מבוא למדעי מחשב מ' / ח' (234114 / 234117)

סמסטר חורף תשס"ז

פתרון מבחן מסכם מועד ב', 18 מרץ 2007

מספר סטודנט	שם משפחה	שם פרטי

משך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: אין להשתמש בכל חומר עזר בכתב, מודפס או אלקטרוני.

הנחיות והוראות:

- מלאו את הפרטים בראש דף זה.
- בדקו שיש 24 עמודים (4 שאלות) במבחן, כולל עמוד זה.
- כתבו את התשובות על טופס המבחן בלבד, במקומות המיועדים לכך. שימו לב שהמקום המיועד לתשובה אינו מעיד בהכרח על אורך התשובה הנכונה.
- העמודים הזוגיים בבחינה ריקים. ניתן להשתמש בהם כדפי טיוטה וכן לכתיבת תשובותיכם. סמנו טיוטות באופן ברור על מנת שהן לא תבדקנה.
- יש לכתוב באופן ברור, נקי ומסודר. **ניתן בהחלט להשתמש בעיפרון ומחק**, פרט לדפי השער שאותם יש למלא **בעט בלבד**.
- בכל השאלות ניתן, לבחירתכם, להוסיף הסבר מילולי קצר של הפתרון שלכם (ללא ניקוד). הסבר זה ייקרא ועשוי לעזור לכם במידה והפתרון יהיה בלתי מובן, או יכיל שגיאות רבות.
- בכל השאלות התיכנותיות הינכם רשאים להגדיר ולממש פונקציות עזר כרצונכם. לנוחיותכם, אין חשיבות לסדר מימוש הפונקציות, ובפרט ניתן לממש פונקציה לאחר הפונקציה שמשתמשת בה.
- **אין להשתמש בפונקציות ספריה או בפונקציות שמומשו בכיתה אלא אם צויין אחרת בשאלה.**

הערה: לחלק מהפתרונות המובאים כאן מצורף הסבר ו/או תיעוד. הסברים אלו הינם לצרכי הבהרה של הפתרון בלבד, ואינם חלק מן התשובה הנדרשת במבחן.

שאלה	ערך	הישג	בודק
1	25		
2	25		
3	25		
4	25		
סה"כ	100		

צוות הקורס
מרצים: סאהר אסמיר, תמיר לוי, דר' מיכאל אלעד (מרצה אחראי).
מתרגלים: איתי שרון, אנדריי קלינגר, אסנת טל, אריה מצליח, ירון יורה, נוגה טל, עידו חניאל, רג'א ג'יריס,רון בגלייטר, סשה סקולוזוב, גיל בכר, צפריר קמלו, רן רובינשטיין (מתרגל אחראי).

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נקודות)

סעיף א

נתונה תוכנית ה-C הבאה, כאשר הפרמטר N הוא קבוע #define שלם וחיובי כלשהו:

```
struct pair {
  int a;
  int b;
};


void enigma(int *p1, int *p2)
{
  *p1 *= *p2;
}


void secret(int a, int b)
{
  a--;
  b *= 2;
}


int main ()
{
  int a = N, b = 1;
  struct pair s;
  s.a = a;
  s.b = b;

  while (a > 0) {
    enigma(&b, &a);
    secret(a, s.a);
    secret(b, s.b);
    a--;
  }
  return 0;
}
```

כתבו את ערכם של המשתנים הבאים עם סיום ריצת התוכנית (כלומר כשמגיעים לשורת ה-return). ערכים אלו יש להביע במידת הצורך כפונקציה של N. שימו לב שהכוונה למספר מדויק, ולא לקירוב אסימפטוטי.

a = 0	b = N!	s.a = N	s.b = 1

הסבר:

ראשית נשים לב כי הפונקציה secret() למעשה חסרת השפעה, כיוון שהיא משנה את תוכן הפרמטרים הפנימיים שלה בלבד, ואלו מועברים by value ועם תום הפונקציה מפונים מהזיכרון.

