Versuch 103

Biegung elastischer Stäbe

Sadiah Azeem
sadiah.azeem@tu-dortmund.de

Nils Metzner
nils.metzner@tu-dortmund.de

Durchführung: 30.11.2021

Abgabe: 07.12.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Ziel dieses Versuches ist es, den Elastizitätsmodul eines quadratischen Aluminiumstabes und eines runden Messingstabes zu bestimmen und mit Literaturwerten zu vergleichen.

2 Theorie

Eine Kraft, die auf eine Flächeneinheit eines Körpers wirkt, kann bei diesem eine Volumenänderung hervorrufen. Die Komponente dieser Kraft, die orthogonal zur Oberfläche des Versuchskörpers steht, wird als Normalspannung σ des Flächenelements bezeichnet. Diese Spannung wird durch das Hooke´sche Gesetz

$$\sigma = E\frac{\Delta L}{L}$$

beschrieben.
Dabei ist E der Elastizitätsmodul, welcher eine materialabhängige Konstante ist, und $\frac{\Delta L}{L}$ die relative Änderung von L einer linearen Körperdimension.
Um den Elastizitätsmodul aus dieser relativen Änderung, welche zumeist sehr klein ist, zu bestimmen, muss diese sehr präzise gemessen werden, wozu nicht immer die Geräte zur Verfügung stehen. Daher wird für diesen Versuch die Auslenkung D aus einer Ruhelage für die Messung verwendet, da diese bereits bei kleineren Kräften entsteht. Die Messverfahren dieser Größe werden in Abschnitt 3 beschrieben.

2.1 Biegung bei einseitiger Einspannung

Die in Abschnitt 2 erwähnte Auslenkung D ist nicht über den gesamten Querschnitt Q des Stabes konstant, sondern variiert. Daher wird die Verschiebung eines Punktes der Oberfläche an der Stelle x des Stabes zur Ruhelage, wie in Abbildung 1 als $D(x)$ gemessen.

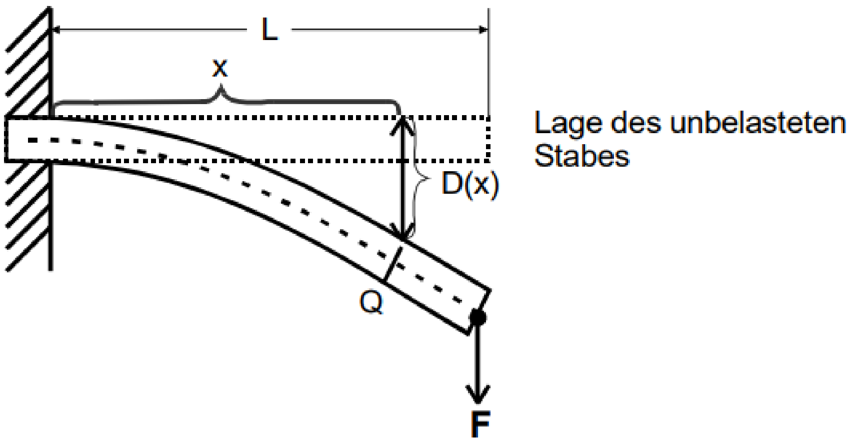

Abbildung 1: Funktionsweise der einseitigen Einspannung des Stabes.
Quelle: [5]

Wirkt nun eine Kraft F wie in Abbildung 1 auf den Stab, bewirkt diese unterhalb der in Abbildung 1 gestrichelt eingezeichneten neutralen Faser, auf der keine Spannung auftritt, Druckspannungen und oberhalb Zugspannungen. Das Anwenden der Kraft erzeugt außerdem ein äußeres Drehmoment M_F. Da die eben erwähnten Zug- und Druckspannungen entgegengesetzt gleich sind, bewirken diese auch ein Drehmoment M_σ, wie in Abbildung 2 illustriert ist.

