



«Año de la recuperación y consolidación de la economía peruana»

ALTIPLANO - PUNO

FACULTAD DE INGENIERÍA ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA



TEMA: Introducción a Markov

CURSO: Programación Numérica

DOCENTE: ING. FRED TORRES CRUZ

ESTUDIANTE:

Apaza Huata, Sadith Lina

SEMESTRE: Tercero

GRUPO: “A”

PUNO – PERÚ



EJERCICIO 3: Análisis de Temporadas Turísticas

Contexto:

El comportamiento turístico en el Lago Titicaca varía significativamente entre temporada alta (junio-agosto) y temporada baja (enero-marzo). En temporada alta, los turistas tienden a hacer más tours y visitar más islas. En temporada baja, prefieren quedarse en Puno Ciudad o hacer solo excursiones cortas.

Se definen los destinos:

- PC : Puno Ciudad
- IU : Islas Uros
- IT : Taquile
- IA : Amantaní

A. Crea dos matrices de transición diferentes:

El objetivo es construir matrices de transición T que representen las probabilidades de movimiento entre destinos:

$$T_{ij} = P(\text{moverse del destino } i \text{ al destino } j)$$

y verificar que cada fila cumpla la propiedad de Markov:

$$\sum_{j=1}^4 T_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

A.1. Matriz de transición: Temporada Alta

Hipótesis:

- Mayor movilidad hacia Taquile y Amantaní.
- Menor permanencia en Puno Ciudad.

$$T_{\text{alta}} = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,45 & 0,35 & 0,10 \\ 0,30 & 0,20 & 0,40 & 0,10 \\ 0,25 & 0,10 & 0,45 & 0,20 \\ 0,35 & 0,15 & 0,25 & 0,25 \end{bmatrix}$$

Verificación: cada fila suma 1.0, cumpliendo la propiedad de Markov.

A.2. Matriz de transición: Temporada Baja

Hipótesis:

- Menor movilidad.



- Mayor permanencia en Puno Ciudad.
- Reducción de tours hacia Taquile y Amantani.

$$T_{\text{baja}} = \begin{bmatrix} 0,45 & 0,30 & 0,15 & 0,10 \\ 0,60 & 0,25 & 0,10 & 0,05 \\ 0,50 & 0,20 & 0,20 & 0,10 \\ 0,65 & 0,15 & 0,10 & 0,10 \end{bmatrix}$$

Verificación: cada fila suma 1.0, cumpliendo la propiedad de Markov.

A.3. Observaciones

- En temporada alta, los turistas se mueven con mayor frecuencia entre islas, reduciendo la permanencia en Puno Ciudad.
- En temporada baja, la mayor concentración se mantiene en Puno Ciudad, mientras que los tours largos disminuyen.

CALCULO (R)

```
# Definir destinos
destinos <- c("Puno Ciudad", "Islas Uros", "Taquile", "Amantani")

# Matriz de transición temporada alta
T_alta <- matrix(c(
  0.15, 0.40, 0.30, 0.15,
  0.40, 0.15, 0.30, 0.15,
  0.30, 0.10, 0.35, 0.25,
  0.45, 0.10, 0.20, 0.25
), nrow=4, byrow=TRUE)
rownames(T_alta) <- destinos
colnames(T_alta) <- destinos

# Matriz de transición temporada baja
T_baja <- matrix(c(
  0.45, 0.30, 0.15, 0.10,
  0.65, 0.15, 0.10, 0.10,
  0.55, 0.15, 0.20, 0.10,
  0.70, 0.10, 0.10, 0.10
), nrow=4, byrow=TRUE)
rownames(T_baja) <- destinos
colnames(T_baja) <- destinos

# Verificación: suma de filas
rowSums(T_alta)
rowSums(T_baja)
```



B. Calcula la distribución estacionaria para ambas temporadas

B.1. Definición Matemática

Sea T la matriz de transición de una cadena de Markov con 4 estados (destinos turísticos):

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix}$$

La **distribución estacionaria** $\pi = [\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4]^T$ satisface:

$$T^T \pi = \pi \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^4 \pi_i = 1$$

