روش های عددی درالکترومغناطیس

مدرس: سید محمد مهدی میرطلائی

1

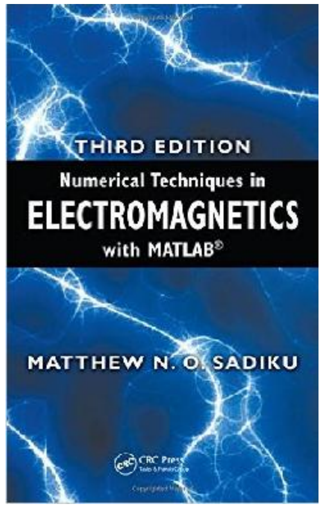
سر فصل درس

- مقدمه
- روش تفاضل محدود (FDM)
- روش اجزای محدود (FEM)
- روش ممان (MOM)

2

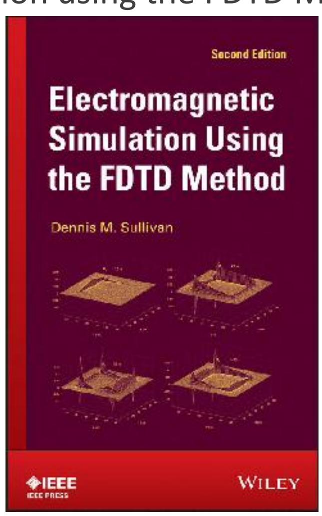
مراجع

1. Numerical Techniques in Electromagnetics - Sadiku



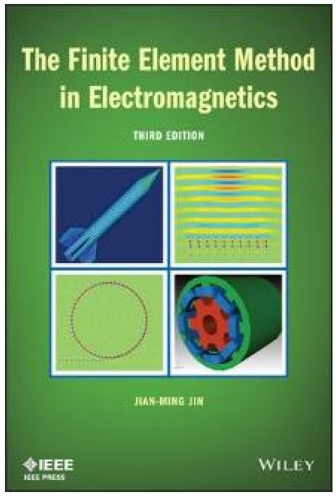
مراجع

2. Electromagnetic Simulation using the FDTD Method – Sullivan



مراجع

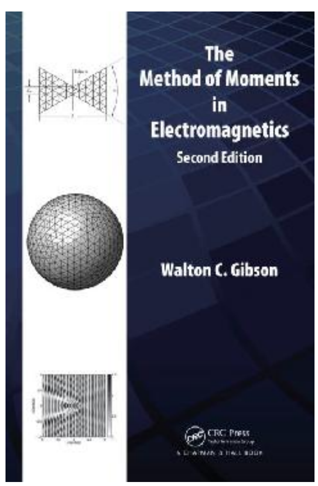
3. The Finite Element Method in Electromagnetics- Jian-Ming Jin



5

مراجع

4. The Method of Moments in Electromagnetics, Walton C. Gibson



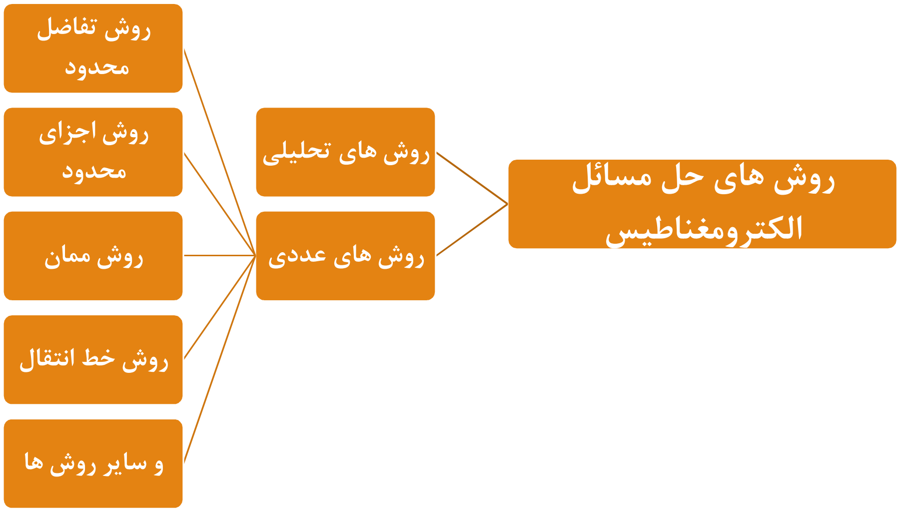
6

ارزشیابی

- امتحان میان ترم: ۶ نمره
- امتحان پایان ترم: ۱۰ نمره
- تکالیف و شبیه سازی: ۴ نمره

فصل اول: مقدمه

مقدمه



مروری بر تئوری الکترومغناطیس

۱- میدان های الکترواستاتیک:

❖ قانون گوس:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int \rho_v \, dv$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$\mathbf{D}$ = the electric flux density (in coulombs/meter^2)
ρ_v = the volume charge density (in coulombs/meter^3)
$\mathbf{E}$ = the electric field intensity (in volts/meter)

مروری بر تئوری الکترومغناطیس

❖ بیان معادلات به فرم مشتق

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

❖ رابطه بین چگالی شار الکتریکی و شدت میدان الکتریکی

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

❖ تعریف پتانسیل الکتریکی

$$V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \qquad \mathbf{E} = -\nabla V \qquad \nabla \cdot \epsilon \nabla V = -\rho_v$$

11

مروری بر تئوری الکترومغناطیس

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \xrightarrow[\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}]{\mathbf{E} = -\nabla V} \nabla \cdot \epsilon \nabla V = -\rho_v \xrightarrow{\text{if } \epsilon \text{ is constant}} \nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

معادله پواسون

$$\text{When } \rho_v = 0 \longrightarrow \nabla^2 V = 0$$

معادله لاپلاس

12

مروری بر تئوری الکترومغناطیس

۲- میدان های مگنتواستاتیک:

قانون آمپر:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_e \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$\mathbf{H}$ = the magnetic field intensity (in amperes/meter)
$\mathbf{J}_e$ = the electric current density (in amperes/meter^2)
$\mathbf{B}$ = the magnetic flux density (in tesla or webers/meter^2)

13

مروری بر تئوری الکترومغناطیس

- بیان معادلات به فرم مشتق

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_e$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- رابطه بین چگالی شار مغناطیسی و شدت میدان مغناطیسی

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

- رابطه بین شدت میدان الکتریکی و چگاهلی جریان الکتریکی

$$\mathbf{J}_e = \sigma \mathbf{E}$$

14

مروری بر تئوری الکترومغناطیس

❖بیان چگالی شار بر حسب پتانسیل مغناطیسی برداری:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\left.\begin{aligned} &\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_e \\ &\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ &\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \\ &\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_e$$

معادله پواسون

معادله لاپلاس

$$\text{When } \mathbf{J}_e = 0 \longrightarrow \nabla^2 \mathbf{A} = 0$$

مروری بر تئوری الکترومغناطیس

۳- میدان های متغیر با زمان

فرم مشتقی معادلات

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{J}_m$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho_v dv$$
$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$
$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{J}_m\right) \cdot d\mathbf{S}$$
$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) \cdot d\mathbf{S}$$

فرم انتگرالی معادلات

$\mathbf{J}_m = \sigma^* \mathbf{H}$ is the magnetic conductive current density (in volts/square meter)

σ^* = the magnetic resistivity (in ohms/meter)

مروری بر تئوری الکترومغناطیس

❖ **اثر محیط بر کمیت ها**

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$
$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$
$$\mathbf{J}_e = \sigma \mathbf{E}$$
$$\mathbf{J}_m = \sigma^* \mathbf{M}$$

❖ **قانون نیروی لورنتس**

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

❖**ارتباط چگالی جریان و تغییرات بار:**

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

17

مروری بر تئوری الکترومغناطیس

۴- شرایط مرزی:

محیطی که موج در آن قرار دارد میتواند ویژگی های زیر را داشته باشد:

❖اگر σ, ϵ, and μ مستقل از $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ باشند، **محیط خطی** است در غیر این صورت محیط غیر خطی است.

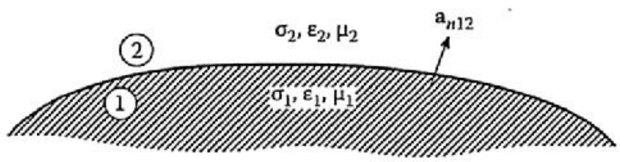
❖ اگر σ, ϵ, and μ مستقل از متغیرهای مکانی باشد **همگن** در غیر این صورت نا همگن است.

❖ اگر σ, ϵ, and μ مستقل از جهت باشد محیط **ایزوتروپیک** و در غیر این صورت غیر ایزوتروپیک است

18

مروری بر تئوری الکترومغناطیس

شرایط در مرز دو ماده:



$$E_{1t} = E_{2t} \quad \text{or} \quad (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{a}_{n12} = 0$$
$$H_{1t} - H_{2t} = K \quad \text{or} \quad (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{a}_{n12} = \mathbf{K}$$
$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_S \quad \text{or} \quad (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{a}_{n12} = \rho_S$$
$$B_{1n} - B_{2n} = 0 \quad \text{or} \quad (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{a}_{n12} = 0$$

where $\mathbf{a}_{n12}$ is a unit normal vector directed from medium 1 to medium 2.

surface current density $\mathbf{K}$

surface charge density ρ_s

مروری بر تئوری الکترومغناطیس

۵- معادله موج(معادلات ماکسول متغیر با زمان):

در معادلات ماکسول میدان های الکتریکی و مغناطیسی با یکدیگر کوپل شده اند. میتوان با تبدیل به معادلات موج این کوپلینگ را حذف نمود.

با فرض اینکه محیط خطی، ایزوتروپیک، همگن و فاقد منبع باشد:

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{H}) \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{F} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{Since } \rho_v = 0,\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \Longrightarrow \nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

معادله هلمهولتز

مروری بر تئوری الکترومغناطیس

به طور مشابه معادله هلمهولتز برای میدان مغناطیسی به صورت زیر است:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

معادلات هلمهولتز معادله حرکت موج در یک محیط را نشان می دهد. سرعت انتشار این موج به صورت زیر است:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

where $u = c \approx 3 \times 10^8\ m/s$ in free space

مروری بر تئوری الکترومغناطیس

معادلات هلمهولتز به فرم برداری هستند که در مجموع شامل شش مولفه اسکالر زیر میباشند:

E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, and H_z

هر کدام از این مولفه ها به صورت زیر در معادله هلمهولتز صدق میکند:

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

مروری بر تئوری الکترومغناطیس

۶- پتانسیل های متغیر با زمان:

برای پتانسیل های الکتریکی و مغناطیسی میتوان نشان داد:

$$\mathbf{A} = \int \frac{\mu[\mathbf{J}]\,dv}{4\pi R}$$

$$V = \int \frac{[\rho_v]\,dv}{4\pi \epsilon R}$$

where R is the distance

فرم انتگرالی

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 V - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

فرم مشتقی

where R is the distance from the source point to the field point

دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

مسائل الکترومغناطیس بر اساس یکی ویژگی های زیر دسته بندی میشوند:

۱- ناحیه ای که مسئله در آن حل میشود.

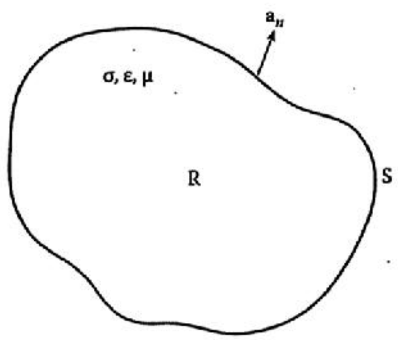
۲- نوع معادله توصیف کننده مسئله

۳- شرایط مرزی اختصاص یافته به مسئله

دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

۱- دسته بندی بر اساس نواحی حل مسئله:

- **نواحی با مرز محدود**



- **نواحی با مرز نا محدود**

دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

۲- دسته بندی بر اساس نوع معادله توصیف کننده مسئله:

- معادله دیفرانسیل
- معادله انتگرال
- ترکیب معادله دیفرانسیل و انتگرال

در حالت کلی:

$$L\Phi = g$$

where L is an operator (differential, integral, or integro-differential)
g is the known excitation or source
Φ is the unknown function to be determined

دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

مثال: معادله پواسن الکتریکی

$$-\nabla^2 V = \frac{\rho_v}{\epsilon}$$

در این مثال:

$L = -\nabla^2$

$g = \rho_v/\epsilon$

$\Phi = V$

برای حل اغلب مسائل از فرم مشتق استفاده میکنیم.

دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

در حالت کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به صورت زیر است:

$$a\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + d\frac{\partial\Phi}{\partial x} + e\frac{\partial\Phi}{\partial y} + f\Phi = g$$

که به صورت ساده زیر میتوان نشان داد:

$$a\Phi_{xx} + b\Phi_{xy} + c\Phi_{yy} + d\Phi_x + e\Phi_y + f\Phi = g$$

در این رابطه:

$$L = a\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2}{\partial y^2} + d\frac{\partial}{\partial x} + e\frac{\partial}{\partial y} + f$$

دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

هر معادله مشتق جزئی مرتبه دوم خطی سه حالت زیر را دارد:

- بیضوی
- هذلولی
- سهموی

$$\begin{aligned} \text{elliptic if} \quad & b^2-4ac<0 \\ \text{hyperbolic if} \quad & b^2-4ac>0 \\ \text{parabolic if} \quad & b^2-4ac=0 \end{aligned}$$

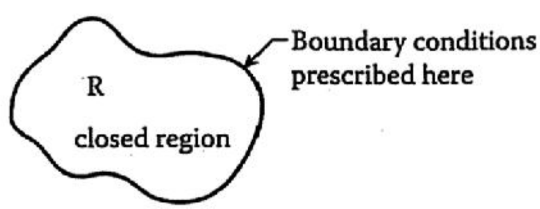
دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

معادله مشتق جزئی مرتبه دوم بیضوی

این معادله معمولا در شرایط حالت دائم بر قرار است مانند معادله لاپلاس و پواسن

Laplace's equation $$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0$$

Poisson's equation $$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=g(x,y)$$



$$a=c=1, b=0$$

معمولا این معادلات در ناحیه با مرز محدود تعریف میشود.

دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

معادله مشتق جزئی مرتبه دوم هذلولی

این معادله معمولا در مسائل انتشار امواج ظاهر میشود:

مثال: معادله موج یک بعدی

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

$$a = u^2, b = 0, c = -1$$

معمولا این معادلات در ناحیه باز بر اساس شرایط اولیه حل میشوند و شرایط مرزی تعیین شده ای را ارضا میکنند.

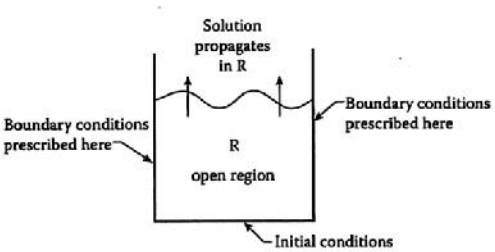
دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

معادله مشتق جزئی مرتبه دوم سهموی

این معادله در مسائل حرارتی ظاهر میشود:

مثال: معادله انتقال حرارت:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = k\frac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad a = 1, b = 0 = c$$



(b)

این معادلات مانند معادلات هذلولی

در فضای باز حل میشوند:

دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

جمع بندی

Table 1.1 Classification of Partial Differential Equations

Type	Sign of $b^2 - 4ac$	Example	Solution Region
Elliptic	$-$	Laplace's equation: $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0$	Closed
Hyperbolic	$+$	Wave equation: $u^2\Phi_{xx} = \Phi_{tt}$	Open
Parabolic	0	Diffusion equation: $\Phi_{xx} = k\Phi_t$	Open

دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

۳- دسته بندی بر اساس شرایط مرزی

پاسخ معادله دیفرانسل نه تنها باید در خود معادله صدق کند بلکه باید شرایط مرزی ناحیه حل را ارضا کند.

سه نوع شرایط مرزی متداول وجود دارد:

۱- شرط مرزی دیریکله

۲- شرط مرزی نیومن

۳- شرط مرزی ترکیبی

دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

۱- شرط مرزی دیریکله:

$$\Phi(\mathbf{r}) = 0, \qquad \mathbf{r} \quad \text{on S}$$

۲- شرط مرزی نیومن:

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial n} = 0, \qquad \mathbf{r} \quad \text{on S,}$$

the normal derivative of Φ vanishes on S.

دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

۳- شرایط مرزی ترکیبی:

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial n} + h(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) = 0, \qquad \mathbf{r} \quad \text{on S,}$$

where $h(\mathbf{r})$ is a known function

$\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ is the directional derivative of Φ along the outward normal to the boundary S

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \nabla \Phi \cdot \mathbf{a}_n$$

where $\mathbf{a}_n$ is a unit normal directed out of R

دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

نکته ۱: شرط مرزی نیومن حالت خاص شرط مرزی ترکیبی است زمانی که:

$$h(\mathbf{r}) = 0$$

نکته ۲- شروط فوق را اصطلاحا همگن میگویند زیرا سمت راست تساوی صفر است. در حالت ناهمگن به صورت زیر تعریف میشوند:

$$\Phi(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{r} \quad \text{on S}$$

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial n} = q(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \ \text{ on } \ \mathbf{S}$$

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial n} + h(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) = w(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \ \text{ on } \ \mathbf{S}$$

where $p(\mathbf{r}), q(\mathbf{r})$, and $w(\mathbf{r})$ are explicitly known functions on the boundary $\mathbf{S}$.

دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

مثال:

$\Phi(0) = 1$ is an inhomogeneous Dirichlet boundary conditior

$\Phi'(1) = 2$ inhomogeneous Neumann boundary conditions

مثال در الکترواستاتیک:

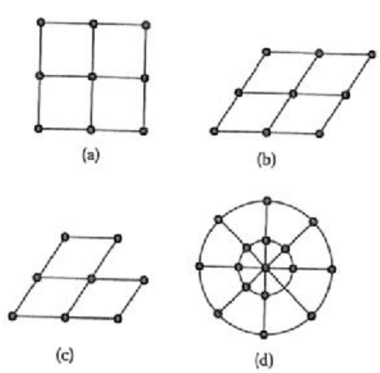
if the value of electric potential is specified on $\mathbf{S}$. ⟹ Dirichlet boundary condition

if the surface charge ($\rho_s = D_n = \epsilon \frac{\partial V}{\partial n}$) is specified ⟹ Neumann boundary conditions

فصل دوم: روش تفاضل محدود

مقدمه

- این روش اولین بار در سال ۱۹۲۰ برای حل مسائل هیدرودینامیک معرفی گردید.
- این روش حل از سه گام تشکیل شده است:
  - تقسیم ناحیه حل به شبکه ای از نقاط

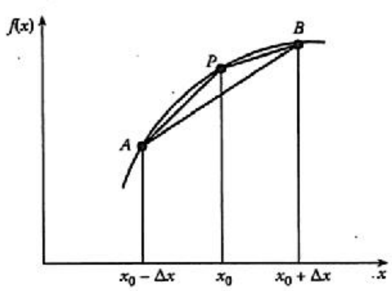


❖ تقریب معادلات دیفرانسیل با معادلات تفاضلی

❖حل معادلات تفاضلی با استفاده از شرایط اولیه و شرایط مرزی

الگوهای تفاضل محدود

تعریف مشتق مرتبه اول:



forward-difference formula
$$\boxed{f'(x_o) \simeq \frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x}}$$

backward-difference formula
$$\boxed{f'(x_o) \simeq \frac{f(x_o)-f(x_o-\Delta x)}{\Delta x}}$$

central-difference formula
$$\boxed{f'(x_o) \simeq \frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o-\Delta x)}{2\Delta x}}$$

الگوهای تفاضل محدود

تعریف مشتق مرتبه دوم:

$$f''(x_o) \simeq \frac{f'(x_o+\Delta x/2)-f'(x_o-\Delta x/2)}{\Delta x}$$
$$= \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x}-\frac{f(x_o)-f(x_o-\Delta x)}{\Delta x}\right]$$

$$f''(x_o) \simeq \frac{f(x_o+\Delta x)-2f(x_o)+f(x_o-\Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

الگوهای تفاضل محدود

محاسبه مشتق بر اساس بسط سری تیلور

$$f(x_o+\Delta x) = f(x_o)+\Delta x f'(x_o)+\frac{1}{2!}(\Delta x)^2 f''(x_o)+\frac{1}{3!}(\Delta x)^3 f'''(x_o)+\cdots$$

$$f(x_o-\Delta x) = f(x_o)-\Delta x f'(x_o)+\frac{1}{2!}(\Delta x)^2 f''(x_o)-\frac{1}{3!}(\Delta x)^3 f'''(x_o)+\cdots$$

$$f(x_o+\Delta x)+f(x_o-\Delta x) = 2f(x_o)+(\Delta x)^2 f''(x_o)+O(\Delta x)^4$$

$O(\Delta x)^4$ is the error introduced by truncating the series.

الگوهای تفاضل محدود

فورمول محاسبه مشتق مرتبه دوم با خطای از مرتبه ۴

$$f''(x_o) \simeq \frac{f(x_o+\Delta x)-2f(x_o)+f(x_o-\Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

فورمول محاسبه مشتق مرتبه اول با خطای از مرتبه ۳

$$f'(x_o) \simeq \frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o-\Delta x)}{2\Delta x}$$

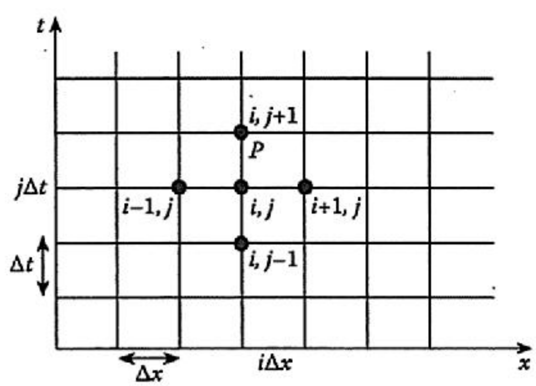
الگوهای تفاضل محدود

مثال: اعمال روش تفاضل محدود به یک تابع $\Phi(x,t)$

$$x = i\,\Delta x, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$
$$t = j\,\Delta t, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\Phi_P = \Phi(i\,\Delta x, j\,\Delta t) = \Phi(i, j)$$

$$\Phi_x|_{i,j} \simeq \frac{\Phi(i+1,j)-\Phi(i-1,j)}{2\Delta x},$$
$$\Phi_t|_{i,j} \simeq \frac{\Phi(i,j+1)-\Phi(i,j-1)}{2\Delta t},$$
$$\Phi_{xx}|_{i,j} \simeq \frac{\Phi(i+1,j)-2\Phi(i,j)+\Phi(i-1,j)}{(\Delta x)^2},$$
$$\Phi_{tt}|_{i,j} \simeq \frac{\Phi(i,j+1)-2\Phi(i,j)+\Phi(i,j-1)}{(\Delta t)^2}$$



الگوهای تفاضل محدود

Derivative	Finite Difference Approximation	Type	Error
Φ_x	$\frac{\Phi_{i+1}-\Phi_i}{\Delta x}$	FD	$O(\Delta x)$
	$\frac{\Phi_i-\Phi_{i-1}}{\Delta x}$	BD	$O(\Delta x)$
	$\frac{\Phi_{i+1}-\Phi_{i-1}}{2\Delta x}$	CD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{-\Phi_{i+2}+4\Phi_{i+1}-3\Phi_i}{2\Delta x}$	FD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{3\Phi_i-4\Phi_{i-1}+\Phi_{i-2}}{2\Delta x}$	BD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{-\Phi_{i+2}+8\Phi_{i+1}-8\Phi_{i-1}+\Phi_{i-2}}{12\Delta x}$	CD	$O(\Delta x)^4$
Φ_{xx}	$\frac{\Phi_{i+2}-2\Phi_{i+1}+\Phi_i}{(\Delta x)^2}$	FD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{\Phi_i-2\Phi_{i-1}+\Phi_{i-2}}{(\Delta x)^2}$	BD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{\Phi_{i+1}-2\Phi_i+\Phi_{i-1}}{(\Delta x)^2}$	CD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{-\Phi_{i+2}+16\Phi_{i+1}-30\Phi_i+16\Phi_{i-1}-\Phi_{i-2}}{12(\Delta x)^2}$	CD	$O(\Delta x)^4$

where FD = Forward Difference, BD = Backward Difference, and CD = Central Difference.

اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل سهموی

معادله انتقال حرارت:

$$k\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$$

where k is a constant.

معادل تفاضل محدود این معادله:

$$k\frac{\Phi(i,j+1)-\Phi(i,j)}{\Delta t}=\frac{\Phi(i+1,j)-2\Phi(i,j)+\Phi(i-1,j)}{(\Delta x)^2}$$

where $x=i\Delta x, i=0,1,2,\ldots,n, t=j\Delta t, j=0,1,2,\ldots$

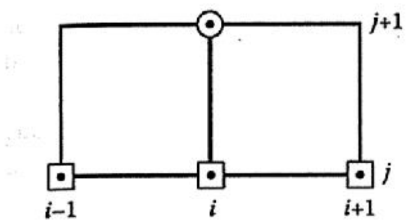
اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل سهموی

با فرض:

$$r = \frac{\Delta t}{k(\Delta x)^2}$$

$$\boxed{\Phi(i, j+1) = r\Phi(i+1, j) + (1-2r)\Phi(i, j) + r\Phi(i-1, j)}$$

با استفاده از این رابطه صریح مقدار متغیر Φ در لحظه $t = \Delta t$ بر اساس مقادیر اولیه مشخص میشود. بر این اساس سلول محاسباتی به صورت شکل زیر خواهد بود:



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل سهموی

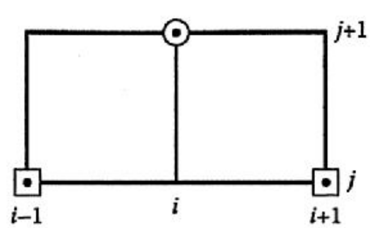
میتوان نشان داد که به منظور حفظ پایداری معادله فوق مقدار متغیر r باید در شرط زیر صدق کند:

$$0 < r \leq 1/2$$

با انتخاب r=0.5 معادله به صورت زیر تبدیل میشود:

$$\Phi(i, j+1) = \frac{1}{2}[\Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j)]$$

در نتیجه سلول محاسباتی به صورت زیر تبدیل میشود:



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل سهموی

عیب روش فوق محدود پایداری در مقدار محدود r میباشد.

