

Versuch 107

Das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler

Sadiah Azeem

sadiah.azeem@tu-dortmund.de

Nils Metzner

nils.metzner@tu-dortmund.de

Durchführung: 23.11.2021

Abgabe: 30.11.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Reynolds-Zahl	3
2	Durchführung	3
2.1	Vorbereitungsaufgaben	3
2.2	Aufgaben	4
2.3	Aufbau	4
3	Messwerte	5
4	Auswertung	6
4.1	Volumina und Dichten	6
4.2	Fehlerformeln	6
4.3	Bestimmung der Apparaturkonstanten	7
4.4	Andradesche Gleichung	7
4.5	Reynoldsche Zahl	9
5	Diskussion	10
	Literatur	11

1 Theorie

1.1 Reynolds-Zahl

Die Reynolds-Zahl Re gibt Auskunft darüber, ob eine Strömung laminar oder turbulent ist.

Das Verhalten von Objekten, wie einer Kugel, innerhalb dieser Strömung ist von verschiedenen Größen abhängig.

Darunter fallen die Dichte ρ , dynamische und kinematische Viskosität η und ν , und Strömungsgeschwindigkeit v der Flüssigkeit und der Durchmesser d der Kugel.

Die Reynolds-Zahl ist definiert über:

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta} = \frac{v d}{\nu} \quad (1)$$

mit $\eta = \nu \rho$.

Ab einem kritischen Wert von $Re_{krit} \approx 2300$ wird eine bisher laminare Strömung bei minimalen Störungen turbulent, das heißt, es entwickeln sich Wirbel, und die Schichten gleicher Strömungsgeschwindigkeit, die bei laminarer Strömung parallel zueinander sind, vermischen sich miteinander.

Dieses Verhalten lässt sich durch die Kräfte F_G , $F_{Auftrieb}$ und $F_{Reibung}$, die auf die Kugel wirken, begründen.

Die Reibung bezieht sich hier auf die Flüssigkeitsschichten.

Für die Berechnung der Viskosität η gibt es die Formel

$$\eta = K(\rho_{Kugel} - \rho_{Fluessigkeit}) \cdot t \quad (2)$$

K ist hier eine Apparaturkonstante, die sowohl durch die Kugelgeometrie, als auch die Fallhöhe bedingt wird.

Bei Betrachtung der Temperaturabhängigkeit der dynamischen Viskosität wird die Andradesche Gleichung genutzt:

$$\eta(T) = A \cdot \exp\left(\frac{B}{T}\right) \quad (3)$$

Dabei sind A und B Konstanten.

Bei der linearen Regression wird sie zu

$$\ln(\eta(T)) = B \cdot \frac{1}{T} + \ln(A) \quad (4)$$

2 Durchführung

2.1 Vorbereitungsaufgaben

In V107 sind zwei Vorbereitungsaufgaben vorgesehen.

1. Wann wird eine Strömung als "laminar" bezeichnet?

Eine laminare Strömung ist wirbelfrei und lässt sich an der Reynolds-Zahl erkennen, siehe Abschnitt Theorie 1.1.

2. Die Dichte und dynamische Viskosität von destilliertem Wasser als Funktion der Temperatur

Tabelle 6 Dichte und Viskosität von Wasser					
Temperatur °C	Dichte 10^3 kg/m^3	Viskosität $10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$	Temperatur °C	Dichte 10^3 kg/m^3	Viskosität $10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
0	0.99984	1.792	23	0.99754	0.936
1	0.99990	1.751	24	0.99730	0.914
2	0.99994	1.673	25	0.99705	0.894
3	0.99996	1.609	26	0.99679	0.871
4	0.99997	1.567	27	0.99652	0.850
5	0.99998	1.519	28	0.99624	0.830
6	0.99999	1.473	29	0.99596	0.810
7	0.99999	1.428	30	0.99565	0.801
8	0.99999	1.386	35	0.99468	0.733
9	0.99978	1.346	40	0.99222	0.636
10	0.99970	1.308	45	0.98862	0.509
11	0.99961	1.271	50	0.98491	0.349
12	0.99950	1.236	55	0.98017	0.236
13	0.99938	1.203	60	0.97532	0.168
14	0.99924	1.171	65	0.96986	0.136
15	0.99910	1.140	70	0.9778	0.106
16	0.99894	1.111	75	0.9749	0.080
17	0.99878	1.083	80	0.9718	0.057
18	0.99862	1.056	85	0.9686	0.036
19	0.99845	1.030	90	0.9653	0.017
20	0.99821	1.005	95	0.9619	0.000
21	0.99799	0.981	100	0.9583	0.000
22	0.99777	0.958			

Abbildung 1: Quelle: angegebene Literatur

2.2 Aufgaben

Es soll mit Hilfe der Reynoldsschen Zahl bestimmt werden, ob die Strömung laminar ist.