a: משתנה זה מאותחל ל-N בתחילת התוכנית, ובכל איטרציה של הלולאה מוקטן ב-1 עד שמגיע ל-0. לכן ערכו בסיום התוכנית 0.

b: משתנה זה מאותחל ל-1 בתחילת התוכנית. בכל איטרציה של הלולאה הוא מוכפל בערך הנוכחי של המשתנה a ע"י הפונקציה enigma(), ולפיכך ערכו בתום התוכנית הינו

$N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = N!$

s.a, s.b: שדות אלו של המבנה s אינה משתנים כלל במהלך התוכנית, כיוון שלפונקציה secret() אין כל השפעה עליהם. לפיכך ערכם בסיום התוכנית שווה לערך האתחול שלהם: s.a = N, s.b = 1.

סעיף ב

בכל אחד מהסעיפים הבאים מופיעות מספר שורות קוד. לכל קטע קוד, הקיפו בעיגול את התיאור המתאים:

א. **ללא שגיאות** – הקוד יתקמפל ללא כל שגיאה וירוץ ללא תקלות.
ב. **שגיאת זמן ריצה** – הקוד יתקמפל ללא שגיאות, אולם הוא עלול לבצע שגיאה בזמן הריצה.
ג. **שגיאת קומפילציה** – הקוד לא יעבור קומפילציה.

1.
```
int *i = 0;
int  j = *i;
```

א. ללא שגיאות
ב. שגיאת זמן ריצה
ג. שגיאת קומפילציה

הסבר: גישה באמצעות האופרטור * לתוכן של מצביע ל-null.

2.
```
int a[10] = {0,1,2,3,4,5};
int *p = a;
a = p + 2;
```

א. ללא שגיאות
ב. שגיאת זמן ריצה
ג. שגיאת קומפילציה

הסבר: ניסיון לשנות את הכתובת אליה מצביע המערך a.

3.
```
int *p, *q, a, b, d;
p = &a;
q = &b;
d = (p-q);
```

א. ללא שגיאות
ב. שגיאת זמן ריצה
ג. שגיאת קומפילציה

הסבר: הפרש בין שני מצביעים מאותו הטיפוס הוא פעולה חוקית בחשבון מצביעים.

4.
```
int i=7;
&(i+3) = 10;
```

א. ללא שגיאות
ב. שגיאת זמן ריצה
ג. שגיאת קומפילציה

הסבר: הפעלת האופרטור & על ביטוי ולא על משתנה.

5.
```
char s[] = "Hello World!";
int i=0;
while (s[i++]);
s[i] = '\0';
```

א. ללא שגיאות
ב. שגיאת זמן ריצה
ג. שגיאת קומפילציה

הסבר: ניסיון לבצע כתיבה לזיכרון שלא הוקצה (אחרי סוף המערך s).

שאלה 2 (25 נקודות)

סעיף א

נתון מערך a המכיל מספרים שלמים וגדולים ממש מאפס, ממוינים בסדר עולה. עליכם לממש פונקציה המקבלת את המערך a, את גודלו n ומספר שלם חיובי ממש x, ומחזירה 1 במידה וניתן להציג את x כמכפלה של שני מספרים מ-a (שימו לב שמכפלה זו יכולה לכלול שני איברים שונים מ-a, או מכפלת איבר בעצמו). במידה ולא ניתן להציג את x כמכפלה של אברים מ-a, הפונקציה תחזיר 0.

לדוגמה, עבור המערך a[6] = {2, 2, 3, 5, 8, 9}, הקריאות two_prod(a,6,18) ו- two_prod(a,6,25) יחזירו שתיהן 1 כיוון ש-2*9=18 וכן 5*5=25. לעומת זאת, הקריאה two_prod(a,6,11) תחזיר 0 כיוון שאין זוג כלשהו של מספרים במערך שמכפלתם 11.