برای حل این مشکل میتوان معادله فوق را به صورت ضمنی زیر تغییر داد(استفاده از میانگین مشتق مرتبه دوم در نقطه j و j+1):

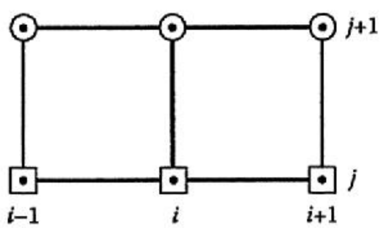
$$k\frac{\Phi(i,j+1)-\Phi(i,j)}{\Delta t}=\frac{1}{2}\left[\frac{\Phi(i+1,j)-2\Phi(i,j)+\Phi(i-1,j)}{(\Delta x)^2}+\frac{\Phi(i+1,j+1)-2\Phi(i,j+1)+\Phi(i-1,j+1)}{(\Delta x)^2}\right]$$

با قرار دادن مقدار r :

$$-r\Phi(i-1,j+1)+2(1+r)\Phi(i,j+1)-r\Phi(i+1,j+1)=r\Phi(i-1,j)+2(1-r)\Phi(i,j)+r\Phi(i+1,j)$$

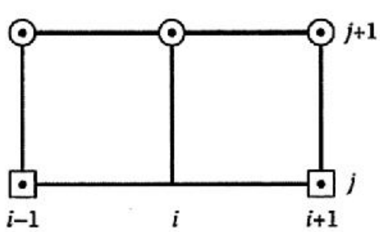
اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل سهموی

سلول محاسباتی در این حالت:



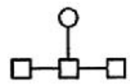
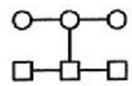
در این روش ناحیه تغییرات r از لحاظ پایداری کلیه اعداد مثبت است. اگر به طور خاص r=1 انتخاب شود:

$$-\Phi(i-1,j+1)+4\Phi(i,j+1)-\Phi(i+1,j+1)=\Phi(i-1,j)+\Phi(i+1,j)$$

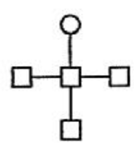
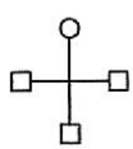


اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل سهموی

روش های پیاده سازی معادلات تفاضل محدود

Method	Algorithm	Molecule
1. First order (Euler)	$$\frac{\Phi_i^{j+1}-\Phi_i^j}{\Delta t}=\frac{\Phi_{i+1}^j-2\Phi_i^j+\Phi_{i-1}^j}{k(\Delta x)^2}$$ explicit, stable for $r=\Delta t\,/\,k(\Delta x)^2 \le 0.5$	
2. Crank–Nicholson	$$\frac{\Phi_i^{j+1}-\Phi_i^j}{\Delta t}=\frac{\Phi_{i+1}^{j+1}-2\Phi_i^{j+1}+\Phi_{i-1}^{j+1}}{2k(\Delta x)^2}+\frac{\Phi_{i+1}^j-2\Phi_i^j+\Phi_{i-1}^j}{2k(\Delta x)^2}$$ implicit, always stable	

اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل سهموی

Method	Algorithm	Molecule
	implicit, always stable	
3. Leapfrog	$$\frac{\Phi_i^{j+1}-\Phi_i^{j-1}}{2\Delta t}=\frac{\Phi_{i+1}^j-2\Phi_i^j+\Phi_{i-1}^j}{k(\Delta x)^2}$$ explicit, always unstable	
4. Dufort–Frankel	$$\frac{\Phi_i^{j+1}-\Phi_i^{j-1}}{2\Delta t}=\frac{\Phi_{i+1}^j-\Phi_i^{j+1}-\Phi_i^{j-1}+\Phi_{i-1}^j}{k(\Delta x)^2}$$ explicit, unconditionally stable	

اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل سهموی

مثال: حل معادله حرارت

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \qquad 0 \le x \le 1$$

شرایط اولیه

$$\Phi(x,0) = 100$$

شرایط مرزی

$$\Phi(0,t) = 0 = \Phi(1,t) = 0, \qquad t > 0$$

توصیف فیزیکی مسئله: محاسبه توزیع دمایی در یک میله به طول یک متر که ابتدا به اندازه ۱۰۰ درجه گرم شده و در لحظه صفر دو انتهای آن داخل یخ صفر درجه قرار میگیرد.

اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل سهموی

حالت اول: حل به روش مستقیم

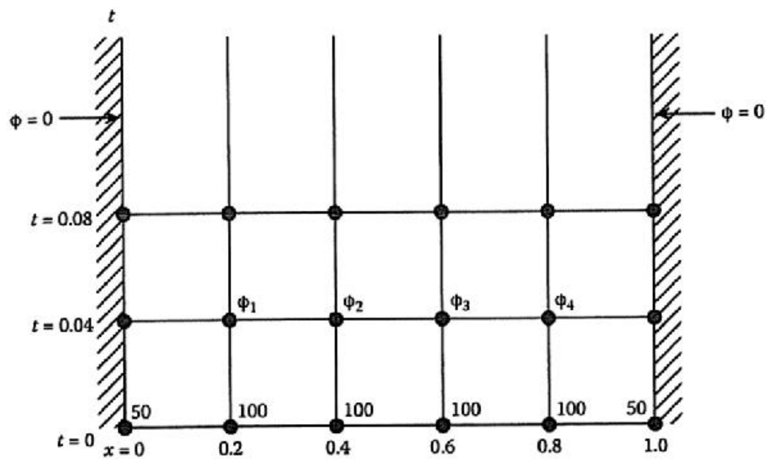
$$\Delta x = 0.1, r = 1/2 \longrightarrow \Delta t = kr(\Delta x)^2 = 0.005$$

x / t	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	…	1.0
0	50	100	100	100	100	100	100		50
0.005	0	75.0	100	100	100	100	100		0
0.01	0	50	87.5	100	100	100	100		0
0.015	0	43.75	75	93.75	100	100	100		0
0.02	0	37.5	68.75	87.5	96.87	100	96.87		0
0.025	0	34.37	62.5	82.81	93.75	96.87	93.75		0
0.03	0	31.25	58.59	78.21	89.84	93.75	89.84		0
⋮									
0.1	0	14.66	27.92	38.39	45.18	47.44	45.18		0

اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل سهموی

حالت دوم: حل به روش غیر مستقیم

$\Delta x = 0.2, r = 1 \longrightarrow \Delta t = 0.04$



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل سهموی

$t = 0.04.$

$$
\begin{aligned}
-0 + 4\Phi_1 - \Phi_2 &= 50 + 100 \\
-\Phi_1 + 4\Phi_2 + \Phi_3 &= 100 + 100 \\
-\Phi_2 + 4\Phi_3 - \Phi_4 &= 100 + 100 \\
-\Phi_3 + 4\Phi_4 - 0 &= 100 + 50
\end{aligned}
$$

با حل این معادلات:

$\Phi_1 = 58.13, \quad \Phi_2 = 82.54, \quad \Phi_3 = 72, \quad \Phi_4 = 55.5$

اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل سهموی

$t = 0.08$

$$-0 + 4\Phi_1 - \Phi_2 = 0 + 82.54$$
$$-\Phi_1 + 4\Phi_2 - \Phi_3 = 58.13 + 72$$
$$-\Phi_2 + 4\Phi_3 - \Phi_4 = 82.54 + 55.5$$
$$-\Phi_3 + 4\Phi_4 - 0 = 72 + 0$$

با حل این معادلات:

$\Phi_1 = 34.44, \quad \Phi_2 = 55.23, \quad \Phi_3 = 56.33, \quad \Phi_4 = 32.08$

اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل سهموی

مقایسه روش تفاضل محدود با روش تحلیلی:

t	Finite Difference Solution at $x = 0.4$	Analytic Solution at $x = 0.4$	Percentage Error
0.005	100	99.99	0.01
0.01	100	99.53	0.47
0.015	100	97.85	2.2
0.02	96.87	95.18	1.8
0.025	93.75	91.91	2.0
0.03	89.84	88.32	1.7
0.035	85.94	84.61	1.6
0.04	82.03	80.88	1.4
⋮			
0.10	45.18	45.13	0.11

اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل سهموی

تمرین سری اول: مثال فوق را به روش مستقیم غیر مستقیم در نرم افزار متلب پیاده سازی نمائید. در هر دو حالت فواصل نقاط را ۵ سانتیمتر در نظر بگیرید و تا زمان ۱ ثانیه شبیه سازی کنید.

اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل هذلولی

فرم کلی معادله (معادله موج):

$$u^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

where u is the speed of the wave.

حل معادله به روش مستقیم: تبدیل به فرم تفاضل محدود:

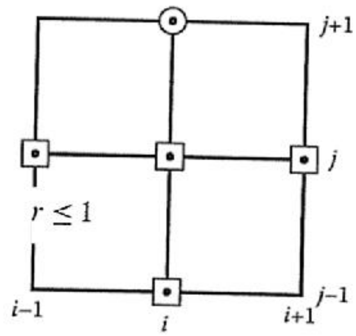
$$u^2 \frac{\Phi(i+1,j) - 2\Phi(i,j) + \Phi(i-1,j)}{(\Delta x)^2} = \frac{\Phi(i,j+1) - 2\Phi(i,j) + \Phi(i,j-1)}{(\Delta t)^2}$$

where $x = i\Delta x, t = j\Delta t, i, j = 0, 1, 2, \ldots$.

اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل هذلولی

$$r = \left(\frac{u\Delta t}{\Delta x}\right)^2$$

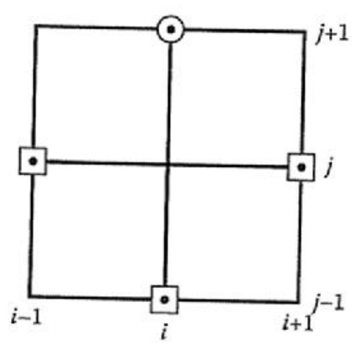
$$\boxed{\Phi(i, j+1) = 2(1-r)\Phi(i, j) + r[\Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j)] - \Phi(i, j-1)}$$



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل هذلولی

If we choose $r = 1$.

$$\Phi(i, j+1) = \Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j) - \Phi(i, j-1)$$



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل هذلولی

مشکل: در این معادله وابستگی مقدار تابع در لحظه j+1 به مقادیر j و j-1

راه حل: استفاده از شرایط اولیه برای تعیین مقادیر مراحل قبلی

مثال: فرض کنید شرایط اولیه این مسئله به صورت زیر باشد:

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi(x,0)}{\partial t} \simeq \frac{\Phi(i,1) - \Phi(i,-1)}{2\Delta t} = 0$$

65

اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل هذلولی

$$\Phi(i,1) = \Phi(i,-1) \xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله تفاضل محدود}} \Phi(i,1) = 2(1-r)\Phi(i,0) + r[\Phi(i-1,0) + \Phi(i+1,0)] - \Phi(i,1)$$

$$\Phi(i,1) = (1-r)\Phi(i,0) + \frac{r}{2}[\Phi(i-1,0) + \Phi(i+1,0)]$$

66

اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل هذلولی

مثال: حل معادله موج با شرایط اولیه و شرایط مرزی زیر:

$$\Phi_{tt} = \Phi_{xx}, \qquad 0 < x < 1, \quad t \geq 0$$

subject to the boundary conditions

$$\Phi(0,t) = 0 = \Phi(1,t), \qquad t \geq 0$$

and the initial conditions

$$\Phi(x,0) = \sin \pi x, \qquad 0 < x < 1\,,$$
$$\Phi_t(x,0) = 0, \qquad 0 < x < 1 \quad \square$$

اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل هذلولی

حل:

For $j = 0$, substituting

$$\Phi_t = \frac{\Phi(i,1) - \Phi(i,-1)}{2\Delta t} = 0 \Rightarrow \Phi(i,1) = \Phi(i,-1)$$

$$\Phi(i,1) = \frac{1}{2}[\Phi(i-1,0) + \Phi(i+1,0)]$$

$u = 1$, and $r = 1$, $\Rightarrow \Delta t = \Delta x$

با انتخاب $\Delta t = \Delta x = 0.1$

اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل هذلولی

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	...
t								
0.0	0	0.3090	0.5879	0.8990	0.9511	1.0	0.9511	
0.1	0	0.2939	0.5590	0.7694	0.9045	0.9511	0.9045	
0.2	0	0.2500	0.4755	0.6545	0.7694	0.8090	0.7694	
0.3	0	0.1816	0.3455	0.4755	0.5590	0.5878	0.5590	
0.4	0	0.0955	0.1816	0.2500	0.2939	0.3090	0.2939	
0.5	0	0	0	0	0	0	0	
0.6	0	−0.0955	−0.1816	−0.2500	−0.2939	−0.3090	−0.2939	
0.7	0	−0.1816	−0.3455	−0.4755	−0.5590	−0.5878	−0.5590	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل هذلولی

تمرین سری دوم: مثال فوق را در نرم افزار متلب پیاده سازی نمائید. در هر دو حالت فواصل نقاط را ۱ سانتی متر در نظر بگیرید و تا زمان ۱ ثانیه شبیه سازی کنید.

اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل بیضوی

فرم کلی معادله (معادله پواسن):

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = g(x, y)$$

تبدیل به معادله تفاضل محدود:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \frac{\Phi(i+1, j) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i-1, j)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \frac{\Phi(i, j+1) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i, j-1)}{(\Delta y)^2} + O(\Delta y)^2$$

71

اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل بیضوی

$x = i\Delta x, y = j\Delta y$, and $i, j = 0, 1, 2, \ldots$

assume that $\Delta x = \Delta y = h$,

$$\left[\Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j) + \Phi(i, j+1) + \Phi(i, j-1)\right] - 4\Phi(i, j) = h^2 g(i, j)$$

$$\Phi(i, j) = \frac{1}{4}\left[\Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j) + \Phi(i, j+1) + \Phi(i, j-1) - h^2 g(i, j)\right]$$

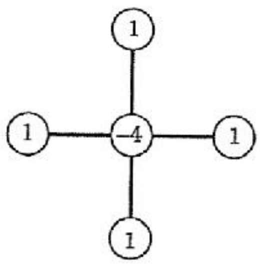
72

اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل بیضوی

اگر منبع ورودی را صفر فرض کنیم معادله پواسن به معادله لاپلاس تبدیل میشود:

$$g(x, y) = 0$$

$$\Phi(i, j) = \frac{1}{4}[\Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j) + \Phi(i, j+1) + \Phi(i, j-1)]$$

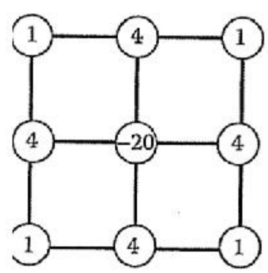


مقدار تابع در هر نقطه برابر میانگین مقادیر چهار نقطه اطراف میباشد.

اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل بیضوی

معادله لاپلاس را با تعاریف مشتق با دقت بالاتر هم میتوان پیاده سازی نمود برای مثال:

$$\begin{aligned} -20\Phi(i, j) &+ 4[\Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j) + \Phi(i, j+1) + \Phi(i, j-1)] \\ &+ \Phi(i+1, j-1) + \Phi(i-1, j-1) + \Phi(i-1, j+1) \\ &+ \Phi(i+1, j+1) = 0 \end{aligned}$$



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل بیضوی

معمولا فرم اول بیان معادله لاپلاس برای حل متداولتر است. با استفاده از این روش مقدار تابع در نقطه تابعی از چهار نقطه مجاورش میباشد. در نتیجه حل مسئله تبدیل به حل یک دستگاه بزرگ از معادلات میشود:

$$[A][X]=[B]$$

برای حل این دستگاه معادله دو روش متداول است:

روش مستقیم:

$$[X]=[A]^{-1}[B]$$

روش تکراری: روش جاکوبی، گوس سایدل و …

اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل بیضوی

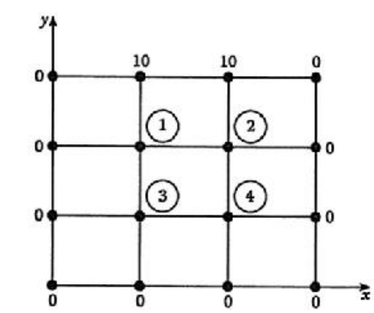
مثال: حل معادله لاپلاس زیر

$$\nabla^2 V=0, \qquad 0\le x\le 1, \qquad 0\le y\le 1$$

شرایط مرزی:

$$V(x,1)=45x(1-x), V(x,0)=0=V(0,y)=V(1,y).$$

با انتخاب $h=1/3$:



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل بیضوی

$$
\begin{aligned}
4V_1 - V_2 - V_3 - 0 &= 10 \\
-V_1 + 4V_2 - 0 - V_4 &= 10 \\
-V_1 - 0 + 4V_3 - V_4 &= 0 \\
-0 - V_2 - V_3 + 4V_4 &= 0
\end{aligned}
$$

این معادلات را میتوان به صورت ماتریسی بیان نمود:

$$
\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

77

اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل بیضوی

$[A][V] = [B]$

با حل این معادله ماتریسی به روش ماتریس معکوس و یا روش تکرار:

$V_1 = 3.75, \quad V_2 = 3.75, \quad V_3 = 1.25, \quad V_4 = 1.25$

78

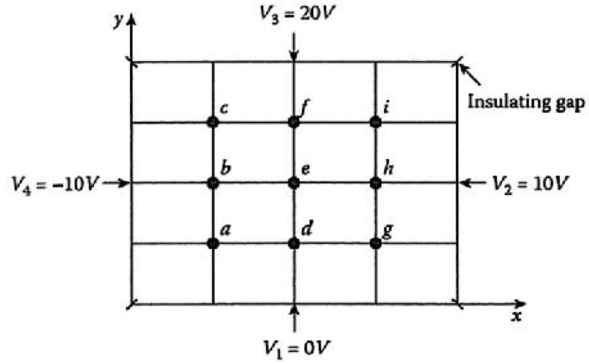
اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل بیضوی

تمرین سری سوم: معادله پواسن زیر را حل کنید:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_S}{\epsilon}, \qquad 0 \le x, y \le 1$$

در این معادله مقدار چگالی سطحی بار الکتریکی مطابق رابطه زیر تغییر میکند:

$$\rho_S = x(y-1)\ \mathrm{nC/m^3} \quad \text{and } \epsilon_r = 1.0.$$



79

دقت و پایداری روش تفاضل محدود

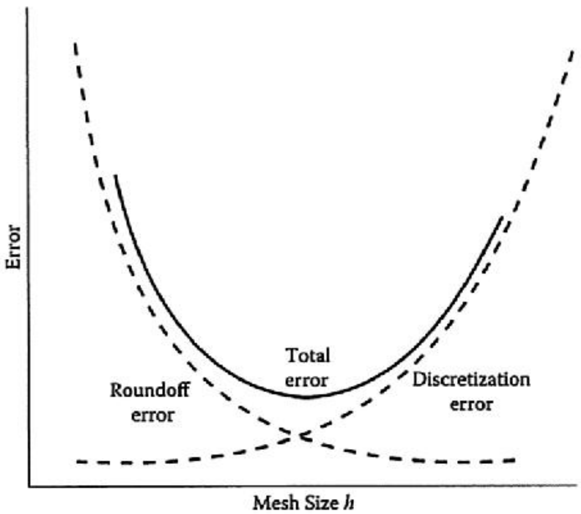
منابع ایجاد خطا

- خطای ناشی از مدلسازی
- خطای ناشی از مختوم سازی
- خطاهای ناشی از گرد کردن

80

دقت و پایداری روش تفاضل محدود

با کوچک کردن سایز مش بندی خطای گسسته سازی کاهش میابد ولی چون حجم حافظه افزایش میابد مجبور به کاهش دقت اعداد هستیم که باعث افزایش خطای گرد کردن میشود



دقت و پایداری روش تفاضل محدود

پایداری: یک الگوریتم عددی زمانی پایدار است که خطای ایجاد شده در هر مرحله منجر به خطای تجمعی کمتر در مرحله بعد شود.

نحوه بررسی: فرض کنیم خطا در مرحله n ام برابر ϵ^n باشد. خطا در مرحله بعد از رابطه زیر محاسبه میشود:

$$\epsilon^{n+1} = g\epsilon^n$$

برای پایداری روش عددی :

$$\left|\epsilon^{n+1}\right| \le \left|\epsilon^n\right|$$

$$\Downarrow$$

$$|g| \le 1$$

دقت و پایداری روش تفاضل محدود

روش ون نیومن:

مثال:

$$\Phi_i^{n+1} = (1-2r)\Phi_i^n + r\left(\Phi_{i+1}^n + \Phi_{i-1}^n\right)$$

where $r = \Delta t / k(\Delta x)^2$

استفاده از سری فوریه:

$$\Phi_i^n = \sum A^n(t)e^{jkix}, \qquad 0 \le x \le 1$$

با در نظر گرفتن یک مود از سری فوریه:

$$\Phi_i^n = A^n(t)e^{jkix}$$

جایگذاری در معادله تفاضلی:

$$A^{n+1}e^{jkix} = (1-2r)A^n e^{jkix} + r\left(e^{jkx} + e^{-jkx}\right)A^n e^{jkix}$$

83

دقت و پایداری روش تفاضل محدود

$$A^{n+1} = A^n[1-2r+2r\cos kx]$$

$$\Rightarrow \quad g = \frac{A^{n+1}}{A^n} = 1-2r+2r\cos kx = 1-4r\sin^2\frac{kx}{2} \quad \Rightarrow \quad \left|1-4r\sin^2\frac{kx}{2}\right| \le 1$$

$$\Rightarrow \quad 1-4r \ge -1 \quad \text{and} \quad r \ge 0 \quad \Rightarrow \quad r \ge \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad r \ge 0$$

$$0 < r \le \frac{1}{2}$$

84

حل معادله انتشار موج یک بعدی در فضای آزاد

معادلات ماکسول در فضای آزاد:

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla \times \boldsymbol{H}$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \boldsymbol{E}.$$

فرض انتشار موج در راستای محور z باشد و مولفه های موج شامل E_x و H_y باشد.

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial H_y}{\partial z}$$
$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial E_x}{\partial z}.$$

85

حل معادله انتشار موج یک بعدی در فضای آزاد

با استفاده از تعریف مشتق معادلات به فرم تفاضلی تبدیل میگردد:

$$\frac{E_x^{n+1/2}(k) - E_x^{n-1/2}(k)}{\Delta t} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k-1/2)}{\Delta x}$$
$$\frac{H_y^{n+1}(k+1/2) - H_y^n(k+1/2)}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu_0}\frac{E_x^{n+1/2}(k+1) - E_x^{n+1/2}(k)}{\Delta x}.$$

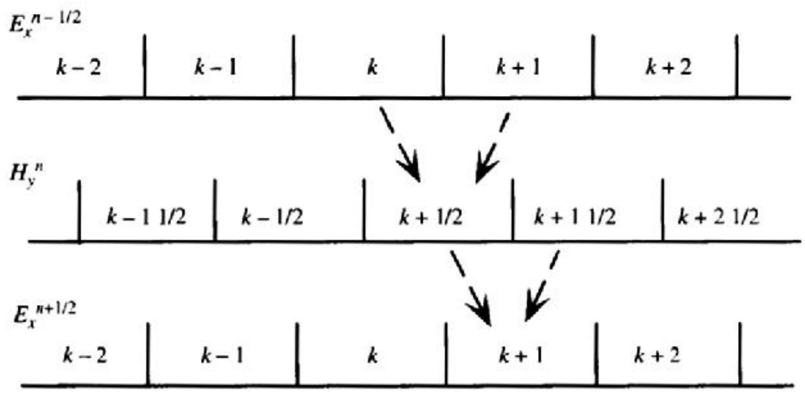
متغیر زمان و مکان به صورت زیر تعریف میشوند:

$$t = \Delta t \cdot n$$

$$z = \Delta x \cdot k$$

86

حل معادله انتشار موج یک بعدی در فضای آزاد



حل معادله انتشار موج یک بعدی در فضای آزاد

$$E_x^{n+1/2}(k) = E_x^{n-1/2}(k) - \frac{\Delta t}{\varepsilon_0 \cdot \Delta x}[H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k-1/2)]$$

$$H_y^{n+1}(k+1/2) = H_y^n(k+1/2) - \frac{\Delta t}{\mu_0 \cdot \Delta x}[E_x^{n+1/2}(k+1) - E_x^{n+1/2}(k)].$$

از لحاظ عددی اندازه متغیر E و H بسیار متفاوت است و این مسئله دقت محاسبات را کاهش میدهد برای حل این مشکل از تغییر متغیر زیر استفاده میشود:

$$\tilde{E} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E.$$

$$\tilde{E}_x^{n+1/2}(k) = \tilde{E}_x^{n-1/2}(k) - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}\frac{\Delta t}{\Delta x}[H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k-1/2)]$$

$$H_y^{n+1}(k+1/2) = H_y^n(k+1/2) - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}\frac{\Delta t}{\Delta x}[\tilde{E}_x^{n+1/2}(k+1) - \tilde{E}_x^{n+1/2}(k)]$$

حل معادله انتشار موج یک بعدی در فضای آزاد

گام های زمانی بر اساس ابطه زیر مشخص میشود:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{2 \cdot c_0}$$

where c_0 is the speed of light in free space.

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{\Delta t}{\Delta x} = c_0 \cdot \frac{\Delta x / 2 \cdot c_0}{\Delta x} = \frac{1}{2}$$

89

شرط پایداری

سرعت انتشار موج نمیتواند از سرعت نور بیشتر باشد بنابراین حداقل زمانی که طول میکشد که موج به اندازه حرکت کند برابر:

در حالت یک بعدی: $\Delta t = \Delta x / c_0$

در حالت دو بعدی: $\Delta t = \Delta x / (\sqrt{2} c_0)$

در حالت سه بعدی: $\Delta t = \Delta x / (\sqrt{3} c_0)$

شرط کورانت:

در حالت n بعدی: $\Delta t \le \frac{\Delta x}{\sqrt{n} \cdot c_0},$

در این کتاب: $\Delta t = \frac{\Delta x}{2 \cdot c_0}$

90

شرایط مرزی جاذب در حالت یک بعدی

برای جلوگیری از انعکاس امواج از مرزهای ناحیه حل باید از شرایط مرزی جاذب استفاده نمائیم.

با توجه به گام زمانی انتخاب شده در این مسئله، مسافتی که موج در یک بازه زمانی طی میکند برابر:

$$\text{distance} = c_0 \cdot \Delta t = c_0 \cdot \frac{\Delta x}{c_0} = \frac{\Delta x}{2}.$$

بنابراین میتوان مقدار تابع در مرز ناحیه را با مقدار تابع در نقطه قبلی در دو گام زمانی قبل تر یکسان فرض نمود.

$$E_x^n(0) = E_x^{n-2}(1).$$

91

حل معادله انتشار موج یک بعدی در یک دی الکتریک

اصلاح روابط:

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \nabla \times \boldsymbol{H}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{E}.$$

اعمال روش تفاضل محدود:

$$\frac{\tilde{E}_x^{n+1/2}(k) - \tilde{E}_x^{n-1/2}(k)}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon_r \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cdot \frac{H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k+1/2)}{\Delta x}$$

$$\frac{H_y^{n+1}(k+1/2) - H_y^n(k+1/2)}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\tilde{E}_x^{n+1/2}(k+1) - \tilde{E}_x^{n+1/2}(k)}{\Delta x}.$$

92

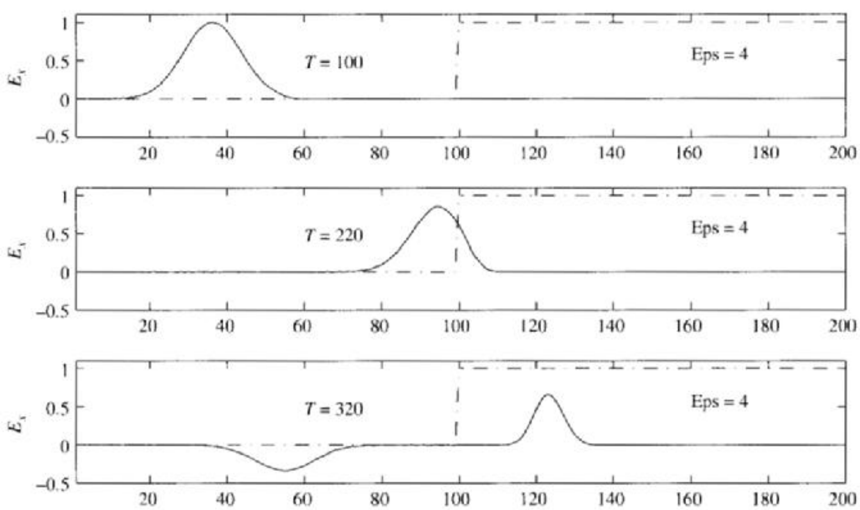
حل معادله انتشار موج یک بعدی در یک دی الکتریک

چون $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{2}$

$$\tilde{E}_x^{n+1/2}(k) = \tilde{E}_x^{n+1/2}(k) + \frac{1/2}{\varepsilon_r}[H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k+1/2)]$$

$$H_y^{n+1}(k+1/2) = H_y^n(k+1/2) - \frac{1}{2}[\tilde{E}_x^{n+1/2}(k+1) - \tilde{E}_x^{n+1/2}(k)].$$

