Avaliando a Qualidade de Estimadores

Métodos Monte Carlo para Estimação

ESTAT0090 – Estatística Computacional
Prof. Dr. Sadraque E. F. Lucena
sadraquelucena@academico.ufs.br

Motivação

A motivação para esta aula é explorar o poder da simulação de Monte Carlo como uma ferramenta prática para a estatística. Em cenários onde a matemática para calcular propriedades como viés e erro padrão de um estimador é complexa, podemos usar o computador para simular o processo de amostragem milhares de vezes. Isso nos permite, de forma intuitiva, aproximar essas propriedades e, assim, comparar a eficácia de diferentes estimadores. Ao final, você será capaz de aplicar essa técnica para avaliar e validar modelos estatísticos, testando suas suposições de forma empírica e robusta, sem a necessidade de soluções analíticas complexas.

Objetivos da aula

Usar o Método de Monte Carlo para

- Estimar o Viés e o Erro Padrão
- Avaliar e Comparar Estimadores
- Construir Intervalos de Confiança

Estimação do Viés por Monte Carlo

- Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição de X.
- Para estimarmos o parâmetro θ por Monte Carlo fazemos:
  1. Geramos N amostras artificiais de X, $(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_N)$, em que cada $\mathbf{X}_j = (x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}), j = 1, \ldots, N$.
  2. Calculamos $\widehat{\theta}^{(j)} = \widehat{\theta}(\mathbf{X}_j)$.
  3. Obtemos o estimador de Monte Carlos fazendo

$$\widehat{\theta}_{MC} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \widehat{\theta}^{(j)}.$$

Estimação do Viés por Monte Carlo

$$
\left.\begin{array}{ccc}
\boxed{x_1 \,|\, x_2 \,|\, x_3 \,|\, \cdots \,|\, x_n} & \rightarrow & \widehat{\theta}^{(1)} \\
\boxed{x_1 \,|\, x_2 \,|\, x_3 \,|\, \cdots \,|\, x_n} & \rightarrow & \widehat{\theta}^{(2)} \\
\vdots & & \vdots \\
\boxed{x_1 \,|\, x_2 \,|\, x_3 \,|\, \cdots \,|\, x_n} & \rightarrow & \widehat{\theta}^{(N)}
\end{array}\right\} \rightarrow \widehat{\theta}_{\text{MC}}
$$

Estimação do Viés por Monte Carlo

- O viés do estimador $\widehat{\theta}$ para um parâmetro θ é dado por

$$B(\widehat{\theta}) = \mathbb{E}(\widehat{\theta}) - \theta,\ \forall\theta \in \Theta$$

.

- Então, o viés estimado por Monte Carlo, é

$$\widehat{B}(\widehat{\theta}) = \widehat{\theta}_{MC} - \theta = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\widehat{\theta}^{(j)} - \theta.$$

- O valor de θ geralmente não é conhecido, mas podemos calcular sistematicamente $\widehat{B}(\theta)$ para uma variedade de valores diferentes de θ, a fim de obter uma estimativa aproximada do limite superior para o viés de um estimador.

Estimação do Erro Padrão por Monte Carlo

- O erro padrão de um estimador $\widehat{\theta}$ é dado por $EP(\widehat{\theta}) = \sqrt{Var(\widehat{\theta})}$.
- No caso da média $\overline{X}$, temos $EP(\overline{X}) = \sqrt{Var(\overline{X})} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
- Como a estimativa de Mote Carlo para $\widehat{\theta}$ é uma média, seu erro padrão será $\sqrt{Var(\theta)/N}$.
- Assim, o erro padrão de Monte Carlo é dado por

$$\widehat{EP}_{MC} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\widehat{\theta}^{(j)} - \hat{\theta}_{MC} \right)^2}$$

- No R o erro padrão é calculado usando .

Intervalos de Confiança de Monte Carlo

- A partir do Teorema Central do Limite, o intervalo de confiança $1 - \alpha$ para a média é dado por

$$\overline{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

No método de Monte Carlo, o intervalo fica

$$\widehat{\theta}_{MC} \pm Z_{\alpha/2} EP_{MC}.$$

Exemplo 16.1

Considere uma amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n$ de uma variável aleatória $X \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 1)$ e os seguintes estimadores pontuais

$$\widehat{\theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{e} \qquad \widehat{\theta}_2 = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}.$$

Qual do dois estimadores pode ser considerado como melhor para estimar o verdadeiro valor de μ? Simule no R o viés e a variância para $N = 10\,000$ e $n = 10$.

- Para evitar criar o laço `for`, você pode usar a função `replicate`.

