بخش سوم: محاسبهٔ ضریب جفت‌شدگی

۳-۱. تقریب‌های مختلف در محاسبهٔ ضریب جفت‌شدگی

همانطور که در فصل قبل گفته شد، به طور کلی برای محاسبه ظرفیت الکتریکی یک خازن صفحه موازی، ابتدا دو ولتاژ ثابت (معمولاً 1 ولت و 1- ولت) به دو صفحه اعمال می‌شود. حالا هر صفحه باید به قطعات کوچکتری تقسیم شود. ما در این پایان‌نامه، این قطعات کوچک را کاشی می‌نامیم. چگالی بار هر کاشی ثابت فرض می‌شود. و پتانسیل الکتریکی تمام کاشی‌های تشکیل دهندهٔ هر صفحهٔ رسانا برابر پتانسیل آن صفحه در نظر گرفته می‌شود. از طرف دیگر پتانسیل هر کاشی را می‌توان با استفاده از بار الکتریکی همهٔ کاشی‌ها و ضرایب جفت‌شدگی بین کاشی‌ها محاسبه کرد.

$$V_i = \sum_j P_{ij} Q_j$$

این فرمول را می توان به صورت ماتریسی نوشت.

$$\mathbf{V} = \mathbf{PQ}$$

اکنون حل این معادله ماتریسی برای محاسبه بار هر قسمت ضروری است و بدیهی است که وقتی پتانسیل الکتریکی و بار الکتریکی مشخص باشد، می توان ظرفیت خازنی را به دست آورد.

ضریب جفت بین دو بخش به شکل و محل دو قطعه بستگی دارد. می‌توان آن را با فرمول پتانسیل بار نقطه‌ای تقریب زد.

$$P_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \; d_{ij}}$$

که d_{ij} فاصله بین مراکز دو بخش است.

در ادبیات علمی، این تقریب در روشی به نام «روش شبیه‌سازی بار سطحی» [33] استفاده می‌شود، اگرچه این روش را می‌توان در انواع MOM دسته‌بندی کرد. این فرمول برای بدست آوردن ضریب جفت‌شدگی یک قطعه با

خودش مناسب نیست. جفت‌شدگی یک قطعه با خودش از انتگرال‌گیری در محدودهٔ آن، برای یافتن میانگین فاصله تمام نقاط منطقه تا مرکز آن محاسبه می‌شود.

$$P_{ii} = \frac{1}{S_i}\int_{x\in S_i}\int_{y\in S_i}\frac{dx\ dy}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-x_{ci})^2+(y-y_{ci})^2}}$$

در این رابطه، (x_{ci}, y_{ci}) نقطه مرکزی دامنه i و S_i محدودهٔ قطعه است. برای کاهش تقریب محاسبات در محاسبه ظرفیت، بهتر است از یک فرمول انتگرال مضاعف نه تنها برای خود جفت‌شدگی بلکه برای جفت‌شدگی متقابل استفاده شود. این موضوع ما را به فرمول انتگرال دوگانه می‌رساند.

$$P_{ij} = \frac{1}{S_i}\int_{x\in S_i}\int_{y\in S_i}\frac{dx\ dy}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-x_{cj})^2+(y-y_{cj})^2+z^2}}$$

در این رابطه، دو کاشی موازی فرض شده‌اند. z فاصله دو کاشی است و در انتگرال‌گیری ثابت است. انتگرال باید روی محدودهٔ کاشی i محاسبه شود و فاصله هر نقطه تا مرکز حوزهٔ دیگر در این فرمول در نظر گرفته می‌شود. این انتگرال ها را می توان به صورت تحلیلی محاسبه کرد و برای یافتن ظرفیت خازن های صفحه موازی توسط نیشیاما و ناکامورا [26] استفاده شده است.