حل معادله انتشار موج یک بعدی در یک دی الکتریک



تعیین ابعاد مش

به طور معمول برای انتخاب تعداد نقاط برای هر طول موج از عدد ۱۰ استفاده میشود. به طور مثال اگر فرکانس منبع ۴۰۰ مگاهرتز باشد:

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{400\ \text{MHz}} = \frac{3 \times 10^8\ \text{m/sec}}{4 \times 10^8\ \text{sec}^{-1}} = .75\ \text{m}.$$

$$\Delta x = \lambda_0/10 = 7.5\ \text{cm}.$$

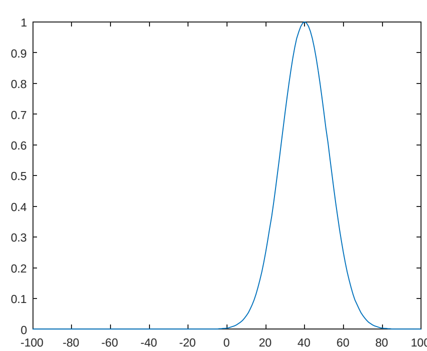
حل معادله انتشار موج یک بعدی در فضای آزاد

مثال: شبیه سازی انتشار یک موج الکترومغناطیسی با منبع انتشار گوسی

مرحله اول: ساخت تابع گوسی

$$f(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

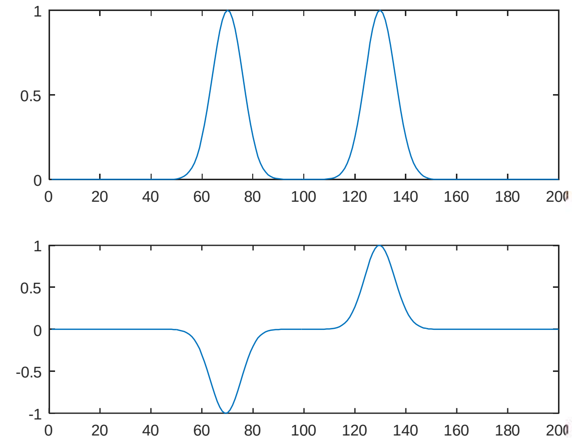
```
e = 2.7182... (Euler's number)
x = data to be plotted
σ = standard deviation
μ = mean, median and mode (all simultaneously)
```

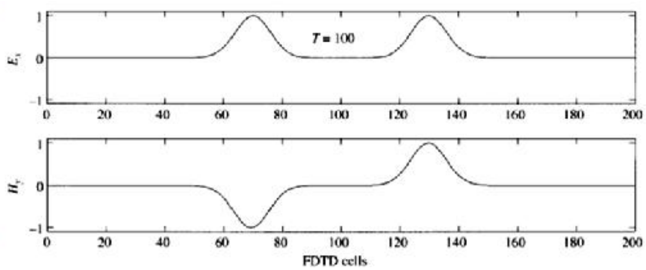


حل معادله انتشار موج یک بعدی در فضای آزاد

مرحله دوم: محاسبه میدان ها

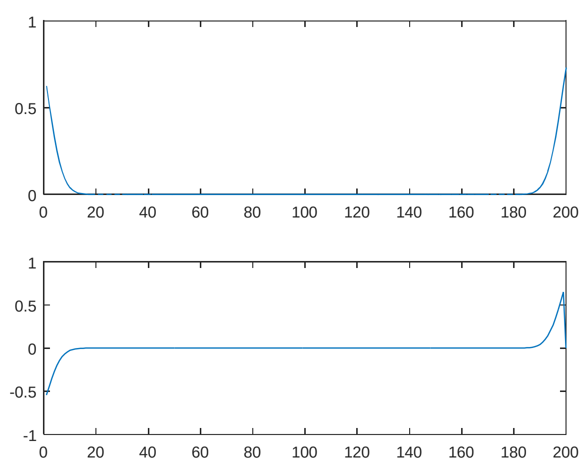
پاسخ به ازای T=100





حل معادله انتشار موج یک بعدی در فضای آزاد

مرحله سوم: اعمال شرایط مرزی جاذب (**تمرین سری چهارم**)



حل معادله انتشار موج دو بعدی در فضای آزاد

معادلات ماکسول در حالت کلی

$$\frac{\partial \tilde{D}}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \nabla \times H$$

$$\tilde{D}(\omega) = \varepsilon_r^*(\omega) \cdot \tilde{E}(\omega)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \nabla \times \tilde{E}.$$

در مود انتشاری میتوان فرض نمود:

مود TM: $\tilde{E}_z$, H_x, and H_y

مود TE: $\tilde{E}_x$, $\tilde{E}_y$, and H_z

حل معادله انتشار موج دو بعدی در فضای آزاد

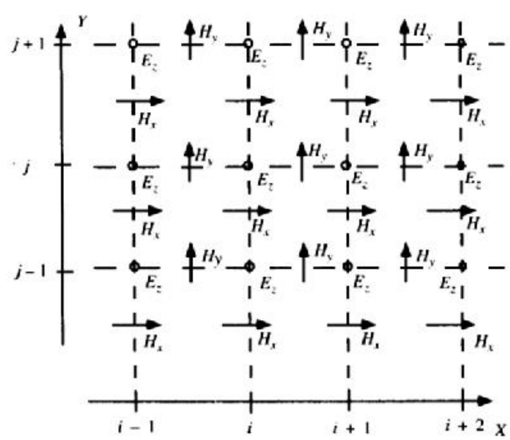
با فرض مود TM

$$\frac{\partial D_z}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

$$D_z(\omega) = \varepsilon_r^*(\omega) \cdot E_z(\omega)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial E_z}{\partial x}.$$



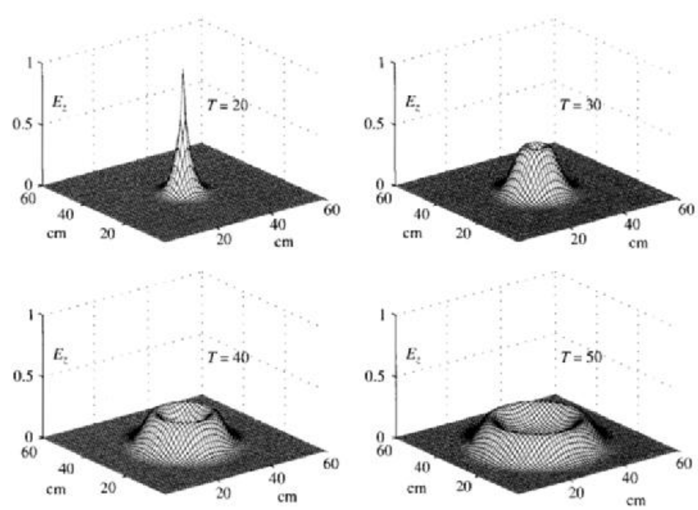
حل معادله انتشار موج دو بعدی در فضای آزاد

$$\frac{D_z^{n+1/2}(i,j)-D_z^{n-1/2}(i,j)}{\Delta t}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\left(\frac{H_y^n(i+1/2,j)-H_y^n(i-1/2,j)}{\Delta x}\right)-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\left(\frac{H_x^n(i,j+1/2)-H_x^n(i,j-1/2)}{\Delta x}\right)$$

$$\frac{H_x^{n+1}(i,j+1/2)-H_x^n(i,j+1/2)}{\Delta t}=-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{E_z^{n+1/2}(i,j+1)-E_z^{n+1/2}(i,j)}{\Delta x}$$

$$\frac{H_y^{n+1}(i+1/2,j)-H_y^n(i+1/2,j)}{\Delta t}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{E_z^{n+1/2}(i+1,j)-E_z^{n+1/2}(i,j)}{\Delta x}.$$

حل معادله انتشار موج دو بعدی در فضای آزاد



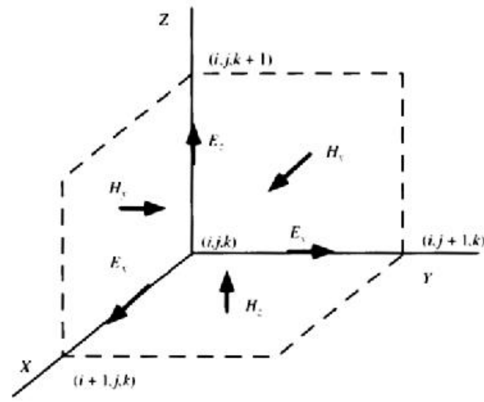
حل معادله انتشار موج سه بعدی در فضای آزاد

معادلات ماکسول در حالت کلی

$$\frac{\partial \tilde{D}}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cdot \nabla \times H$$

$$\tilde{D}(\omega) = \varepsilon_r^*(\omega) \cdot \tilde{E}(\omega)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \nabla \times \tilde{E}.$$



استفاده از سلول محاسباتی Yee

103

حل معادله انتشار موج سه بعدی در فضای آزاد

$$\frac{\partial D_x}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial D_y}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial D_z}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right).$$

104

حل معادله انتشار موج سه بعدی در فضای آزاد

$$D_z^{n+1/2}(i,j,k+1/2) = D_z^{n-1/2}(i,j,k+1/2)$$
$$+ \frac{\Delta t}{\Delta x \cdot \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \left(H_y^n(i+1/2,j,k+1/2) - H_y^n(i-1/2,j,k+1/2) \right.$$
$$\left. - H_x^n(i,j+1/2,k+1/2) + H_x^n(i,j-1/2,k+1/2) \right)$$
$$H_z^{n+1}(i+1/2,j+1/2,k) = H_z^n(i+1/2,j+1/2,k)$$
$$- \frac{\Delta t}{\Delta x \cdot \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \left(E_y^{n+1/2}(i+1,j+1/2,k) - E_y^{n+1/2}(i,j+1/2,k) \right.$$
$$\left. - E_x^{n+1/2}(i+1/2,j+1,k) + E_x^{n+1/2}(i+1/2,j,k) \right).$$

فصل سوم: روش اجزای محدود

مطالب این فصل

- معرفی انواع روش های حل مسائل مقدار مرزی
- اصول اساسی روش اجزای محدود
- روش اجزای محدود اسکالر
- روش اجزای محدود برداری
- روش اجزای محدود در حوزه زمان

107

روش های حل مسائل مقدار مرزی

به طور کلی بسیاری از مسائل فیزیکی به صورت مسائل مقدار مرزی قابل بیان هستند.

یک نمونه از این مسائل که دارای کابرد زیادی در الکترومغناطیس است به صورت یک معادله دیفرانسیل که در ناحیه Ω تعریف شده و شرایط مرزی آن بر روی مرز بسته این محیط تعیین شده است.

$$\mathcal{L}\phi = f$$

برای حل این معادله دو روش وجود دارد:

- روش تحلیلی
- روش های تقریبی

در بین روش های تقریبی دو روش ریتز و گالرگین کاربرد بیشتری دارند که در ادامه به طور مختصر به آنها اشاره خواهد شد.

108

روش ریتز

این روش یک روش تغییراتی (Variational Method) است که معادله دیفرانسیل را به فرم یک عبارت تغییراتی (Functional)تبدیل می کند. مقدار مینیمم این عبارت جواب معادله می باشد. در واقع جواب تقریبی از طریق مینیمم کردن این عبارت حاصل می شود.

ابتدا تعریف ضرب داخلی را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_\Omega \phi \psi^* \, d\Omega$$

می توان نشان داد که اگر اپراتور $\mathcal{L}$ خود الحاق باشد (یعنی $\langle \mathcal{L}\phi, \psi \rangle = \langle \phi, \mathcal{L}\psi \rangle$)

و مثبت تعریف ($\langle \mathcal{L}\phi, \phi \rangle \begin{cases} > 0 & \phi \neq 0 \\ = 0 & \phi = 0 \end{cases}$) باشد آنگاه

روش ریتز

پاسخ معادله دیفرانسیل از مینیمم کردن عبارت زیر بدست می آید.

$$F(\tilde{\phi}) = \tfrac{1}{2}\langle \mathcal{L}\tilde{\phi}, \tilde{\phi} \rangle - \tfrac{1}{2}\langle \tilde{\phi}, f \rangle - \tfrac{1}{2}\langle f, \tilde{\phi} \rangle$$

که در این رابطه تابع $\tilde{\phi}$ می تواند یک تابع دنباله ای به فرم زیر باشد.

$$\tilde{\phi} = \sum_{j=1}^{N} c_j v_j = \{c\}^T \{v\} = \{v\}^T \{c\}$$

با جایگذاری در معادله اول

$$F = \tfrac{1}{2}\{c\}^T \int_\Omega \{v\} \mathcal{L} \{v\}^T \, d\Omega \, \{c\} - \{c\}^T \int_\Omega \{v\} f \, d\Omega$$

روش ریتز

برای تعیین مقدار مینیمم این معادله مشتقات جزئی را برابر صفر قرار می دهیم.

$$\frac{\partial F}{\partial c_i} = \frac{1}{2}\int_\Omega v_i \mathcal{L}\{v\}^T \, d\Omega \, \{c\} + \frac{1}{2}\{c\}^T \int_\Omega \{v\}\mathcal{L}v_i \, d\Omega - \int_\Omega v_i f \, d\Omega$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} c_j \int_\Omega (v_i \mathcal{L} v_j + v_j \mathcal{L} v_i) \, d\Omega - \int_\Omega v_i f \, d\Omega$$

$$= 0 \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, N$$

که به صورت ماتریسی زیر قابل بیان است.

$$[S]\{c\} = \{b\}$$

که در این رابطه

$$b_i = \int_\Omega v_i f \, d\Omega.$$

روش ریتز

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\int_\Omega (v_i \mathcal{L} v_j + v_j \mathcal{L} v_i) \, d\Omega$$

با توجه به خاصیت خود الحاقی

$$S_{ij} = \int_\Omega v_i \mathcal{L} v_j \, d\Omega$$

مثال: معادله شرایط مرزی زیر را به روش ریتز حل کنید.

