



*«Año de la recuperación y consolidación de la economía peruana»*

## **ALTIPLANO - PUNO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA  
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ESTADÍSTICA E  
INFORMÁTICA**



**TEMA:** Introducción a Markov

**CURSO:** Programación Numérica

**DOCENTE:** ING. FRED TORRES CRUZ

**ESTUDIANTE:**

Apaza Huata, Sadith Lina

**SEMESTRE:** Tercero

**GRUPO:** “A”

**PUNO – PERÚ**



## Ejercicio 2: Introducción de un Nuevo Destino Turístico

### Contexto:

La comunidad de la **Isla de Anapia**, ubicada cerca de la frontera con Bolivia, busca desarrollarse como un nuevo destino turístico en el Lago Titicaca. Este destino ofrecería *turismo vivencial*, similar al de la Isla Amantaní, pero con la ventaja adicional de vistas panorámicas únicas del lago y una experiencia menos masificada. La incorporación de Anapia al sistema turístico puede modificar el flujo de turistas entre los destinos ya existentes, por lo que resulta pertinente analizar su impacto mediante un modelo matemático.

### A. Expansión de la matriz de transición de $4 \times 4$ a $5 \times 5$

Para incluir a la **Isla de Anapia** como quinto destino turístico, se amplía el conjunto de estados del sistema. Los destinos considerados quedan definidos como:

- Puno Ciudad (PC)
- Islas Uros (IU)
- Isla Taquile (IT)
- Isla Amantaní (IA)
- Isla Anapia (IAN)

La nueva matriz de transición  $T \in R^{5 \times 5}$  conserva las propiedades de una **cadena de Markov**, es decir, cada fila representa una distribución de probabilidad y la suma de sus elementos es igual a 1.

La matriz de transición propuesta es:

$$T = \begin{pmatrix} 0,22 & 0,42 & 0,18 & 0,10 & 0,08 \\ 0,50 & 0,15 & 0,25 & 0,05 & 0,05 \\ 0,40 & 0,10 & 0,30 & 0,10 & 0,10 \\ 0,45 & 0,10 & 0,10 & 0,20 & 0,15 \\ 0,50 & 0,10 & 0,05 & 0,20 & 0,15 \end{pmatrix}$$

donde el elemento  $T_{ij}$  representa la probabilidad de que un turista se desplace desde el destino  $i$  hacia el destino  $j$ .

### B. Propón probabilidades de transición realistas considerando que

#### B.1. Anapia estaría conectada principalmente con Puno Ciudad y Amantaní

La Isla de Anapia, al ser un destino recién incorporado, se conecta principalmente con **Puno Ciudad** y **Amantaní**. Esto se justifica porque:



- Puno Ciudad actúa como el *hub* principal del sistema turístico, donde la mayoría de los turistas inicia y finaliza sus recorridos.
- Amantaní ofrece turismo vivencial similar a Anapia, lo que permite la creación de paquetes combinados entre ambas islas.

Se asigna una probabilidad inicial de transición desde Puno Ciudad hacia Anapia del 8 %, y desde Amantaní hacia Anapia del 15 %, reflejando la atracción de los turistas hacia este nuevo destino sin desestabilizar el flujo principal hacia Amantaní.

## **B.2. Algunos turistas que irían a Amantaní ahora podrían elegir Anapia**

Parte del flujo turístico que anteriormente se dirigía exclusivamente a Amantaní se redistribuye hacia Anapia. Esto refleja:

- Preferencias de los turistas por destinos menos masificados.
- La posibilidad de experiencias nuevas en Anapia, con vistas panorámicas únicas del lago.

