שאלה 3 (25 נקודות)

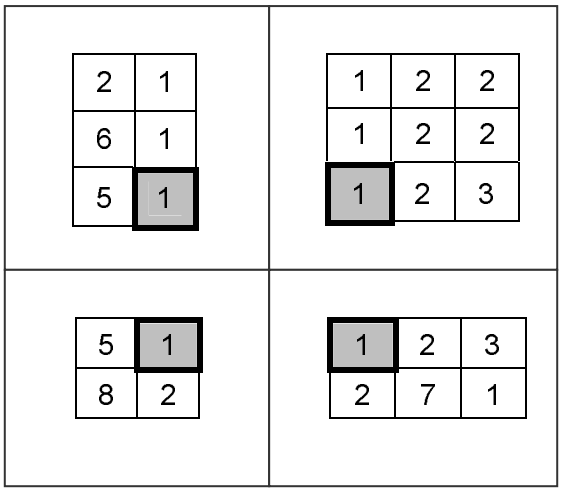
נתונה מטריצה a בגודל N על N, המכילה מספרים שלמים. לכל איבר a[i][j] במטריצה זו, נגדיר את ארבע תת המטריצות הבאות שאיבר זה מהווה פינה שלהם:

תת-מטריצה שמאלית עליונה: האיברים a[0..i][0..j]
ימנית עליונה: האיברים a[0..i][j..N-1]
שמאלית תחתונה: האיברים a[i..N-1][0..j]
ימנית תחתונה: האיברים a[i..N-1][j..N-1]

לדוגמה, עבור המטריצה הבאה (N=4),

2	1	2	2
6	1	2	2
5	1	2	3
8	2	7	1

האיבר a[2][1] (המסומן באפור) מגדיר את ארבע תת-המטריצות:



אנו נאמר כי איבר a[i][j] במטריצה **מאוזן** אם סכום האיברים בכל אחת מארבע תת המטריצות שהוא מגדיר **זהה**. למשל, בדוגמה למעלה a[2][1] מאוזן, כיוון שסכום כל אחת מארבע תת המטריצות שהוא מגדיר שווה ל-16: שימו לב שעבור תת-המטריצה השמאלית העליונה מתקיים 2+6+5+1+1+1=16, עבור תת המטריצה השמאלית התחתונה מתקיים 5+1+8+2=16, וכך הלאה.

עליכם לממש (בדף הבא) פונקציה שמקבלת מטריצה המיוצגת כמערך דו-ממדי `a[N][N]` (N מוגדר כ-#define). הפונקציה מחזירה 1 אם קיים במטריצה איבר מאוזן, ו-0 אחרת.

על הפונקציה לעבוד בסיבוכיות זמן $O(N^2)$ וסיבוכיות מקום $O(N^2)$. שימו לב: פתרונות בסיבוכיות גרועה מזו יזכו בניקוד מופחת, בהתאם לסיבוכיות הזמן של הפתרון.

```
int equal_submatrix_sum(int a[N][N]) {

  int i,j;
  int ul[N][N] = { 0 };

  init_ul_matrix(a, ul);

  for (i=0; i<N; ++i) {
    for (j=0; j<N; ++j) {

      // sums of upper-left, upper-right, lower-left and
      // lower-right sub-matrices
       int ul_sum, ur_sum, ll_sum, lr_sum;

      ul_sum = ul[i][j];
      ur_sum = ul[i][N-1] - (j>0 ? ul[i][j-1] : 0);
      ll_sum = ul[N-1][j] - (i>0 ? ul[i-1][j] : 0);
      lr_sum = ul[N-1][N-1] - (i>0 ? ul[i-1][N-1] : 0)
          - (j>0 ? ul[N-1][j-1] : 0)
          + (i>0 && j>0 ? ul[i-1][j-1] : 0);

      if ( ul_sum  == ur_sum && ur_sum == ll_sum &&
           ll_sum  == lr_sum )
        return 1;
    }
  }
  return 0;
}
```

```
void init_ul_matrix(int a[N][N], int ul[N][N])
{
  int i,j;

  for (i=0; i<N; ++i) {
    for (j=0; j<N; ++j) {
      ul[i][j] = a[i][j];

      if (i>0)
        ul[i][j] += ul[i-1][j];
      if (j>0)
        ul[i][j] += ul[i][j-1];
      if (i>0 && j>0)
        ul[i][j] -= ul[i-1][j-1];
    }
  }
}
```

הסבר: המערך `ul[]` מאותחל להכיל את הסכומים של תת-המטריצות השמאליות-עליונות:

`ul[i][j] = sum { a[0..i][0..j] }`

מערך זה ניתן לחישוב בזמן $O(N^2)$, כיוון שלכל i,j מתקיים השיוויון

`ul[i][j] = a[i][j] + ul[i-1][j] + ul[i][j-1] - ul[i-1][j-1]`

ולכן חישוב כל תא דורש מספר קבוע של פעולות.

מתוך מערך העזר `ul[]`, ניתן לחשב ביעילות לכל תא i,j ב- a את סכום ארבע תת-המטריצות שסביבו.

לדוגמה, סכום תת המטריצה השמאלית-תחתונה מתקבל באמצעות הנוסחה

`sum { a[i..N-1][0..j] } = ul[N-1][j] - ul[i-1][j]`

וכן הלאה.