Versuch 353

Das Relaxationsverfahren eines RC-Kreises

Sadiah Azeem
sadiah.azeem@tu-dortmund.de

Nils Metzner
nils.metzner@tu-dortmund.de

Durchführung: 16.11.2021 Abgabe: 23.11.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

Die Relaxation eines Systems ist der Übergang aus dem ausgelenkten in den Ausgangszustand. In diesem Versuch ist das zu untersuchende System ein RC-Schaltkreis.

Die Entladung des Kondensators durch einen Strom, der durch den Widerstand fließt, ist ein Beispiel für die Relaxation.

Zielsetzung des Versuchs ist, die Zeitkonstante des RC-Kreises zu ermitteln, sowie die Messung der Amplitude der Kondensatorspannung und dem Phasenversatz von Generator- und Kondensatorspannung.
Diese werden jeweils in Abhängigkeit von der Generatorfrequenz betrachtet.
Der letzte Teil des Versuches beschäftigt sich mit der Verwendung des RC-Gliedes als Integrator.

1.1 Relaxationsgleichung

Die allgemeine Relaxationsgleichung besteht aus der beschränkten Größe A(t), der Proportionalitätsonstante c < 0 und den konstanten Werten A(0) und A(∞).

c variiert je nach Relaxationsvorgang und gibt Auskunft über die Geschwindigkeit des Entladeprozesses.

Die Änderungsrate von A wird als proportional zur Auslenkung angenommen:

$$\frac{dA}{dt} = c[A(t) - A(\infty)] \tag{1}$$

diese Gleichung wird dann mit dt multipliziert und dann über das Intervall $[0; t]$ integriert. Es ergibt sich:

$$\ln \frac{A(t) - A(\infty)}{A(0) - A(\infty)} = ct \Longleftrightarrow \qquad A(t) = A(\infty) + [A(0) - A(\infty)] \cdot \exp(ct) \tag{2}$$

1.2 Auf- und Entladevorgaenge am Kondensator

Die klassische Elektrodynamik bringt die grundlegenden Beziehungen $I = \frac{U}{R}$ und $U_C = \frac{Q}{C}$ hervor.

Daraus lässt sich die Änderungsrate $\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}Q(t)$ der Kondensatorladung bestimmen.

Unter der Randbedingung, dass bei einem Entladeprozess $Q(\infty) = 0$ gelten muss, ergibt sich nach den gleichen Umformungen, wie bei der allgemeinen Relaxationsgleichung (1)

$$Q(t) = Q(0) \cdot \exp(-\frac{t}{RC}) \tag{3}$$

$\frac{1}{RC}$ ist hier die Zeitkonstante (wie oben c).

1.3 Auf- und Entladevorgaenge bei Wechselspannung

Die angelegte Wechselspannung $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$ lässt sich als periodische Anregung beschreiben, wie sie auch aus der Mechanik bekannt ist.

Zwischen U_G und U_C bildet sich der Phasenversatz $\varphi(\omega)$, sodass U_C wie folgt beschrieben werden kann:

$$U_C = A(\omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi(\omega)) \tag{4}$$

Darus erhält man die Beziehung zwischen Frequenz und Phase:

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\omega RC) \,. \tag{5}$$

Womit sich auch die folgende Beziehung zwischen der Amplitude und der Kondensatorspannung herleiten:

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} . \tag{6}$$

1.4 Integration im RC-Kreis

Bei geeigneten Frequenzen $\omega >> RC$ und Spannungen $|U_C| >> |U_G|$ erhält man durch die integrierende Funktion des RC-Gliedes

$$U_C = \frac{1}{RC} \int_0^t U(\tau) d\tau \tag{7}$$

2 Durchführung

2.1 Aufgaben

In Teil **a)** soll die Zeitkonstante des RC-Gliedes mit Hilfe der Schaltung in Abbildung 1 bestimmt werden.

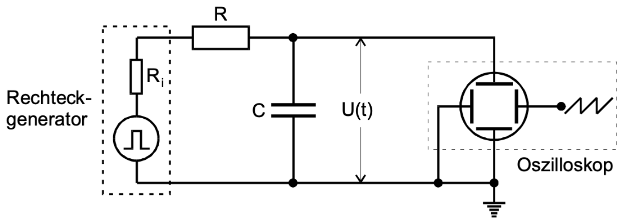


Abbildung 1: Das Ersatzschaltbild zu Teilaufgabe a)

Dazu werden Auf- und Entladevorgänge des Kondensators durch eine Rechteckspannung herbeigeführt und auf dem Oszilloskop die Kondensatorspannung in Abhängigkeit davon beobachtet.

