« به نام خالق نوسان »

دانشگاه اصفهان

دانشکده فیزیک

گروه فیزیک

گزارش پروژه کارشناسی

رشته فیزیک

عنوان پروژه:

Implementation of the quantum teleportation protocol on IBM quantum computer

پیاده‌سازی پروتکل دوربری کوانتومی بر کامپیوتر کوانتومی IBM

پژوهشگر: سعید شیرانی بیدآبادی

استاد راهنما: دکتر حمیدرضا محمدی خشوئی

شهریور 1402

در این ارائه قصد داریم:

- ابتدا به معرفی اجزای تشکیل‌دهنده‌ی کامپیوتر کوانتومی بپردازیم.
- تفاوت های کامپیوتر های کوانتومی و کلاسیک را بررسی می‌کنیم.
- یک مسئله‌ی ساده ولی واقعی را با کمک کامپیوترکوانتومی حل می‌کنیم.
- یک پدیده‌ی کوانتومی را با کمک کامپیوتر کوانتومی شبیه سازی می‌کنیم.

حالا دقیقا از کجا شروع کنیم؟!

کیوبیت

یک کیوبیت[۳]، معادل یک واحد اطلاعات کوانتومی می‌باشد. این مفهوم معادل مفهوم کلاسیک بیت[۴] می‌باشد. به طور کلی هر کیوبیت حاوی دو بیت اطلاعات است. برای تبیین یک کیوبیت از خصوصیات سامانه های کوانتومی، بهره می‌بریم. کیوبیت یک سیستم کوانتومی با فضای دوبعدی است. برای تعیین این دوبعد می‌توان ا ز یکی از خصویات سامانه های کوانتومی استفاده کرد.

مقدار کیوبیت به رفتار ناظر نوع اندازه‌گیری و شرایط محیط بستگی دارد. برخلاف بیت که در تمام مواقع و در صورت عدم اعمال تغییر دارای مقدار یکسان است؛ مدار کیوبیت به ناظر و خصوصیات اندازه‌گیری بستگی دارد.

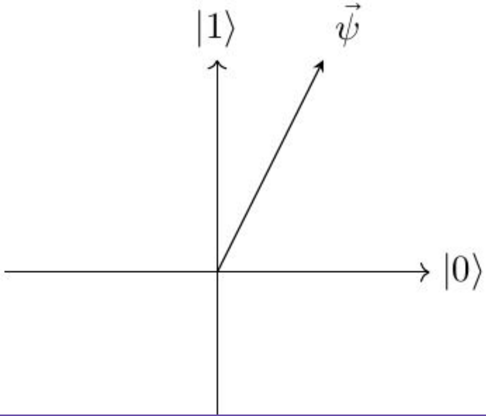
بیت دارای مقدار ثابت است ولی کیوبیت بسته به رفتار ناظر مقادیر متفاوتی می‌تواند داشته باشد.

كيوبيت واحد
Single - Qubit

ابعاد کیوبیت بسته به نوع اندازه گیری و خصوصیتی که اندازه‌گیری می‌شود متفاوت است.

$$\begin{cases} |\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \\ \alpha^2 + \beta^2 = 1 \end{cases}$$

کت‌های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ بیانگر پایه‌های فضای محاسباتی[۶] هستند؛ و مقادیر α^2 و β^2 بیانگر احتمال وقوع هر یک از این حالات، در صورت مشاهده، می‌باشند. نمایش بردار ψ به شکل زیر است:



نمایش ماتریسی کیوبیت‌ها

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

برای تعریف کیوبیت ها، راه های زیادی وجود دارد، حالات قطبش فوتون،اسپین الکترون،یا سطوح انرژی اتم،هریک می‌توانند تعیین کننده‌ی بردارهای فضای کیوبیت باشند.