Darüber hinaus wird mit Hilfe der genommenen Messdaten die Temperaturabhängigkeit der Viskosität von destilliertem Wasser berechnet.

Im ersten Teil des Versuchs lässt man zwei Kugeln verschiedener Größe wiederholt das Viskosimeter passieren und misst die Zeit, die sie für das Durchqueren einer markierten Strecke bestimmter Länge brauchen.

Das Wasser ist hier bei Raumtemperatur und es werden je Kugel 10 Messungen durchgeführt, die jeweils Hin- und Rückweg beinhalten.

Im zweiten Teil wird das Wasser nun langsam bis auf 50 Grad Celsius aufgeheizt, während zwischendurch insgesamt bei verschiedenen Temperaturen mindestens 10 Messungen mit der größeren Kugel durchgeführt werden.

2.3 Aufbau

Das Höppler-Viskosimeter ist in 2 zu sehen.

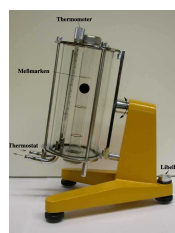


Abbildung 2: Das Höppler-Viskosimeter)

3 Messwerte

Gemessene Werte für die Durchmesser der kleinen und der großen Kugel:

$$d_{gross} = 1.58\text{cm}$$

$$d_{klein} = 1.55\text{cm}$$

Tabelle 1: Die gemessenen Fallzeiten der Kugeln bei Raumtemperatur(20°C).

kleine Kugel		große Kugel	
t_{hin} / s	t_{zur} / s	t_{hin} / s	t_{zur} / s
6.27	6.47	41.01	41.80
6.82	6.20	41.16	41.01
6.18	6.30	41.07	40.86
6.30	6.13	40.63	40.30
5.88	6.08	41.05	40.56
6.16	6.08		
6.17	6.27		
6.02	6.73		
6.30	6.40		
5.87	6.58		

Tabelle 2: Die gemessenen Fallzeiten der Kugeln zu verschiedenen Temperaturen

$T / ^\circ\text{C}$	Messung 1		Messung 2	
	t_{hin} / s	t_{zur} / s	t_{hin} / s	t_{zur} / s
25	35.17	35.36	/	/
29	32.45	33.53	32.70	/
32	29.96	30.13	29.65	29.76
34	29.61	29.29	29.12	29.55
36	28.37	28.73	28.79	29.12
38	27.45	27.50	26.86	27.89
40	25.72	26.64	25.98	26.18
42	25.42	25.10	25.40	25.72
44	24.57	24.20	24.04	24.34
46	23.80	23.65	23.54	23.99
48	23.01	22.90	22.58	22.76
50	21.48	22.09	22.72	22.31

4 Auswertung

4.1 Volumina und Dichten

Zuerst wurden die Dichten ρ_{kl} und ρ_{gr} der kleinen und großen Kugel bestimmt.

Dazu wurden deren Massen $m_{kl} = 4.453\text{g}$ und $m_{gr} = 4.953\text{g}$, sowie deren Durchmesser verwendet und damit die Volumina mit $V = \frac{1}{6}\pi(d)^3$ berechnet:

$$V_{kl} = \frac{1}{6}\pi(1.55\text{cm})^3 \approx 1.9498\text{cm}^3$$
$$V_{gr} = \frac{1}{6}\pi(1.58\text{cm})^3 \approx 2.0652\text{cm}^3.$$

Anschließend wurden mit der Formel $\rho = \frac{m}{V}$ die Dichten der Kugeln berechnet:

$$\rho_{kl} = \frac{m_{kl}}{V_{kl}} \approx 2.2838 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$
$$\rho_{gr} = \frac{m_{gr}}{V_{gr}} \approx 2.3983 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

4.2 Fehlerformeln

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$$
$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} = \sqrt{\bar{x}^2 - \bar{x}^2}.$$

Für die Berechnung der Fehlerfortpflanzung wurde die Gauß'schen Fehlerfortpflanzung verwendet:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right)^2 + \dots}$$

4.3 Bestimmung der Apparaturkonstanten

Schließlich wurden der Mittelwert und die Standardabweichungen der Fallzeiten der Kugeln berechnet.