דרישות סיבוכיות: O(n) זמן, O(1) מקום נוסף. פתרון לא אופטימאלי יזכה בניקוד חלקי בלבד.

```
int two_prod(int a[], int n, int x) {
{
  int i=0, j=n-1;

  while (i<=j)
  {
    if (a[i]*a[j] == x)
      return 1;

    if (a[i]*a[j] < x)
      i++;
    else
      j--;
  }
  return 0;
}
```

הסבר: נחזיק שני אינדקסים למערך – שמאלי וימני. בכל איטרציה נזיז אחד מהם, בהתאם להשוואה עם הערך x: אם המכפלה של שני הערכים גדולה מ-x נקטין את האינדקס הימני, ואם המכפלה קטנה מ-x נגדיל את השמאלי. אם בתהליך זה מצאנו זוג אינדקסים כך שהמכפלה שווה בדיוק ל-x – נחזיר 1. לעומת זאת, אם האינדקס הימני עובר את השמאלי אזי בהכרח אין זוג ערכים במערך שמכפלתו שווה ל-x, ולכן נחזיר 0.

<u>סעיף ב</u>

בדומה לסעיף א', נתון מערך a המכיל מספרים שלמים וגדולים ממש מאפס, ממוינים בסדר עולה. עליכם לממש פונקציה המקבלת את המערך a, את גודלו n ומספר שלם כלשהו x, ומחזירה 1 במידה וניתן להציג את x **כהפרש** של שני איברים מ-a. גם כאן, כמו בסעיף א', ניתן בהפרש זה לחסר שני איברים שונים מ-a, או איבר מעצמו. במידה ולא ניתן להציג את x כהפרש של אברים מ-a, הפונקציה תחזיר 0.

<u>לדוגמה</u>, עבור המערך a[6] = {2, 2, 3, 5, 8, 9}, הקריאות two_diff(a,6,7) ו- two_diff(a,6,-3) יחזירו שתיהן 1 כיוון ש-7=2-9 וכן 3- =8-5. לעומת זאת, הקריאה two_diff(a,6,8) תחזיר 0 כיוון שאין זוג כלשהו של מספרים במערך שהפרשם 8.

דרישות סיבוכיות: O(n) זמן, O(1) מקום נוסף. פתרון לא אופטימאלי יזכה בניקוד חלקי בלבד.

```
int two_diff(int a[], int n, int x)
{
  int i=n-1, j=n-1;

  while (i>=0 && j>=0)
  {
    if (a[i]-a[j] == x)
      return 1;

    if (a[i]-a[j] < x)
      j--;
    else
      i--;

  }

  return 0;
}
```

הסבר: בדומה לסעיף הקודם, נחזיק שני אינדקסים למערך, אולם הפעם שניהם מאותחלים לצד ימין של המערך. בכל איטרציה נקטין אחד מהם על פי תוצאת ההשוואה עם x: אם ההפרש גדול מ-x נקטין את i, ואחרת נקטין את j. אם בתהליך זה מצאנו זוג אינדקסים שהפרשם שווה ל-x נחזיר 1, ולעומת זאת אם אחד מהם מגיע עד לתחילת המערך בלא שמצאנו זוג מתאים, נחזיר 0.

שאלה 3 (25 נקודות)

עבור שני מספרים שלמים a ו-b, כאשר b>a, נגדיר **פרמוטציה 1-חסרה** של התחום [a,b] כמערך המכיל את כל השלמים בין a ל-b, כל מספר בדיוק פעם אחת, פרט לאחד מהם שחסר מהמערך. אנו נאמר שפרמוטציה 1-חסרה היא **ממוינת** אם האיברים בה מסודרים בסדר עולה.

לדוגמה,
1. המערך {4,3,1,7,6,5} הוא פרמוטציה 1-חסרה של התחום [1,7], כיוון שהאיבר 2 חסר.
2. המערך {2,4,5,6} הוא פרמוטציה 1-חסרה ממוינת של התחום [2,6], כיוון שהאיבר 3 חסר.