به‌طور کلی می‌توان با توجه به خواص و نوع کیوبیت و تجهیزات آزمایشگاهی، می‌توان بردارهای فضای هیلبرت خود را تبیین کرد. مدل کوانتومی برخلاف بسیاری از مدل‌های دیگر، ابزاری برای مشاهده‌ی مستقیم حالات وجود ندارد، در بسیاری از مواقع مواردی که برای توصیف رفتار سیستم تعریف می‌کنیم؛ قابل مشاهده‌ی مستقیم در طبیعت نیستند؛ بلکه می‌توان آن ها را پیش بینی کرد.

کیوبیت: خیال یا واقعیت؟!

مفهوم کیوبیت، با «فهم رایج» ما از جهان فیزیکی اطراف ما مغایرت دارد. یک بیت کلاسیک مانند سکه است: یا رو یا پشت. برای سکه های غیراایده آل، ممکن است حالت های دیگری مانند قرار گرفتن آن روی لبه وجود داشته باشد، اما در حالت ایده آل می توان آنها را نادیده گرفت.

در مقابل، یک کیوبیت می تواند در یک طیف پیوسته از حالت ها بین $|0\rangle$ و $|1\rangle$ وجود داشته باشد - تا زمانی که مشاهده شود. بار دیگر تاکید می کنیم که وقتی یک کیوبیت اندازه‌گیری می شود؛ فقط یکی از مقادیر «۰» یا «۱» را به عنوان نتیجه اندازه گیری می دهد. به عنوان مثال، یک کیوبیت می تواند در حالت $|0\rangle + |1\rangle$ باشد، که به این معنی است که با احتمال ۵۰/۵۰ می تواند به عنوان ۰ یا ۱ اندازه گیری شود.

پایه‌های فضای هیلبرت

$$
\begin{aligned}
|+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \\
|-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle
\end{aligned} \tag{۳}
$$

در فرمول ۳ با استفاده از فرمول ۲ یک برهمنهی کوانتومی را تعریف کرده‌ایم. برای مثال حالت $\langle +|$ حالتی از کیوبیت است که با یک بردار ۲ بعدی واحد نشان داده می شود. این حالت، زمانی که اندازه گیری شود، نتیجه ۰ را ۵۰ درصد از زمان و نتیجه ۱ را ۵۰ درصد از زمان می دهد. این حالت را می توان به عنوان یک ترکیب خطی از دو حالت پایه $\langle 0|$ و $\langle 1|$ در نظر گرفت.

این حالت به دلیل عجیب بودنش جالب است. حالت های پایه $\langle 0|$ و $\langle 1|$ تنها حالاتی هستند که می توانند به طور مستقیم مشاهده شوند. حالت $\langle +|$ ، با این حال، یک حالت ترکیبی است که به طور مستقیم قابل مشاهده نیست. تنها زمانی می توان آن را مشاهده کرد که اندازه گیری شود.

کیوبیت های چندتایی

اگر دو بیت داشته باشیم تعداد حالات ممکن بدین صورت است: 00 - 01 - 10 - 11

به طور مشابه اگر دو کیوبیت داشته باشیم؛ حالات ممکن به شرح زیر است:

$$|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$$

به دلیل ماهیت احتمالاتی کیوبیت، احتمال مشاهده‌ی مقدار یک سیستم دو کیوبیتی یک برهم‌نهی از حالات بالاست. به فرمول زیر دقت کنید:

$$|\Psi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle$$

احتمال اندازه‌گیری هریک از مولفه‌های a, b, c, d دقیقا مشابه قبل محاسبه می‌شود. مجموع احتمالات همواره برابر یک است.

به عنوان مثال، بردار حالت:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \tag{۵}$$

یک سیستم دو کیوبیتی را نشان می دهد که در یک برهمنهی مساوی از حالت های ۰۰ و ۱۱ است. این بدان معناست که کیوبیت ها به طور مساوی احتمال اندازه گیری در حالت ۰۰ یا ۱۱ را دارند.