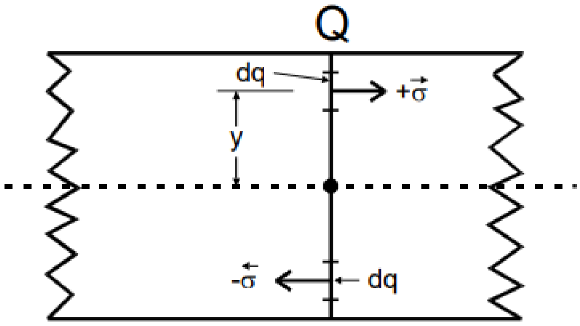

Abbildung 2: Die wirkenden Kräfte bei einseitiger Einspannung. Quelle: [5]

Dieses lässt sich nach

$$M_\sigma = \int_Q y\sigma(y)dq \tag{1}$$

berechnen.
Wenn sich ein Gleichgewicht zwischen den Drehmomenten einstellt

$$M_F = M_\sigma \tag{2}$$

endet die Deformation des Stabes.
Der Betrag des äußere Drehmoments M_F ist hier über den Hebelarm $L - x$ definiert

$$M_F = F(L - x). \tag{3}$$

Um nun den Elastizitätsmodul bestimmen zu können, wird die Beziehung zwischen Normalspannung und der Auslenkung D benötigt, welche sich zu

$$\sigma = Ey\frac{d^2D}{dx^2} \tag{4}$$

ergibt.
Aus den obigen Gleichungen (4), (1), (3) und dem Gleichgewicht der Momente nach (2) folgt:

$$E\frac{d^2D}{dx^2}\int_Q y^2dq = F(L - x). \tag{5}$$

Woraus sich der Ausdruck

$$I = \int_Q y^2dq(y), \tag{6}$$

welcher als Flächenträgheitsmoment bezeichet wird, ergibt. Die Auslenkung D des Stabes an einer Stelle x kann dann nach der folgenden Formel berechnet werden:

$$D\,(x) = \frac{F}{2EI}\left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right), \quad 0 \leq x \leq L. \tag{7}$$

2.2 Biegung bei beidseitiger Auflage

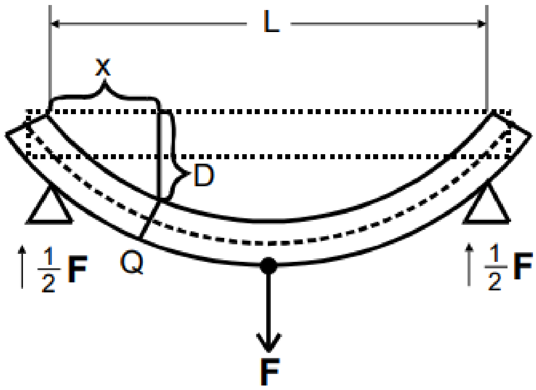

Abbildung 3: Ein Stab bei beidseitiger Auflage. Quelle: [5]

Bei dem Wirken einer Kraft wie in Abbildung 3 auf einen beidseitig aufgelegten Stab ergeben sich zwei neue Drehmomente

$$M_F = -\frac{F}{2}x, \qquad 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \tag{8}$$

$$M_F = -\frac{F}{2}(L - x), \qquad \frac{L}{2} \leq x \leq L. \tag{9}$$

Damit folgt für die Auslenkung $D(x)$ der linken Stabhälfte

$$D(x) = \frac{F}{48EI}\left(3L^2x - 4x^3\right), \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \tag{10}$$

und für die rechte Stabhälfte

$$D(x) = \frac{F}{48EI}\left(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3\right), \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L. \tag{11}$$

3 Aufbau und Durchführung

Zur Messung des Elastizitätsmoduls werden jeweils 4 Messreihen für den runden und den quadratischen Stab durchgeführt. Zu Beginn wurden die Maße der Stäbe aufgenommen, um deren Dichten zur Bestimmung des Materials zu erhalten und den Querschnitt für die Berechnung zu bestimmen. Für die folgenden Messverfahren wird ein Aufbau entsprechend Abbildung 4 verwendet.