Exemplo 16.1

```
library(tidyverse)

# Define valores
N <- 10000
n <- 10

# Gera as amostras e calcula as estimativas
set.seed(1)
th1 <- replicate( N, mean(rnorm(n, mean = 3, sd = 1)) )
th2 <- replicate( N, sum(range(rnorm(n, mean = 3, sd = 1)))/2 )

# Distribuição das estimativas
L <- data.frame(th1, th2)
L <- L |> pivot_longer(cols = c(th1,th2),
                        names_to = "parametro",
                        values_to = "valores")
```

Exemplo 16.1

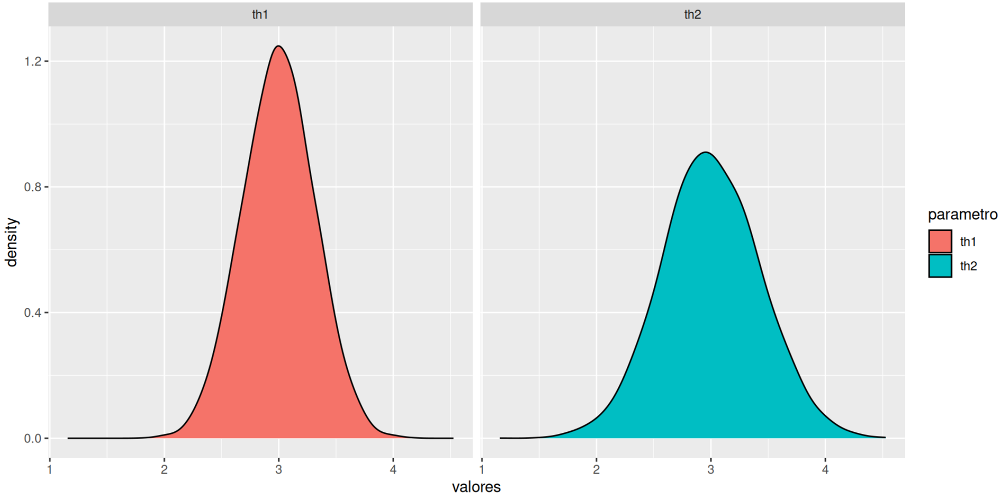
```
# média das estimativas
tapply(L$valores, L$parametro, mean)
```

```
     th1      th2 
2.997756 2.999629 
```

```
# Erro padrão das etimativas
tapply(L$valores, L$parametro, function(x) sd(x)/sqrt(N))
```

```
        th1         th2 
0.003153728 0.004297744 
```

```
ggplot(data = L, aes(x = valores, group = parametro, fill = parametro)
  geom_density(adjust=1.5) +
  facet_wrap(~parametro)
```



Exemplo 16.2

Considere uma amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n$ de uma variável aleatória $X \sim U(\min = 2, \max = 4)$ e os seguintes estimadores pontuais

$$\widehat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{e} \qquad \widehat{\theta}_2 = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}.$$

Qual do dois estimadores pode ser considerado como melhor para estimar o verdadeiro valor de μ? Simule no R o viés e a variância para $N = 10\,000$, $n = 2, 3, 5, 10, 20, 50, 100, 500, 1000$ e observe o comportamento.

Exemplo 16.3

Suponha que X_1 e X_2 são duas variáveis aleatórias i.i.d. de uma normal padrão. Usando simulação de Monte Carlo, obtenha uma estimativa de $E(|X_1 - X_2|)$ e seu erro padrão.

Exemplo 16.4

Considere o modelo $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ com $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2_\varepsilon)$, $x_i \sim exp(1/5)$ e $i = 1, \ldots, n$. Utilizar o Método de Monte Carlo para avaliar propriedades dos estimadores.

Exemplo 16.4

```
set.seed(12345)
# Fixando valores para os parametros
beta0 <- 1; beta1 <- -1; sigma2 <- 1

# Definindo o tamanho da amostra "n"
n <- 100

# Gerando um vetor de tamanho n para "x"
x <- rexp(n, rate=5)

# Gerando o erro:
erro <- rnorm(n, mean=0, sd=sqrt(sigma2))

# Calculando a resposta para o modelo especificado:
y <- beta0 + beta1*x + erro

# Ajuste do modelo:
modelo <- lm(y~x)

betas.estimados <- modelo$coefficients
sigma2.estimado <- sum(modelo$residuals^2)/modelo$df.residual

# Calculando os erros de estimacao
```