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = x + 1 \qquad 0 < x < 1$$

$$\phi|_{x=0} = 0$$

$$\phi|_{x=1} = 1.$$

روش ریتز

حل:

فرم تغییراتی معادله به صورت زیر قابل بیان است.

$$F(\tilde{\phi}) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{d\tilde{\phi}}{dx}\right)^2 dx + \int_0^1 (x+1)\tilde{\phi}\, dx$$

فرض کنیم تابع تقریبی حل را می توان به صورت چند جمله ای زیر در نظر گرفت.

$$\tilde{\phi}(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3$$

با اعمال شرایط مرزی نتیجه می شود که $c_1 = 0$ و $c_2 = 1 - c_3 - c_4$

بنابراین

$$\tilde{\phi}(x) = x + c_3(x^2 - x) + c_4(x^3 - x)$$

روش ریتز

با جایگذاری در عبارت تغییراتی نتیجه می شود که

$$F = \tfrac{2}{5}c_4^2 + \tfrac{1}{6}c_3^2 + \tfrac{1}{2}c_3c_4 - \tfrac{23}{60}c_4 - \tfrac{1}{4}c_3 + \tfrac{4}{3}$$

حال با مینیمم کردن این عبارت مقدار ضرایب مجهول را محاسبه می کنیم.

$$\frac{\partial F}{\partial c_3} = \tfrac{1}{3}c_3 + \tfrac{1}{2}c_4 - \tfrac{1}{4}$$

$$\frac{\partial F}{\partial c_4} = \tfrac{1}{2}c_3 + \tfrac{4}{5}c_4 - \tfrac{23}{60}$$

$$\Downarrow$$

$$c_3 = \tfrac{1}{2} \text{ and } c_4 = \tfrac{1}{6}$$

روش گالرکین

این روش از خانواده روش های باقی مانده های وزن دار است. در این خانواده از روش ها مقدار باقی مانده به صورت زیر تعریف می شود.

$$r = \mathcal{L}\tilde{\phi} - f \neq 0$$

انتخاب تابع $\tilde{\phi}$ به یکی از روش های زیر انجام می شود.

۱- روش تطبیق نقطه ای

در این روش تابع وزن، تابع دلتای دیراک انتخاب می شود. در نتیجه عمل صفر کردن باقی مانده نقطه به نقطه انجام می شود.

$$R_i = \left[\mathcal{L}\{v\}^T\{c\} - f\right]_{\text{at point } i} = 0$$

روش گالرکین

۲- روش زیر دامنه

در این روش تابع وزن در یک زیر دامنه خاص ثابت فرض شده و در سایر نقاط صفر در نظر گرفته می شود.

$$R_i = \int_{\Omega_i} (\mathcal{L}\{v\}^T\{c\} - f)\, d\Omega = 0$$

۳- روش مینیمم مربعات

در این روش مربع خطای باقی مانده حداقل می شود.

$$I = \frac{1}{2}\int_{\Omega} r^2\, d\Omega$$

$$\frac{\partial I}{\partial c_i} = \int_{\Omega} \mathcal{L}v_i(\mathcal{L}\{v\}^T\{c\} - f)\, d\Omega = 0$$

روش گالرکین

۴- روش گالرکین

در این روش سعی می شود که مقدار خطای باقیمانده وزن دار در کل ناحیه حداقل شود بنابراین از دقت بالایی بر خوردار است.

$$R_i = \int_\Omega w_i r \, d\Omega = 0$$

در این روش توابع وزن مشابه توابع مورد استفاده برای بسط حل تقریبی معادله انتخاب می شود. به عبارت دیگر

$$w_i = v_i \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, N$$

بنابراین با جایگذاری در معادله

$$R_i = \int_\Omega (v_i \mathcal{L}\{v\}^T\{c\} - v_i f)\, d\Omega = 0 \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, N$$

روش گالرکین

مثال: مطلوب است حل معادله شرایط مرزی زیر را به روش گالرکین

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = x + 1 \qquad 0 < x < 1 \qquad \begin{aligned} \phi|_{x=0} &= 0 \\ \phi|_{x=1} &= 1. \end{aligned}$$

حل: باقی مانده وزن دار این تابع به فرم زیر است.

$$\int_0^1 w_i \left(\frac{d^2\tilde{\phi}}{dx^2} - x - 1 \right) dx = 0$$

مطابق توضیحاتی که در حل به روش ریتز ارائه شد، تابع تقریب حل به صورت زیر است.

$$\tilde{\phi}(x) = x + c_3(x^2 - x) + c_4(x^3 - x)$$

روش گالرکین

توابع وزن را نیز به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$w_1 = x^2 - x \qquad w_2 = x^3 - x$$

با جایگذاری در عبارت باقیمانده وزن دار نتیجه می شود که

$$\frac{1}{3}c_3 + \frac{1}{2}c_4 - \frac{1}{4} = 0$$
$$\frac{1}{2}c_3 + \frac{4}{5}c_4 - \frac{23}{60} = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$c_3 = \frac{1}{2} \text{ and } c_4 = \frac{1}{6}$$

روش اجزای محدود اسکالر

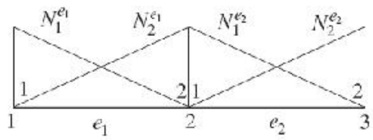
روش اجزای محدود بر اساس ساختار مسئله ای که برای حل مورد استفاده قرار می گیرد به سه دسته تقسیم می شود:

- روش اجزای محدود یک بعدی
- روش اجزای محدود دو بعدی
- روش اجزای محدود سه بعدی

- تفاوت اساسی این سه روش در انتخاب شکل المان ها و نحوه تعریف توابع درون یابی برای هر المان است.

روش اجزای محدود اسکالر

در حالت یک بعدی برای هر یک از گره های دو سر المان یک تابع درون یابی محلی را انتخاب می کنیم.



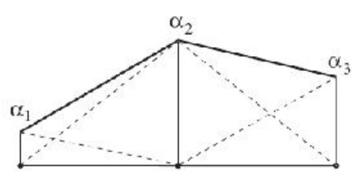
تابع تقریب حل بر اساس این توابع درون یابی و مقادیر اختصاص یافته به هر گره به صورت زیر تعریف می شود.

$$\bar{f} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i N_i$$

که در این رابطه α_i ضرایب حل در هر گره و n تعداد کل گره ها را نشان می دهد

روش اجزای محدود اسکالر

بر این اساس حل تقریبی در شکل زیر نشان داده شده است:



یکی از معادلات دیفرانسیلی که در بسیاری از کاربردها مورد استفاده قرار می گیرد به صورت زیر است:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\lambda \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right] + k^2 u - p = 0$$

که در این رابطه λ و k مقادیر ثابت و p تابع تحریک است. ناحیه حل نیز $[a, b]$ در نظر گرفته شده است.

روش اجزای محدود اسکالر

اگر حل تقریبی معادله را در آن جایگزین کنیم و بر طبق روش مانده های وزن دار انتگرال گیری کنیم رابطه زیر بدست می آید:

$$\int_a^b \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lambda\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+k^2\bar{u}-p\right]W_j dx=0, j=1,2,\ldots,n$$

به این نوع فورمولاسیون مسئله فورمولاسیون قوی گفته می شود. می توان نشان داد که این رابطه را به صورت زیر نیز می توان تبدیل کرد که به آن فورمولاسیون ضعیف می گویند:

$$\int_a^b k^2\bar{u}W_j\mathrm{d}x+\boxed{\lambda\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}W_j\Big|_a^b}-\int_a^b \lambda\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}W_j}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\int_a^b pW_j\mathrm{d}x$$

روش اجزای محدود اسکالر

با اعمال روش اجزای محدود و با انتخاب روش گارلرکین این معادله دیفرانسیل به معادله ماتریسی زیر تبدیل می شود:

$$[a]\{\alpha\}=\{b\}+\{Q\}$$

که در این رابطه ماتریس $[a]$ ماتریس کل سیستم، ماتریس $\{\alpha\}$ بردار حل، ماتریس $\{b\}$ بردار تحریک و ماتریس $\{Q\}$ بردار چگالی شار است.
تقریب محلی برای تابع در هر المان به صورت زیر قابل بیان است:

$$\bar{u}^e=\alpha_1^e N_1^e(x)+\alpha_2^e N_2^e(x)$$

با جایگذاری این تقریب در فورمولاسیون ضعیف معادله دیفرانسیل، فرم ماتریسی فوق حاصل می گردد.

روش اجزای محدود اسکالر

با جایگذاری این عبارت ضرایب مجهول به صورت زیر بدست می آید:

$$a_{ji}^{e} = \int_{x_1^e}^{x_2^e} k^2 N_i^e N_j^e \,\mathrm{d}x - \int_{x_1^e}^{x_2^e} \lambda \frac{\mathrm{d}N_i^e}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}N_j^e}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

$$b_j^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} p N_j^e \,\mathrm{d}x$$

بنابراین معادلات ماتریسی برای یک المان به صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^e & a_{12}^e \\ a_{21}^e & a_{22}^e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1^e \\ \alpha_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^e \\ b_2^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda \left.\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_1^e} \\ \lambda \left.\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_2^e} \end{bmatrix}$$

روش اجزای محدود اسکالر

با جایگذاری این عبارت ضرایب مجهول به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^e & a_{12}^e \\ a_{21}^e & a_{22}^e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1^e \\ \alpha_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^e \\ b_2^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda \left.\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_1^e} \\ \lambda \left.\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_2^e} \end{bmatrix}$$

ماتریس کلی سیستم بر اساس ماتریس های محلی به صورت زیر ساخته می شود

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{e_1} & a_{12}^{e_1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21}^{e_1} & a_{22}^{e_1} + a_{11}^{e_2} & a_{12}^{e_2} & & 0 \\ 0 & a_{21}^{e_2} & a_{22}^{e_2} + a_{11}^{e_3} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a_{12}^{e_n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{21}^{e_n} & a_{22}^{e_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{e_1} \\ b_2^{e_1} + b_1^{e_2} \\ b_2^{e_2} + b_1^{e_3} \\ \vdots \\ b_2^{e_n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda \left.\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda \left.\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=b} \end{bmatrix}$$

روش اجزای محدود اسکالر

در صورتی که شرایط مرزی مسئله دیریکله باشد آنگاه:

$$\alpha_1 = u(a), \quad \alpha_n = u(b)$$

در این حالت فرم ماتریسی به صورت زیر ساده می شود:

$$\begin{bmatrix} a_{22}^{e_1}+a_{11}^{e_2} & a_{12}^{e_2} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}^{e_2} & a_{22}^{e_2}+a_{11}^{e_3} & a_{12}^{e_3} & & 0 \\ 0 & a_{21}^{e_3} & a_{22}^{e_3}+a_{11}^{e_4} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a_{12}^{e_{n-1}} \\ 0 & 0 & \dots & a_{21}^{e_{n-1}} & a_{22}^{e_{n-1}}+a_{11}^{e_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_2^{e_1}+b_1^{e_2} \\ b_2^{e_2}+b_1^{e_3} \\ b_2^{e_3}+b_1^{e_4} \\ \vdots \\ b_2^{e_{n-1}}+b_1^{e_n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_1 a_{21}^{e_1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \alpha_n a_{12}^{e_n} \end{bmatrix}$$

روش اجزای محدود اسکالر

مثال: حل معادله $\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} - F = 0$ به روش اجزای محدود با شرایط مرزی دیرکله که

$$u(0) = 0; \quad u(L) = F$$

در بازه $[0, L]$ تعریف شده است.

حل:

ابتدا فورمولاسیون ضعیف معادله را بدست می آوریم.

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} W_j \Big|_O^L - \int_O^L \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}W_j}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x = \int_O^L F W_j \mathrm{d}x$$

سپس ناحیه حل را گسسته می کنیم.

روش اجزای محدود اسکالر

سپس توابع درون یابی در هر المان را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$u^e = \alpha_1 N_1(x) + \alpha_2 N_2(x)$$

که در این رابطه

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{\Delta x}; \quad \frac{\partial N_1}{\partial x} = -\frac{1}{\Delta x}$$

$$N_2(x) = \frac{x - x_1}{\Delta x}; \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x}$$

سپس با جایگذاری در معادله فرم ماتریسی معادله را بدست می آوریم.

$$a_{ji}^e = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_j^e}{dx}\frac{dN_i^e}{dx}dx$$

$$b_j^e = -\int_{x_1}^{x_2} F N_j^e dx$$

روش اجزای محدود اسکالر

$$a_{11} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_1}{dx}\frac{dN_1}{dx}dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{1}{\Delta x}\right)\left(-\frac{1}{\Delta x}\right)dx = \left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 dx = \frac{1}{\Delta x}$$

$$a_{12} = a_{21} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_1}{dx}\frac{dN_2}{dx}dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{1}{\Delta x}\right)\left(\frac{1}{\Delta x}\right)dx = -\frac{1}{\Delta x}$$

$$a_{22} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_2}{dx}\frac{dN_2}{dx}dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{\Delta x}\right)\left(\frac{1}{\Delta x}\right)dx = \frac{1}{\Delta x}$$

$$b_1 = -\int_{x_1}^{x_2} F\frac{x_2 - x}{\Delta x}dx = -F\frac{\Delta x}{2}$$

$$b_2 = -\int_{x_1}^{x_2} F\frac{x - x_1}{\Delta x}dx = -F\frac{\Delta x}{2}$$

روش اجزای محدود اسکالر

بر این اساس ماتریس محلی برای هر المان به صورت زیر تعریف می شود.

$$\frac{1}{\Delta x}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1^e \\ \alpha_2^e \end{bmatrix} = -F\frac{\Delta x}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_1} \\ \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_2} \end{Bmatrix}$$

با استفاده از ماتریس های محلی برای گره های مختلف، ماتریس کلی سیستم به صورت زیر بدست می آید.

$$\underbrace{\frac{1}{\Delta x}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{global-system-matrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}}_{\text{solution-vector}} = \underbrace{-F\frac{\Delta x}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{right-hand-side-vector}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} \\ 0 \\ 0 \\ \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} \end{bmatrix}}_{\text{flux-density-vector}}$$

روش اجزای محدود اسکالر

با در نظر گرفتن شرایط مرزی دیریکله ماتریس به صورت زیر ساده می شود.