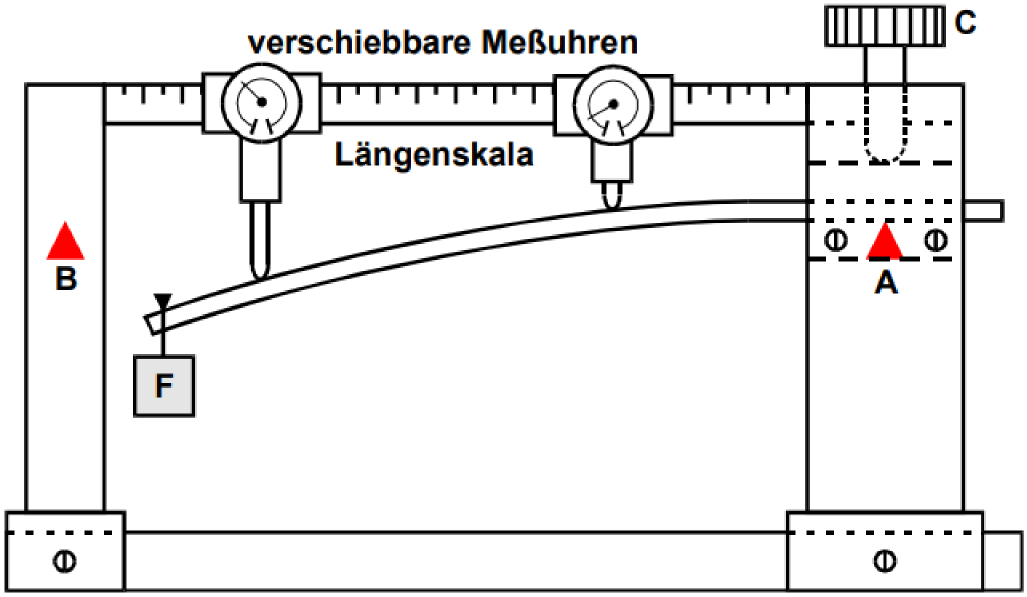

Abbildung 4: Die verwendete Apparatur zum Einspannen, Auflegen und Messen der Stäbe. Quelle: [5]

3.1 Einseitige Einspannung

Bei der einseitigen Einspannung werden die Stäbe wie in Abbildung 4 an A eingespannt und zunächst eine Nullmessung, also eine Messung ohne angehängtes Gewicht F, für beide Stäbe durchgeführt und Werte $D_0(x)$ mit der rechten Messuhr in gleichmäßigen Abständen gemessen. Anschließend wird Abbildung 4 entsprechend das Gewicht F angehängt, welches so gewählt wird, dass die Auslenkung $D(x)$ aus der zuvor bestimmten Ruhelage zwischen 3mm und 7mm liegt, denn über 7mm verhalten sich die Stäbe nicht mehr elastisch. Es werden Werte $D_M(x)$ in den gleichen Abständen wie bei der Nullmessung aufgenommen, aus denen die Auslenkungen $D(x) = D_M(x) - D_0(x)$ berechnet werden.

3.2 Beidseitige Auflage

Es wird für die beidseitige Auflage der Stäbe auch die Apperatur aus Abbildung 4 verwendet und der Stab nur an den Stellen A und B aufgelegt. Zu Beginn wird wie bei der einseitigen Einspannung eine Nullmessung von $D_0(x)$ für beide Stäbe durchgeführt, nur das hierbei zwischen rechts und links vom Mittelpunkt der Stäbe unterschieden wird. Das Gewicht F wird hierbei anschließend in der Mitte des Stabes aufgehängt und groß gewählt, da die Auslenkung $D(x)$ sonst sehr klein sind. Die Messwerte der Auslenkung $D_M(x)$ werden entsprechend der Nullmessung dieser Messreihe rechts und links des Mittelpunktes für beide Stäbe aufgenommen. Die Auslenkungen $D(x)$ zu den Messwerten werden wie bei der einseitigen Einspannung berechnet.

4 Auswertung

Die Maße, also Durchmesser d bzw. Kantenlänge a des eckigen Stabes mit quadratischem Querschnitt, Masse m und Länge l der Stäbe betragen

$$
\begin{aligned}
a_{eckig} &= 10,1 \pm 0,05mm \\
m_{eckig} &= 167,9 \pm 0,1g \\
l_{eckig} &= 620 \pm 0,05mm
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_{rund} &= 10,1 \pm 0,05mm \\
m_{rund} &= 390,6 \pm 0,1g \\
l_{rund} &= 592 \pm 0,05mm
\end{aligned}
$$