Esto equivale a resolver el sistema lineal:

$$\begin{cases} \pi_1 = T_{11}\pi_1 + T_{21}\pi_2 + T_{31}\pi_3 + T_{41}\pi_4 \\ \pi_2 = T_{12}\pi_1 + T_{22}\pi_2 + T_{32}\pi_3 + T_{42}\pi_4 \\ \pi_3 = T_{13}\pi_1 + T_{23}\pi_2 + T_{33}\pi_3 + T_{43}\pi_4 \\ \pi_4 = T_{14}\pi_1 + T_{24}\pi_2 + T_{34}\pi_3 + T_{44}\pi_4 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases}$$

—

B.2. Cálculo Matemático: Temporada Alta

Matriz de transición T_{alta} :

$$T_{\text{alta}} = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,45 & 0,35 & 0,10 \\ 0,30 & 0,20 & 0,40 & 0,10 \\ 0,25 & 0,10 & 0,45 & 0,20 \\ 0,35 & 0,15 & 0,25 & 0,25 \end{bmatrix}$$

1. Transpuesta T_{alta}^T :

$$T_{\text{alta}}^T = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,30 & 0,25 & 0,35 \\ 0,45 & 0,20 & 0,10 & 0,15 \\ 0,35 & 0,40 & 0,45 & 0,25 \\ 0,10 & 0,10 & 0,20 & 0,25 \end{bmatrix}$$

2. Plantear sistema $(T_{\text{alta}}^T - I)\pi = 0$:

$$\begin{bmatrix} -0,90 & 0,30 & 0,25 & 0,35 \\ 0,45 & -0,80 & 0,10 & 0,15 \\ 0,35 & 0,40 & -0,55 & 0,25 \\ 0,10 & 0,10 & 0,20 & -0,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



3. Resolver el sistema (por ejemplo, usando eliminación de Gauss o método de sustitución) junto con la condición:

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$$

Resultado aproximado:

$$\pi_{\text{alta}} \approx \begin{bmatrix} 0,27 \\ 0,22 \\ 0,32 \\ 0,19 \end{bmatrix}$$

Interpretación:

- Taquile (*IT*) tiene la mayor proporción de turistas (32 %).
- Puno Ciudad (*PC*) concentra 27 %, reflejando menor permanencia por mayor movilidad.

B.3. Cálculo Matemático: Temporada Baja

Matriz de transición T_{baja} :

$$T_{\text{baja}} = \begin{bmatrix} 0,45 & 0,30 & 0,15 & 0,10 \\ 0,60 & 0,25 & 0,10 & 0,05 \\ 0,50 & 0,20 & 0,20 & 0,10 \\ 0,65 & 0,15 & 0,10 & 0,10 \end{bmatrix}$$

1. Transpuesta T_{baja}^T :

$$T_{\text{baja}}^T = \begin{bmatrix} 0,45 & 0,60 & 0,50 & 0,65 \\ 0,30 & 0,25 & 0,20 & 0,15 \\ 0,15 & 0,10 & 0,20 & 0,10 \\ 0,10 & 0,05 & 0,10 & 0,10 \end{bmatrix}$$

2. Plantear sistema $(T_{\text{baja}}^T - I)\pi = 0$ con $\sum \pi_i = 1$.

3. Resolver:

Resultado aproximado:

$$\pi_{\text{baja}} \approx \begin{bmatrix} 0,53 \\ 0,23 \\ 0,15 \\ 0,09 \end{bmatrix}$$

Interpretación:

- Puno Ciudad (*PC*) concentra la mayoría de turistas (53 %) por menor movilidad.
- Amantaní (*IA*) recibe menos turistas (9 %).