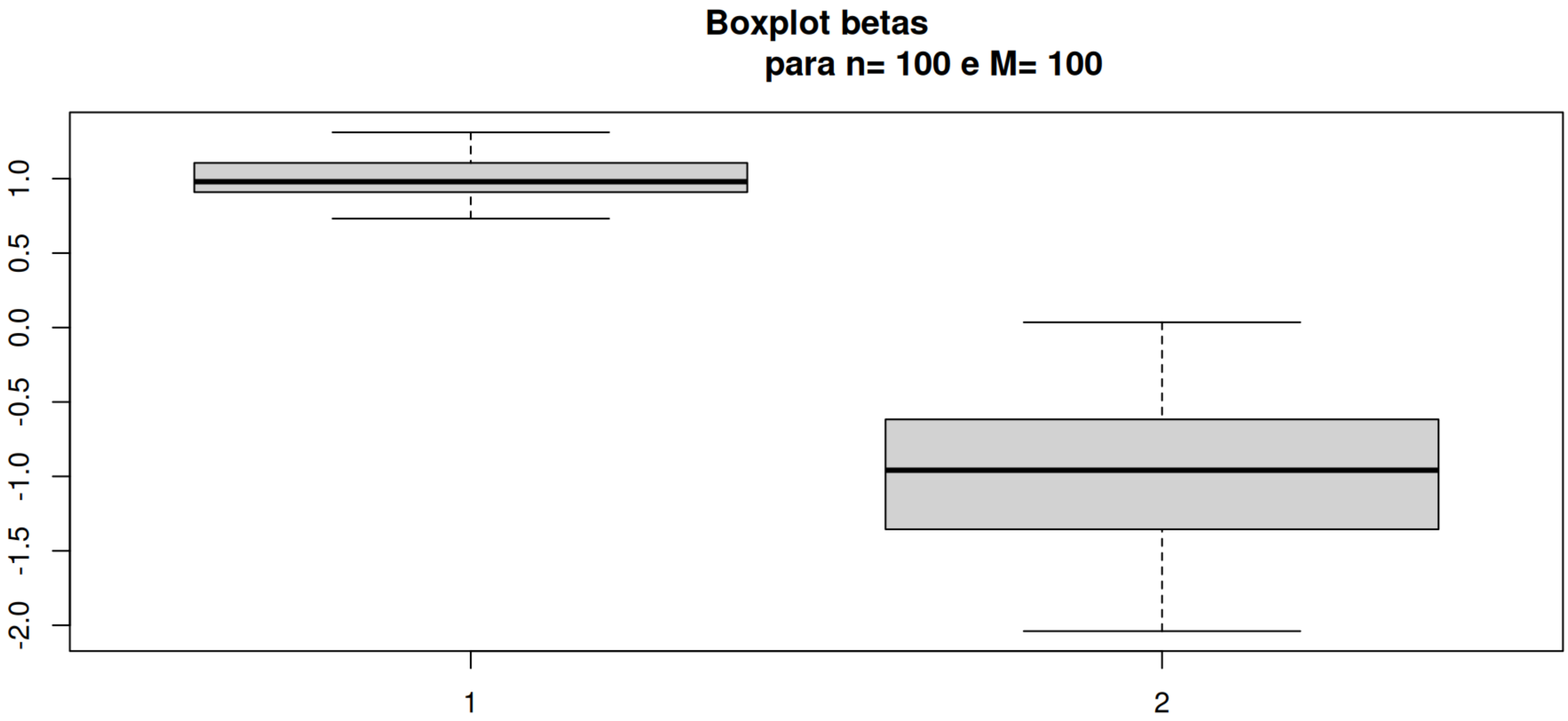
```
erro.estimacao.betas <- betas.estimados - c(beta0,beta1)
erro.estimacao.sigma2 <- sigma2.estimado - sigma2
```

Exemplo 16.4

```
# Monte Carlo
set.seed(12345)
M <- 100 # numero de réplicas de Monte Carlo

betas.estimados <- matrix(,M,2) # Estimativas betas
sigma2.estimado <- numeric(M)   # Estimativas sigma2
erro.estimacao <-matrix(,M,3)   # Erros

for(i in 1:M){
  erro <- rnorm(n, mean=0, sd=sqrt(1))
  y <- beta0 + beta1*x + erro

  modelo <- lm(y~x)

  betas.estimados[i,] <- coefficients(modelo)

  sigma2.estimado[i] <- sum(modelo$residuals^2)/
    modelo$df.residual

  erro.estimacao[i,]<-c(betas.estimados[i,],
                        sigma2.estimado[i]) - c(beta0,beta1,sigma2)
}
```