Der eckige Stab besteht aus Aluminium, der runde aus Messing.
Um die Elastizitätsmodule zu bestimmen, müssen zuerst die Flächenträgheitsmomente I nach — errechnet werden.
Für den quadratischen Querschnitt mit Kantenlänge a ergibt sich die Formel $I_Q = \frac{a^4}{12}$ und für den kreisförmigen Querschnitt $I_K = \frac{\pi r^4}{4}$.
Somit ergeben sich, die Gaußsche Fehlerfortpflanzung hinzugezogen, die folgenden Flächenträgheitsmomenten

$$
\begin{aligned}
I_{rund} &= \frac{\pi(0.5 \cdot 10^{-3}m)^4}{4} = 4,91 \cdot 10^{-14}m^4 \\
\text{und} \quad I_{eckig} &= \frac{(1 \cdot 10^{-3}m)^4}{12} = 8,34 \cdot 10^{-14}m^4
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
\Delta I_{rund} &= \sqrt{(\frac{\partial I_{rund}}{\partial r})^2 \cdot (\Delta r)^2} = 4,092 \cdot 10^{-30}m^4 \\
\text{und} \quad \Delta I_{eckig} &= \sqrt{(\frac{\partial I_{eckig}}{\partial a})^2 \cdot (\Delta a)^2} = 2,949 \cdot 10^{-30}m^4
\end{aligned}
$$

Damit berechnen sich die Elastizitätsmodule durch

$$E = \frac{F_g}{2 \cdot I \cdot a} \tag{12}$$

Mit $F = m \cdot g$

4.1 Einseitige Einspannung

4.1.1 Runder Stab

Tabelle 1: Die Werte für die einseitige Einspannung bei Messung am runden Messingstab ohne Gewicht.

x / mm	$D_0(x)$ / mm
34	0.01
64	0.04
94	0.09
124	0.13
154	0.19
184	0.22
214	0.26
244	0.33
274	1.03
304	1.05
334	1.07
364	1.28
394	1.25
424	1.30
454	1.32
484	1.38

Tabelle 2: Die Werte für die einseitige Einspannung bei Messung am runden Messingstab mit einem Gewicht von 550g.

x / mm	$D_m(x)$ / mm
25	0.25
55	-0.07
85	-0.09
115	-0.07
145	-0.01
175	0.12
205	0.26
235	0.46
265	0.73
295	1.00
325	1.31
355	1.62
385	2.00
415	2.39
445	2.75
475	3.37
497	3.54

Zur Ermittlung des Elastizitätsmodul wird eine lineare Regression durchgeführt, wobei $D(x) = D_m - D_0$ gegen $Lx^2 - \frac{x^3}{3}$ aufgetragen wird.
So werden die folgenden Werte der Steigung a der Ausgleichsgeraden ermittelt:

$$1 = 2$$
$$2 = 1$$

damit ergibt sich für den Elastizitätsmodul des runden Stabs

$$E = \frac{0,3906kg \cdot 9,81m/s^2}{2 \cdot 4,91 \cdot 10^{-14}m^4 \cdot 0.4} = 97,55 \cdot 10^{12}N/m^2.$$

