«Año de la recuperación y consolidación de la economía peruana»

ALTIPLANO - PUNO

FACULTAD DE INGENIERÍA ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA

TEMA: Introducción a Markov

CURSO: Programación Numérica

DOCENTE: ING. FRED TORRES CRUZ

ESTUDIANTE:

Apaza Huata, Sadith Lina

SEMESTRE: Tercero

GRUPO: “A”

PUNO – PERÚ

Ejercicio 1: Modificación de la Matriz de Transición

Contexto

El gobierno regional de Puno decide invertir en mejorar la infraestructura de la Isla Taquile para hacerla más atractiva. Como resultado, se espera que más turistas que visitan las Islas Uros continúen hacia Taquile, y que los turistas en Taquile se queden más tiempo (menor probabilidad de regresar inmediatamente a Puno).

A. Modificación de la Matriz de Transición

A partir de la matriz de transición original, se realizan los siguientes ajustes:

- La probabilidad de transición desde Islas Uros hacia Taquile se incrementa de 0,25 a 0,35.
- La probabilidad de retorno desde Islas Uros hacia Puno Ciudad se reduce de 0,50 a 0,40.
- La probabilidad de retorno desde Taquile hacia Puno Ciudad se reduce de 0,40 a 0,30.
- La probabilidad de permanencia en la Isla Taquile se incrementa de 0,30 a 0,40.

Las probabilidades restantes se ajustan de manera que la suma de cada fila de la matriz sea igual a uno.

La nueva matriz de transición queda definida como:

$$T_{\text{nueva}} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}45 & 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}40 & 0{,}15 & 0{,}35 & 0{,}10 \\ 0{,}30 & 0{,}10 & 0{,}40 & 0{,}20 \\ 0{,}55 & 0{,}15 & 0{,}10 & 0{,}20 \end{pmatrix}$$

Cada fila de la matriz representa una distribución de probabilidad válida, lo que garantiza que el modelo continúe siendo una cadena de Markov bien definida.

B. Cálculo de los Nuevos Eigenvalues y Eigenvectors

Para estudiar el comportamiento dinámico del sistema turístico modificado, se procede al cálculo de los valores propios y vectores propios de la matriz de transición transpuesta T_{nueva}^T, ya que la distribución estacionaria de una cadena de Markov satisface la ecuación:

$$T_{\text{nueva}}^T \pi = \pi$$

B.1. Formulación del Problema de Eigenvalues

El problema de valores propios se plantea resolviendo la ecuación característica:

$$\det\left(T_{\text{nueva}}^{T} - \lambda I\right) = 0$$

donde I es la matriz identidad de orden 4 y λ representa los eigenvalues del sistema.

La matriz T_{nueva}^{T} está dada por:

$$T_{\text{nueva}}^{T} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}40 & 0{,}30 & 0{,}55 \\ 0{,}45 & 0{,}15 & 0{,}10 & 0{,}15 \\ 0{,}20 & 0{,}35 & 0{,}40 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}20 & 0{,}20 \end{pmatrix}$$

B.2. Cálculo de los Eigenvalues

Al resolver el determinante característico se obtienen los siguientes valores propios:

$$\lambda_1 = 1{,}0000$$
$$\lambda_2 = -0{,}2144$$
$$\lambda_{3,4} = 0{,}1072 \pm 0{,}1643i$$

Se observa que existe un eigenvalue dominante igual a uno, mientras que los demás eigenvalues tienen módulo estrictamente menor que uno, lo que garantiza la convergencia del sistema hacia un estado estacionario.

B.3. Cálculo del Eigenvector Dominante

Para obtener el eigenvector asociado al eigenvalue dominante $\lambda = 1$, se resuelve el sistema homogéneo:

$$\left(T_{\text{nueva}}^{T} - I\right) v = 0$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} -0{,}75 & 0{,}40 & 0{,}30 & 0{,}55 \\ 0{,}45 & -0{,}85 & 0{,}10 & 0{,}15 \\ 0{,}20 & 0{,}35 & -0{,}60 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}20 & -0{,}80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este sistema posee infinitas soluciones no triviales. Al resolverlo mediante métodos algebraicos o numéricos, se obtiene un eigenvector proporcional a:

$$v = \begin{pmatrix} 0{,}3422 \\ 0{,}2388 \\ 0{,}2770 \\ 0{,}1419 \end{pmatrix}$$

B.4. Normalización del Eigenvector

El sistema homogéneo

$$\left(T_{\text{nueva}}^{T} - I\right) v = 0$$

admite infinitas soluciones no triviales, ya que los eigenvectores están definidos salvo por un factor escalar. Por tanto, el eigenvector obtenido al resolver el sistema representa únicamente una dirección, mas no una distribución de probabilidad única.