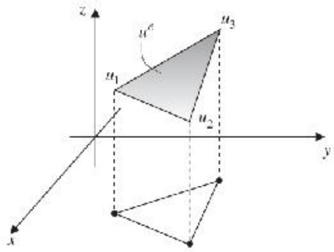
$$\frac{1}{\Delta x}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\Delta x}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} - F\frac{\Delta x}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

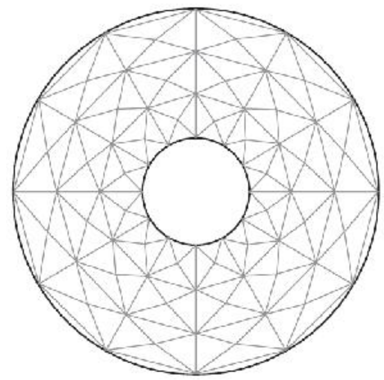
با حل دستگاه فوق مقادیر مجهول به صورت زیر بدست می آید.

$$\alpha_2 = -\frac{4}{3}F$$
$$\alpha_3 = -\frac{2}{3}F$$

روش اجزای محدود اسکالر

در حالت دو بعدی المان ها به صورت المان هایی سطح در نظر گرفته می شوند. یکی از متداول ترین المان هایی که می توان در نظر گرفت المان مثلثی است.





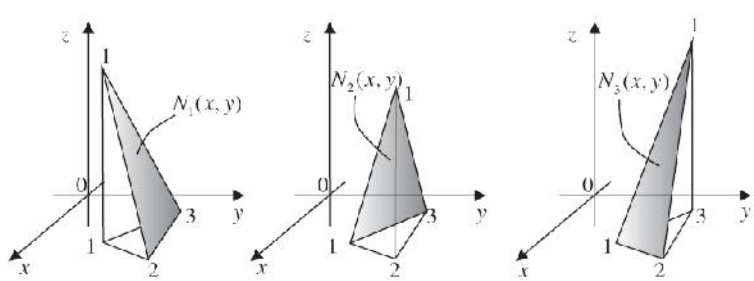
133

روش اجزای محدود اسکالر

تابع درون یابی که در حالت دو بعدی برای هر المان تعریف می شود:

$$u^e = \alpha_1^e N_1^e(x, y) + \alpha_2^e N_2^e(x, y) + \alpha_3^e N_3^e(x, y)$$

شکل توابع درون یابی به صورت زیر است.



134

روش اجزای محدود اسکالر

معادله هر یک از این توابع به فرم زیر قابل بیان است.

$$N_1(x,y) = \frac{1}{2A}(2A_1 + b_1 x + a_1 y)$$
$$N_2(x,y) = \frac{1}{2A}(2A_2 + b_2 x + a_2 y)$$
$$N_3(x,y) = \frac{1}{2A}(2A_3 + b_3 x + a_3 y)$$

که در این رابطه

$$2A_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \qquad a_1 = x_3 - x_2 \qquad b_1 = y_2 - y_3$$
$$2A_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3 \qquad a_2 = x_1 - x_3 \qquad b_2 = y_3 - y_1$$
$$2A_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1 \qquad a_3 = x_2 - x_1 \qquad b_3 = y_1 - y_2$$

$$2A = 2(A_1 + A_2 + A_3)$$

روش اجزای محدود اسکالر

قدم بعد در حل مسئله بیان معادله به فرم فورمولاسیون ضعیف است. برای این منظور معادله هلمهلتز را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$\nabla(k\nabla u) + ru = p$$

که در این رابطه λ و k به جنس محیط وابسته هستند و P نشان دهنده منبع تحریک است.
با اعمال روش باقیمانده های وزن دار معادله فوق به صورت زیر تبدیل می شود.

$$\int_{\Omega} [\nabla(k\nabla u) + ru - p] W_j d\Omega = 0$$

می توان نشان داد که فرم فورمولاسیون ضعیف این رابطه به صورت زیر قابل بیان است.

$$\int_{\Omega} \left[(k\nabla u)\nabla W_j - ruW_j\right] d\Omega = \int_{\Gamma} k\frac{\partial u}{\partial n} W_j d\Gamma - \int_{\Omega} pW_j d\Omega$$

روش اجزای محدود اسکالر

بر اساس الگوریتم اجزای محدود، حل تقریبی برای هر المان به صورت زیر قابل بیان است.

$$u^e = \{N\}^T\{\alpha\} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3]\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\nabla u = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \dfrac{\partial N_3}{\partial x}\\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & \dfrac{\partial N_3}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}$$

با استفاده از روش گالرکین و با جایگذاری معادله فوق، فورمولاسیون ضعیف به صورت ماتریسی قابل بیان است.

$$[a]\{\alpha\} = \{b\} + \{Q\}$$

روش اجزای محدود اسکالر

بر اساس این رابطه

$$[a]^e = k_e\int_\Omega \begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial y}\\ \dfrac{\partial N_3}{\partial x} & \dfrac{\partial N_3}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \dfrac{\partial N_3}{\partial x}\\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & \dfrac{\partial N_3}{\partial y}\end{bmatrix}\mathrm{d}\Omega - r_e\int_\Omega \begin{bmatrix}N_1\\ N_2\\ N_3\end{bmatrix}[N_3 \quad N_2 \quad N_3]\mathrm{d}\Omega$$

از آنجایی که $\dfrac{\partial N_i}{\partial y} = \dfrac{a_i}{2A}$ ؛ $\dfrac{\partial N_i}{\partial x} = \dfrac{b_i}{2A}$ رابطه فوق به صورت زیر تبدیل می شود.

$$[a]^e = \frac{k_e}{4A}\begin{bmatrix}a_1^2+b_1^2 & a_1a_2+b_1b_2 & a_1a_3+b_1b_3\\ a_2a_1+b_2b_1 & a_2^2+b_2^2 & a_2a_3+b_2b_3\\ a_3a_1+b_3b_1 & a_3a_2+b_3b_2 & a_3^2+b_3^2\end{bmatrix} - \frac{r_eA}{12}\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

روش اجزای محدود اسکالر

شار خروجی برای یک المان سطحی از رابطه زیر محاسبه می شود.

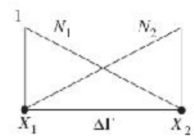
$$Q_e = \int_{\Gamma_e} q_e N_j \mathrm{d}\Gamma$$

که در این رابطه $q - k\partial u/\partial n$

از آن جایی که طول المان ها معمولا کوچک است شار خروجی را می توان در طول هر المان ثابت فرض کرد. از طرف دیگر این شار را در روش اجزای محدود به صورت متمرکز فرض کرده و به گره اختصاص می دهیم.

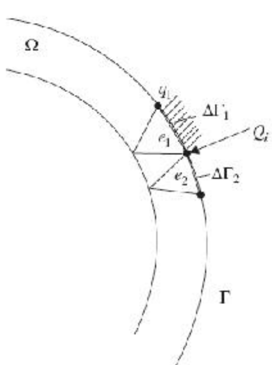
شار برای یک المان که بر روی مرز قرار دارد به صورت زیر تعریف می شود.

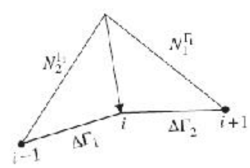
$$\{Q\}^e = \int_{\Delta\Gamma} q_e \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} \mathrm{d}\Gamma$$



روش اجزای محدود اسکالر

بنابراین شار اختصاص داده شده به هر گره در مرز به صورت زیر تعریف می شود.





$$Q_i = \int_{\Delta\Gamma_1} q_1 N_2^{\Gamma_1} d\Gamma + \int_{\Delta\Gamma_2} q_2 N_1^{\Gamma_2} \mathrm{d}\Gamma$$

با فرض ثابت بودن q_1 and q_2

$$Q_i = q_1 \frac{\Delta\Gamma_1}{2} + q_2 \frac{\Delta\Gamma_2}{2}$$

روش اجزای محدود اسکالر

آخرین قسمت باقیمانده تعیین اثرات منبع است.

$$\{p\}^e = \int_{\Omega e} p_e\{N\}\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega e} p_e \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} \mathrm{d}\Omega$$

در صورتی که المان به اندازه کافی کوچک انتخاب شده باشد که بتوان مقدار منبع را بر روی آن ثابت در نظر گرفت.

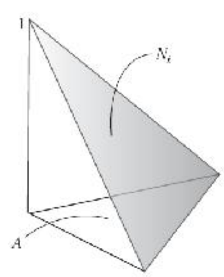
$$\{p\}^e = p_e \int_{\Omega} \{N\}\mathrm{d}\Omega$$

مقدار انتگرال فوق به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$\int_{\Omega e} N_i \mathrm{d}\Omega \quad \Rightarrow \quad \iint_{\Omega} N_i(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

روش اجزای محدود اسکالر

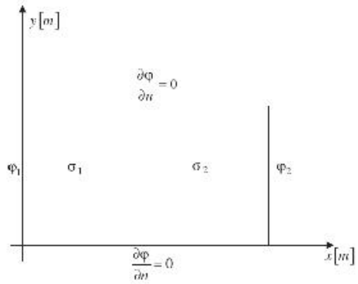
مقدار این انتگرال برابر حجم محصور داخل تابع درون یابی است.



$$\{p\}^e = \frac{1}{3} p_e \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} A$$

روش اجزای محدود اسکالر

مثال: توزیع پتانسیل اسکالر برای ناحیه نشان داده شده در شکل را با توجه به شرایط زیر بدست آورید.



$$\sigma_1 = 1\,\mathrm{S/m},\ \sigma_2 = 3\,\mathrm{S/m}$$

$$\varphi_1 = 100\,\mathrm{V},\ \varphi_2 = 0\,\mathrm{V}$$

حل:

ابتدا معادله دیفرانسیل مربوطه را استخراج می کنیم.

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

$$\nabla\vec{J} = 0; \quad \vec{J} = \sigma\vec{E} \Rightarrow \nabla(\sigma\nabla\varphi) = 0$$

روش اجزای محدود اسکالر

با تبدیل فرم معادله به فورمولاسیون ضعیف نتیجه زیر حاصل می شود.

$$\int_{\Omega} (\sigma\nabla\varphi)\nabla N_j \mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma} \sigma\frac{\partial\varphi}{\partial n} N_j \mathrm{d}\Gamma$$

با توجه به اینکه شرایط مرزی در مرز بالا و پایین از نوع نیومن همگن است، در این مرزها می توان نتیجه گرفت که

$$\int_{\Omega} (\sigma\nabla\varphi)\nabla N_j \mathrm{d}\Omega = 0$$

حل تقریبی معادله را به صورت زیر می توان در نظر گرفت.

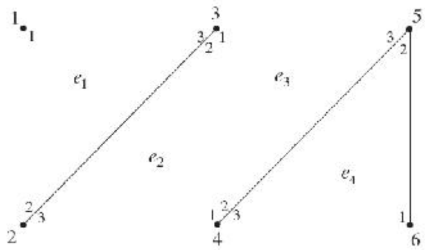
$$\varphi = \{N\}^T\{\alpha\}$$

روش اجزای محدود اسکالر

با جایگذاری این رابطه در معادله، فرم ماتریسی معادله حاصل می شود که ضرایب آن به صورت زیر قابل بیان است.

$$[a]^e = \frac{\sigma_e}{4A}\begin{bmatrix} a_1^2+b_1^2 & a_1a_2+b_1b_2 & a_1a_3+b_1b_3 \\ a_2a_1+b_2b_1 & a_2^2+b_2^2 & a_2a_3+b_2b_3 \\ a_3a_1+b_3b_1 & a_3a_2+b_3b_2 & a_3^2+b_3^2 \end{bmatrix}$$

ناحیه حل مطابق شکل زیر به المان های محدود تقسیم بندی شده است.



145

روش اجزای محدود اسکالر

هر یک از گره ها به دو صورت محلی و سراسری شماره گذاری شده اند.

$$[a]^e = \frac{\sigma_e}{4A}\begin{bmatrix} a_1^2+b_1^2 & a_1a_2+b_1b_2 & a_1a_3+b_1b_3 \\ a_2a_1+b_2b_1 & a_2^2+b_2^2 & a_2a_3+b_2b_3 \\ a_3a_1+b_3b_1 & a_3a_2+b_3b_2 & a_3^2+b_3^2 \end{bmatrix}$$

با جایگذاری مقادیر برای المان های مختلف ماتریس ضرایب به صورت زیر بدست می آید.

$$[a]^{e_1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [a]^{e_2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[a]^{e_3} = [a]^{e_4} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

146

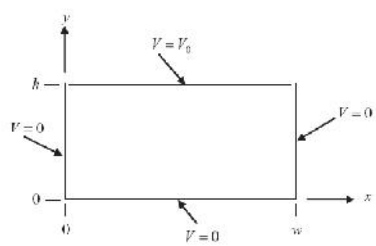
روش اجزای محدود اسکالر

ماتریسی سراسری سیستم بر اساس ماتریس های محلی به صورت زیر قابل بازسازی است.

$$
\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 2 & - & - & 0 & 0 & 0 \\ - & 2 & 0 & - & 0 & 0 \\ - & 0 & 8 & - & - & 0 \\ 0 & - & - & 8 & 0 & - \\ 0 & 0 & - & 0 & 6 & - \\ 0 & 0 & 0 & - & - & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ 0 \\ 0 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix}
$$

روش اجزای محدود اسکالر

مثال ۲– حل معادله لاپلاس $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$ برای ناحیه نشان داده شده در شکل

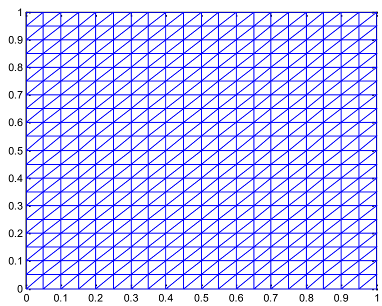


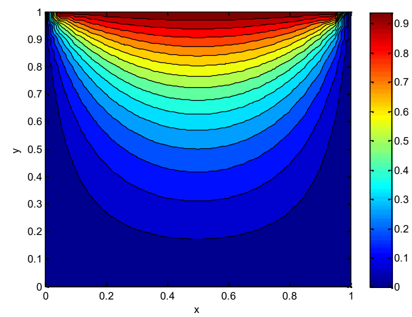
حل: حل تحلیلی این معادله بسیار ساده بوده و به صورت زیر قابل بیان است.

$$
V(x,y)=\frac{4V_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2k-1)\pi x}{w}\sinh\frac{(2k-1)\pi y}{w}}{(2k-1)\sinh\frac{(2k-1)\pi b}{w}}
$$

روش اجزای محدود اسکالر

برای حل به روش اجزای محدود از فرآیندی مشابه آنچه ذکر شد استفاده می کنیم. این کار توسط کد نوشته شده در نرم افزار مطلب انجام شد و نتایج آن به صورت زیر است.