Für die kleine Kugel ergibt sich:

$$\begin{aligned}\bar{t}_{hin} &= (6.197 \pm 0.256)\text{s} \\ \bar{t}_{zur} &= (6.324 \pm 0.208)\text{s}.\end{aligned}$$

Und für die große Kugel ergibt sich:

$$\begin{aligned}\bar{t}_{hin} &= (40.984 \pm 0.184)\text{s} \\ \bar{t}_{zur} &= (40.906 \pm 0.510)\text{s}.\end{aligned}$$

Nun wurde mit (2) und der Apparaturkonstante $K_{kl} = 0.0764\text{mPa cm}^3/\text{g}$ der kleinen Kugel die dynamische Viskosität η berechnet, wobei die angegebene Apparaturkonstante sich auf die Strecke $\Delta s = 100\text{mm}$ bezieht, aber die Messdaten auf einer Strecke von $\Delta s = 50\text{mm}$ genommen wurden, müssen die gemessenen Zeiten verdoppelt werden, hier also mit $t_{hin} = (12.394 \pm 0.512)\text{s}$ und $t_{zur} = (12.648 \pm 0.416)\text{s}$:

$$\begin{aligned}\eta_{hin} &= (1.32575 \pm 0.05477)\text{mPa s} \\ \eta_{zur} &= (1.35292 \pm 0.04450)\text{mPa s}\end{aligned}$$

Es wurde Gleichung (2) nach K umgeformt.

Mit dem nun bekannten η kann K_{gr} mit den Zeiten für die große Kugel $t_{hin} = (81.968 \pm 0.367)\text{s}$ und $t_{zur} = (81.812 \pm 1.019)\text{s}$ berechnet werden:

$$\begin{aligned}Hin : K_{gr} &= \frac{\eta_{hin}}{(\rho_K - \rho_{Fl})t_{hin}} = (11.5521 \pm 0.4800) \frac{\mu\text{Pa cm}^3}{\text{g}} \\ Zurueck : K_{gr} &= \frac{\eta_{zur}}{(\rho_K - \rho_{Fl})t_{zur}} = (11.8113 \pm 0.4154) \frac{\mu\text{Pa cm}^3}{\text{g}}\end{aligned}$$

4.4 Andradesche Gleichung

Um die Konstanten A und B aus der Andradeschen Gleichung zu bestimmen, wurden die Werte der Messung zu verschiedenen Temperaturen aus Tabelle 2 gemittelt und die Standardabweichungen berechnet, sowie für die folgende Berechnung die Temperaturen in K angegeben.

Außerdem wurden die zugehörigen η nach (2) bestimmt.

Tabelle 3: Es wurden die Zeiten wieder verdoppelt, um sich, wie die Apparaturkonstanten, auf die Strecke von $\Delta s = 100\text{mm}$ zu beziehen.

T / K	\bar{t}_{hin} / s	\bar{t}_{zur} / s	$\eta_{hin} / \text{mPa s}$	$\eta_{zur} / \text{mPa s}$
298.15	70.34	70.72	1.1386 ± 0.0473	1.1705 ± 0.0412
302.15	65.15 ± 0.25	67.06	1.0554 ± 0.0440	1.1107 ± 0.0391
305.15	59.61 ± 0.31	59.89 ± 0.37	0.9657 ± 0.0404	0.9922 ± 0.0354
307.15	58.73 ± 0.49	58.84 ± 0.26	0.9528 ± 0.0404	0.9740 ± 0.0346
309.15	57.16 ± 0.42	57.85 ± 0.39	0.9273 ± 0.0391	0.9595 ± 0.0344
311.15	54.31 ± 0.59	55.39 ± 0.39	0.8821 ± 0.0379	0.9199 ± 0.0330
313.15	51.7 ± 0.26	52.82 ± 0.46	0.8398 ± 0.0351	0.8772 ± 0.0318
315.15	50.82 ± 0.02	50.82 ± 0.62	0.8255 ± 0.0343	0.8440 ± 0.0314
317.15	48.61 ± 0.53	48.54 ± 0.14	0.7907 ± 0.0340	0.8073 ± 0.0285
319.15	47.34 ± 0.26	47.64 ± 0.34	0.7701 ± 0.0323	0.7923 ± 0.0284
321.15	45.59 ± 0.43	45.66 ± 0.14	0.7427 ± 0.0316	0.7606 ± 0.0269
323.15	44.2 ± 1.24	44.4 ± 0.22	0.7201 ± 0.0361	0.7396 ± 0.0263

Nun wurde die Andradesche Gleichung (3) entsprechend umgeformt, um $\ln(\eta)$ in einem Diagramm gegen T^{-1} darzustellen, und dazu eine lineare Regression zu berechnen:

$$\ln(\eta) = \frac{B}{T} + \ln(A)$$



Abbildung 3: In diesem Diagramm ist T^{-1} gegen $\ln(\eta)$ mit den Daten aus Tabelle 3 aufgetragen, sowie die zugehörigen linearen Regressionen dargestellt.

