Final Exam

آزمون پایانترم درس **آمار و احتمال مهندسی**،
بصورت **مجازی**، **یکشنبه**، **۱۲ بهمن ماه ۱۴۰۴**،
مدت زمان آزمون: ۱۰۰ دقیقه

Email: grad.saeed@gmail.com
Github: github.com/saeedgrad
مدرس: دکتر سعید غضنفری راد

برای ارسال پاسخ، علاوه بر سایت پیش فرض آزمون، از لینک زیر هم، برای ارسال پاسخ و بارگذاری فایل ها، استفاده نمایید.

https://forms.gle/im4e8dU9Sy9EAQKS9

سوال ۱ (۵ نمره)

قطعاتی از یک نوع خاص در دسته‌های ده‌تایی به یک تأمین‌کننده ارسال می‌شوند. فرض کنید ۵۰٪ از کل این دسته‌ها حاوی هیچ قطعه معیوبی نباشند، ۳۰٪ حاوی یک قطعه معیوب و ۲۰٪ حاوی دو قطعه معیوب باشند. دو قطعه از یک دسته به طور تصادفی انتخاب و آزمایش می‌شوند. احتمالات مربوط به وجود ۰، ۱ و ۲ قطعه معیوب در دسته انتخاب شده، تحت هر یک از شرایط زیر (با دانستن این اطلاعات) را بدست آورید؟

۱) هیچ‌کدام از قطعات آزمایش‌شده معیوب نیستند.

۲) یکی از دو قطعه آزمایش‌شده معیوب است. [راهنمایی: یک نمودار درختی با سه شاخه ابتدایی برای سه نوع مختلف از دسته‌ها رسم کنید.]

grad.saeed@gmail.com
github.com/saeedgrad

سوال ۲ (۵ نمره)

یک دسته بسیار بزرگ از قطعات به یک توزیع‌کننده رسیده است. این دسته را می‌توان تنها در صورتی قابل قبول دانست که نسبت قطعات معیوب حداکثر 0.10 باشد. توزیع‌کننده تصمیم می‌گیرد که به طور تصادفی 10 قطعه را انتخاب کند و این دسته را تنها در صورتی بپذیرد که تعداد قطعات معیوب در این نمونه 10 تایی، حداکثر 2 باشد.

الف. احتمال اینکه دسته پذیرفته شود چقدر است وقتی نسبت واقعی اقلام معیوب، هر یک از مقادیر زیر باشد؟ .01? .05? .10? .20? .25?

ب. فرض کنید p (حرف p کوچک) نسبت واقعی اقلام معیوب در دسته باشد. نمودار **P** ، حرف بزرگ **P**، (**P** در محور عمودی) (دسته پذیرفته شده است) به عنوان تابعی از p (که p روی محور افقی) و **P** (دسته پذیرفته شده است) روی محور عمودی قرار دارد، منحنی مشخصه عملیاتی برای طرح نمونه‌گیری پذیرش نامیده می‌شود. از نتایج قسمت (الف) برای ترسیم این منحنی برای $0 \le p \le 1$ استفاده کنید.

(**Operating characteristic curve** for the acceptance sampling plan)

github.com/saeedgrad
grad.saeed@gmail.com

سوال ۳ (۵ نمره)

فرض کنید وزن ایده ال و مورد نظر برای یک قطعه الکتریکی تولید شده، برابر 3 g (۳ گرم) است. اما وزن واقعی قطعه مورد نظر بعد از تولید دقیقا ۳ گرم نیست و با توجه به خطای موجود، وزن واقعی قطعه تولید شده، یک متغیر تصادفی پیوسته X باتابع pdf زیر می باشد:

$$f(x) = \begin{cases} k[1-(x-3)^2] & 2 \le x \le 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

۱) نمودار $f(x)$ را ترسیم نمایید.

۲) مقدار ضریب k را محاسبه نمایید.

۳) احتمال اینکه وزن واقعی بیشتر از وزن ایده ال باشد، چقدر است؟

۴) احتمال اینکه وزن واقعی کمتر از وزن ایده ال باشد، چقدر است؟

۵) احتمال اینکه وزن واقعی دقیقا برابر وزن ایده ال باشد، چقدر است؟

۶) احتمال اینکه وزن واقعی در محدوده 0.25 گرم از وزن ایده ال باشد، چقدر است؟

۷) احتمال اینکه وزن واقعی بیش از 0.5 گرم با وزن ایده ال اختلاف داشته باشد، چقدر است؟

grad.saeed@gmail.com
github.com/saeedgrad

سوال ۴ (۵ نمره)

نام و نام خانوادگی خود را به انگلیسی و در فرمت زیر درج کنید.

Last Name	First Name	S	I	E	M	A	N	Y	M

- با توجه به اینکه می توانید نام خود را به صورت های متفاوت بنویسید این توضیح ضروری است که یک کلمه از نام و یک کلمه از نام خانوادگی کافی است.
- **مهم است که نام خودتان باشد و به بقیه قسمت های این سوال، دقیقا مبتنی بر جدول نام خودتان که درج کرده اید پاسخ دهید.**
- به عنوان مثال دانشجویی که نامش، مهسا حقیقی نیک سرشت، است می تواند فقط عبارت مهسا حقیقی را در فرمت جدولی زیر درج نماید.