بردار حالت یک سیستم دو کیوبیتی را می توان برای محاسبه احتمال اندازه گیری کیوبیت ها در هر یک از چهار حالت محاسباتی استفاده کرد. به عنوان مثال، احتمال اندازه گیری کیوبیت ها در حالت ۰۰ با فرمول زیر داده می شود:

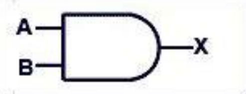
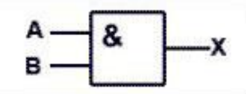
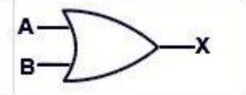
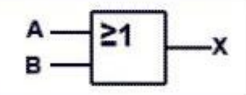
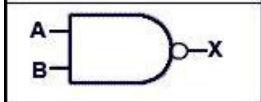
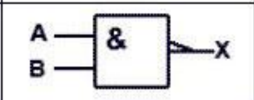
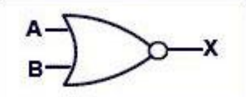
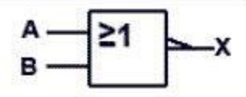
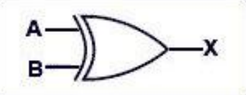
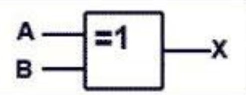
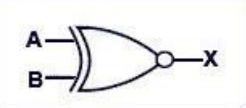
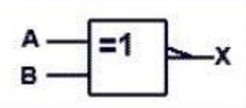
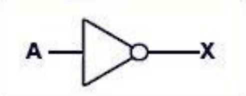
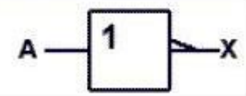
$$P(|00\rangle) = |a|^2 = \frac{1}{2} \tag{۶}$$

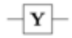
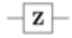
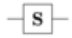
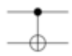
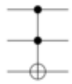
گیت‌های کوانتومی

گیت‌های کوانتومی، یکی از اولین و مهم‌ترین اجزای مدارهای کوانتومی می‌باشند. این گیت‌ها عملگرهایی با قابلیت اثرگذاری روی کیوبیت‌ها می‌باشند. با اعمال یک گیت کوانتومی بر روی یک یا چند کیوبیت، می‌توان تغییرات مدنظر خود را روی کیوبیت اعمال کرد. با کمک این گیت‌ها می‌توان باعث برهم‌نهی کوانتومی یا رمزگذاری داده در داخل یک یا چند کیوبیت شد.

به طور کلی گیت‌ها به دو دسته‌ی کلی تقسیم می‌شوند: تک-کیوبیت، چند-کیوبیت

CLASSICAL VS QUANTUM

ANSI Symbol	IEC Symbol	NAME
		AND
		OR
		NAND
		NOR
		XOR
		XNOR
		NOT

Operator	Gate(s)	Matrix
Pauli-X (X)		$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Pauli-Y (Y)		$\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$
Pauli-Z (Z)		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Hadamard (H)		$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
Phase (S, P)		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$
$\pi/8$ (T)		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}$
Controlled Not (CNOT, CX)		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
Controlled Z (CZ)		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
SWAP		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Toffoli (CCNOT, CCX, TOFF)		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

گیت هادامارد

مهم‌ترین گیت کوانتومی،گیت هادامارد[۹] است. با اعمال اثر این گیت روی یک کیوبیت، آن کیوبیت به‌یک حالت برهم نهی کوانتومی گذار می‌کند. به عبارت دیگر هر یک از زیرحالات این حالت برهم‌نهی، با احتمال یکسانی قابل رخ دادن هستند.