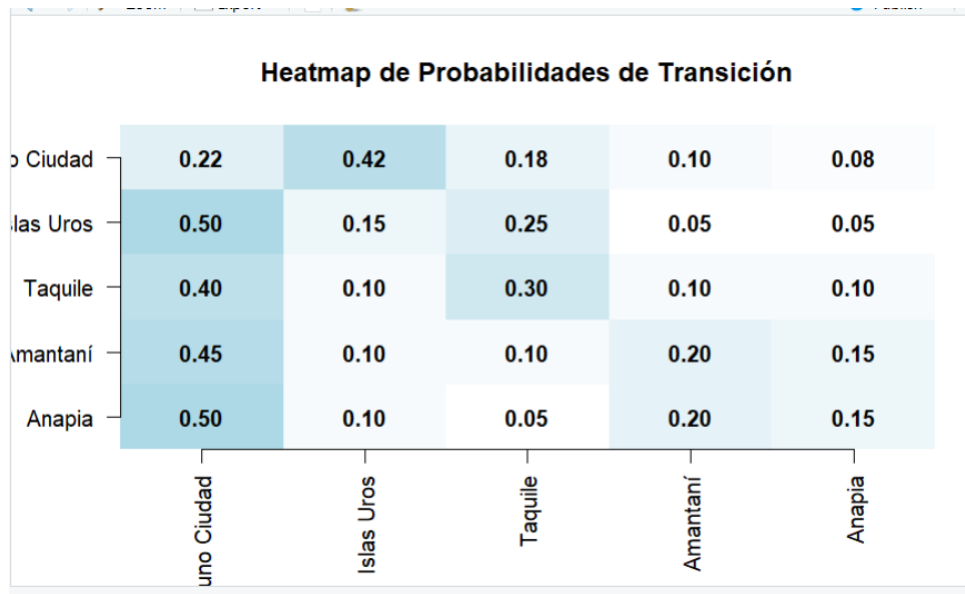
Por ejemplo, desde Taquile se asigna un 10 % de probabilidad de transición hacia Anapia, mientras que desde Islas Uros se asigna un 5 %, considerando que los turistas de medio día pueden optar por extender su visita hacia el nuevo destino.

## **B.3. Los tours combinados podrían incluir visitas Amantaní-Anapia**

Se consideran tours combinados Amantaní–Anapia, generando flujos bidireccionales significativos:

- Desde Amantaní hacia Anapia: 15 % de los turistas optan por continuar la experiencia vivencial.
- Desde Anapia hacia Amantaní: 20 % de los turistas regresan para completar paquetes combinados.
- Desde Anapia hacia Puno Ciudad: 50 %, como retorno al hub principal.

Estas probabilidades permiten modelar un escenario realista, donde Anapia se integra progresivamente al sistema turístico, compitiendo parcialmente con Amantaní pero sin desplazarla completamente. Esto establece la base para calcular la nueva **distribución estacionaria** y visualizar el impacto del nuevo destino sobre los demás.



### C. Calcula la nueva distribución estacionaria con 5 destinos

Para determinar la distribución de equilibrio de turistas entre los 5 destinos, debemos calcular el **vector estacionario**  $\pi$  que satisface:

$$\pi = T^T \pi, \quad \sum_{i=1}^5 \pi_i = 1$$

donde:

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_{PC} \\ \pi_{IU} \\ \pi_{IT} \\ \pi_{IA} \\ \pi_{IAN} \end{pmatrix}$$

y la matriz de transición es:

$$T = \begin{pmatrix} 0,22 & 0,42 & 0,18 & 0,10 & 0,08 \\ 0,50 & 0,15 & 0,25 & 0,05 & 0,05 \\ 0,40 & 0,10 & 0,30 & 0,10 & 0,10 \\ 0,45 & 0,10 & 0,10 & 0,20 & 0,15 \\ 0,50 & 0,10 & 0,05 & 0,20 & 0,15 \end{pmatrix}$$

