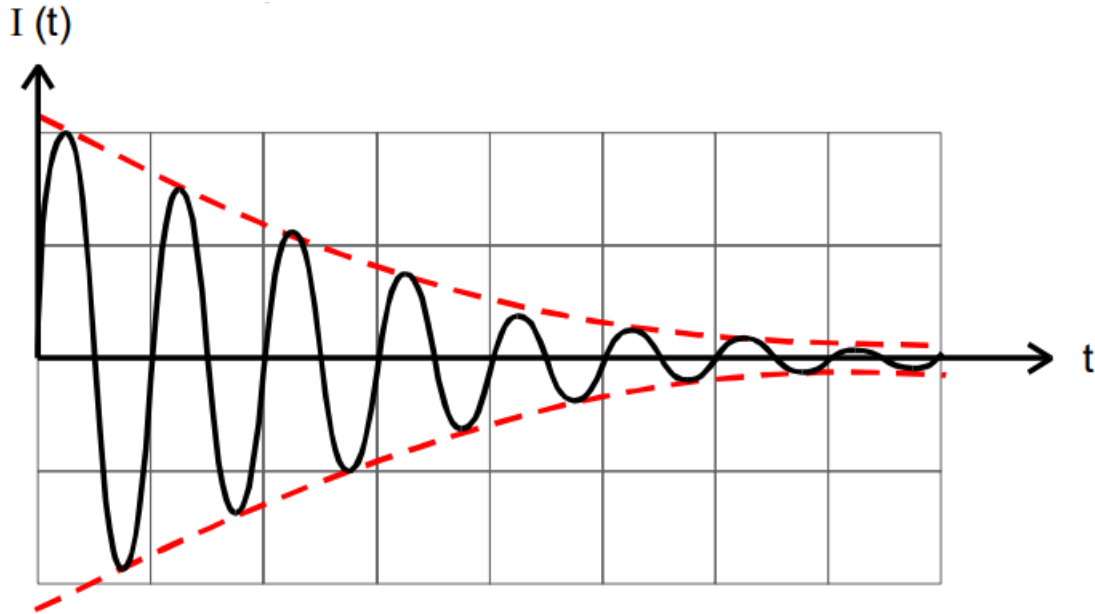


Abbildung 2: Der Schwingfall der gedämpften Schwingung mit der Einhüllenden $\pm e^{-2\pi\mu t}$. [6]

2. Fall: $\nu \in \mathbb{C}$

Bei diesem Fall enthält die Lösung $I(t)$ keinen oszillierenden Anteil und diese folgt einem Relaxationsverfahren. Je nach Wahl der Konstanten U_1 und U_2 aus (2) liegen Extrema vor bis die Gleichung für große t gegen Null geht. Wenn $\nu = 0$ liegt der aperiodische Grenzfall vor, dargestellt durch die gestrichelte Kurve in Abbildung 3, wo die Kurve am schnellsten gegen Null fällt und keine Überschwingung vorliegt. Bei $\nu = 0$ gilt $\frac{1}{LC} = \frac{R_{ap}^2}{4L^2}$ und für $I(t)$ gilt

$$I(t) = A e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}. \quad (7)$$

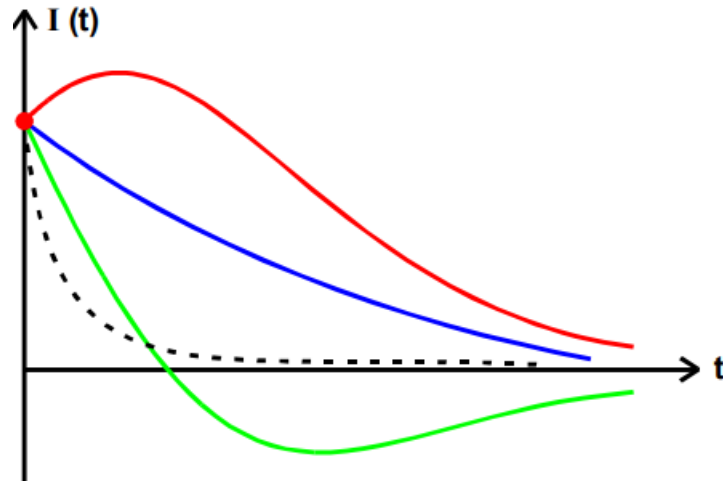


Abbildung 3: Verlauf von $I(t)$ bei aperiodischer Dämpfung. [6]

