ارائه نرم‌افزاری برای محاسبه نمادین ضرائب فوریه

امیر حسین خنشان[1]

[1]دانشگاه آزاد اسلامی واحد کاشان khanshan@yahoo.com

چکیده - در این مقاله بعنوان یک کار نوین یک بسته نرم‌افزاری ارائه خواهد شد که ضرائب فوریه یک تابع را بصورت نمادین محاسبه می‌کند. منظور از واژه نمادین آن است که ضرائب نه صرفاً بصورت عددی، بلکه بر حسب نماد n ارائه می‌شوند. محاسبه ضرائب فوریه در دروسی همچون ریاضیات مهندسی پیشرفته و یا پردازش سیگنالها و سیستمها مورد توجه بوده و در بسیاری از رشته‌های مهندسی بویژه شاخه‌های مهندسی برق دارای کاربرد هستند. با توجه به آنکه در این نرم‌افزار ضرائب نه تنها بصورت عددی بلکه بصورت نمادین محاسبه می‌گردند استفاده از این نرم‌افزار از لحاظ آموزشی نیز مورد توجه ویژه است. مشکلی که در روشهای سنتی آموزش وجود دارد آن است که پیچیدگی محاسبات معمولا دانشجو را از اصل مطلب باز می‌دارد و توجه به مفهوم حقیقی مطلب در پیچ و تاب محاسبه انتگرالهای خسته کننده گم می‌شود. نرم‌افزار ارائه شده دارای امکانات جالبی است که میتواند در یادگیری سریعتر و عمیق‌تر مطالب مؤثر باشد و علاوه بر آن امکاناتی ارائه می‌دهد که ارائه الکترونیکی دروس مربوط را (چه در آموزش حضوری از طریق اسلاید و چه آموزش مجازی از طریق شبکه) میسر میسازد.

کلید واژه- ضرائب فوریه، آموزش الکترونیکی، محاسبات نمادین

۱- مقدمه

در این مقاله به ارائه و معرفی بسته FourierSeries و بررسی مشخصات و تشریح کاربردهای آن خواهیم پرداخت. این بسته نرم افزاری که بصورت یک package قابلیت اجرا در محیط Maple را داراست شامل سه دستور اساسی است.

- o دستور fs برای محاسبه ضرائب فوریه
- o دستور rept برای گسترش یک تابع بصورت متناوب
- o دستور decompose برای ساده سازی و تفکیک ضرائب.

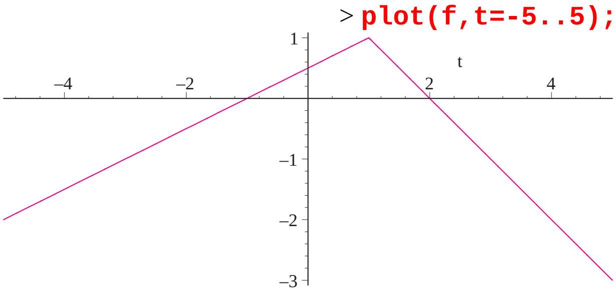
در بخشهای ذیل به توضیح ویژگیها و چگونگی کاربرد این دستورات خواهیم پرداخت و عملکرد هر یک را تا آنجا که این فضای محدود میسر می‌سازد، توسط مثالهای ساده نشان خواهیم داد. در بخش آخر بعنوان یکی از ویژگیهای این نرم‌افزار روش ساده‌ای برای نمایش اثر گیبس ارائه گردیده است. این ویژگی بهمراه متحرک سازی نحوه همگرایی می‌تواند در درک بهتر مفاهیم سری فوریه مؤثر باشد.

۲- ایجاد یک تابع متناوب

دستور rept برای ایجاد یک تابع متناوب بکار می‌رود. بفرض آنکه تابع f در بازه $a<t<b$ تعریف شده باشد، دستور `rept(f,t=a..b)` تکرار تابع f را با دوره تناوب $T=b-a$ خواهد داد.