Die Teilaufgabe **b)** sieht vor, dass man die Schaltung aus Abbildung 2 die Generatorspannung in Sinusform umstellt.

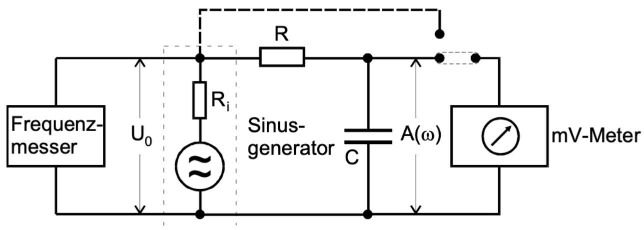


Abbildung 2: Das Ersatzschaltbild zu Aufgabe b) und c)

Gemessen werden soll hier die Amplitude $A(\omega)$ der Kondensatorspannung $U_C = A(\omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi(\omega))$ in Abhängigkeit der Frequenz der Sinusspannung.

c) ist die Bestimmung der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Generatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz der Sinusspannung.
Es wird erneut die Schaltung aus Abbildung 2 genutzt.
Die Amplitude der Kondensatorspannung, die zeitliche Differenz der Nulldurchgänge und die Periodendauer für **b)** und **c)** konnten in einem Messdurchgang vom Oszilloskop abgelesen werden werden, während dessen die Frequenz in kleinen Schritten erhöht wird.

In Teilaufgabe **d)** wird bewiesen, dass die vorliegende Schaltung 3 als Integrator genutzt werden kann.

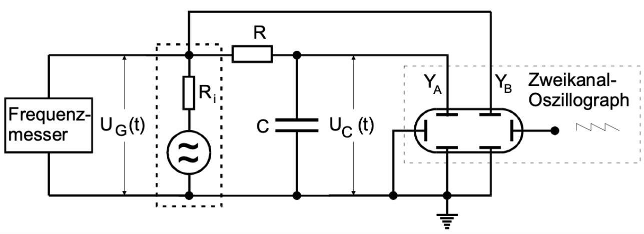


Abbildung 3: Das Ersatzschaltbild zu Teilaufgabe d)

Hierzu stellt man nacheinander eine Rechteck-, Dreieck- und Sinusspannung am Generator ein und dokumentiert fotographisch, wie in 9 und 10 zu sehen, die auf dem Oszilloskop angezeigte Kondensatorspannung, die proportional zum Integral der Generatorspannung über die Zeit sein sollte.

3 Auswertung

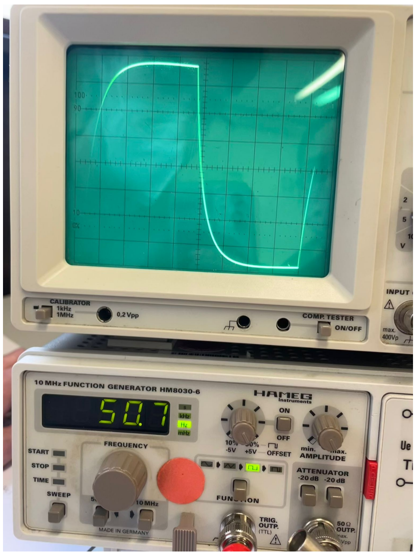


Abbildung 4: Der Entladungsprozess des Kondensators.

Tabelle 1: Eine Tabelle mit den aufgenommenen Messdaten aus Abbildung 4 des Entladungsprozesses des Kondensators.