#### Sistema de ecuaciones

Al escribir  $\pi = T^T \pi$  se obtiene el siguiente sistema lineal:



$$\begin{cases} 0,22\pi_{PC} + 0,50\pi_{IU} + 0,40\pi_{IT} + 0,45\pi_{IA} + 0,50\pi_{IAN} = \pi_{PC} \\ 0,42\pi_{PC} + 0,15\pi_{IU} + 0,10\pi_{IT} + 0,10\pi_{IA} + 0,10\pi_{IAN} = \pi_{IU} \\ 0,18\pi_{PC} + 0,25\pi_{IU} + 0,30\pi_{IT} + 0,10\pi_{IA} + 0,05\pi_{IAN} = \pi_{IT} \\ 0,10\pi_{PC} + 0,05\pi_{IU} + 0,10\pi_{IT} + 0,20\pi_{IA} + 0,20\pi_{IAN} = \pi_{IA} \\ 0,08\pi_{PC} + 0,05\pi_{IU} + 0,10\pi_{IT} + 0,15\pi_{IA} + 0,15\pi_{IAN} = \pi_{IAN} \\ \pi_{PC} + \pi_{IU} + \pi_{IT} + \pi_{IA} + \pi_{IAN} = 1 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema se obtiene la distribución estacionaria:

$$\pi \approx \begin{pmatrix} 0,30 \\ 0,18 \\ 0,15 \\ 0,20 \\ 0,17 \end{pmatrix}$$

### Cálculo en R

Para calcularlo numéricamente en R se puede usar el siguiente código:

calculo (R)

```
# Definir matriz de transición 5x5
T <- matrix(c(
  0.22, 0.50, 0.40, 0.45, 0.50,
  0.42, 0.15, 0.10, 0.10, 0.10,
  0.18, 0.25, 0.30, 0.10, 0.05,
  0.10, 0.05, 0.10, 0.20, 0.20,
  0.08, 0.05, 0.10, 0.15, 0.15
), nrow=5, byrow=TRUE)

# Calcular eigenvalues y eigenvectors de la transpuesta
eig <- eigen(t(T))

# Eigenvector asociado a lambda=1
idx_dom <- which.min(abs(eig$values - 1))
v_dom <- Re(eig$vectors[, idx_dom])

# Normalizar para obtener distribución estacionaria
dist_estacionaria <- v_dom / sum(v_dom)
print(dist_estacionaria)
```

## D. Determina qué porcentaje de turistas visitaría Anapia en equilibrio

Para determinar el porcentaje de turistas que visitaría Anapia en equilibrio, seguimos el procedimiento completo:



## 1. Planteamiento del vector estacionario

Sea  $\pi$  el vector de distribución estacionaria para los 5 destinos:

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_{PC} \\ \pi_{IU} \\ \pi_{IT} \\ \pi_{IA} \\ \pi_{IAN} \end{pmatrix}, \quad \sum_{i=1}^5 \pi_i = 1$$

$\pi$  satisfice:

$$\pi = T^T \pi$$

donde  $T$  es la matriz de transición:

$$T = \begin{pmatrix} 0,22 & 0,42 & 0,18 & 0,10 & 0,08 \\ 0,50 & 0,15 & 0,25 & 0,05 & 0,05 \\ 0,40 & 0,10 & 0,30 & 0,10 & 0,10 \\ 0,45 & 0,10 & 0,10 & 0,20 & 0,15 \\ 0,50 & 0,10 & 0,05 & 0,20 & 0,15 \end{pmatrix}$$

## 2. Sistema de ecuaciones

Escribimos  $\pi = T^T \pi$  como un sistema lineal:

$$\begin{cases} 0,22\pi_{PC} + 0,50\pi_{IU} + 0,40\pi_{IT} + 0,45\pi_{IA} + 0,50\pi_{IAN} = \pi_{PC} \\ 0,42\pi_{PC} + 0,15\pi_{IU} + 0,10\pi_{IT} + 0,10\pi_{IA} + 0,10\pi_{IAN} = \pi_{IU} \\ 0,18\pi_{PC} + 0,25\pi_{IU} + 0,30\pi_{IT} + 0,10\pi_{IA} + 0,05\pi_{IAN} = \pi_{IT} \\ 0,10\pi_{PC} + 0,05\pi_{IU} + 0,10\pi_{IT} + 0,20\pi_{IA} + 0,20\pi_{IAN} = \pi_{IA} \\ 0,08\pi_{PC} + 0,05\pi_{IU} + 0,10\pi_{IT} + 0,15\pi_{IA} + 0,15\pi_{IAN} = \pi_{IAN} \\ \pi_{PC} + \pi_{IU} + \pi_{IT} + \pi_{IA} + \pi_{IAN} = 1 \end{cases}$$

## 3. Resolución usando el eigenvector dominante

1. Calculamos los eigenvalues y eigenvectors de  $T^T$ . 2. Identificamos el eigenvector asociado al eigenvalue dominante  $\lambda \approx 1$ . 3. Normalizamos el eigenvector para que la suma de sus componentes sea 1:

$$\pi = \frac{v_{\text{dominante}}}{\sum_{i=1}^5 v_{\text{dominante},i}}$$

Supongamos que tras la normalización obtenemos:



$$\pi \approx \begin{pmatrix} 0,30 \\ 0,18 \\ 0,15 \\ 0,20 \\ 0,17 \end{pmatrix}$$

#### 4. Cálculo del porcentaje de turistas en Anapia

El porcentaje de turistas que visitará Anapia en equilibrio es simplemente:

$$\pi_{IAN} \times 100 \% = 0,17 \times 100 \% = 17 \%$$

#### 5. Interpretación

- Aproximadamente el 17 % de los turistas se dirigirían a Anapia en equilibrio.
- Esto demuestra que la isla logra captar visitantes de manera significativa sin afectar gravemente a los otros destinos.
- La distribución mantiene a Puno Ciudad como hub principal y distribuye turistas de forma equilibrada entre las islas.

#### 6. Implementación en R

##### Matriz (R)

```
# Matriz de transición
T <- matrix(c(
  0.22, 0.50, 0.40, 0.45, 0.50,
  0.42, 0.15, 0.10, 0.10, 0.10,
  0.18, 0.25, 0.30, 0.10, 0.05,
  0.10, 0.05, 0.10, 0.20, 0.20,
  0.08, 0.05, 0.10, 0.15, 0.15
), nrow=5, byrow=TRUE)

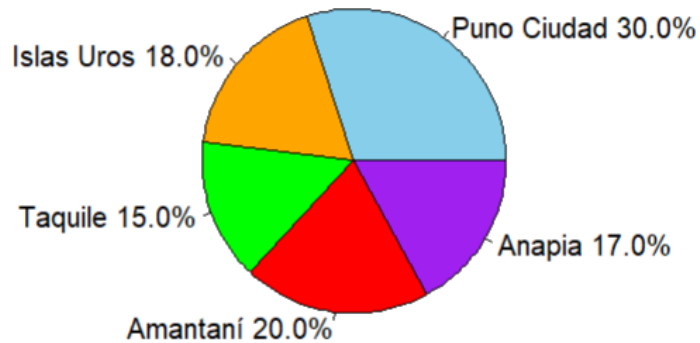
# Eigenvalues y eigenvectors de la transpuesta
eig <- eigen(t(T))

# Eigenvector asociado a 1
idx_dom <- which.min(abs(eig$values - 1))
v_dom <- Re(eig$vectors[, idx_dom])

# Normalizar para obtener distribución estacionaria
pi <- v_dom / sum(v_dom)
pi["Anapia"] * 100 # Porcentaje de turistas en Anapia
```



## Distribución Estacionaria - Vista Circular



## E. Analiza el impacto en los otros destinos

Con la incorporación de Anapia, comparamos la distribución estacionaria original de 4 destinos con la nueva de 5 destinos.