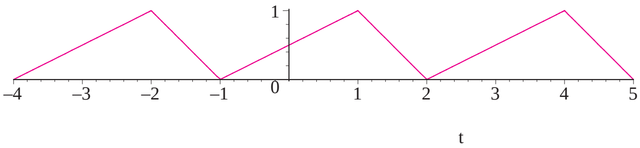
مثال- تابع نشان داده شده در شکل ۲ را میتوان ابتدا با ایجاد تابع f همانند شکل ۱ و سپس استفاده از دستور `rept(f,t=-1..2)` ایجاد کرد.

```
> f:=piecewise(t<1,t/2+1/2,t>=1,-t+2);
> plot(f,t=-5..5);
```



شکل ۱

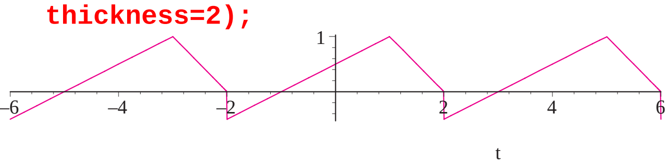
```
> plot(rept(f,t=-1..2),t=-
4..5,thickness=2,tickmarks=[10,2]);
```



شکل۲

تغییر فاصله، توابع متناوب متفاوتی ایجاد خواهد کرد بعنوان مثال

```
> plot(rept(f,t=-2..2),t=-6..6,
thickness=2);
```



شکل۳

بنابراین کافی است تابعی تعریف کنیم که در فاصله‌ای معادل یک دوره تناوب با تابع متناوب مورد نظر مساوی باشد. از تکرار آن، تابع متناوب مورد نظر بوجود خواهد آمد. بنابراین یک تابع متناوب را ممکن است بشود بروشهای گوناگون تولید کرد. بعنوان مثال شکل ۲ را میتوان توسط دستور زیر نیز ایجاد کرد.

```
> g:=piecewise(t<-1,-t-1,t/2+1/2);
> plot(rept(g,t=-2..1),t=-4..5,
thickness=2);
```

۳- محاسبه ضرائب

دستور محاسبه ضرائب سری فوریه بصورت زیر است:

```
fs(f,t=a..b,series_form,a_n)
```

این دستور تابع f را با دوره تناوب T=b-a می‌گیرد و ضرائب فوریه آنرا محاسبه می‌کند.

- گزینهٔ series_form میتواند یکی از دو گزینهٔ **trig** برای محاسبه ضرائب فوریه مثلثاتی و یا **exp** برای محاسبه ضرائب فوریه نمایی باشد.
- در حالت مثلثاتی، متغیرهای سراسری a و b بعنوان تابعی از n خروجی دستور هستند که ضرائب فوریه را در بر خواهند داشت و نمایشی از آن نیز نشان داده خواهد شد. در حالت نمایی، متغیر سراسری c داده میشود.
- در صورتی که متغیر showfs برابر true قرار داده شود، شکل کلی سری نیز نمایش داده خواهد شد.
- آخرین گزینه یک نام اختیاری است و در صورتی که وجود داشته باشد مجموع جزیی N جمله اول از سری فوریه به این نام اختصاص داده خواهد شد.

مثال ۳-۱- برای شکل ۴ ضرائب فوریه را میتوان بشکل زیر محاسبه کرد:

```
> fs(1+t,t=-1..1,trig);
```

$$a_n = \begin{cases} 2 & n=0 \\ 0 & otherwise \end{cases}, \quad b_n = \frac{2\,(-1)^{(1+n)}}{\pi\, n}$$

همچنانکه دیده می‌شود همه a_n ها بجز a_0 صفرند. این نتیجه قابل انتظار است. زیرا اگر مقدار متوسط تابع که برابر $\frac{a_0}{2}=1$ است را حذف کنیم این تابع فرد خواهد بود.