2.2 Erzwungene Schwingungen des RC-Kreises

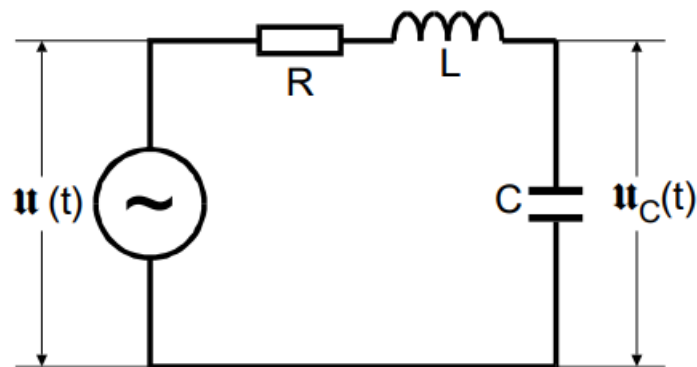


Abbildung 4: Schwingkreis der erzwungenen Schwingung mit sinusförmiger Erregerspannung. [6]

Für die Differentialgleichung mit der Eingangsspannung U_0 folgt hier

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t} = LC \frac{d^2 U_C}{dt^2} + RC \frac{dU_C}{dt} + U_C \quad (8)$$

mit

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (9)$$

Für große Frequenzen geht die Spannungsamplitude U_C gegen null und bei kleinen Frequenzen gegen U_0 . Es folgt ebenfalls aus (8) folgt für die Phase φ

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right). \quad (10)$$

Die Kondensatorspannung erreicht ein Maximum bei der Resonanzfrequenz ω_{res} nach

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \quad (11)$$

Im Fall der schwachen Dämpfung ($\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}$) liegt das Maximum der Kondensatorspannung bei

$$U_{C,max} = \frac{1}{\omega_0 RC} U_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_0, \quad (12)$$

wobei der Faktor $\frac{1}{\omega_0 RC}$ auch als Güte q des Schwingkreises bezeichnet. Die schärfe der Resonanz lässt sich mit der Breite der Kurve aus (9). Diese wird charakterisiert durch die Frequenzen ω_+ und ω_- bei welchen die Spannung U_C auf $\frac{1}{\sqrt{2}}$ des Maximalwertes abgefallen ist. Die Güte q lässt sich über die Breite der Resonanzkurve mit

$$q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-} \quad (13)$$

ausdrücken.

3 Durchführung

Es soll zunächst die Zeitabhängigkeit der Amplitude untersucht werden und daraus der effektive Dämpfungswiderstand R_{eff} bestimmt werden. Dazu wurde eine Schaltung Abbildung 5 entsprechend aufgebaut und der Schwingkreis zu einer gedämpften Schwingung angeregt. Es wurde der kleinere der in der Schaltung eingebauten Widerstände verwendet und die Spannung und das Oszilloskop so eingestellt, dass die Amplitude der gedämpften Schwingung um ca. den Faktor 3-8 angenommen hat bevor diese erneut beginnt.

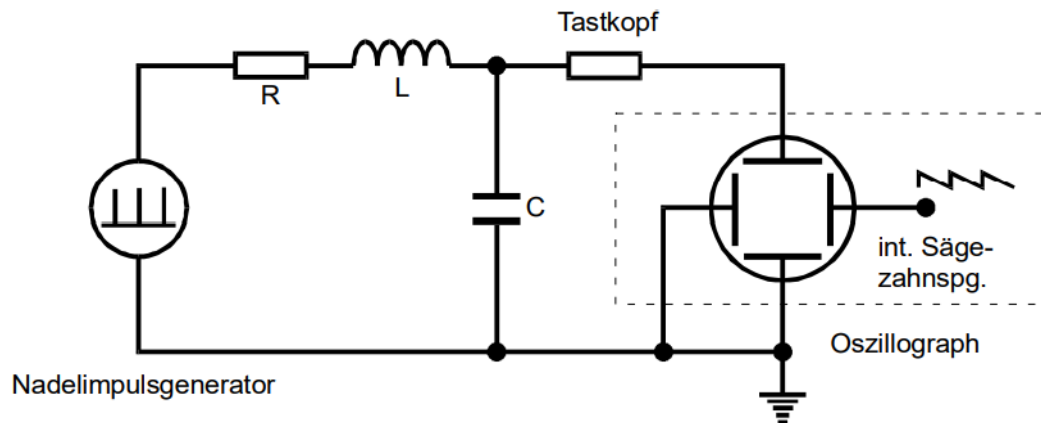


Abbildung 5: Die für 5a verwendete Schaltung. [6]