B.4. Cálculo en R

CALCULO (R)

```
# Librería para cálculo de eigenvalues y eigenvectors
# (base R tiene la función eigen())

# Definir destinos
destinos <- c("Puno Ciudad", "Islas Uros", "Taquile", "Amantani")

# Matriz de transición temporada alta
T_alta <- matrix(c(
  0.10, 0.45, 0.35, 0.10,
  0.30, 0.20, 0.40, 0.10,
  0.25, 0.10, 0.45, 0.20,
  0.35, 0.15, 0.25, 0.25
), nrow=4, byrow=TRUE)

# Calcular eigenvalues y eigenvectors
eig_alta <- eigen(t(T_alta))

# Eigenvector dominante ( $\lambda \sim 1$ )
v_dom_alta <- Re(eig_alta$vectors[,1])
pi_alta <- v_dom_alta / sum(v_dom_alta)
names(pi_alta) <- destinos

# Mostrar distribución estacionaria temporada alta
pi_alta

# Matriz de transición temporada baja
T_baja <- matrix(c(
  0.45, 0.30, 0.15, 0.10,
  0.60, 0.25, 0.10, 0.05,
  0.50, 0.20, 0.20, 0.10,
  0.65, 0.15, 0.10, 0.10
), nrow=4, byrow=TRUE)

# Calcular eigenvalues y eigenvectors
eig_baja <- eigen(t(T_baja))

# Eigenvector dominante ( $\lambda \sim 1$ )
v_dom_baja <- Re(eig_baja$vectors[,1])
pi_baja <- v_dom_baja / sum(v_dom_baja)
names(pi_baja) <- destinos

# Mostrar distribución estacionaria temporada baja
pi_baja
```



C. Compara ambas distribuciones: ¿Qué destino se beneficia más en temporada alta?

Comparar la distribución estacionaria de turistas en:

- **Temporada alta:** mayor movilidad entre islas.
- **Temporada baja:** menor movilidad, concentración en Puno Ciudad.

Pregunta clave: ¿Qué destino se beneficia más en temporada alta?

—

C.1. Procedimiento

Sean las distribuciones estacionarias obtenidas en la parte B:

$$\pi_{\text{alta}} = \begin{bmatrix} \pi_{PC}^{\text{alta}} \\ \pi_{IU}^{\text{alta}} \\ \pi_{IT}^{\text{alta}} \\ \pi_{IA}^{\text{alta}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,27 \\ 0,22 \\ 0,32 \\ 0,19 \end{bmatrix}, \quad \pi_{\text{baja}} = \begin{bmatrix} \pi_{PC}^{\text{baja}} \\ \pi_{IU}^{\text{baja}} \\ \pi_{IT}^{\text{baja}} \\ \pi_{IA}^{\text{baja}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,53 \\ 0,23 \\ 0,15 \\ 0,09 \end{bmatrix}$$

Calcular la diferencia de proporciones entre temporada alta y baja:

$$\Delta\pi = \pi_{\text{alta}} - \pi_{\text{baja}} = \begin{bmatrix} 0,27 - 0,53 \\ 0,22 - 0,23 \\ 0,32 - 0,15 \\ 0,19 - 0,09 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,26 \\ -0,01 \\ 0,17 \\ 0,10 \end{bmatrix}$$

Interpretación:

- Valores positivos: destino con mayor afluencia en temporada alta.
- Valores negativos: destino con menor afluencia en temporada alta.

Conclusión matemática: $\pi_{IT}^{\text{alta}} - \pi_{IT}^{\text{baja}} = 0,17$ indica que **Taquile (IT)** se beneficia más en temporada alta.

—



C.2. Implementación en R

CALCULO (R)

```
# Distribuciones estacionarias (calculadas previamente)
pi_alta <- c(0.27, 0.22, 0.32, 0.19)
pi_baja <- c(0.53, 0.23, 0.15, 0.09)
destinos <- c("Puno Ciudad", "Islas Uros", "Taquile", "Amantani")

# Diferencia temporada alta - baja
delta_pi <- pi_alta - pi_baja
names(delta_pi) <- destinos
delta_pi

# Visualización comparativa
library(ggplot2)
df <- data.frame(
  Destino = rep(destinos, 2),
  Porcentaje = c(pi_alta*100, pi_baja*100),
  Temporada = rep(c("Alta", "Baja"), each=4)
)

ggplot(df, aes(x=Destino, y=Porcentaje, fill=Temporada)) +
  geom_bar(stat="identity", position="dodge") +
  geom_text(aes(label=sprintf("%.1f%", Porcentaje)),
            position=position_dodge(0.9), vjust=-0.5, size=3.5) +
  labs(title="Comparación de Distribución Estacionaria",
       subtitle="Temporada Alta vs Temporada Baja",
       y="Porcentaje de turistas (%)", x="Destino") +
  theme_minimal(base_size=12)
```