U_c / V	t / ms	$\ln(\frac{U_c}{U_0})$	U_c / V	t / ms	$\ln(\frac{U_c}{U_0})$
3,4	0,04	−0,057	1,6	0,30	−0,811
3,2	0,08	−0,118	1,4	0,34	−0,944
3,0	0,09	−0,182	1,2	0,48	−1,099
2,8	0,10	−0,251	1,0	0,53	−1,281
2,6	0,13	−0,325	0,8	0,62	−1,504
2,4	0,16	−0,405	0,6	0,73	−1,792
2,2	0,19	−0,492	0,4	0,90	−2,197
2,0	0,24	−0,588	0,2	1,10	−2,890
1,8	0,28	−0,693	0,1	1,40	−3,584

Es wurden aus Abbildung 4 die Werte in Tabelle 1 entnommen und nach Gleichung (3) folgt für die lineare Regression:

$$\ln\left(\frac{U_c}{U_0}\right) = -\frac{1}{RC} \cdot t + b. \tag{8}$$

Woraus die Zeitkonstante RC bestimmt wird. Für die berechnung der Parameter a und b bei der linearen Regression für $y = ax + b$ gilt:

$$\hat{a} = \frac{\bar{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\bar{x^2} - \bar{x}^2}$$
$$\hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x}$$

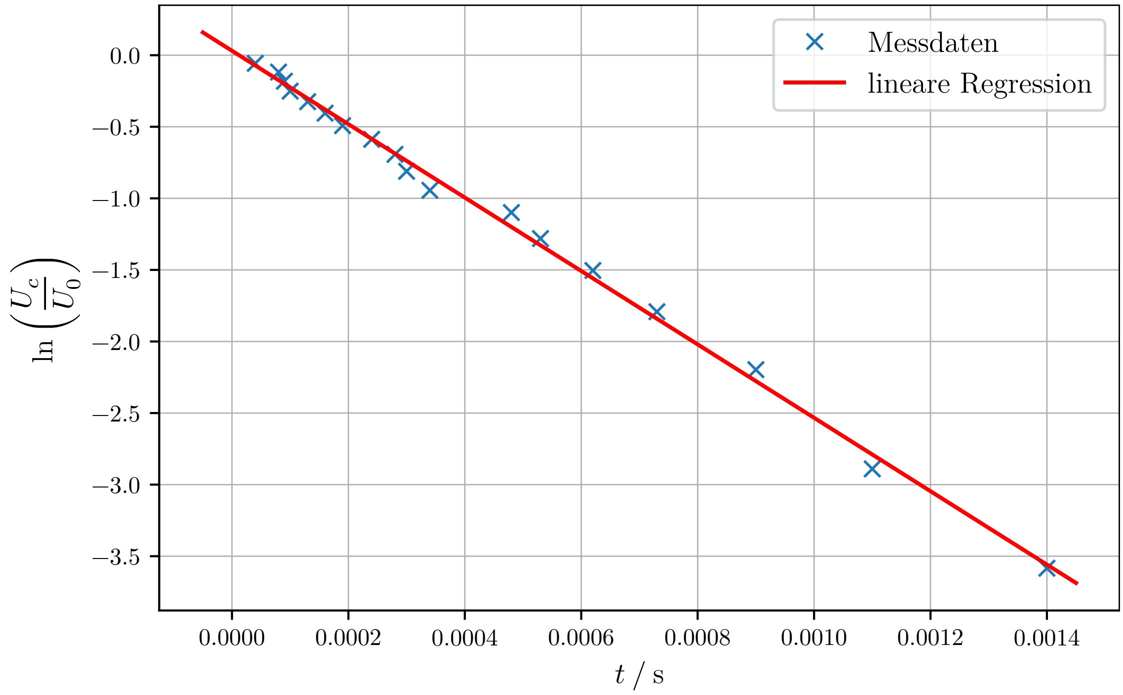


Abbildung 5: Lineare Regression nach (8) und Messdaten aus Tabelle 1 zur Bestimmung der Zeitkonstante RC über den Entladungsprozesses des Kondensators.