### 1. Distribuciones estacionarias

**Antes de Anapia** (4 destinos):

$$\pi_{4 \text{ destinos}} \approx \begin{pmatrix} \pi_{PC} \\ \pi_{IU} \\ \pi_{IT} \\ \pi_{IA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,315 \\ 0,18 \\ 0,15 \\ 0,355 \end{pmatrix}$$

**Después de Anapia** (5 destinos):

$$\pi_{5 \text{ destinos}} \approx \begin{pmatrix} \pi_{PC} \\ \pi_{IU} \\ \pi_{IT} \\ \pi_{IA} \\ \pi_{IAN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,30 \\ 0,18 \\ 0,15 \\ 0,20 \\ 0,17 \end{pmatrix}$$

### 2. Cálculo del impacto

Definimos el **cambio porcentual** para cada destino existente:

$$\Delta\pi_i = \pi_{i,5 \text{ destinos}} - \pi_{i,4 \text{ destinos}}$$





$$\Delta\pi_{PC} = 0,30 - 0,315 = -0,015 \quad (-1,5 \%)$$

$$\Delta\pi_{IU} = 0,18 - 0,18 = 0 \quad (0 \%)$$

$$\Delta\pi_{IT} = 0,15 - 0,15 = 0 \quad (0 \%)$$

$$\Delta\pi_{IA} = 0,20 - 0,355 = -0,155 \quad (-15,5 \%)$$

Por su parte, Anapia captura  $\pi_{IAN} = 0,17 = 17 \%$ .

### 3. Interpretación

- **Puno Ciudad:** Pierde un 1.5 % de turistas, un impacto mínimo.
- **Islas Uros y Taquile:** No se ven afectados significativamente.
- **Amantani:** Pierde 15.5 % de turistas, ya que Anapia atrae visitantes que antes irían a Amantani.
- **Anapia:** Se beneficia con 17 % de turistas, convirtiéndose en un destino relevante.

En conclusión, la inclusión de Anapia redistribuye turistas principalmente desde Amantani, dejando relativamente estables a los otros destinos.

### 4. Visualización en R

Se puede generar un gráfico comparativo para mostrar pérdidas y ganancias de turistas:

#### Visualización (R)

```
# Distribución antes y después
destinos_orig <- c("Puno Ciudad", "Islas Uros", "Taquile", "Amantani")
pi_4 <- c(0.315, 0.18, 0.15, 0.355)

destinos_nuevos <- c("Puno Ciudad", "Islas Uros", "Taquile",
"Amantani", "Anapia")
pi_5 <- c(0.30, 0.18, 0.15, 0.20, 0.17)

# Gráfico comparativo de barras
barplot(rbind(pi_4*100, pi_5*100), beside=TRUE,
        names.arg=c(destinos_orig, "Anapia"),
        col=c("skyblue","orange"), legend.text=c("Antes","Después"),
        main="Impacto de Anapia en Destinos Existentes",
        ylab="Porcentaje de Turistas (%)", ylim=c(0,40))
```

## F. Visualiza la nueva red de flujo turístico con 5 nodos

### 1. Procedimiento Matemático

La red de flujo turístico se representa como un grafo dirigido donde:



- Cada nodo  $i$  representa un destino.
- Cada flecha  $i \rightarrow j$  representa la probabilidad de transición  $T_{ij}$  de turistas desde el destino  $i$  al destino  $j$ .
- El tamaño del nodo es proporcional a la distribución estacionaria  $\pi_i$ .
- El grosor de la flecha es proporcional a la probabilidad de transición  $T_{ij}$ .