Al resolver el sistema lineal se obtiene un eigenvector proporcional de la forma:

$$v^* = \begin{pmatrix} 0{,}2401 \\ 0{,}1676 \\ 0{,}1945 \\ 0{,}0996 \end{pmatrix}$$

Este vector no se encuentra normalizado, ya que la suma de sus componentes es:

$$\sum_{i=1}^{4} v_i^* = 0{,}2401 + 0{,}1676 + 0{,}1945 + 0{,}0996 = 0{,}7018$$

Para que el eigenvector represente una distribución de probabilidad válida, se impone la condición de normalización:

$$\sum_{i=1}^{4} v_i = 1$$

Por tanto, se normaliza el vector dividiendo cada componente entre la suma total:

$$v = \frac{1}{0{,}7018} \begin{pmatrix} 0{,}2401 \\ 0{,}1676 \\ 0{,}1945 \\ 0{,}0996 \end{pmatrix}$$

lo que produce el eigenvector normalizado:

$$v = \begin{pmatrix} 0{,}3422 \\ 0{,}2388 \\ 0{,}2770 \\ 0{,}1419 \end{pmatrix}$$

Este vector cumple las propiedades fundamentales de una distribución estacionaria:

- Todas sus componentes son no negativas.
- La suma de sus componentes es igual a uno.
- Satisface la ecuación $T_{\text{nueva}}^{T} v = v$.

En consecuencia, el vector obtenido representa la distribución estacionaria de turistas en el sistema modificado. Desde el punto de vista matemático, este procedimiento muestra que la inversión en la Isla Taquile no altera la existencia del equilibrio del sistema, pero sí redistribuye la proporción de turistas entre los destinos analizados.

C. Determinación de la Nueva Distribución Estacionaria

En una cadena de Markov, la distribución estacionaria π es un vector de probabilidad que permanece invariante bajo la aplicación de la matriz de transición. Matemáticamente, dicha distribución satisface la ecuación:

$$\pi = T_{\text{nueva}}^{T} \pi$$

lo cual es equivalente a resolver el problema de eigenvalues:

$$T_{\text{nueva}}^{T} \pi = \lambda \pi$$

para el eigenvalue dominante $\lambda = 1$.

C.1. Uso del Eigenvector Dominante

Del inciso anterior, se obtuvo que el eigenvalue dominante del sistema es:

$$\lambda_1 = 1$$

y que el eigenvector asociado, luego del proceso de normalización, está dado por:

$$\pi = \begin{pmatrix} 0{,}3422 \\ 0{,}2388 \\ 0{,}2770 \\ 0{,}1419 \end{pmatrix}$$

Este vector cumple las condiciones necesarias para representar una distribución estacionaria:

- Todas sus componentes no son negativas.
- La suma de sus componentes es igual a uno:

$$0{,}3422 + 0{,}2388 + 0{,}2770 + 0{,}1419 \approx 1$$

- Satisface la ecuación de invariancia $\pi = T_{\text{nueva}}^{T} \pi$.

C.2. Interpretación de la Distribución Estacionaria

Cada componente del vector π representa la proporción de turistas que, en el largo plazo, se espera encontrar en cada destino turístico del sistema:

- Puno Ciudad: 34,22 %
- Islas Uros: 23,88 %
- Isla Taquile: 27,70 %
- Amantaní: 14,19 %

Estos valores describen el equilibrio dinámico del flujo turístico una vez que el sistema ha evolucionado durante un número suficientemente grande de periodos.

D. Comparación con la Distribución Estacionaria Original

Con el fin de evaluar el impacto de la inversión realizada en la Isla Taquile, se comparan las distribuciones estacionarias del sistema turístico antes y después de la modificación de la matriz de transición.