متغیرهای a و b بعنوان توابعی از n برگردانده می‌شوند:

```
> a(0);
```

$$2$$

```
> a(1);
```

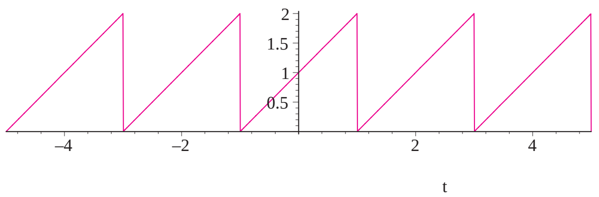
$$0$$

```
> b(3);
```

$$\frac{2}{3\,\pi}$$

نمایشی از تابع متناوب را میتوان بشکل زیر رسم کرد.

```
> plot(rept(1+t,t=-1..1),t=-
5..5,thickness=2);
```



شکل ۴

در صورتی که متغیر showfs برابر true باشد، شکل کلی سری نیز نمایش داده خواهد شد.

```
> showfs:=true:
> fs(1+t,t=-1..1,trig);
```

$$\frac{1}{2}a_0 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \sin(\pi\, n\, t) + a_n \cos(\pi\, n\, t))\right)$$

$$a_n = \begin{cases} 2 & n=0 \\ 0 & otherwise \end{cases}, \quad b_n = \frac{2\,(-1)^{(1+n)}}{\pi\, n}$$

ضرائب شکل نمایی سری فوریه بصورت زیر هستند:

```
> fs(1+t,t=-1..1,exp);
```

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, \mathrm{e}^{(\pi\, n\, t)}$$

$$c_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \dfrac{(-1)^n I}{\pi n} & otherwise \end{cases}$$

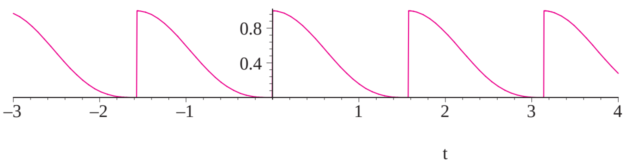
همانگونه که انتظار می‌رفت همه c_nها حقیقی‌اند مگر c_0 .

مثال۳-۲- تابع $\cos^3(t)$ در فاصله $0 < t < \frac{\pi}{2}$ با دوره تناوب $T = \frac{\pi}{2}$ مشابه شکل ۵ را در نظر بگیرید. ضرائب فوریه بصورت زیر محاسبه می‌گردند:

```
> fs(cos(t)^3,t=0..Pi/2,trig);
```

$$a_n = \frac{24}{\pi\,(256\,n^4 - 160\,n^2 + 9)},\ b_n = \frac{16\,n\,(16\,n^2 - 7)}{\pi\,(256\,n^4 - 160\,n^2 + 9)}$$

```
> plot(rept(cos(t)^3,t=0..Pi/2),t=-3..4);
```



شکل۵

۴- تفکیک ضرائب

پس از آنکه ضرائب فوریه محاسبه شدند، در صورت نیاز می‌توان دستور decompose را برای تفکیک ضرائب بکار برد. برای مثال دستور decompose(a,N) ضریب a_n را با توجه به مقدار N تفکیک میکند. N عدد صحیح مثبتی است که توسط کاربر انتخاب می‌گردد. اگر N برابر ۲ باشد، آنگاه a برای n=2k و n=2k+1 تفکیک خواهد شد. اگر N برابر ۳ باشد، a برای n=3k,n=3k+1,n=3k+2 تفکیک خواهد شد و الی آخر.

برای مثال شکل ۴ در بخش قبل را در نظر بگیرید. b را میتوان بشکل زیر تفکیک کرد:

```
> decompose(b,2);
```

$$\begin{cases} -\dfrac{2}{\pi n} & n = 2k \\ \dfrac{2}{\pi n} & n = 2k - 1 \end{cases}$$

مثال۴-۱- در مورد شکل ۲ در بخش ۲، ضرائب فوریه بصورت زیر محاسبه می‌گردند:

```
> fs(f,t=-1..2,trig);
```

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \dfrac{\frac{3}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - \cos\left(\frac{4\pi n}{3}\right)\right)}{\pi^2 n^2} & otherwise \end{cases},\ b_n = \frac{\frac{3}{2}\left(2\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - \sin\left(\frac{4\pi n}{3}\right)\right)}{\pi^2 n^2}$$

ضریب a بشکل زیر ساده می‌شود:

```
> decompose(a,3);
```

$$0$$

این نتیجه نشان می‌دهد که همه a_nها بجز a_0 معادل صفرند. تعجبی ندارد، اگر $\frac{a_0}{2}$ را از تابع فوق کم کنیم فرد خواهد شد.