I	E	M	A	N	Y	M
H	A	S	H	A	M	S
I	H	G	I	H	G	A

grad.saeed@gmail.com
github.com/saeedgrad

ادامه سوال ۴ (۵ نمره)

- بنابراین، جدول مختص این دانشجو، شامل 21حرف الفبای انگلیسی است که در 8 مورد (رنگ قرمز)، حروف صدادار هستند و در مابقی، یعنی در 13 مورد، حروف بی صدا هستند.
- یادآوری: به صورت کلی در الفبای انگلیسی از 26حرف، حروف زیر، 5حرف صدادار هستند:

A, E, I, O, U

و 21حرف دیگر، بی صدا هستند.

- بعد از نوشتن نام خود مطابق توضیحات بالا و مشخص کردن تعداد کل حروف **مطابق جدول مختص نام تان** T، تعداد دفعاتی که حروف صدادار در جدول ظاهر شده V و تعداد دفعاتی که حروف بی صدا C در جدول ظاهر شده اند، به سوال های زیر پاسخ دهید.

github.com/saeedgrad
grad.saeed@gmail.com

ادامه سوال ۴ (۵ نمره)

۱) فرض کنید به تعداد کل حروف **مطابق جدول مختص نام تان**، توپ قرعه کشی در یک کیسه قرار دارد که روی هر توپ، یک حرف از جدول درج شده است.

در مثال بالا، 21 توپ قرعه کشی خواهیم داشت (T = 21) که در 8 مورد (توپ)، حروف صدادار هستند (V=8)و در مابقی توپ ها، یعنی در 13 مورد (توپ)، حروف بی صدا هستند (C=13).
در جدول مختص نام تان، این اعداد را مشخص کنید.

3 توپ بصورت تصادفی و همزمان، از کیسه انتخاب می کنیم. اگر هر 3 توپ، صدادار باشند، نتیجه آزمایش موفقیت یا S، و در غیر اینصورت نتیجه آزمایش، شکست یا F است.

احتمال موفقیت p و احتمال شکست q را محاسبه نمایید.

۲) آزمایش توضیح داده شده در قسمت ۱، را بصورت متوالی و شرایط کاملا یکسان و مستقل و برای 10 بار تکرار می کنیم. (تمام شرایط در هر تکرار، دقیقا یکی است: تعداد توپ ها، تعداد توپ های متناظر با حروف صدادار و تعداد توپ های متناظر با حروف بی صدا و سایر شرایط)

نتیجه موفقیت و شکست هم مشابه قسمت ۱ تعریف شده است.

رابطه ای برای محاسبه احتمال اینکه در حداقل ۳ تکرار، نتیجه موفقیت باشد را نوشته و مقدار دقیق احتمال را نیز با استفاده از جداول توزیع دو جمله ای Binomial ، محاسبه نمایید.

gradsaeed@gmail.com
github.com/saeedgrad

ادامه سوال ۴ (۵ نمره)

۳) آزمایش توضیح داده شده در قسمت ۱، را بصورت متوالی و شرایط کاملا یکسان و مستقل و برای 10 بار تکرار می کنیم. (تمام شرایط در هر تکرار، دقیقا یکی است: تعداد توپ ها، تعداد توپ های متناظر با حروف صدادار و تعداد توپ های متناظر با حروف بی صدا و سایر شرایط)

نتیجه موفقیت و شکست هم مشابه قسمت ۱ تعریف شده است.

رابطه ای برای محاسبه احتمال اینکه در حداکثر ۶ تکرار، نتیجه موفقیت باشد را نوشته و مقدار دقیق احتمال را نیز با استفاده از جداول توزیع دو جمله ای Binomial ، محاسبه نمایید.

۴) آزمایش توضیح داده شده در قسمت ۱، را بصورت متوالی و شرایط متفاوت و 3 بار تکرار می کنیم. (تکرار آزمایش برای 3 بار و بدون جایگذاری توپ های انتخاب شده)

و با این تفاوت مهم که در هر تکرار آزمایش، فقط یک توپ بصورت تصادفی انتخاب می شود. نتیجه موفقیت است اگر توپ انتخاب شده متناظر با یکی از حروف صدادار باشد و در غیر اینصورت نتیجه شکست است.

با مثال عددی و نوشتن و محاسبه دقیق احتمالات (انتخابی مبتنی بر استدلال خودتان) برای موارد خاص، مطابق بحث های مهم مطرح شده در کلاس (مربوط به مثال قرعه کشی و اهدای جوایز به افراد شاغل و غیر شاغل ...)، اثبات نمایید که تکرارهای این آزمایش مستقل از هم نیستند.

github.com/saeedgrad
saeed.grad@gmail.com

ادامه سوال ۴ (۵ نمره)

۵) آزمایش توضیح داده شده در قسمت ۱، را بصورت متوالی و شرایط متفاوت و 3 بار تکرار می کنیم. (تکرار آزمایش برای 3 بار و بدون جایگذاری توپ های انتخاب شده)

و با این تفاوت مهم که در هر تکرار آزمایش، فقط یک توپ بصورت تصادفی انتخاب می شود. نتیجه موفقیت است اگر توپ انتخاب شده متناظر با یکی از حروف صدادار باشد و در غیر اینصورت نتیجه شکست است.

با نوشتن روابط و محاسبه دقیق احتمال (بدون تقریب یا فرض)، مقدار دقیق احتمال اینکه حداقل در 2 تکرار، نتیجه موفقیت باشد را محاسبه نمایید.

github.com/saeedgrad
grad.saeed@gmail.com