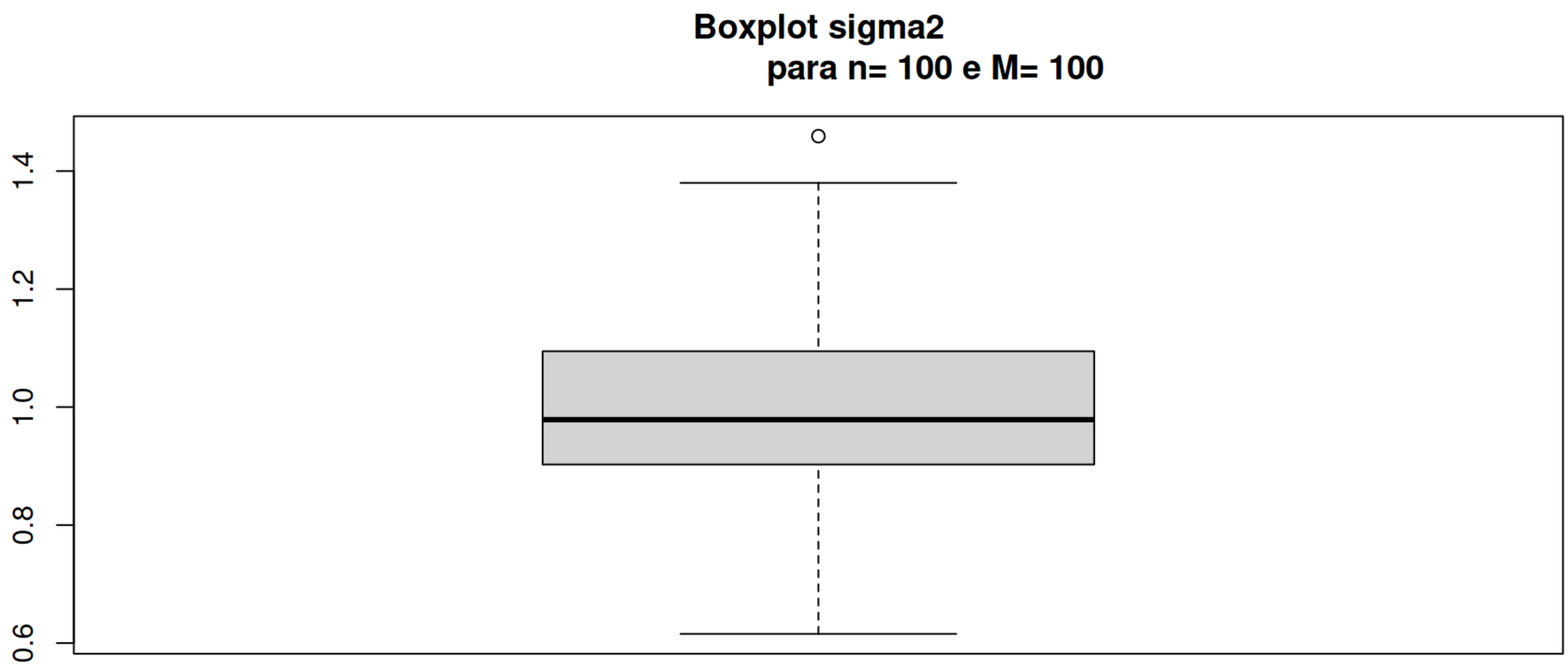
Exemplo 16.4

```r
boxplot(betas.estimados,main=paste("Boxplot betas
            para n=",n,"e M=",M))
```



Exemplo 16.4

```
boxplot(sigma2.estimado,main=paste("Boxplot sigma2
            para n=",n,"e M=",M))
```



Exemplo 16.4

```
media.estimativas <- c(colMeans(betas.estimados),
                       mean(sigma2.estimado))

vies <- round(colMeans(erro.estimacao),5)

var.estimadores <- c(round(apply(betas.estimados,2,
                                 sd),5),sd(sigma2.estimado))

eqm <- var.estimadores + vies^2

saida <- rbind(media.estimativas,eqm,vies,
               var.estimadores)
colnames(saida) = c(paste("beta0 =",beta0),
                    paste("beta1 =",beta1),
                    paste("sigma2 =",sigma2))

saida
```

```
                  beta0 = 1 beta1 = -1 sigma2 = 1
media.estimativas  0.9986581 -0.9967386  0.9959339
eqm                0.1351718  0.4735606  0.1518112
vies              -0.0013400  0.0032600 -0.0040700
var.estimadores    0.1351700  0.4735500  0.1517947
```

Ganho da aula

- Capacidade de avaliar a qualidade de estimadores
- Escolher o melhor estimador
- Validação resultados
- Aplicação em problemas complexos
- Aprimoramento das habilidades de simulação

Fim

Aula baseada no material “Métodos Computacionais Aplicados à Estatística Implementação no Software R” de Cristiano de Carvalho Santos.