همچنین ضرائب b_n بشکل زیر تفکیک می‌گردند:

```
> decompose(b,3);
```

$$\begin{cases} 0 & n = 3k \\ -\dfrac{9\sqrt{3}}{4\pi^2 n^2} & n = 3k - 1 \\ \dfrac{9\sqrt{3}}{4\pi^2 n^2} & n = 3k - 2 \end{cases}$$

در حالت نمایی ضرائب سری فوریه بشکل زیر هستند:

```
> fs(f,t=-1..2,exp):
```

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & n = 0 \\ \dfrac{3\left((-1)^{\left(1 + \frac{2n}{3}\right)} + 3\,(-1)^{\left(-\frac{2n}{3}\right)} + 2\,(-1)^{\left(1 - \frac{4n}{3}\right)}\right)}{8\pi^2 n^2} & otherwise \end{cases}$$

که بشکل زیر ساده می‌گردند:

```
> decompose(c,3):
> evalc(%);
```

$$\begin{cases} 0 & n = 3k \\ \dfrac{\frac{9}{8} I\sqrt{3}}{\pi^2 n^2} & n = 3k - 1 \\ \dfrac{\frac{-9}{8} I\sqrt{3}}{\pi^2 n^2} & n = 3k - 2 \end{cases}$$

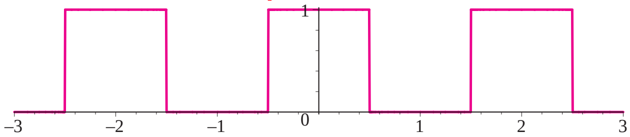
۵- همگرایی سری فوریه و نمایش پدیده گیبس

در سال ۱۸۹۸ آلبرت مایکلسون، فیزیکدان آمریکایی دستگاهی ساخت که برای هر تابع متناوب می توانست مجموع تا ۸۰ جمله اول از سری فوریه آنرا محاسبه کرده و نشان دهد. مایکلسون دستگاهش را برای توابع بسیاری آزمایش کرد و البته مجموع N جملهٔ اول از سری فوریه شباهت زیادی به خود تابع داشت و با افزایش N این شباهت بیشتر می شد. با اینحال او وقتی بسراغ موج مربعی رفت به یک نتیجه مهم برخورد کرد که برایش خیلی عجیب بود. وی در مورد این مشاهده نگران شد وگمان برد که

عیبی در دستگاهش وجود دارد. بهمین علت مسأله را برای ریاضیدان و فیزیکدان مشهور آن زمان جوزیا گیبس گزارش کرد. گیبس به تحقیق در این مورد پرداخت و نتایج کارش را در ۱۸۹۹ منتشر ساخت. آنچه را که مایکلسون مشاهده کرد در شکلهای زیر قابل مشاهده است. دستور fs امکانی را فراهم می‌کند که بواسطه آن میتوان شکلهای زیر را برای هر تابع متناوب دیگری بسادگی ایجاد کرد. چگونگی رسم مجموعات جزیی در مثال زیر نشان داده شده است.

مثال۵-۱-

```
> u:=Heaviside:
> rect:=t->u(t+1/2)-u(t-1/2):
> plot(rept(rect(t),t=-1..1),t=-3..3,thickness=2);
```



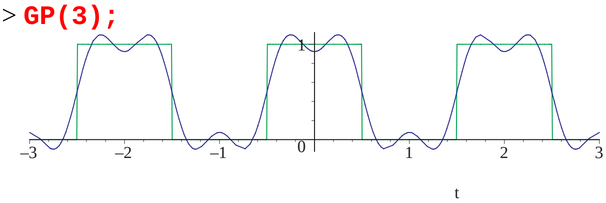

```
> fs(rect(t),t=-1..1,trig,'g'):
```

