UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO - PUNO

FACULTAD DE INGENIERÍA ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA

TEMA: Eigenvalores y Eigenvectores Métodos de Optimización

CURSO: Programacion Numerica

DOCENTE: TORRES CRUZ FRED

INTEGRANTES:

- Apaza Huata, Sadith Lina

SEMESTRE: Cuarto

GRUPO: “A”

PUNO – PERÚ

Eigenvalores y Eigenvectores

Ejercicio 1

Encuentra los eigenvalores y eigenvectores de:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Solución

Eigenvalores. Para una matriz diagonal, los eigenvalores son los elementos de la diagonal. Por tanto:

$$\lambda_1 = 4, \qquad \lambda_2 = 7.$$

Eigenvectores. Para cada eigenvalor resolvemos $(A - \lambda I)v = 0$. Como la matriz es diagonal, los eigenvectores correspondientes son los vectores canónicos:

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Verificación: $Av^{(1)} = 4v^{(1)}$ y $Av^{(2)} = 7v^{(2)}$.

Ejercicio 2

Calcula eigenvalores y eigenvectores de:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pista: El determinante será $(1 - \lambda)^2 - 4$.

Solución

Formar $B - \lambda I$.

$$B - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Determinante .

$$\begin{aligned}\det(B-\lambda I) &= (1-\lambda)^2-4\\ &= 1-2\lambda+\lambda^2-4\\ &= \lambda^2-2\lambda-3.\end{aligned}$$

Resolver.

$$\lambda^2-2\lambda-3=0 \quad\Longrightarrow\quad (\lambda-3)(\lambda+1)=0.$$

De donde:

$$\lambda_1=3, \qquad \lambda_2=-1.$$

Eigenvectores. Para $\lambda_1=3$ resolvemos $(B-3I)v=0$:

$$\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

De la primera ecuación, $-2v_1+2v_2=0 \Rightarrow v_2=v_1$. Tomando $v_1=1$:

$$v^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_2=-1$ resolvemos $(B+I)v=0$:

$$\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

De la primera ecuación, $2v_1+2v_2=0 \Rightarrow v_2=-v_1$. Tomando $v_1=1$:

$$v^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3

Para la función

$$f(x_1,x_2)=2x_1^2+x_2^2-2x_1x_2,$$

realiza:

a) Calcula la matriz Hessiana.

b) Encuentra sus eigenvalores.

c) Clasifica el punto crítico $(0,0)$.

Solución

(a) Cálculo de segundas derivadas y Hessiana.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 4,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = -2.$$

Entonces la Hessiana es

$$H = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Eigenvalores de H. Formamos $H - \lambda I$:

$$H - \lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Determinante:

$$\begin{aligned} \det(H - \lambda I) &= (4-\lambda)(2-\lambda) - (-2)(-2) \\ &= (4-\lambda)(2-\lambda) - 4 \\ &= 8 - 4\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 4 \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 4. \end{aligned}$$

Resolviendo la cuadrática:

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36-16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} = 3 \pm \sqrt{5}.$$

Numericamente:

$$\lambda_1 = 3 + \sqrt{5} \approx 5{,}236, \qquad \lambda_2 = 3 - \sqrt{5} \approx 0{,}764.$$

(c) Clasificación del punto $(0,0)$. Como ambos eigenvalores son positivos, la Hessiana es definida positiva en el punto crítico, por lo tanto $(0,0)$ es un **mínimo local**.

Ejercicio 4

Determina si el punto crítico $(0,0)$ de

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2$$

es máximo o mínimo usando eigenvalores de la Hessiana.

Solución

Hessiana. Calculamos segundas derivadas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -4, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Por tanto

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Eigenvalores. Al ser diagonal, los eigenvalores son

$$\lambda_1 = -2, \qquad \lambda_2 = -4.$$

Ambos negatives implican que H es definida negativa, por lo tanto $(0,0)$ es un **máximo local**.

Ejercicio 5

Verifica que

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es eigenvector de

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

y encuentra su eigenvalor asociado λ.

Solución

Multiplicamos C por v:

$$Cv = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Observamos que:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2v.$$

Por tanto v es eigenvector y el eigenvalor asociado es

$$\lambda = 2.$$