סעיף א

ממשו את הפונקציה הבאה, המקבלת כקלט מערך p המכיל פרמוטציה 1-חסרה **ממוינת** של התחום [a,b], ומחזירה את הערך החסר במערך. **על מימוש הפונקציה להיות רקורסיבי**; פתרון לא רקורסיבי יזכה לניקוד חלקי בלבד.

דרישות סיבוכיות: O(log(n)) זמן, O(log(n)) מקום נוסף, כאשר n הוא אורך המערך p. שימו לב: פתרון בסיבוכיות גרועה מזו יקבל ניקוד חלקי בלבד.

```
int findsorted(int p[], int a, int b)
{
  int mid, n;

  n = b-a;
  if (n==0)
    return a;

  if (n==1) {
    if (p[0]==a)
      return b;
    else
      return a;
  }

  mid = n/2;

  if (p[mid] == a+mid)
    return findsorted(p+mid+1,a+mid+1,b);
  else
    return findsorted(p,a,a+mid);
}
```

הסבר: בכל שלב (קריאה רקורסיבית) נשווה את האיבר האמצעי במערך (p[mid]) עם הערך שהיה אמור להיות בו לו כל האיברים מ-a ועד a+mid היו במערך: אם ערכו הוא a+mid, סימן שכל האיברים הללו נמצאים ולכן ניתן להמשיך את החיפוש במחצית הימנית של המערך בלבד, ואחרת (דהיינו ערכו של p[mid] הוא a+mid+1) האיבר החסר הוא בצד שמאל של המערך, ולכן נמשיך את החיפוש שם. אנו עוצרים כשמגיעים למערך שאורכו 1 או 0, ואז קל לקבוע איזה איבר חסר.

<u>סעיף ב</u>

בסעיף זה ניתן להשתמש בפונקצית העזר הבאה:

```
int pivot(int a[], int n, int key);
```

פונקציה זו מקבלת מערך a באורך n וערך key, ומשנה את סדר אברי המערך כך שכל האברים הקטנים או שווים ל-key נמצאים בתחילת המערך, וכל האברים הגדולים ממנו נמצאים בסוף המערך. הפונקציה מחזירה את האינדקס שהחל ממנו ממוקמים האברים הגדולים מ- key במערך. דהיינו, כל האיברים שקטנים או שווים ל-key נמצאים בתאים a[0],...,a[index-1], ואילו האברים הגדולים מ-key נמצאים ב-a[index],...,a[n-1].

הפונקציה pivot() פועלת בסיבוכיות זמן O(n) וסיבוכיות מקום נוסף O(1).

ממשו את הפונקציה הבאה, המקבלת כקלט מערך p המכיל פרמוטציה 1-חסרה **כלשהי** של התחום [a,b], ומחזירה את הערך החסר במערך. **על מימוש הפונקציה להיות רקורסיבי**; פתרון לא רקורסיבי יזכה בניקוד חלקי בלבד. שימו לב ש-p איננו בהכרח ממוין בסעיף זה.

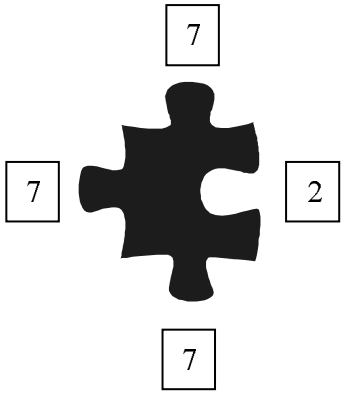
<u>דרישות סיבוכיות</u>: O(n) זמן, O(log(n)) מקום נוסף, כאשר n הוא אורך המערך p. שימו לב: פתרון בסיבוכיות גרועה מזו יקבל ניקוד חלקי בלבד.

```
int find(int p[], int a, int b)
{
  int mid, n, i;

  n = b-a;
  if (n==0)
     return a;

  if (n==1) {
     if (p[0]==a)
      return b;
    else
      return a;
  }

  mid = pivot(p, n, (a+b)/2);
  if (mid == n/2)
    return find(p,a,a+mid);
  else
    return find(p+mid,a+mid,b);
}
```