Außerdem soll der Dämpfungswiderstand R_{ap} bestimmt werden, bei dem der aperiodische Grenzfall vorliegt. Dafür wurde eine Schaltung nach Abbildung 6 verwendet und der verstellbare Widerstand so eingestellt, dass sich so gerade eben kein Überschwingen zeigt, indem dieser von seinem Maximalwert langsam verringert wurde.

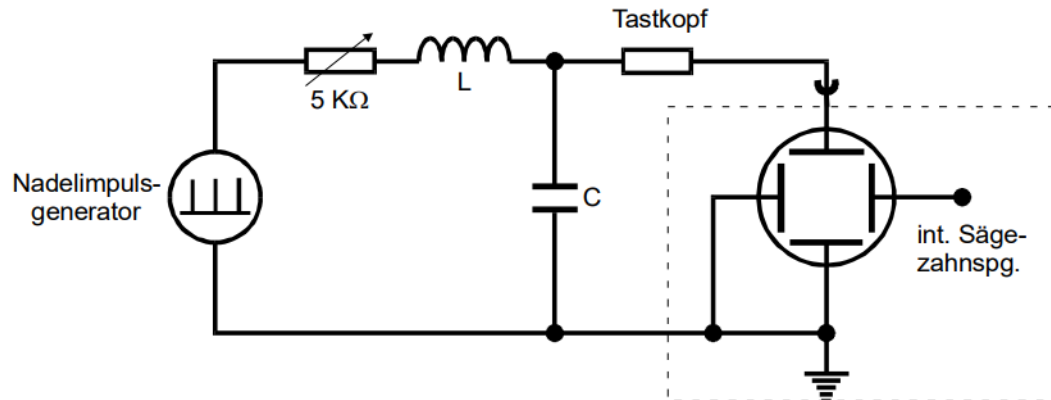


Abbildung 6: Die für 5b verwendete Schaltung. [6]

Zuletzt sollen die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung und der Phase zwischen Erreger- und Kondensatorspannung am Serienresonanzkreis untersucht werden. Die verwendete Schaltung entspricht der in Abbildung 7 dargestellten. Dabei wurden Wertepaare der Erregerspannung, Kondensatorspannung und den Parametern a und b nach Abbildung 8 zu verschiedenen Frequenzen vom Oszilloskop entnommen.

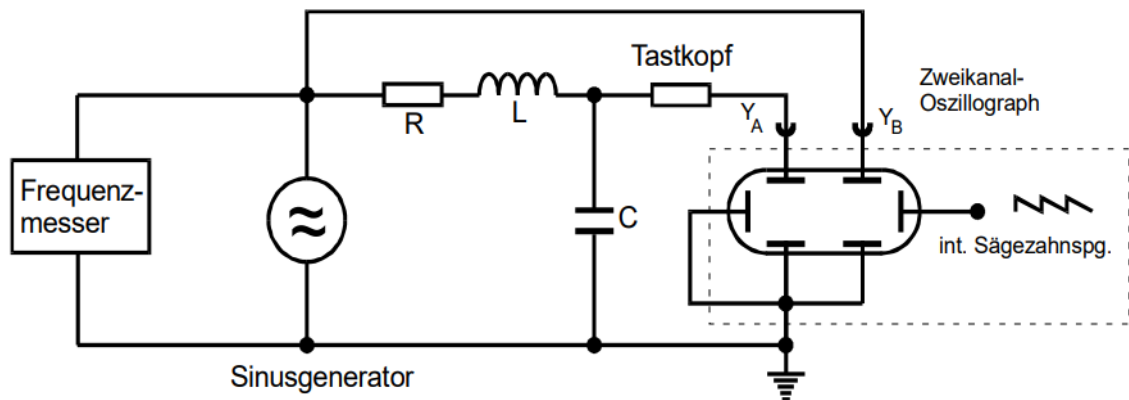


Abbildung 7: Die für 5c und 5d verwendete Schaltung. [6]