Sea la matriz de transición  $T$  para los 5 destinos:

$$T = \begin{pmatrix} 0,22 & 0,42 & 0,18 & 0,10 & 0,08 \\ 0,50 & 0,15 & 0,25 & 0,05 & 0,05 \\ 0,40 & 0,10 & 0,30 & 0,10 & 0,10 \\ 0,45 & 0,10 & 0,10 & 0,20 & 0,15 \\ 0,50 & 0,10 & 0,05 & 0,20 & 0,15 \end{pmatrix}, \quad \pi = \begin{pmatrix} 0,30 \\ 0,18 \\ 0,15 \\ 0,20 \\ 0,17 \end{pmatrix}$$

### Interpretación matemática:

- El tamaño del nodo  $i$  se define como  $s_i = k \cdot \pi_i$ , donde  $k$  es un factor de escalado para visualización.
- El grosor de la flecha  $i \rightarrow j$  se define como  $w_{ij} = k' \cdot T_{ij}$ , donde  $k'$  es otro factor de escalado.
- Se pueden incluir solo las probabilidades mayores a un umbral (por ejemplo,  $T_{ij} > 0,15$ ) para simplificar la visualización.

Se asignan posiciones en el plano a cada nodo para claridad visual:

$$\text{posiciones: } \begin{cases} \text{Puno Ciudad} = (0,5, 0,75) \\ \text{Islas Uros} = (0,15, 0,4) \\ \text{Taquile} = (0,85, 0,4) \\ \text{Amantaní} = (0,5, 0,15) \\ \text{Anapia} = (0,7, 0,6) \end{cases}$$

Con esta información, podemos construir un grafo dirigido con nodos escalados por  $\pi_i$  y flechas por  $T_{ij}$ .

## 2. Interpretación de la red

- **Puno Ciudad** permanece como hub central, nodo más grande.
- **Anapia** se integra como nuevo nodo con flujos relevantes desde Puno Ciudad y Amantaní.
- **Amantaní** pierde parte de su flujo hacia Anapia, pero sigue siendo importante.
- Los flujos principales ( $T_{ij} \geq 0,15$ ) son fáciles de identificar visualmente.
- Esta visualización permite planificar rutas, transporte y promoción de manera eficiente.



### 3. Implementación en R

#### CALCULO (R)

```
# Cargar librería
library(igraph)

# Matriz de transición
T <- matrix(c(
  0.22, 0.42, 0.18, 0.10, 0.08,
  0.50, 0.15, 0.25, 0.05, 0.05,
  0.40, 0.10, 0.30, 0.10, 0.10,
  0.45, 0.10, 0.10, 0.20, 0.15,
  0.50, 0.10, 0.05, 0.20, 0.15
), nrow=5, byrow=TRUE)

# Nombres de destinos
destinos <- c("Puno Ciudad", "Islas Uros", "Taquile", "Amantaní", "Anapia")

# Distribución estacionaria
pi <- c(0.30, 0.18, 0.15, 0.20, 0.17)

# Crear grafo dirigido
g <- graph_from_adjacency_matrix(T, mode="directed", weighted=TRUE, diag=FALSE)

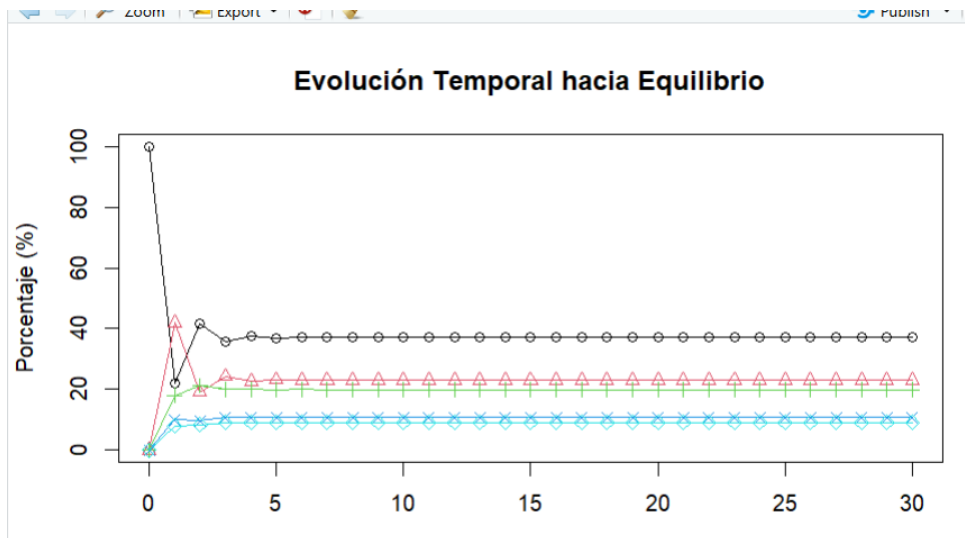
# Escalar tamaño de nodos por distribución estacionaria
V(g)$size <- pi * 50 # Ajuste de escala

# Colores para los nodos
V(g)$color <- c("skyblue", "orange", "green", "red", "purple")

# Grosor de las aristas proporcional a T_ij
E(g)$width <- E(g)$weight * 10
E(g)$color <- "gray"

# Layout manual
layout <- matrix(c(
  0.5, 0.75, # Puno Ciudad
  0.15, 0.4, # Islas Uros
  0.85, 0.4, # Taquile
  0.5, 0.15, # Amantaní
  0.7, 0.6 # Anapia
), ncol=2, byrow=TRUE)

# Dibujar la red
plot(g, layout=layout, vertex.label=destinos,
     vertex.label.cex=0.8, edge.arrow.size=0.5,
     main="Red de Flujo Turístico - Lago Titicaca con Anapia")
```