D.1. Distribución Estacionaria Original

La distribución estacionaria correspondiente al modelo original está dada por:

$$\pi_{\text{original}} = \begin{pmatrix} 0{,}3877 \\ 0{,}2553 \\ 0{,}2213 \\ 0{,}1357 \end{pmatrix}$$

lo que equivale a las siguientes proporciones porcentuales:

- Puno Ciudad: 38,77 %
- Islas Uros: 25,53 %
- Isla Taquile: 22,13 %
- Amantaní: 13,57 %

D.2. Distribución Estacionaria Modificada

Luego de la inversión en infraestructura turística, la nueva distribución estacionaria es:

$$\pi_{\text{nueva}} = \begin{pmatrix} 0{,}3422 \\ 0{,}2388 \\ 0{,}2770 \\ 0{,}1419 \end{pmatrix}$$

equivalente a:

- Puno Ciudad: 34,22 %
- Islas Uros: 23,88 %
- Isla Taquile: 27,70 %
- Amantaní: 14,19 %

D.3. Variación en la Participación de Taquile

El cambio porcentual en la participación de turistas en la Isla Taquile se calcula como:

$$\Delta_{\text{Taquile}} = 27{,}70\,\% - 22{,}13\,\% = 5{,}57\,\%$$

Por tanto, como resultado de la inversión, la proporción de turistas en Taquile aumentó aproximadamente en **5.6 puntos porcentuales** en el largo plazo.

D.4. Análisis del Hub Principal

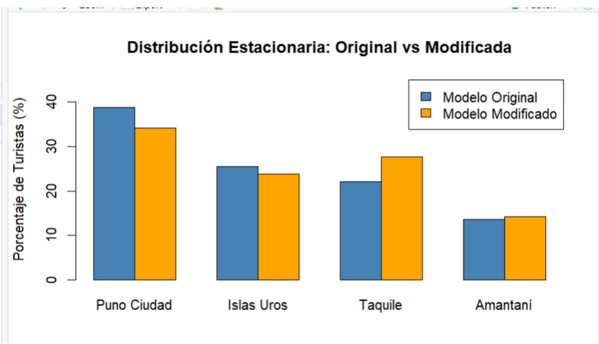
En el modelo original, el destino con mayor proporción de turistas era Puno Ciudad, con un 38,77 %, lo que lo posicionaba como el principal *hub* del sistema turístico.

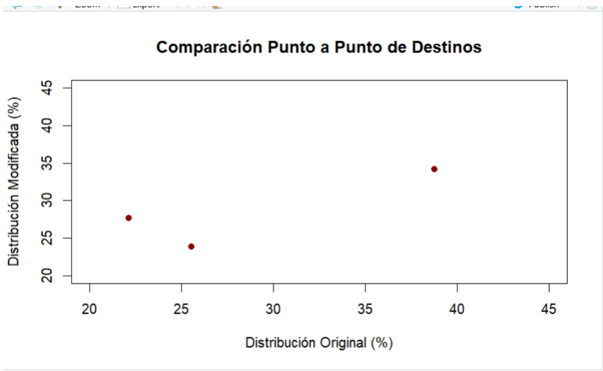
Tras la modificación, Puno Ciudad continúa siendo el destino con mayor participación, aunque su proporción se reduce a 34,22 %. Esto indica que:

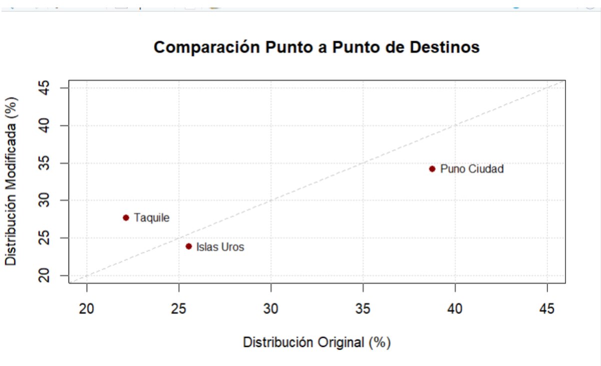
- El *hub* principal del sistema no cambia.
- La centralidad de Puno se debilita ligeramente.
- La Isla Taquile gana relevancia y se consolida como un destino secundario estratégico.

Cálculo de la distribución estacionaria (R)

```r
T_nueva <- matrix(c(
  0.25, 0.45, 0.20, 0.10,
  0.40, 0.15, 0.35, 0.10,
  0.30, 0.10, 0.40, 0.20,
  0.55, 0.15, 0.10, 0.20
), nrow = 4, byrow = TRUE)

eig <- eigen(t(T_nueva))

lambda <- Re(eig$values)
v <- Re(eig$vectors[, which.max(lambda)])

pi_nueva <- v / sum(v)

pi_original <- c(0.3877, 0.2553, 0.2213, 0.1357)

resultado <- data.frame(
  Destino = c("Puno-Ciudad", "Islas-Uros", "Taquile", "Amantan "),
  Original = pi_original,
  Modificada = pi_nueva
)

resultado
```