بدیهی است که این فرمول در جایی که دو دامنه با توجه به ابعادشان نسبتاً نزدیک هستند مناسب نیست. در این حالت، مرکز یک دامنه را نمی‌توان به عنوان نماینده همه نقاط پیشنهاد کرد. در واقع بهتر است تمام فواصل متقابل بین نقاط دو بخش را پیدا کنیم. این کار را می‌توان با استفاده از انتگرال چهارگانه به جای انتگرال دوگانه انجام داد.

$$P_{ij} = \frac{1}{S_iS_j}\iint_{x_i,y_i\in S_i}\iint_{x_j,y_j\in S_j}\frac{dx_i dy_i dx_j dy_j}{4\pi\varepsilon_0 d_{ij}}$$

در این رابطه، d_{ij} فاصلهٔ بین دو نقطه در دو کاشی مختلف است.

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+z^2}$$

۲-۳. انتگرال‌گیری چهارگانه برای بخش های مستطیلی موازی

برای به دست آوردن ضرایب جفت شرح داده شده در بالا می‌توان از انتگرال‌گیری عددی استفاده کرد یا آن را به صورت تحلیلی حل کرد. اگرچه پیشرفت های زیادی در تکنیک های عددی وجود دارد، اما راه حل‌های تحلیلی

هنوز زمان پردازش کمتری دارند. این کار در ابتدا توسط ایبرت و هانسن برای حوزه های مثلثی [10] انجام شده است. راه حل تحلیلی برای حوزه های مستطیلی توسط Lopez-Pena و [20] Mosig،با یک اشتباه کوچک در فرمول به دست آمده ارائه شده است. اخیراً این انتگرال‌گیری توسط Maccarrone و [22] Paffuti انجام شده است و از نتیجه آن برای یافتن ظرفیت و نیرو برای دو الکترود مربعی استفاده شده است. این انتگرال‌ها برای محاسبه اندوکتانس مغناطیسی توسط ژنفی سانگ و همکاران محاسبه شده است. [31].

برای انجام انتگرال در معادله (6) می‌توان از این تبدیل انتگرال استفاده کرد [6].

$$\frac{1}{d_{ij}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2 d_{ij}^2} du$$

و معادله (6) را می توان به این شکل بازنویسی کرد.

$$P_{ij} = \frac{2}{\sqrt{\pi} S_i S_j} \int_0^\infty \iint_{x_i, y_i \in S_i} \iint_{x_j, y_j \in S_j} \frac{e^{-u^2 d_{ij}^2} dx_i dy_i dx_j dy_j}{4\pi\varepsilon_0} du$$

برای سادگی، مقادیر ثابت را از فرمول حذف می کنیم.

$$I = \int_0^\infty \iint_{x_i, y_i \in S_i} \iint_{x_j, y_j \in S_j} e^{-u^2 d_{ij}^2} dx_i dy_i dx_j dy_j du$$

هیچ راهی برای یافتن تابع اولیهٔ $e^{-u^2 d_{ij}^2}$ بر روی این پنج انتگرال وجود ندارد، اما تابع اولیه بر روی چهار انتگرال داخلی را می توان یافت. J را تابع اولیه انتگرال چهارگانه فرض کنید.

$$J = \int\int\int\int e^{-u^2 d_{ij}^2} dx_i dy_i dx_j dy_j$$

سپس J را می توان به صورت تحلیلی محاسبه کرد. این کار توسط نرم افزارهای رایج ریاضی قابل انجام است. تابع اولیه با استفاده از "Wolfram Alpha" [35] به دست آمده است.

$$j = \frac{e^{-u^2(x^2+y^2+z^2)}}{4u^4} + \frac{\sqrt{\pi} e^{-u^2(y^2+z^2)} x \operatorname{erf}(ux)}{4u^3} + \frac{\sqrt{\pi} e^{-u^2(x^2+z^2)} y \operatorname{erf}(uy)}{4u^3} + \frac{\pi e^{-u^2 z^2} x\, y \operatorname{erf}(ux) \operatorname{erf}(uy)}{4u^2}$$

که در آن $x = x_i - x_j$ ، $y = y_i - y_j$ و $z = z_c$. حال این انتگرال‌ها باید جداگانه محاسبه شوند.