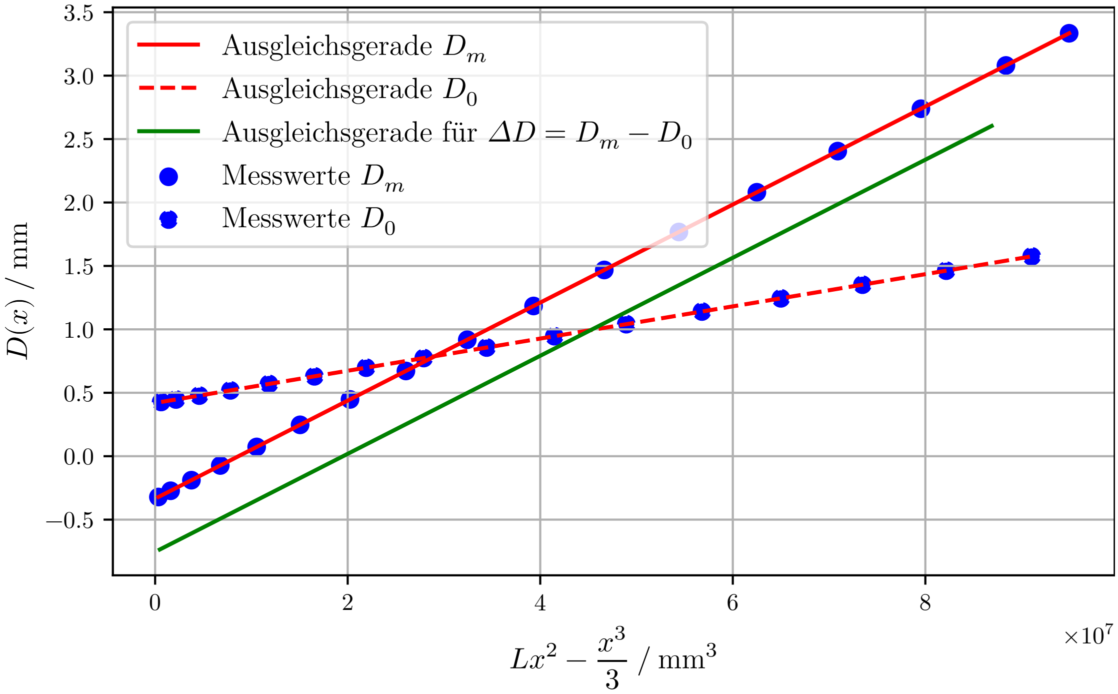

Abbildung 5: Die Auslenkung des einseitig eingespannten runden Stabs in Abhängigkeit von der Entfernung von der Einspannung.

4.1.2 Eckiger Stab

Tabelle 3: Die Werte für die einseitige Einspannung bei Messung am eckigen Aluminiumstab ohne Gewicht.

x / mm	$D_0(x)$ / mm
25	0.00
55	-0.08
85	-0.15
115	-0.22
145	-0.29
175	-0.33
205	-0.38
235	-0.41
275	-0.44
305	-0.40
335	-0.44
365	-0.43
395	-0.43
425	-0.43

Tabelle 4: Die Werte für die einseitige Einspannung bei Messung am eckigen Aluminiumstab mit einem Gewicht von 550g.

x / mm	$D_m(x)$ / mm
25	0.05
55	0.29
85	0.58
115	0.94
145	1.30
175	1.75
205	2.20
235	2.74
265	3.24
295	3.81
325	4.40
355	5.05
385	5.65
415	6.25

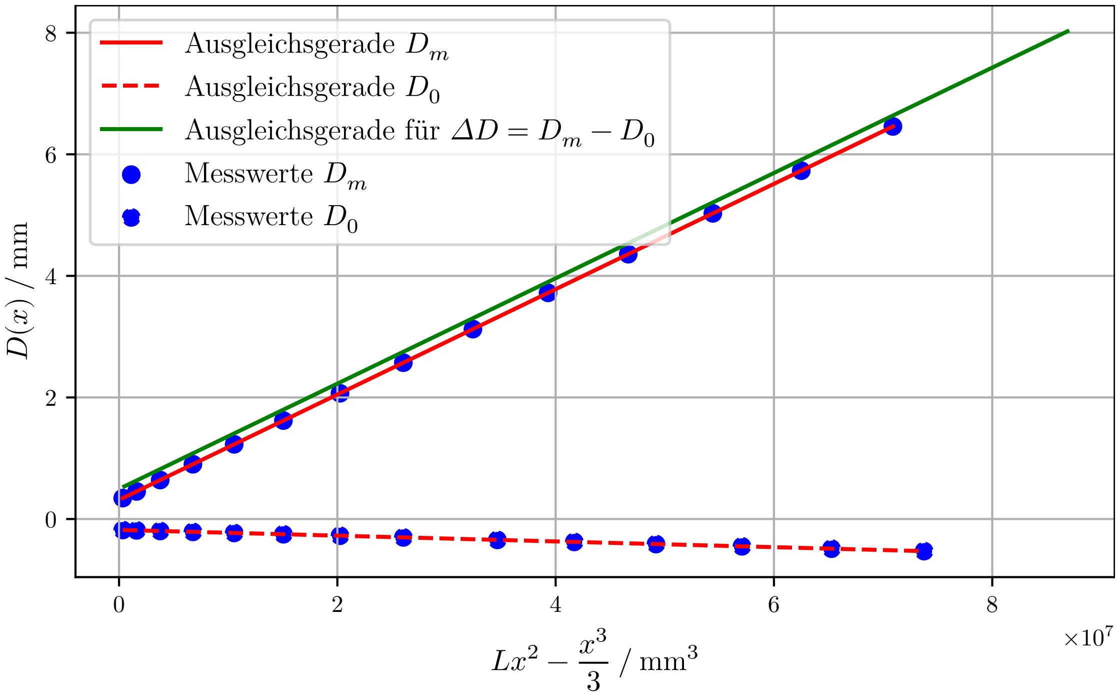

Abbildung 6: Die Auslenkung des einseitig eingespannten eckigen Stabs in Abhängigkeit von der Entfernung von der Einspannung.