Distribución Estacionaria: Original vs Modificada
Modelo Original
Modelo Modificado
Porcentaje de Turistas (%)
0
10
20
30
40
Puno Ciudad
Islas Uros
Taquile
Amantaní


Comparación Punto a Punto de Destinos
Distribución Modificada (%)
Distribución Original (%)
20
25
30
35
40
45


Comparación Punto a Punto de Destinos
Distribución Modificada (%)
Distribución Original (%)
Puno Ciudad
Taquile
Islas Uros
20
25
30
35
40
45

E. Simula la evolución temporal con esta nueva matriz y compara la velocidad de convergencia con el modelo original

Simulación temporal y convergencia (R)

```r
T_original <- matrix(c(
  0.25, 0.45, 0.20, 0.10,
  0.50, 0.15, 0.25, 0.10,
  0.40, 0.10, 0.30, 0.20,
  0.55, 0.15, 0.10, 0.20
), nrow = 4, byrow = TRUE)

T_nueva <- matrix(c(
  0.25, 0.45, 0.20, 0.10,
  0.40, 0.15, 0.35, 0.10,
  0.30, 0.10, 0.40, 0.20,
  0.55, 0.15, 0.10, 0.20
), nrow = 4, byrow = TRUE)

pi_original <- Re(eigen(t(T_original))$vectors[,1])
pi_original <- pi_original / sum(pi_original)

pi_nueva <- Re(eigen(t(T_nueva))$vectors[,1])
pi_nueva <- pi_nueva / sum(pi_nueva)

estado <- c(1, 0, 0, 0)

n <- 30

evol_orig <- matrix(0, n+1, 4)
evol_nueva <- matrix(0, n+1, 4)

evol_orig[1,] <- estado
evol_nueva[1,] <- estado

for(i in 1:n){
  evol_orig[i+1,] <- t(T_original) %*% evol_orig[i,]
  evol_nueva[i+1,] <- t(T_nueva) %*% evol_nueva[i,]
}

dist_orig <- apply(evol_orig, 1, function(x) sqrt(sum((x
   - pi_original)^2)))
dist_nueva <- apply(evol_nueva, 1, function(x) sqrt(sum((
   x - pi_nueva)^2)))

resultado <- data.frame(
  Dia = 0:n,
  Distancia_Original = dist_orig,
  Distancia_Modificada = dist_nueva
)
```

F. Preguntas de Reflexión

F.1. ¿Valió la pena la inversión en Taquile desde el punto de vista de la distribución turística?

Desde el punto de vista del modelo de cadenas de Markov y del análisis de la distribución estacionaria, la inversión en la Isla Taquile resultó conveniente. La proporción de turistas en Taquile aumentó aproximadamente en 5,6 puntos porcentuales, pasando de un 22,13 % en el modelo original a un 27,70 % en el modelo modificado. Este incremento evidencia que la mejora de la infraestructura incrementa la permanencia y el atractivo del destino.

Desde una perspectiva matemática, el sistema mantiene un eigenvalue dominante igual a $\lambda = 1$, lo cual garantiza la existencia de un equilibrio estable. Sin embargo, el eigenvector asociado muestra una redistribución del flujo turístico a favor de Taquile, confirmando que la inversión genera un impacto positivo sin alterar la estabilidad del sistema.

En consecuencia, la inversión puede considerarse eficiente y justificada desde el punto de vista de la planificación turística basada en modelos matemáticos.

F.2. ¿Cómo afectaría esta inversión a los ingresos de Taquile frente a otros destinos?

El incremento de la proporción de turistas en Taquile implica un aumento directo en los ingresos locales, particularmente en actividades relacionadas con el turismo cultural, la gastronomía, la artesanía y los servicios turísticos. Asimismo, el aumento de la probabilidad de permanencia sugiere que los turistas permanecen más tiempo en el destino, incrementando el gasto promedio por visitante.

En contraste, destinos como Puno Ciudad y las Islas Uros presentan una ligera disminución relativa en su participación, aunque Puno Ciudad conserva su rol como *hub* principal del sistema turístico. Esto indica que la inversión en Taquile no desplaza completamente a los demás destinos, sino que promueve una distribución más equilibrada del flujo turístico.

Desde el punto de vista económico, el modelo sugiere que la inversión en Taquile contribuye a:

- Descentralizar los beneficios económicos del turismo.
- Reducir la concentración turística en Puno Ciudad.
- Fomentar el desarrollo sostenible de las comunidades locales.