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \dfrac{2\sin\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)}{\pi n} & otherwise \end{cases}, \; b_n = 0$$

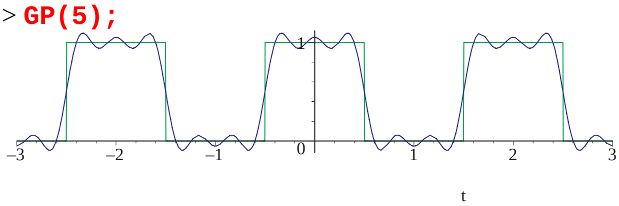
```
> GP:=N->plot([g(N),rept(rect(t),t=-1..1)],t=-3..3,color=[blue,green],numpoints=10*N):
```

دستور GP(N) ، مجموع N جمله اول سری فوریه را رسم میکند:

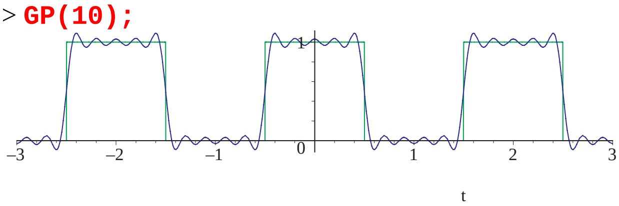
```
> GP(3);
```



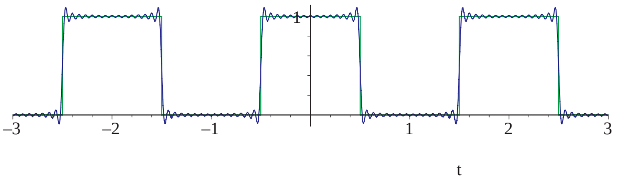

```
> GP(5);
```




```
> GP(10);
```




```
> GP(30);
```



مثال فوق به سادگی به به هر تابع متناوب دلخواه دیگری قابل تعمیم است.

۶- نتیجه گیری و پیشنهادها

بسته نرم‌افزاری ارائه شده میتواند ابزار مؤثری در محاسبه نمادین ضرائب فوریه بوده و نیز ابزار ارزشمندی برای استفاده در آموزش الکترونیکی دروس مربوط به شمار آید. بدین ترتیب مدرس محدود به استفاده از یک یا چند مثال خاص نخواهد بود و دانشجوبان نیز در آزمودن مثالهای گوناگون با گذشتن از سد محاسبات انبوه به تمرکز انرژی خود بر مفاهیم اصلی خواهند پرداخت. با توجه به سرعت روز افزون تکنولوژی و پیشرفت روشهای آموزشی نوین تکیه بر روشهای سنتی آموزش بهیچ وجه جوابگوی نیاز دانشگاهها نبوده و بتدریج منسوخ می‌گردند. در این میان استفاده از ابزارهای مناسب وظیفه اساتید و دانشجویان است و امیدواریم در کشور ما نیز مورد عنایت بیشتر قرار گیرد. این نرم‌افزار بصورت یک بسته اضافه شدنی به Maple ارائه شده است و بنابر این استفاده از تمامی امکانات Maple و هم قطاران آن همچون MapleNET (برای آموزش ریاضیات از طریق web) یا MapleTA (برای انجام آزمونهای ریاضی از طریق web) وجود خواهد داشت.

مراجع

[1] Maple applications center: www.mapleapps.com
[2] Frank Gravan, “The Maple Book”, Chapman & Hall/CRC, USA, 2002.
[3] Michael D. Alder, “An Introduction to Complex Analysis for Engineers”, 1997.
[4] M.J. Roberts, “Signals and Systems”, McGraw-Hill, 2003.
[5] A. H. Khanshan, “The FourierSeries Package for Maple”, MC 2006, Waterloo, Ontario, Canada, July 2006.
[۶] ریاضیات با Maple، جلد اول. امیر حسین خنشان. انتشارات مرسل. ۱۳۸۳.