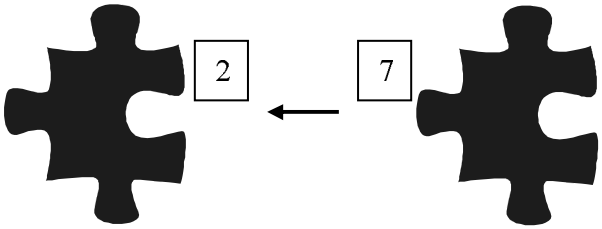
הסבר: הרעיון כאן דומה לסעיף הקודם. בכל קריאה רקורסיבית נבצע פעולת pivot לאברי המערך, כך שיהיו מסודרים סביב ערך האמצע (a+b)/2 – האיברים הקטנים יותר משמאל, והגדולים יותר מימין. כעת ניתן לקבוע באיזו מחצית של המערך נמצא הערך החסר, שהרי mid מקבל בעצם את מספר האיברים במערך שקטנים או שווים ל-(a+b)/2: אם כל האיברים בין a ל- (a+b)/2 נמצאים במערך ערכו יהיה n/2+1 = (b-a)/2+1 = (a+b)/2-a+1 ולכן נמשיך את החיפוש בצד ימין, ואחרת (אם חסר איבר כלשהו בין a ל-(a+b)/2) ערכו יהיה n/2 בלבד ולכן נמשיך את החיפוש בצד שמאל.

שאלה 4 (25 נקודות)

בשאלה זו נכתוב תוכנית שמרכיבה פאזל. אנו נניח כי הפאזל מורכב מ- N^2 חתיכות, אותן יש למקם זו לצד זו על פני לוח בגודל NxN. כל חתיכה מהפאזל היא ריבועית ובעלת 4 צלעות, ולכל צלע יש אחת מ-10 צורות חיבור, הממוספרות 0..9. לדוגמה, לחתיכת הפאזל הבאה יש צד ימני עם חיבור מסוג 2, ושלושה צדדים נוספים בעלי חיבור מסוג 7:



על מנת להרכיב את הפאזל, על חתיכות הפאזל השונות להתאים זו לזו בצורת החיבור שלהן. הכלל לחיבור הוא פשוט: חיבור מסוג X מסוגל להתחבר אך ורק לחיבור מסוג (X–9). למשל, עבור החתיכה שלמעלה, הצלע הימנית (חיבור מסוג 2) יכולה להתחבר לצלע השמאלית של חתיכה דומה (חיבור מסוג 7):



אנו נניח, לשם הפשטות, כי כל חתיכות הפאזל מסובבות מראש לכיוון הסופי שלהן בפאזל; כלומר, אין צורך לנסות ולסובב כל חתיכה כאשר מניחים אותה על הלוח. שימו לב שעל מנת למקם חתיכה על הלוח, הצלע הימנית שלה צריכה להתאים לצלע השמאלית של החתיכה שמימינה, הצלע העליונה שלה צריכה להתאים לצלע התחתונה של החתיכה שמעליה, וכן הלאה. עבור חתיכה שנמצאת בקצה הלוח, כל סוג של חיבור יכול להוות שפה של הפאזל (כלומר אין חתיכות מיוחדות שהן פינות או שפות, אלא כל חתיכה יכולה להיות בקצה הלוח).