Es ergibt sich aus der linearen Regression in Abbildung 5:

$$RC = (0,3900 \pm 0,0006)\text{ms}$$
$$b = 0,0309 \pm 0,0214.$$

Tabelle 2: Die Tabelle mit den Wertepaaren für die Bestimmung von RC über die Relativamplitude.

f / kHz	$\frac{U_c}{U_0}$ / V
0,1100	2,083
0,1890	1,667
0,2500	1,389
0,2995	1,111
0,4008	0,944
0,5140	0,611
0,9980	0,444
2,0510	0,222
3,1200	0,167
5,1700	0,069
9,0800	0,056
22,3400	0,022
30,3700	0,017
35,1500	0,014
40,0900	0,011
42,3300	0,011
44,0500	0,011
46,1600	0,011
48,3200	0,011
51,2400	0,008

Anschließend wurde die Zeitkonstante RC mit den Wertepaaren der Relativamplitude $\frac{U_c}{U_0}$ und der Generatorfrequenz f aus Tabelle 2 mithilfe der folgenden Ausgleichsrechnung nach (6) bestimmt:

$$\frac{U_c}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2(2\pi f)^2}} \tag{9}$$

Wobei bei dieser Ausgleichsrechnung die Zeitkonstante $RC = a$ ist und in Abbildung 6 dargestellt ist und $\frac{U_c}{U_0}$ auf die maximale Relativamplitude $\frac{U_{cmax}}{U_0}$, mit $U_{cmax} = 7.5$V, normiert ist.

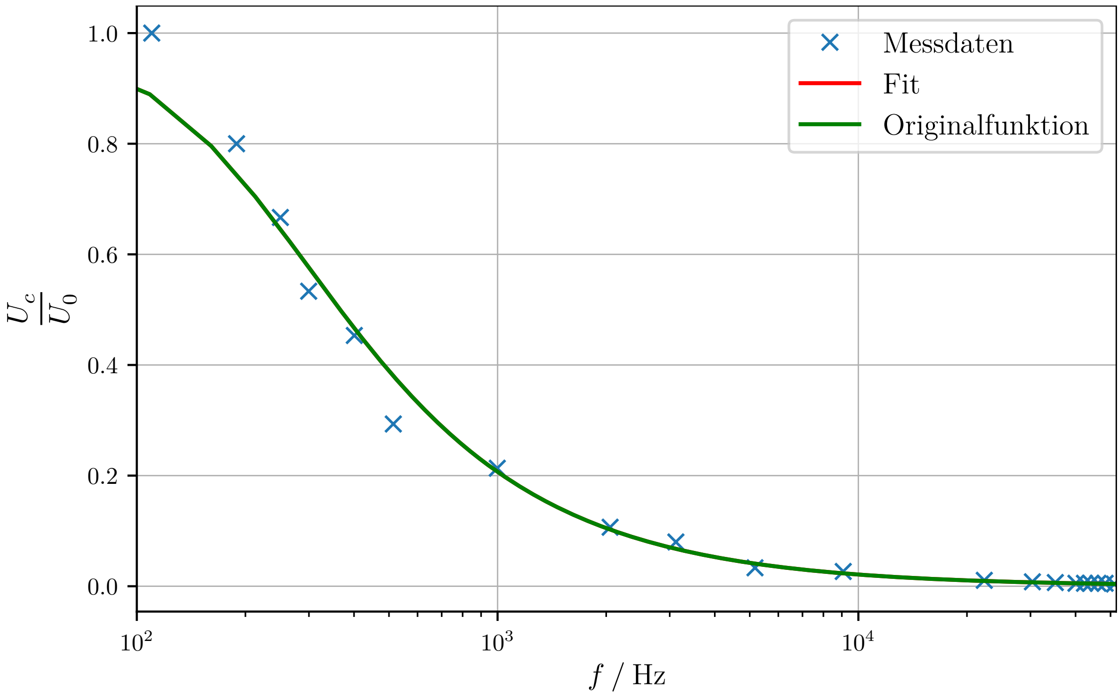


Abbildung 6: Hier sind die Wertepaare aus Tabelle 2 die Ausgleichsrechnung nach (9) und die Originalfunktion nach (6) mit dem berechneten RC in einem halblogarithmischen Diagramm aufgetragen.