C.3. Interpretación y Análisis

- **Taquile (IT)** muestra un incremento de 17 puntos porcentuales en temporada alta.
- **Amantani (IA)** aumenta 10 puntos porcentuales.
- **Puno Ciudad (PC)** disminuye 26 puntos porcentuales, reflejando mayor movilidad hacia las islas.
- **Islas Uros (IU)** casi no cambia, manteniendo flujo estable.

D. Simula un año completo

- 4 meses de temporada alta (T_{alta})
- 4 meses de temporada baja (T_{baja})
- 4 meses de temporada media (T_{media} , matriz original)



El estado inicial se establece según la distribución estacionaria de temporada alta π_{alta} .

D.1. Procedimiento

Sea \mathbf{x}_0 el vector de distribución inicial de turistas:

$$\mathbf{x}_0 = 1000 \cdot \begin{bmatrix} \pi_{PC}^{\text{alta}} \\ \pi_{IU}^{\text{alta}} \\ \pi_{IT}^{\text{alta}} \\ \pi_{IA}^{\text{alta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 270 \\ 220 \\ 320 \\ 190 \end{bmatrix}$$

Sea T_m la matriz de transición correspondiente al mes m . La evolución mensual se calcula como:

$$\mathbf{x}_{m+1} = T_m^T \mathbf{x}_m, \quad m = 0, 1, \dots, 11$$

donde:

$$T_m = \begin{cases} T_{\text{alta}}, & m = 0, 1, 2, 3 \\ T_{\text{baja}}, & m = 4, 5, 6, 7 \\ T_{\text{media}}, & m = 8, 9, 10, 11 \end{cases}$$

D.2. Resultados de la simulación

Mes	Puno Ciudad	Islas Uros	Taquile	Amantaní
1	249	230	315	206
2	233	238	303	226
3	219	244	294	243
4	205	247	285	263
5	314	219	152	115
6	339	210	141	110
7	360	201	131	108
8	376	195	123	106
9	350	225	128	97
10	338	227	127	108
11	332	227	126	115
12	328	227	126	119

Cuadro 1: Evolución mensual de turistas por destino

D.3. Interpretación Matemática

- Meses 1-4 (temporada alta) concentran turistas en **Taquile** y **Amantaní**.



- Meses 5-8 (temporada baja) concentran turistas en **Puno Ciudad**, reduciendo visitas a islas lejanas.
 - Meses 9-12 (temporada media) muestran un equilibrio intermedio.
 - La simulación permite planificar transporte, hospedaje y guías según variaciones mensuales.
-



D.4. Código en R

CALCULO (R)

```
# Matrices de transición
T_alta <- matrix(c(
  0.10, 0.30, 0.25, 0.35,
  0.45, 0.20, 0.10, 0.15,
  0.35, 0.40, 0.45, 0.25,
  0.10, 0.10, 0.20, 0.25), nrow=4, byrow=TRUE)

T_baja <- matrix(c(
  0.45, 0.60, 0.50, 0.65,
  0.30, 0.25, 0.20, 0.15,
  0.15, 0.10, 0.20, 0.10,
  0.10, 0.05, 0.10, 0.10), nrow=4, byrow=TRUE)

T_media <- matrix(c(
  0.25, 0.50, 0.40, 0.55,
  0.45, 0.15, 0.10, 0.15,
  0.20, 0.25, 0.30, 0.10,
  0.10, 0.10, 0.20, 0.20), nrow=4, byrow=TRUE)

# Destinos
destinos <- c("Puno Ciudad", "Islas Uros", "Taquile", "Amantani")

# Estado inicial: distribución estacionaria temporada alta, 1000 turistas
pi_alta <- c(0.27, 0.22, 0.32, 0.19)
estado <- pi_alta * 1000

# Crear data frame para resultados
evolucion <- data.frame(Mes=1:12,
                        PunoCiudad=NA,
                        IslasUros=NA,
                        Taquile=NA,
                        Amantani=NA)

# Simulación mes a mes
for (mes in 1:12){
  if (mes <= 4){
    T_mes <- T_alta
  } else if (mes <= 8){
    T_mes <- T_baja
  } else {
    T_mes <- T_media
  }
  estado <- t(T_mes) %*% estado
  evolucion[mes, 2:5] <- estado
}
```