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

نمایش این گیت‌کوانتومی در مدار با علامت زیر است:

$$-\boxed{H}-$$

هادامارد یک گیت بازگشت‌پذیر است.

$$|0\rangle \rightarrow \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= |0\rangle$$

$$|1\rangle \rightarrow \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= |1\rangle$$

$$|\psi\rangle \longrightarrow H|\psi\rangle \longrightarrow HH|\psi\rangle$$

$$HH = I$$

اثبات عملکرد گیت هادامارد با نمایش ماتریسی

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

گیت NOT

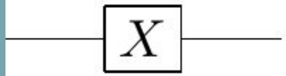
گیت کوانتومی U_{NOT} یک گیت یکه و بازگشت‌پذیر است.

$$U_{NOT}|0\rangle = |1\rangle$$

$$U_{NOT}|1\rangle = |0\rangle$$

$$U_{NOT} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

نمایش یک گیت NOT به صورت زیر است:



$$U_{\mathrm{NOT}}|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |1\rangle$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$$

$$U_{NOT}|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |0\rangle$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$$

گیت CNOT

گیت کوانتومی CNOT[۱۱]، به عنوان گیت منطقی نیز یاد می‌شود. این گیت کوانتومی معادل گیت NOT کلاسیک می‌باشد. به‌طور معمول، برای اعمال اثر این گیت کوانتومی نیاز به دو کیوبیت داریم. این گیت کوانتومی فقط و فقط در مواقعی که «کیوبیت کنترل[۱۲]» دارای مقدار $|1\rangle$ باشد، باعث تغییر وضعیت «کیوبیت هدف[۱۳]» می‌شود.

کیوبیت کنترلی: کیوبیتی است که عملکرد کیوبیت دیگری به نام کیوبیت هدف را کنترل می کند. کیوبیت کنترل تعیین می کند که آیا کیوبیت هدف برگردانده شود یا خیر. اگر کیوبیت کنترل در حالت $|0\rangle$ باشد، کیوبیت هدف بدون تغییر باقی می‌ماند. اگر کیوبیت کنترل در حالت $|1\rangle$ باشد، کیوبیت هدف برگردانده می شود.

کیوبیت هدف: همان کیوبیتی است که توسط کیوبیت کنترل بر روی آن اعمال اثر می شود. بسته به وضعیت کیوبیت کنترل، کیوبیت هدف را می توان برگرداند یا بی‌تغییر رها کند.

$$U_{CNOT}|ab\rangle = |a\ a \oplus b\rangle$$

$|ab\rangle$ چیست؟ این یک بردار در فضای $\mathbb{C}^4$ و a و b دارای مقدار ۰ یا ۱ هستند. $|ab\rangle$ می تواند هر یک از حالت های پایه(یعنی $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$) باشد.

این معادله به ما می گوید؛ که پس از اعمال گیت CNOT به یکی از پایه‌ها، آن حالت به حالت پایه دیگری تبدیل خواهد شد. که این حالت برابر $|a\ a \oplus b\rangle$ می‌باشد. به‌طوری که:

$$|a\ a \oplus b\rangle = |a\rangle \otimes |a \oplus b\rangle$$

بعد از عمل، عدد اول همچنان a است، اما عدد دوم به $a \oplus b$ تبدیل می شود، جایی که $\oplus$ عملیات منطقی کلاسیک انحصاری یا (XOR) است. [۱۴] توجه کنید که:

$$0 \oplus 0 = 0$$

$$0 \oplus 1 = 1$$

$$1 \oplus 0 = 1$$

$$1 \oplus 1 = 0$$

اعمال اثر گیت کنترل روی کیوبیت دوتایی

$$U_{CNOT}|00\rangle = |0, 0 \oplus 0\rangle = |0, 0\rangle = |00\rangle$$

$$U_{CNOT}|01\rangle = |0, 0 \oplus 1\rangle = |0, 1\rangle = |01\rangle$$

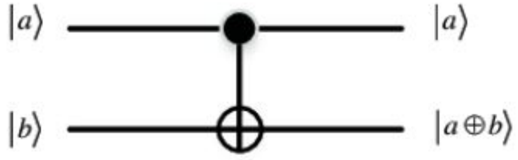
$$U_{CNOT}|10\rangle = |1, 1 \oplus 0\rangle = |1, 1\rangle = |11\rangle$$