Es ergibt sich der Parameter a und b der Ausgleichsrechnung zu:

$$a = (-0,7531 \pm 0,0363)\text{ms}$$
$$RC = (0,7531 \pm 0,0363)\text{ms}$$

Tabelle 3: Eine Tabelle mit den Wertepaaren für Teilaufgabe c) mit den aus den Messwerten von a und b aus Tabelle 5 mit Formel $\frac{a}{b} \cdot 2\pi = \varphi$ berechneten φ.

f / kHz	φ / rad
0,1100	0,6283
0,1890	0,8568
0,2500	1,1088
0,2995	1,1220
0,4008	1,2566
0,5140	1,1968
0,9980	1,4280
2,0510	1,2566
3,1200	1,7952
5,1700	1,5708
9,0800	1,5708
22,3400	1,2566
30,3700	1,7952
35,1500	2,0944
40,0900	2,0944
42,3300	1,2566
44,0500	1,2566
46,1600	1,2566
48,3200	1,2566
51,2400	1,4784

Die dritte Methode, die Zeitkonstante RC zu bestimmen, basiert auf einer Ausgleichsrechung zu den Wertepaaren der Phasenverschiebung φ und der Generatorfrequenz f aus Tabelle 3. Die Ausgleichsrechnung ergibt sich in diesem Fall nach (5) zu:

$$\varphi = a \cdot \arctan(b \cdot t). \tag{10}$$

Wobei hier die Zeitkonstante $RC = b$ ist.

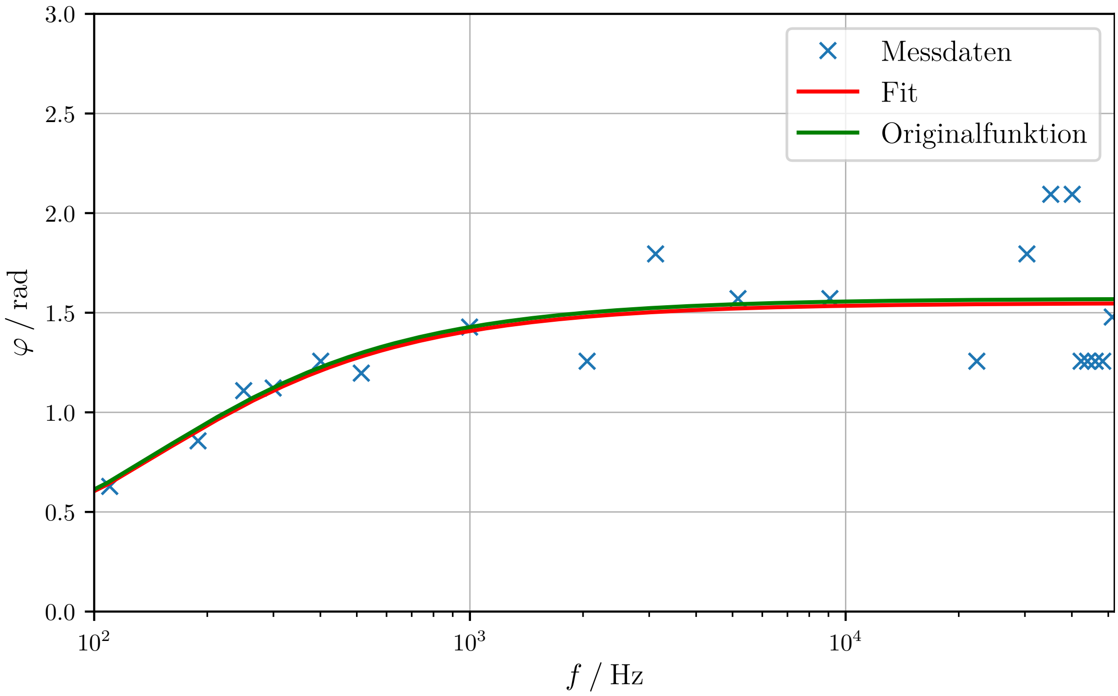


Abbildung 7: Hier sind die Wertepaare aus Tabelle 3, die Ausgleichsrechnung nach (10) und die Originalfunktion nach (5) mit eingesetztem RC in einem halblogarithmischem Diagramm aufgetragen.