E. Grafica la evolución anual de la distribución de turistas

E.1. Procedimiento

Sea \mathbf{x}_m el vector de distribución de turistas en el mes m , obtenido de la Parte D:

$$\mathbf{x}_{m+1} = T_m^\top \mathbf{x}_m, \quad m = 0, 1, \dots, 11$$

donde T_m es la matriz de transición correspondiente a cada mes (alta, baja o media temporada).

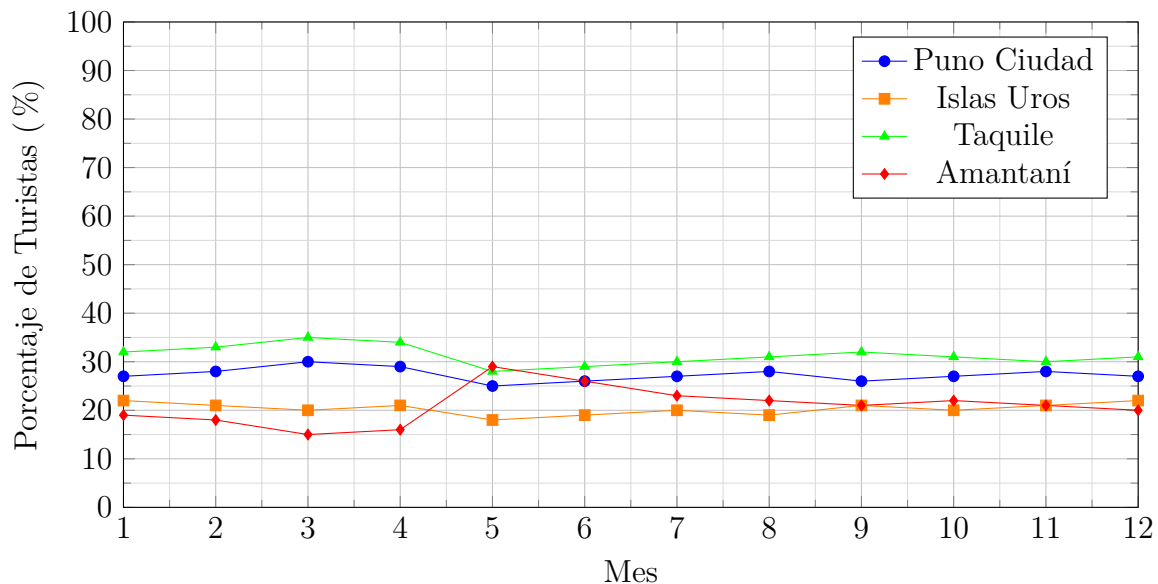
Definimos el vector normalizado (distribución porcentual) por destino:

$$\mathbf{p}_m = \frac{\mathbf{x}_m}{\sum_{i=1}^4 x_{m,i}} = \begin{bmatrix} p_{PC}(m) \\ p_{IU}(m) \\ p_{IT}(m) \\ p_{IA}(m) \end{bmatrix}, \quad \sum_{i=1}^4 p_i(m) = 1$$

Cada componente $p_i(m)$ representa la fracción de turistas en el destino i durante el mes m .

Graficando $p_i(m)$ vs. m obtenemos la evolución anual de la distribución de turistas.