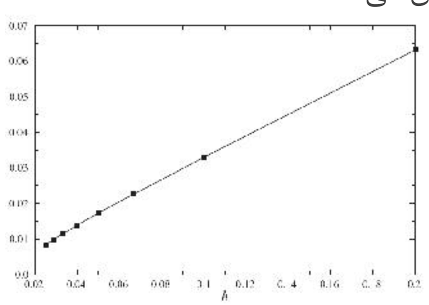


روش اجزای محدود اسکالر

معیار زیر را می توان به عنوان خطای این روش عددی در نظر گرفت.

$$\text{error} = \sqrt{\frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}\left(u_i^e - u_i^n\right)^2}$$

نمودار زیر رابطه بین خطای روش عددی و اندازه مش ها را نشان می دهد.



روش اجزای محدود برداری

در برخی از کاربردها استفاده از روش اجزای محدود اسکالر دارای نواقصی است که برای رفع آن می توان از روش اجزای محدود برداری استفاده کرد. برخی از این نواقص به شرح زیر است:

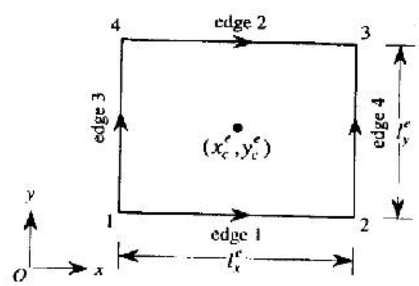
- حاصل شدن جواب های غیر فیزیکی که برخی از شرایط مسئله را ارضا نمی کند.
- نامناسب بودن در برخورد با شرایط مرزی در مرز بین دو محیط و سطوح هادی
- منفرد شدن میدان در برخی از لبه ها و گوشه ها در دی الکتریک ها و هادی ها

هنگام بروز این مشکلات می توان از روش اجزای محدود برداری به جای اسکالر استفاده کرد.

روش اجزای محدود برداری

تفاوت اصلی روش اجزای محدود برداری و اسکالر در نحوه تعریف توابع درون یابی و نوع المان هایی است که برای گسسته سازی سطح مورد استفاده قرار می گیرد. در ادامه دو المان سطح مستطیلی و مثلثی مورد بررسی قرار می گیرد.

۱- المان سطح مستطیلی:



روش اجزای محدود برداری

تابع درون یابی برای مولفه های میدان در هر نقطه به صورت زیر قابل تعریف است.

$$E_x^e = \frac{1}{\ell_y^e}\left(y_c^e + \frac{\ell_y^e}{2} - y\right)E_{x1}^e + \frac{1}{\ell_y^e}\left(y - y_c^e + \frac{\ell_y^e}{2}\right)E_{x2}^e$$

$$E_y^e = \frac{1}{\ell_x^e}\left(x_c^e + \frac{\ell_x^e}{2} - x\right)E_{y1}^e + \frac{1}{\ell_x^e}\left(x - x_c^e + \frac{\ell_x^e}{2}\right)E_{y2}^e$$

بنابراین می توان میدان در داخل ناحیه را به صورت زیر بیان کرد.

$$\mathbf{E}^e = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{N}_i^e E_i^e$$

که در این رابطه

$$\mathbf{N}_1^e = \frac{1}{\ell_y^e}\left(y_c^e + \frac{\ell_y^e}{2} - y\right)\hat{x}$$

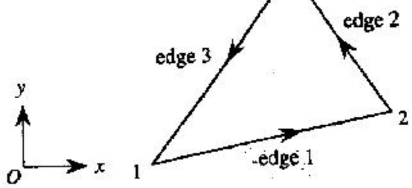
روش اجزای محدود برداری

$$\mathbf{N}_2^e = \frac{1}{\ell_y^e}\left(y - y_c^e + \frac{\ell_y^e}{2}\right)\hat{x}$$

$$\mathbf{N}_3^e = \frac{1}{\ell_x^e}\left(x_c^e + \frac{\ell_x^e}{2} - x\right)\hat{y}$$

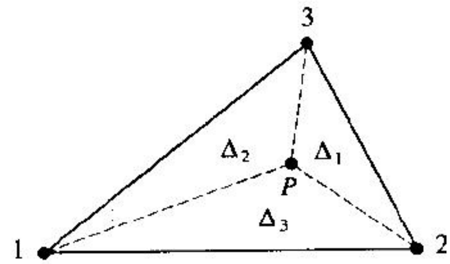
$$\mathbf{N}_4^e = \frac{1}{\ell_x^e}\left(x - x_c^e + \frac{\ell_x^e}{2}\right)\hat{y}.$$

۲- المان مثلثی



روش اجزای محدود برداری

از آنجایی که در المان مثلثی اضلاع ممکن است در راستای محورهای مختصات نباشند، بنابراین بسط مولفه های میدان بر اساس بردارهای موجود بر لبه های مثلث کار ساده ای نیست. برای حل این مشکل یک دستگاه مختصات جدید به نام دستگاه مختصات ناحیه تعریف می کنیم.



روش اجزای محدود برداری

مساحت مثلث ایجاد شده به وسیله نقطه دلخواه P به صورت زیر تعریف می شود.

$$\Delta_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{vmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[(x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e) + x(y_2^e - y_3^e) + y(x_3^e - x_2^e)\right]$$

$$L_1^e = \frac{\Delta_1}{\Delta^e} = \frac{1}{2\Delta^e}\left(a_1^e + b_1^e x + c_1^e y\right)$$

به طور مشابه

$$L_2^e = \frac{\Delta_2}{\Delta^e} = \frac{1}{2\Delta^e}\left(a_2^e + b_2^e x + c_2^e y\right)$$

$$L_3^e = \frac{\Delta_3}{\Delta^e} = \frac{1}{2\Delta^e}\left(a_3^e + b_3^e x + c_3^e y\right)$$

روش اجزای محدود برداری

بنابراین هر نقطه در داخل المان را در دستگاه مختصات ناحیه به صورت زیر می توان بیان کرد.

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^e & x_2^e & x_3^e \\ y_1^e & y_2^e & y_3^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1^e \\ L_2^e \\ L_3^e \end{Bmatrix}$$

حال با استفاده از دستگاه مختصات ناحیه می توانیم توابه برداری پایه را برای المان مثلثی تعریف کنیم.

$$\mathbf{N}_1^e = (L_1^e \nabla L_2^e - L_2^e \nabla L_1^e)\ell_1^e$$

$$\mathbf{N}_2^e = (L_2^e \nabla L_3^e - L_3^e \nabla L_2^e)\ell_2^e$$

$$\mathbf{N}_3^e = (L_3^e \nabla L_1^e - L_1^e \nabla L_3^e)\ell_3^e$$

$$\mathbf{E}^e = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{N}_i^e E_i^e$$

157

روش اجزای محدود برداری

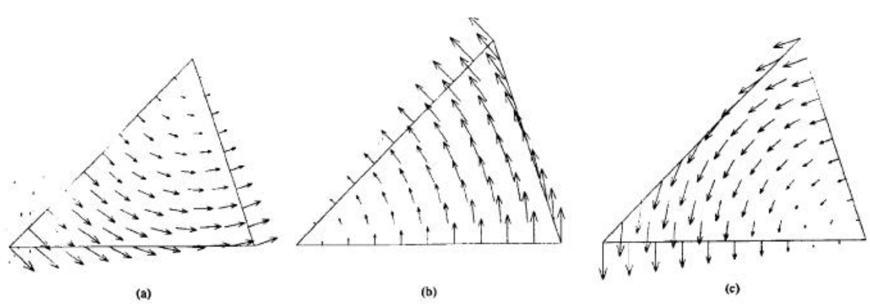


Fig. 8.3 Vector basis functions for a triangular element. (a) $\mathbf{N}_1^e$. (b) $\mathbf{N}_2^e$. (c) $\mathbf{N}_3^e$.

158

روش اجزای محدود در حوزه زمان

در سال های اخیر از روش اجزای محدود در حوزه زمان برای تحلیل برخی از مسائل الکترومغناطیس استفاده شده است. برای توضیح این روش از حل یک مثال خاص استفاده می کنیم.

میدان های الکتریکی ایجاد شده توسط یک منبع جریان به صورت زیر قابل بیان است.

$$\nabla \times \left[\frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\right] + \epsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} + \sigma\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\frac{\partial\mathbf{J}_i(\mathbf{r},t)}{\partial t} \qquad \mathbf{r} \in V$$

شرایط مرزی این مسئله نیز از نوع شرایط مرزی مخلوط است که به صورت زیر قابل بیان است.

$$\hat{n} \times \left[\frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\right] + Y\frac{\partial}{\partial t}[\hat{n} \times \hat{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t)] = \mathbf{U}(\mathbf{r},t) \qquad \mathbf{r} \in S$$

روش اجزای محدود در حوزه زمان

فورمولاسیون ضعیف این معادله دیفرانسیل به صورت زیر قابل بیان است.

$$\begin{aligned}\iiint_V \bigg\{&\frac{1}{\mu}[\nabla \times \mathbf{N}_i(\mathbf{r})]\cdot[\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t)] + \epsilon\mathbf{N}_i(\mathbf{r})\cdot\frac{\partial^2\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}\\ &+ \sigma\mathbf{N}_i(\mathbf{r})\cdot\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \mathbf{N}_i(\mathbf{r})\cdot\frac{\partial\mathbf{J}_i(\mathbf{r},t)}{\partial t}\bigg\}dV\\ &+ \iint_S \left\{Y[\hat{n} \times \mathbf{N}_i(\mathbf{r})]\cdot\frac{\partial}{\partial t}[\hat{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t)] + \mathbf{N}_i(\mathbf{r})\cdot\mathbf{U}(\mathbf{r},t)\right\}dS = 0\end{aligned}$$

که در این رابطه

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \sum_{j=1}^{N} u_j(t)\mathbf{N}_j(\mathbf{r})$$

روش اجزای محدود در حوزه زمان

با جایگذاری در رابطه و ساده سازی آن

$$[T]\frac{d^2\{u\}}{dt^2} + ([R] + [Q])\frac{d\{u\}}{dt} + [S]\{u\} + \{f\} = \{0\}.$$

که در این رابطه

$$T_{ij} = \iiint_V \epsilon \mathbf{N}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N}_j(\mathbf{r})\, dV$$

$$R_{ij} = \iiint_V \sigma \mathbf{N}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N}_j(\mathbf{r})\, dV$$

$$Q_{ij} = \iint_S Y[\hat{n} \times \mathbf{N}_i(\mathbf{r})] \cdot [\hat{n} \times \mathbf{N}_j(\mathbf{r})]\, dS$$

$$S_{ij} = \iiint_V \frac{1}{\mu}[\nabla \times \mathbf{N}_i(\mathbf{r})] \cdot [\nabla \times \mathbf{N}_j(\mathbf{r})]\, dV$$

روش اجزای محدود در حوزه زمان

برای حل این معادله از تعریف مشتق مرکزی استفاده می کنیم.

$$\frac{du}{dt} \approx \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} \approx \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{(\Delta t)^2}$$

باجایگذاری در معادله اصلی فرم بازگشتی آن مشخص می شود.

$$\left\{\frac{1}{(\Delta t)^2}[T] + \frac{1}{2\Delta t}[T_\sigma]\right\}\{u\}^{n+1} = \left\{\frac{2}{(\Delta t)^2}[T] - [S]\right\}\{u\}^n$$

$$- \left\{\frac{1}{(\Delta t)^2}[T] - \frac{1}{2\Delta t}[T_\sigma]\right\}\{u\}^{n-1} - \{f\}^n$$

روش اجزای محدود در حوزه زمان

تنها نکته باقیمانده بررسی شرط پایداری این معادله است. برای انجام این کار یک حالت خاص که در مسئله تلفات وجود ندارد و بنابراین $[T_\sigma] = \bar{0}$ انتخاب شده است را مورد بررسی قرار می دهیم.

$$\frac{1}{(\Delta t)^2}[T]\{u\}^{n+2} - \left\{\frac{2}{(\Delta t)^2}[T] - [S]\right\}\{u\}^{n+1} + \frac{1}{(\Delta t)^2}[T]\{u\}^n$$
$$= -\{f\}^{n+1}.$$

با اعمال تبدیل Z بر روی این معادله

$$\frac{1}{(\Delta t)^2}[T]z^2\{\tilde{u}\} - \left\{\frac{2}{(\Delta t)^2}[T] - [S]\right\}z\{\hat{u}\} + \frac{1}{(\Delta t)^2}[T]\{\tilde{u}\} = 0$$

روش اجزای محدود در حوزه زمان

و یا به فرم ساده تر

$$-\frac{(z-1)^2}{z}\{\tilde{u}\} = (\Delta t)^2[T]^{-1}[S]\{\tilde{u}\}$$

$-(z-1)^2/z$ در واقع مقدار ویژه ماتریس $(\Delta t)^2[T]^{-1}[S]$ است.

بنابراین

$$\lambda = -(z-1)^2/z \qquad \text{or} \qquad (z-1)^2 + \lambda z = 0.$$

در نتیجه شرط پایداری را به صورت زیر می توان بیان کرد.

$$\Delta t \leq \frac{\sqrt{\lambda_{max}}}{\sqrt{\rho([T]^{-1}[S])}}$$