Bei dieser Ausgleichsrechnung ergeben sich die Parameter a und b zu:

$$a = 0,9862 \pm 0,0464$$
$$b = (6,9641 \pm 2,0824)\mathrm{ms} = RC$$

Die Abhängigkeit der Relativamplitude $\frac{U_c}{U_0}$ von der Phase φ ergibt sich zu:

$$\frac{U_c}{U_0} = \cos\left(\varphi\right).$$

Tabelle 4: Die Wertepaare für den Polarplot

$\frac{U_c}{U_0}$ / V	φ / rad
2,083	0,6283
1,667	0,8568
1,389	1,1088
1,111	1,1220
0,944	1,2566
0,611	1,1968
0,444	1,4280
0,222	1,2566
0,167	1,7952
0,069	1,5708
0,056	1,5708
0,022	1,2566
0,017	1,7952
0,014	2,0944
0,011	2,0944
0,011	1,2566
0,011	1,2566
0,011	1,2566
0,011	1,2566
0,008	1,4784

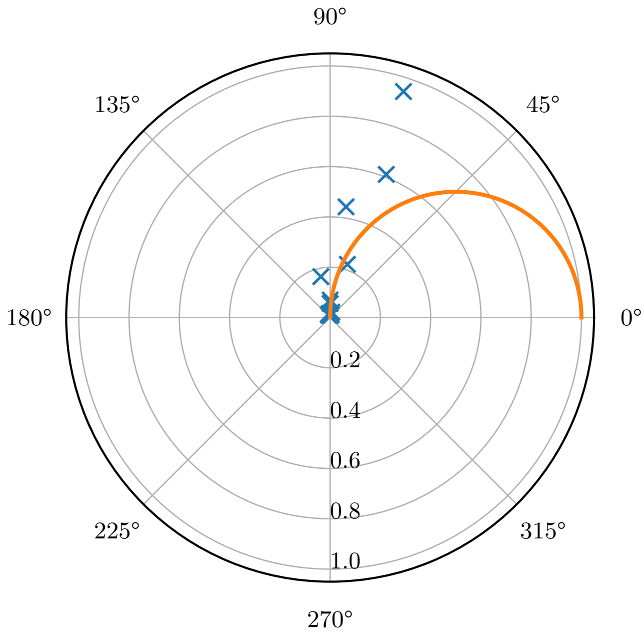
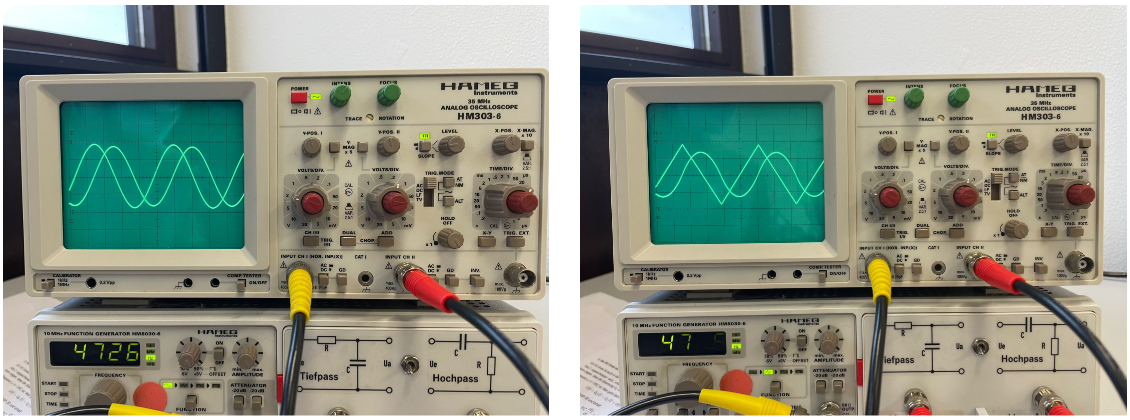


Abbildung 8: Hier wurde die erwähnte Abhängigkeit der Relativamplitude von der Phase, sowie einige Wertepaare aus Tabelle 4 in ein Polardiagramm eingetragen.

Integration verschiedener Generatorspannungen bei einer Frequenz $f = 4726\text{Hz}$



(a) sin **(b)** Dreieck

Abbildung 9

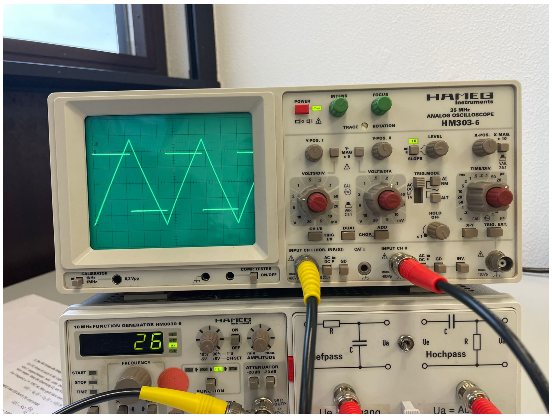


Abbildung 10: Rechteck

Das der RC-Keis bei dieser Frequenz als Integrator arbeitet lässt sich einzelnd für alle Funktionen nach (7) zeigen. Für die Sinusspannung folgt:

$$U_C = \frac{1}{RC}\int_0^t \sin(\tau)d\tau = \frac{1}{RC}\left(-\cos(t) - 1\right),$$

was sich mit der beobachteten Spannung U_c, welche in Abbildung 9a zum Sinus Phasenverschoben ist, deckt. Für die Dreiecksspannung, die eine Gerade nach $U_c(t) = mt + b$ ist, folgt:

$$U_C = \frac{1}{RC}\int_0^t m(\tau) + bd\tau = \frac{1}{RC}\left(\frac{1}{2}mt^2 + tb + c\right),$$

was eine quadratische Funktion ist und sich wiederum mit Abbildung 9b deckt. Zuletzt folgt für die Rechteckspannung, die eine Funktion wie $U_c(t) = a$ ist, wobei a eine reelle Konstante ist:

$$U_C = \frac{1}{RC}\int_0^t a d\tau = \frac{1}{RC}\left(at + c\right).$$

Es folgt also eine Dreiecksspannung, was sich ebenso mit Abbildung 10 deckt. In den Integrationen ist c eine reelle Konstante. Es zeigt sich also, das die beobachteten Kondensatorspannungen sich für alle angelegten Generatorspannungen als Integrator funktioniert.

4 Diskussion

Bei der ersten Methode, die Zeitkonstante RC über den Entladungsprozesses des Kondensators zu bestimmen, fällt sofort im Vergleich zu den anderen Messwerten zu RC auf, dass sich dieser um eine Zehnerpotenz von den anderen unterscheidet.

Diese Differenz kann darauf zurückgeführt werden, dass bei der ersten Methode am Funktionsgenerator der TTL-Output, und nicht, wie dann bei allen anderen, der 50Ω-Output verwendet wurde.

Außerdem bringt das Ablesen der Werte des Entladungsprozesses aus einem Bild eine zusätzliche Unsicherheit mit sich.

Die in Abbildung 4 erhaltene Kurve entspricht der theoretischen Erwartung eines exponentiellen Abfalls nach (**??**).

Die Werte, die sich für die Zeitkonstante bei den Methoden 2 und 3 ergeben, liegen beide im selben Bereich, wobei bei Methode ?? bei den Messwerten in Abbildung 6 auffällt, dass diese vor allem für niedrigere Frequenzen immer weiter von der Originalfunktion abweichen, aber bei höheren dieser sehr nahe sind.

Beim Plot für Methode 3 ist nur die Abweichung von der Originalfunktion und der Ausgleichsfunktion für große Frequenzen auffällig, wie es allerdings auf ein Modulieren der TIME/DIV für große Frequenzen zwecks besserer Lesbarkeit auf dem Oszilloskopbildschirm zurückgeführt werden kann.

Dieselbe Abweichung zeigt sich ebenfalls im Polarplot, wo dennoch alle darin aufgetragen Winkel wie zu erwarten zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen.

Ein Vergleich der bestimmten Zeitkonstanten mit dem korrekten Wert kann nicht durchgeführt werden, da die dafür erforderlichen Größen Kapazität C und Widerstand R des Tiefpassfilters nicht auf dem Gerät angegeben waren oder gemessen werden konnten.

Die integrierende Eigenschaft des RC-Tiefpasses bei Frequenzen, bei denen $RC/T >> 1$ gilt, kommt daher, dass die über Widerstand und Kondensator abfallende Spannung einen Strom bedingt, der wiederum vom Kondensator gespeichert beziehungsweise die Elektronen des Stroms summiert. Diese Elektronen sorgen selber für eine sich aufbauende Spannung über den Kondensator, welche gleichzeitig auch die Ausgangsspannung bildet.

So kommt es durch die Summation des Stromes, der sich proportional zur Eingangsspannung verhält zu einer Integration der Eingangsspannung, wie es auch im Versuch beobachtet werden konnte.