חלקי הפאזל נתונים במערך דו-ממדי p[N*N][4], כש-N הוא קבוע המוגדר כ-#define. השורה ה-i במערך הדו-מימדי מתאימה לחתיכת הפאזל ה-i, כאשר p[i][0] מכיל את צורת החיבור של הצלע הימנית, p[i][1] את צורת החיבור של הצלע השמאלית, p[i][2] של הצלע העליונה ו-p[i][3] של הצלע התחתונה. לנוחותכם, הוגדרו הקבועים הבאים המייצגים את האינדקסים של 4 הצלעות:

```
#define RIGHT 0
#define LEFT 1
#define TOP 2
#define BOTTOM 3
```

עליכם לממש את הפונקציה solvepuzzle (בדף הבא), המקבלת כקלט את מערך חלקי הפאזל p[N*N][4], ומחזירה 1 במידה ויש פתרון חוקי לפאזל ו-0 אחרת. הפונקציה מקבלת גם מערך פלט דו-ממדי board[N][N] המייצג את הלוח. במידה ויש פתרון, יש לכתוב למערך זה את הסידור של חלקי הפאזל על הלוח – בכל תא יש לכתוב את האינדקס של חתיכת הפאזל שנמצאת בתא זה. במידה ואין פתרון, אין חשיבות לתוכן הלוח בתום הריצה. שימו לב שהמערך board אינו בהכרח מאותחל לתוכן כלשהו בעת הקריאה לפונקציה.

לנוחותכם, ניתן בפתרון להשתמש בפונקצית העזר הבאה. פונקציה זו מקבלת את הלוח board, את מערך החלקים p, אינדקסים i,j של תא בלוח ואינדקס id של אחת מחתיכות הפאזל. הפונקציה מחזירה 1 במידה וניתן למקם את חתיכת הפאזל בתא i,j, ו-0 אחרת. **שימו לב** שפונקציה זו מניחה שתאים ריקים בלוח מכילים את הערך 1-.

```
int islegal(int board[N][N], int p[N*N][4],
            int i, int j, int id)
{
  if (board[i][j] != -1)
    return 0;

  // upper piece
  if (i>0 && board[i-1][j] != -1 &&
      p[board[i-1][j]][BOTTOM] != 9-p[id][TOP])
    return 0;

  // lower piece
  if (i<N-1 && board[i+1][j] != -1 &&
      p[board[i+1][j]][TOP] != 9-p[id][BOTTOM])
    return 0;

  // left piece
  if (j>0 && board[i][j-1] != -1 &&
      p[board[i][j-1]][RIGHT] != 9-p[id][LEFT])
    return 0;

  // right piece
  if (j<N-1 && board[i][j+1] != -1 &&
      p[board[i][j+1]][LEFT] != 9-p[id][RIGHT])
    return 0;

  return 1;
}
```

```
int solvepuzzle(int board[N][N], int p[N*N][4])
{
  int i, j;
  for (i=0; i<N; ++i)
    for (j=0; j<N; ++j)
      board[i][j] = -1;

  return solvepuzzle_aux(board,p,0);
}


int solvepuzzle_aux(int board[N][N], int p[N*N][4], int id)
{
  int i, j;

  if (id==N*N)
    return 1;

  for (i=0; i<N; ++i) {
    for (j=0; j<N; ++j)
    {
      if (islegal(board,p,i,j,id))
      {
        board[i][j] = id;
        if(solvepuzzle_aux(board,p,id+1))
          return 1;
        board[i][j] = -1;
      }
    }
  }
  return 0;
}
```

הסבר: נפתור את הבעיה באמצעות backtracking. הפרמטר id בפונקצית העזר מציין את האינדקס של חתיכת הפאזל הנוכחית שאנו מנסים למקם. כעת, בכל קריאה רקורסיבית נעבור על כל האפשרויות למיקום חתיכת הפאזל הנוכחית על הלוח, ולכל מיקום חוקי נשים את החתיכה על הלוח ונבדוק רקורסיבית אם ניתן להרחיב את הפתרון שקיבלנו לפתרון מלא. במידה וכן – נחזיר 1, ואחרת (במידה ואף אפשרות למיקום החתיכה לא הצליחה) נחזיר 0. בפונקצית המעטפת אנו מאתחלים את הלוח לערכי (1-) שמציינים משבצות ריקות בלוח, ומבצעים קריאה לפונקצית העזר הרקורסיבית.