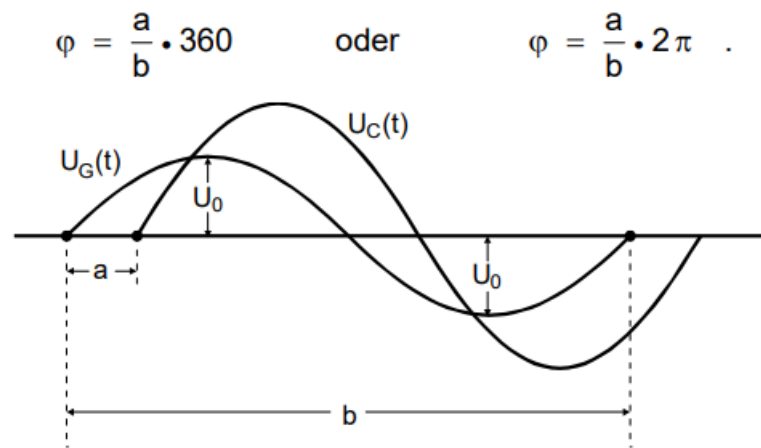


Abbildung 8: Die Phasenverschiebung der Erreger- und Kondensatorspannung. [5]

4 Auswertung

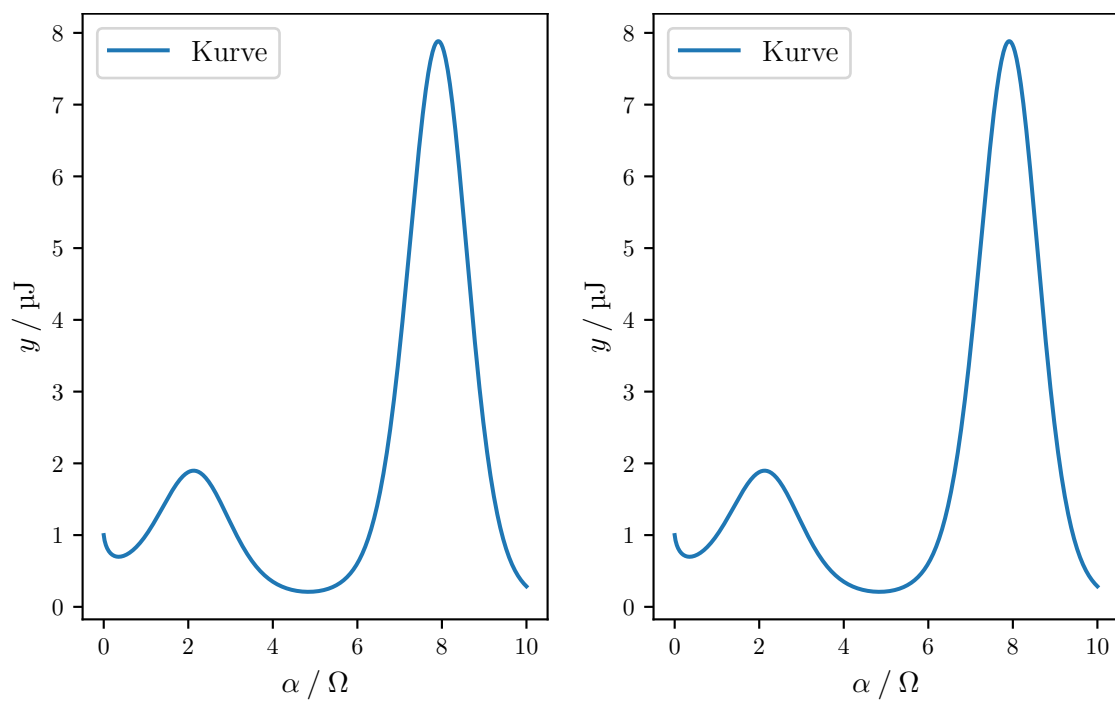


Abbildung 9: Plot.

Siehe Abbildung 9!

5 Diskussion

Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [2] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [4] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [5] *Versuch Nr.353 Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. TU Dortmund, Fakultät Physik.
- [6] *Versuch Nr.354 Gedämpfte und erzwungene Schwingungen*. TU Dortmund, Fakultät Physik.