4.2 Beidseitige Auflage

Tabelle 5: Die Werte für die beidseitige Auflage bei Messung am runden Messingstab von rechts bis zur Mitte, bei D_m mit einem Gewicht von 1250g.

x / mm	$D_0(x)$ / mm	$D_m(x)$ / mm	$D_{abs}(x)$ / mm
30	0.01	0.20	0.19
60	0.04	0.48	0.44
90	0.09	0.71	0.62
120	0.13	0.93	0.80
150	0.19	1.14	0.95
180	0.22	1.32	1.10
210	0.26	1.46	1.20
240	0.33	1.58	1.25

Tabelle 6: Die Werte für die beidseitige Auflage bei Messung am runden Messingstab von rechts bis zur Mitte, bei D_m mit einem Gewicht von 1250g.

x / mm	$D_0(x)$ / mm	$D_m(x)$ / mm	$D_{abs}(x)$ / mm
0	0.00	0.10	0.10
30	0.09	0.20	0.11
60	0.15	0.32	0.17
90	0.24	0.41	0.17
120	0.32	0.50	0.18
150	0.35	0.58	0.23
180	0.42	0.65	0.23
210	0.45	0.70	0.25
240	0.52	0.71	0.19

Die Werte für die beidseitige Auflage werden für die lineare Regression in D(x) gegen $3L^2x - 4x^3$ aufgetragen.

Mit den sich ergebenden Werten für a und c lässt sich $E = \frac{m \cdot g}{48 \cdot I \cdot a}$ mit wie folgt berechnen

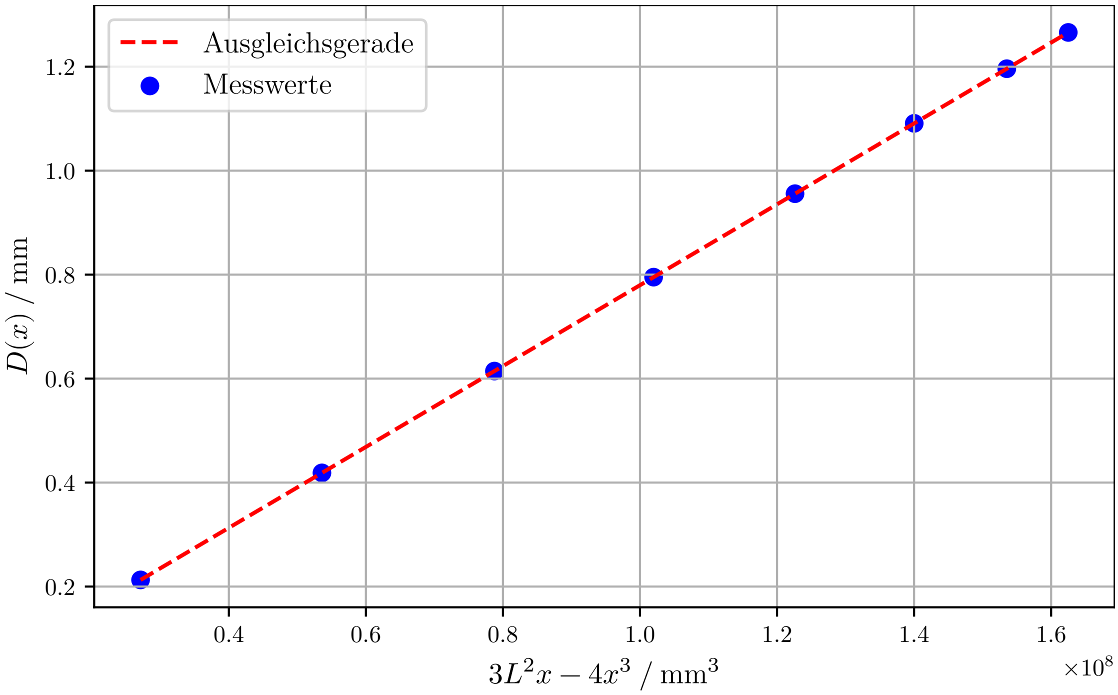

Abbildung 7: Die lineare Regression für die Messung am beidseitig aufliegenden, runden Messingstab von rechts.