Die Konstanten A und B der Andradeschen Gleichung ergeben sich danach für den Hinweg zu:

$$\begin{aligned}\ln(A_{hin}) &= (-12.6842 \pm 0.1248) \\ A_{hin} &= (3.0997 \pm 0.4120) \cdot 10^{-6} \\ B_{hin} &= (1758.9033 \pm 38.8663)\text{K}.\end{aligned}$$

Und für den Rückweg ergibt sich:

$$\begin{aligned}\ln(A_{zur}) &= (-12.7903 \pm 0.1725) \\ A_{zur} &= (2.7877 \pm 0.5248) \cdot 10^{-6} \\ B_{zur} &= (1801.5717 \pm 53.7424)\text{K}.\end{aligned}$$

Aus Abbildung 3 und den berechneten Konstanten erkennt man, dass die Unterteilung in Hin- und Rückweg nicht nötig ist, da sich die Fehlerbereiche immer überschneiden, sodass die Werte demnach nur statistische Fehler trennen.

4.5 Reynoldscche Zahl

Zuletzt wurde durch die Berechnung der Reynoldscchen Zahl nach (1) überprüft, ob es sich bei der Strömung im Viskosimeter um eine laminare Strömung handelt.

Da die Gleichung von $\frac{1}{\eta t}$ abhängt, müssen nur deren kleinsten Werte betrachtet werden.

Da beide mit höheren Temperaturen sinken, werden nur die Werte für $T = 323.15\text{K}$ bei der großen Kugel betrachtet.

Weil die Breite des Rohres nicht angegeben ist, wird näherungsweise der Durchmesser der großen Kugel für die sogenannte charakteristische Länge verwendet:

$$Re_{gr} = 49.0455 \pm 2.8176$$

Für die kleine Kugel ergibt sich für die Reynoldssche Zahl maximal:

$$Re_{kl} = 95.9856 \pm 5.0678$$

Beide berechneten Reynoldszahlen liegen deutlich unter dem Grenzwert von 2300, ab dem eine Strömung turbulent wäre, daher liegt hier keine turbulente Strömung vor.

5 Diskussion

Bei der Auswertung zeigt sich, dass sich die Viskosität des Wassers, wie nach der Andradeschen Gleichung zu erwarten war, mit steigender Temperatur verringert.

Auch tritt in allen berechneten Werten ein fast gleichbleibende Abweichung der dynamischen Viskosität von den Literaturwerten auf, da in Abbildung 3 die Ausgleichsgerade trotzdem gut an den Messwerten anliegt.

Bei Raumtemperatur wurde η bei der kleinen Kugel zu:

$$\eta = 1.32575\text{mPa s}$$

bestimmt, wobei der Literaturwert

$$\eta = 1.005\text{mPa s}$$

lautet.

Diese regelmäßige Abweichung aller Ergebnisse lassen sich auf systematische Fehler bei der Messung zurückführen.

Dort wurden beispielsweise die Zeiten mit der Stoppuhr des Handys gemessen und der Zeitpunkt, an dem gestoppt wird, per Augenmaß gewählt.

Dadurch ist die Zeitmessung an sich relativ ungenau.

Hinzu kommt, dass die Temperatur des Wassers in der Fallröhre nicht in selbiger gemessen wurde, sondern bevor es durch Pumpen im umliegenden Zylinder verteilt wurde.

Diese Verteilung ist ebenfalls nicht überall gleichmäßig und die Erwärmung des Wassers in der Fallröhre auf die gewünschte Temperatur kann nicht garantiert sein.

Zudem ist die Bestimmung der Apparaturkonstante der großen Kugel, mit Hilfe der Konstante der kleinen Kugel, sehr ungenau, da sie explizit für die Kugeln bestimmt werden müsste.

Außerdem können kleine Luftblasen in der Fallröhre und an der großen Kugel nicht ausgeschlossen werden, da diese bereits eine Beschädigung in Form einer unebenen Oberfläche aufwies.

Abgesehen von den systematischen Fehlern hat der Versuch die zu erwartenden Ergebnisse geliefert und ist bei Reduktion dieser Fehler gut geeignet, um die Temperaturabhängigkeit der dynamischen Viskosität von Wasser zu messen.

Literatur

- [1] Geschke, Dieter. *Physikalisches Praktikum*. Teubner.
- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [4] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [5] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [6] *Versuch V107: Das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler*. TU Dortmund, Fakultät Physik.