$$I_1 = \left[\int_0^\infty \frac{e^{-u^2(x^2+y^2+z^2)}}{4u^4} \right]_{D_0}^{D_1}$$

$$I_2 = \left[\int_0^\infty \frac{\sqrt{\pi} e^{-u^2(y^2+z^2)} x \operatorname{erf}(ux)}{4u^3} \right]_{D_0}^{D_1}$$

$$I_3 = \left[\int_0^\infty \frac{\sqrt{\pi} e^{-u^2(x^2+z^2)} y \operatorname{erf}(uy)}{4u^3} \right]_{D_0}^{D_1}$$

$$I_4 = \left[\int_0^\infty \frac{\pi e^{-u^2 z^2} x\, y \operatorname{erf}(ux) \operatorname{erf}(uy)}{4u^2} \right]_{D_0}^{D_1}$$

ما می خواهیم محاسبات را روی بخش های مستطیلی انجام دهیم. بنابراین حدود انتگرال بر روی ناحیهٔ دو مستطیل است.

$$D_0: \quad x_i = a_0, y_i = b_0,\ x_j = c_0, y_j = d_0$$
$$D_1: \quad x_i = a_1, y_i = b_1,\ x_j = c_1, y_j = d_1$$

در نهایت می توان پاسخ را محاسبه کرد.

$$I_1 = \sum_{i,j,k,l=0}^{1} A_{i,j,k,l} \frac{\sqrt{\pi}}{6} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$I_2 = \sum_{i,j,k,l=0}^{1} -A_{i,j,k,l} \frac{\sqrt{\pi}}{4}\ x\ \times$$
$$\left((y^2 + z^2) \sinh^{-1}(\frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}) + x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)$$

$$I_3 = \sum_{i,j,k,l=0}^{1} -A_{i,j,k,l} \frac{\sqrt{\pi}}{4}\ y\ \times$$
$$\left((x^2 + z^2) \sinh^{-1}(\frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}}) + y\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)$$

$$I_4 = \sum_{i,j,k,l=0}^{1} A_{i,j,k,l} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ x\ y\ \Bigg(x \sinh^{-1}(\frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}}) +$$
$$y \sinh^{-1}(\frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}) - z \tan^{-1}(\frac{x\ y}{z\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}) \Bigg)$$

در عبارات بالا $x = a_i - c_j$ ، $y = b_k - d_l$ و $z = z_c$. مقدار $A_{i,j,k,l}$ بـه مجمـوع i تـا l بسـتگی دارد. اگـر این جمع یک عدد فرد باشد $A_{i,j,k,l}$ می شود ۱- در غیر این صورت مقدار آن برابر با ۱ است.

$$A_{i,j,k,l} = \begin{cases} 1 & \text{if } i{+}j{+}k{+}l \text{ is even} \\ -1 & \text{if } i{+}j{+}k{+}l \text{ is odd} \end{cases}$$

اکنون باید مجموع I_1 تا I_4 را پیدا کرد.

$$\begin{aligned} I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \sum_{i,j,k,l=0}^{1} A_{i,j,k,l} \\ \Bigg[\frac{\sqrt{\pi}}{12}\Big((-x^2 - y^2 + 2\,z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big) \\ + \frac{\sqrt{\pi}}{4}\Big(y(x^2 - z^2)\,\sinh^{-1}\Big(\frac{y}{\sqrt{x^2+z^2}}\Big)\Big) \\ + \frac{\sqrt{\pi}}{4}\Big(x(y^2 - z^2)\,\sinh^{-1}\Big(\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}\Big)\Big) \\ - \frac{\sqrt{\pi}}{2}x\,y\,z\,\tan^{-1}\Big(\frac{x\,y}{z\,\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Big)\Bigg] \end{aligned}$$

همانطور که مشخص است "$\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$" بنابراین فرمـول فـوق را می‌تـوان بـه این شـکل بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned} I = \sum_{i,j,k,l=0}^{1} A_{i,j,k,l} \Bigg[\frac{\sqrt{\pi}}{12}(-x^2 - y^2 + 2\,z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ + \frac{\sqrt{\pi}}{4}y\,(x^2 - z^2)\,\ln\Big(\frac{y + \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+z^2}}\Big) \\ + \frac{\sqrt{\pi}}{4}x\,(y^2 - z^2)\,\ln\Big(\frac{x + \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{y^2+z^2}}\Big) \\ - \frac{\sqrt{\pi}}{2}x\,y\,z\,\tan^{-1}\Big(\frac{x\,y}{z\,\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Big)\Bigg] \end{aligned}$$