$$U_{CNOT}|11\rangle = |1, 1 \oplus 1\rangle = |1, 1\rangle = |10\rangle$$

$\|A$	$B\rangle$		$\|A$	$B \oplus A\ \rangle$
$\|\text{control}\rangle$	$\|\text{target}\rangle$	Effect CNOT Gate	$\|\text{control}\rangle$	$\|\text{target}\rangle$
$\|0\rangle$	$\|0\rangle$	$\Longrightarrow$	$\|0\rangle$	$\|0\rangle$
$\|0\rangle$	$\|1\rangle$	$\Longrightarrow$	$\|0\rangle$	$\|1\rangle$
$\|1\rangle$	$\|0\rangle$	$\Longrightarrow$	$\|1\rangle$	$\|1\rangle$
$\|1\rangle$	$\|1\rangle$	$\Longrightarrow$	$\|1\rangle$	$\|0\rangle$

نمایش ماتریسی این گیت کوانتومی به شکل زیر است:

$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



شکل ۱: نمایش ماتریسی و نمایش گیت کوانتومی. کت a کیوبیت کنترل و کیوبیت b کیوبیت هدف می‌باشد.
CNOT

گیت تغییر فاز

گیت تغییر فاز که به آن گیت P یا گیت فاز نیز می گویند، یک کیوبیت است. گیت ای که فاز نسبی را بین دو بردار پایه جابجا می کند. به عنوان زیر تعریف شده است:

$$\begin{aligned} U_{PS,\phi}|0\rangle &= |0\rangle \\ U_{PS,\phi}|1\rangle &= e^{i\Phi}|1\rangle \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

که در آن Φ فاز و $e^{i\Phi}$ عامل فاز است. زمانی که گیت تغییر فاز بر حالت $|0\rangle$ اثرکند، هیچ تغییری حاصل نمی‌شود. اما با اعمال این گیت به بردار حالت $|1\rangle$، یک فاز اضافه به بردار افزوده خواهد شد. برای افزودن فاز اضافه باید یک عامل نظیر $e^{i\Phi}$ در بردارد حالت ضرب شود. برای درک بهتر مطلب باید به حالت ماتریسی این گیت رجوع کنیم.

$$U_{PS,\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\Phi} \end{pmatrix}$$

با استفاده از روابط بالا می‌توان به راحتی اثبات کرد:

$$U_{PS,\phi}|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\Phi} \end{pmatrix} = e^{i\Phi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{i\Phi}|1\rangle$$

گیت تغییر فاز در مدار و خصوصیات آن

درحالت کلی برای سیستم های تک کیوبیتی می‌توان نوشت:

$$U_{PS,\Phi}|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ e^{i\Phi}\beta \end{pmatrix}$$

$$= \alpha|0\rangle + e^{i\Phi}\beta|1\rangle$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi} \end{pmatrix} \qquad (۱۸)$$

از طرفی داریم:

$$e^{i\pi} = cos(\pi) + isin(\pi) = -1$$

این ماتریس پائولی σ_z می‌باشد؛ که به آن $Z - gate$ نیز می گویند. گیت تغییر فاز، فاز نسبی $|0\rangle$و $|1\rangle$ را با Φ تغییر می دهد. و به این ترتیب گیت Z فاز نسبی را با π تغییر می دهد.

گیت مبادله را در صورت امکان و وجود وقت توضیح بده.