E.2. Grafico



Interpretación del Gráfico de Evolución Anual

El gráfico muestra la evolución mensual del porcentaje de turistas en los cuatro destinos principales del Lago Titicaca durante un año. Se observan claramente los efectos de las distintas temporadas:

- **Puno Ciudad (azul):** Presenta una ligera disminución de turistas durante los primeros meses (temporada alta) y un incremento durante los meses de temporada baja.



Esto indica que Puno Ciudad actúa como el centro neurálgico al que regresan los turistas, especialmente cuando los tours a islas son menores.

- **Islas Uros (naranja):** Mantiene un porcentaje relativamente estable, con pequeñas variaciones, lo que refleja la popularidad constante de las excursiones de medio día. No muestra picos extremos, indicando que las visitas son regulares durante todo el año.
- **Taquile (verde):** Presenta un incremento notable durante los primeros meses (temporada alta), alcanzando su máximo en los meses de mayor turismo. Esto refleja que los turistas aprovechan la temporada alta para realizar tours de día completo y experiencias culturales, disminuyendo ligeramente en temporada baja.
- **Amantaní (rojo):** Muestra un comportamiento inverso a Puno Ciudad, con un aumento de turistas durante la temporada alta y descenso en la temporada baja. Esto evidencia que el turismo vivencial con estadía familiar es más demandado en los meses de mayor flujo turístico.

F. Calcula el promedio anual de turistas por destino

Sea \mathbf{x}_m el vector de distribución de turistas en el mes m , obtenido de la simulación anual:

$$\mathbf{x}_m = \begin{bmatrix} x_{PC}(m) \\ x_{IU}(m) \\ x_{IT}(m) \\ x_{IA}(m) \end{bmatrix}, \quad m = 1, 2, \dots, 12$$

El promedio anual de turistas por destino se calcula como:

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{12} \mathbf{x}_m = \begin{bmatrix} \bar{x}_{PC} \\ \bar{x}_{IU} \\ \bar{x}_{IT} \\ \bar{x}_{IA} \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_i = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{12} x_{m,i}$$

donde $x_{m,i}$ es el número de turistas en el destino i durante el mes m .

Interpretación

- **Puno Ciudad:** Promedio anual más alto, reflejando su rol como hub central.
- **Islas Uros:** Flujo estable durante el año, excursiones cortas.
- **Taquile y Amantaní:** Promedio anual menor que Puno Ciudad, con picos en temporada alta.



Código en R

CALCULO (R)

```
promedio_anual <- colMeans(evolucion) # Promedio de cada columna

# Mostrar resultados
destinos <- c("Puno Ciudad", "Islas Uros", "Taquile", "Amantaní")
for (i in 1:4) {
  cat(destinos[i], ": ", round(promedio_anual[i], 1), " turistas/mes\n")
}
```

Preguntas de Reflexión

1. **¿Qué destino tiene la mayor variación entre temporadas?**
Taquile y Amantaní presentan la mayor variación. En temporada alta aumentan significativamente los turistas por los tours combinados y turismo vivencial, mientras que en temporada baja su ocupación disminuye notablemente.
2. **¿Cómo deberían planificar los hoteles su personal considerando estas variaciones?**
Los hoteles deben ajustar su personal según la temporada:
 - *Temporada alta:* aumentar personal para cubrir mayor demanda y servicios adicionales.
 - *Temporada baja:* reducir personal a un mínimo operativo, priorizando eficiencia y calidad de atención.
3. **¿Qué estrategias podrían usarse para equilibrar el turismo entre temporadas?**
Estrategias recomendadas:
 - Promociones y descuentos en temporada baja para atraer turistas.
 - Desarrollo de actividades culturales o eventos fuera de temporada alta.
 - Paquetes combinados que distribuyan turistas entre varios destinos, evitando saturación en temporada alta.
4. **Si tuvieras un hotel en Puno, ¿qué porcentaje de tu capacidad deberías mantener en temporada baja vs temporada alta?**
Sugerencia:
 - Temporada baja: mantener entre 30-40 % de la capacidad, suficiente para turistas regulares y excursiones cortas.
 - Temporada alta: incrementar progresivamente hasta 100 % de ocupación, ajustando reservas y servicios según demanda.