5 Anhang

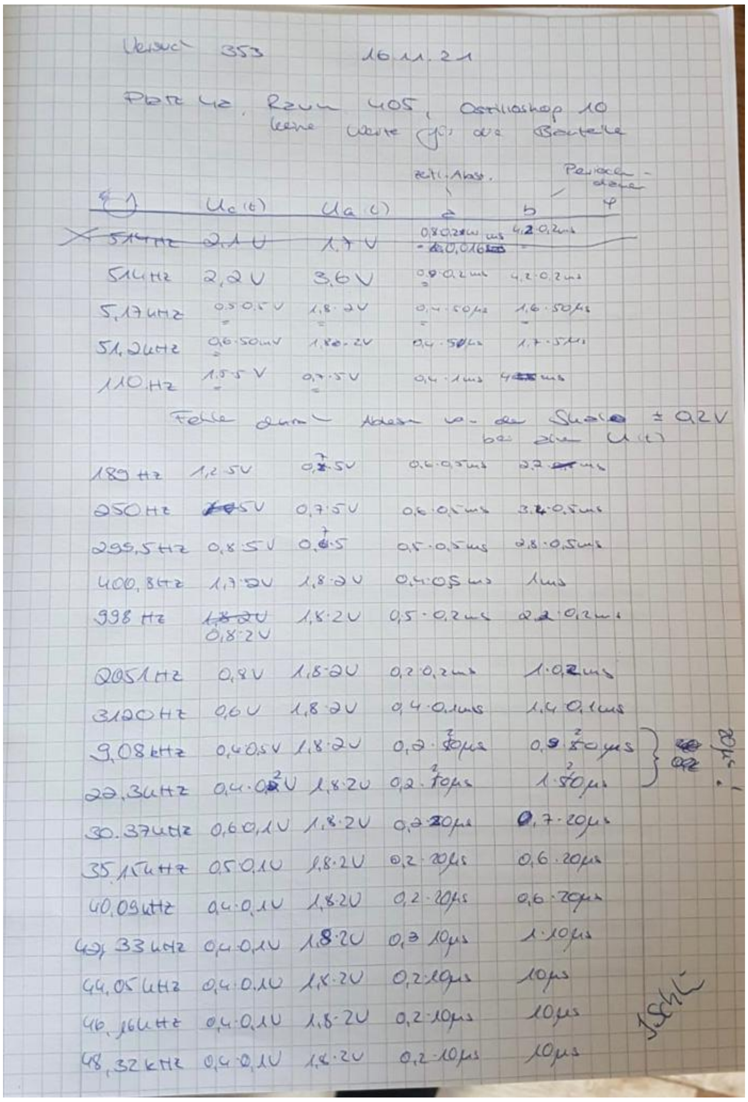


Abbildung 11: Die genommenen Originaldaten.

Tabelle 5: Die Tabelle mit allen vor Ort aufgenommenen Messdaten.

f / kHz	U_c / V	U_G / V	a / µs	b / µs
0,1100	7,50	3,5	400	4000,0
0,1890	6,00	3,5	300	2200,0
0,2500	5,00	3,5	300	1700,0
0,2995	4,00	3,5	250	1400,0
0,4008	3,40	3,6	200	1000,0
0,5140	2,20	3,6	160	840,0
0,9980	1,60	3,6	100	440,0
2,0510	0,80	3,6	40	200,0
3,1200	0,60	3,6	40	140,0
5,1700	0,25	3,6	20	80,0
9,0800	0,20	3,6	4	16,0
22,3400	0,08	3,6	4	20,0
30,3700	0,06	3,6	4	14,0
35,1500	0,05	3,6	4	12,0
40,0900	0,04	3,6	4	12,0
42,3300	0,04	3,6	2	10,0
44,0500	0,04	3,6	2	10,0
46,1600	0,04	3,6	2	10,0
48,3200	0,04	3,6	2	10,0
51,2400	0,03	3,6	2	8,5

Literatur

[1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: `http://matplotlib.org/`.

[2] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python.* Version 0.16.0. URL: `http://www.scipy.org/`.

[3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties.* Version 2.4.6.1. URL: `http://pythonhosted.org/uncertainties/`.

[4] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: `http://www.numpy.org/`.

[5] *Versuch Nr.353, Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises.* TU Dortmund, Fakultät Physik.