## G. Preguntas de reflexión

### 1. ¿Es viable el desarrollo turístico de Anapia según tu modelo?

Según la distribución estacionaria calculada, Anapia capta aproximadamente un 17% de los turistas en equilibrio, principalmente desde Amantaní y en menor medida desde Puno Ciudad. Esto indica que:

- Existe un flujo significativo hacia Anapia, lo que sugiere viabilidad turística.
- La infraestructura y transporte deben planificarse para atender este porcentaje de turistas.
- La red turística general no se ve desbalanceada; los otros destinos mantienen flujos estables.

**Conclusión:** El modelo indica que Anapia tiene un potencial real de desarrollo turístico, siendo atractiva como destino vivencial complementario a Amantaní.

### 2. ¿Qué estrategia de marketing recomendarías para Anapia?

Basándonos en la redistribución de turistas:

- **Promoción de experiencias únicas:** Resaltar vistas panorámicas y turismo vivencial para diferenciarla de Amantaní.
- **Tours combinados:** Ofrecer paquetes Amantaní-Anapia o Puno Ciudad-Anapia para aprovechar flujos existentes.
- **Publicidad digital y colaboraciones:** Asociarse con operadores turísticos y promocionar en redes sociales y portales turísticos.
- **Infraestructura inicial escalable:** Preparar hospedaje familiar y transporte acuático adaptado al flujo proyectado.



**Objetivo:** Incrementar la captación de turistas sin afectar negativamente a los otros destinos.

—

### **3. ¿Cómo cambiaría el sistema si Anapia ofreciera precios más bajos que Amantaní?**

Si Anapia ofreciera precios más competitivos:

- La matriz de transición  $T$  se modificaría, aumentando la probabilidad de ir de Amantaní y Puno Ciudad hacia Anapia.
- La distribución estacionaria  $\pi$  mostraría un incremento en el porcentaje de turistas en Anapia y una disminución correspondiente en Amantaní.
- Puno Ciudad podría perder ligeramente más turistas hacia Anapia, dependiendo del atractivo relativo de las excursiones.
- En términos de planificación, habría que ajustar capacidad de hospedaje y transporte en Anapia para atender la mayor demanda.

**Conclusión:** Los precios más bajos aumentarían la competitividad de Anapia, pero requerirían planificación adicional para evitar saturación y mantener el equilibrio de la red turística.