در این مقاله، ما ترجیح می دهیم از توابع هـذلولوی اسـتفاده کـنیم کـه در معادلـه (17) معـرفی شـده اسـت. در صورتی که دو بخش در یک صفحه قرار گرفته باشند، جفت‌شدگی متقابل با در نظر گرفتن حد معادله (17) زمانی که z به صفر می‌رسد به دست می‌آید.

$$I_{coplanar} = \sum_{i,j,k,l=0}^{1} A_{i,j,k,l}\Bigg[\frac{\sqrt{\pi}}{12}\Big((-x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}\Big) + \frac{\sqrt{\pi}}{4}\Big(y(x^2)\sinh^{-1}(\frac{y}{x}) + x(y^2)\sinh^{-1}(\frac{x}{y})\Big)\Bigg]$$

اجرای این فرمول نیازمند توجه ویژه به مواردی است که هر مخرج کسری صفر شود. به راحتی هر جملـه، شـامل چنین کسری به صفر می رسد و می تواند در محاسبات حذف شود.

و در نهایت، خود جفت شدن یک قطعه مستطیلی به این شکل است.

$$I_{SC} = \frac{\sqrt{\pi}}{3}(x^3+y^3) + \frac{\sqrt{\pi}}{3}\Big((-x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}\Big) + \sqrt{\pi}\Big(y(x^2)\sinh^{-1}(\frac{y}{x}) + x(y^2)\sinh^{-1}(\frac{x}{y})\Big) \quad (1)$$

در این رابطه x و y طول و عرض ناحیه مستطیلی هستند.

۳-۳. انتگرال گیری چهارگانه برای بخش‌های مستطیلی عمود بر هم

ضریب جفت‌شدگی برای قطعات عمود بر هم با این فرمول بدست می‌آید.

جایی که d_{ij} است

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i-x_j)^2 + (y_i-y_c)^2 + (z_c-z_j)^2}$$

جایی که z_c و y_c در انتگرال گیری ثابت هستند. با استفاده از تبدیل انتگرال اسـتفاده شـده بـرای قطعـات مـوازی، تابع اولیه انتگرال چهارگانه را می‌توان به دست آورد.

$$J = \frac{\pi\sqrt{\pi}\,x\,\mathrm{erf}(ux)\,\mathrm{erf}(uy)\,\mathrm{erf}(uz)}{8u^3} + \frac{\pi e^{-u^2x^2}\mathrm{erf}(uy)\,\mathrm{erf}(uz)}{8u^4}$$

جایی که $x = x_i - x_j$ ، $y = y - y_j$ و $z = x_i - x_j$.

و در نهایت ضریب جفت شدن دو صفحه عمود بر هم به دست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
I = & \sum_{i,j,k,l=0}^{1} A_{i,j,k,l} \\
& \Bigg[-\frac{\sqrt{\pi}}{6}\Big((y\ z)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big) \\
& + \ \frac{\sqrt{\pi}}{12}\left(z(3x^2-z^2)\sinh^{-1}(\frac{y}{\sqrt{x^2+z^2}})\right) \\
& + \ \frac{\sqrt{\pi}}{12}\left(y(3x^2-y^2)\sinh^{-1}(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}})\right) \\
& + \ \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(x\ y\ z\sinh^{-1}(\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}})\right) \\
& - \frac{\sqrt{\pi}}{4}\ x\ z^2\tan^{-1}(\frac{x\ y}{z\ \sqrt{x^2+y^2+z^2}}) \\
& - \frac{\sqrt{\pi}}{4}\ x\ y^2\tan^{-1}(\frac{x\ z}{y\ \sqrt{x^2+y^2+z^2}}) \\
& - \frac{\sqrt{\pi}}{12}\ x^3\tan^{-1}(\frac{y\ z}{x\ \sqrt{x^2+y^2+z^2}})\Bigg]
\end{aligned}
$$

اکنون در عبارات بالا $x = a_i - c_j$ ، $y = b_k - y_c$ و $z = z_c d_l$.