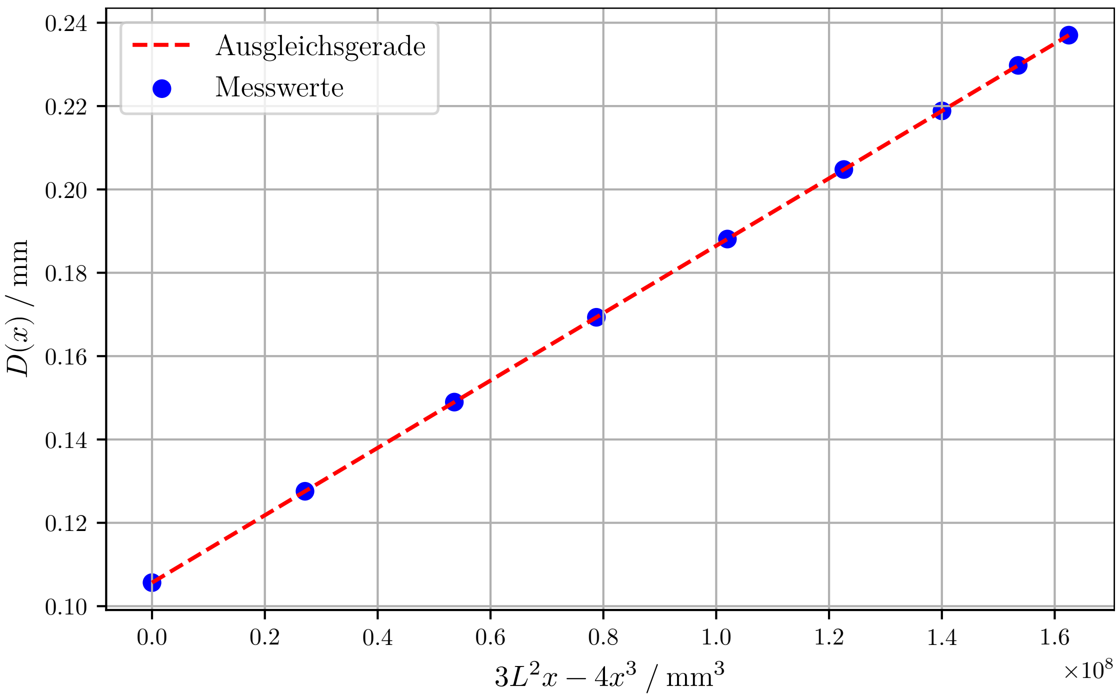

Abbildung 8: Die lineare Regression für die Messung am beidseitig aufliegenden, runden Messingstab von links.

5 Diskussion

Die experimentiell bestimmten Elastizitätsmodule der beiden Stäbe ergeben sich zu — für die einseitige Einspannung und — für die beidseitige Auflage.
Entsprechende Literaturwerte ergeben sich nach — zu —.

Einige Quellen für das Auftreten von Mesungenauigkeiten sind die Messuhren, die, teilweise schon ohne anhängendes Gewicht, ungleichmäßig verbogenen Stäbe und, wie sehr häufig, Ablesefehler.
Bei den Messuhren ist besonders auffällig, dass die linke Uhr, beim mittig anhängenden Gewicht, bei gleichen Abstand vom Mittelpunkt, beinahe doppelt (?) so große Werte misst, wie die rechte Uhr.
Außerdem sind beide Messuhren sehr empfindlich für kleinste Erschütterungen und Deformationen der zu messenden Stäbe.
Hinzu kommt, dass wir beim Messen nicht bedacht haben, D_0 und D_m (mit anhängendem Gewicht) an den gleiche x-Stellen zu messen, sodass in der graphischen Auswertung mit der Interpolation bzw. Regression gearbeitet werden muss, um $D(x) = D_m - D_0$ zu bestimmen.

Literatur

[1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: `http://matplotlib.org/`.

[2] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: `http://www.scipy.org/`.

[3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: `http://pythonhosted.org/uncertainties/`.

[4] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: `http://www.numpy.org/`.

[5] *Versuch Nr.103: Biegung elastischer Stäbe*. TU Dortmund, Fakultät Physik.