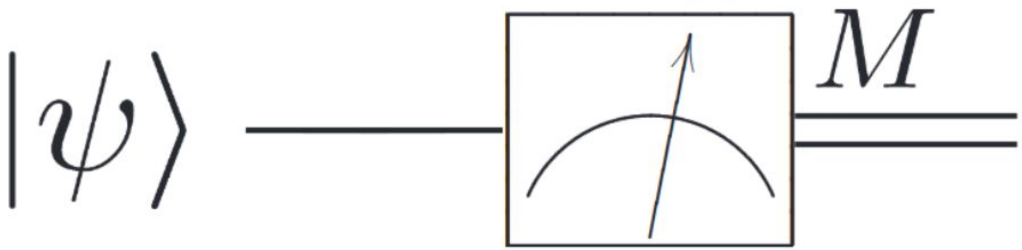
مدارهای کوانتومی

مدارهای کوانتومی[16]، یک دسته از گیت‌های کوانتومی،که با یک توالی بخصوص قرار گرفته اند، می‌باشند. این کیوبیت ها، با توالی یاد شده، روی یک یا چند دسته کیوبیت، اثر داده می‌شوند.

مدارهای کوانتومی، یکی از اولین مفاهیم بکاررفته برای تعریف کامپیوترهای کوانتومی می‌باشند. برای تعریف و شبیه‌سازی هریک از پدیده‌ها و الگوریتم‌های کوانتومی، نیاز به پیاده‌سازی یک مدار به‌خصوص داریم.

مدارهای کوانتومی یک ابزار قدرتمند برای محاسبات کوانتومی هستند. آنها می توانند برای پیاده سازی طیف گسترده ای از الگوریتم های کوانتومی، از جمله الگوریتم شاور برای رمزگشایی اعداد صحیح و الگوریتم گرووور برای جستجوی پایگاه داده های بدون ترتیب استفاده شوند.

یکی دیگر از عملگرهای مهم در مدار کوانتومی، عملگر اندازه‌گیری است. که در شکل زیر نشان داده شده است. همانطور که پیش از این بیان شد؛ در بردار حالت $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ هنگام مشاهده به یک حالت کلاسیکی رمبش می‌کند؛احتمال اینکه به حالت $|0\rangle$رمبش کند، $|\alpha|^2$، و احتمال اینکه به حالت $|1\rangle$ رمبش کند، $|\beta|^2$، می‌باشد.



شکل ۴:   گیت اندازه‌گیری کیوبیت، این گیت باعث نابودی حالت کوانتومی و تبدیل آن به صورت داده‌ی کلاسیک می‌شود. در مدار بالا اطلاعات داخل کیوبیت Ψ پس از اندازه گیری داخل یک بیت کلاسیک ذخیره می‌شود.

ویژگی	مدار کوانتومی	مدار کلاسیک
واحد پایه داده	کیوبیت	بیت
عملیات پایه	گیت های کوانتومی	گیت های منطقی
برگشت پذیری	قابل برگشت	برگشت ناپذیر

جدول ۱ : شباهت‌ها و تفاوت های مدارهای کلاسیک و کوانتومی

برنامه نویسی کوانتومی

کامپیوترهای کوانتومی در مقابل کامپیوترهای کلاسیک

کامپیوترهای کوانتومی و کامپیوترهای کلاسیک دو نوع بسیار متفاوت از رایانه هستند. کامپیوترهای کوانتومی از بیت‌های کوانتومی برای ذخیره اطلاعات استفاده می‌کنند، در حالی که کامپیوترهای کلاسیک از بیت‌ها استفاده می‌کنند. کیوبیت‌ها می‌توانند در حالت برهمنهی دو حالت، ۰ و ۱، به‌طور همزمان باشند، در حالی که بیت‌ها فقط می‌توانند در یک حالت به‌طور همزمان باشند. این تفاوت در نحوه ذخیره اطلاعات امکان محاسباتی را برای کامپیوترهای کوانتومی فراهم می‌کند که برای کامپیوترهای کلاسیک غیرممکن است.

کاربرد های کامپیوتر کوانتومی

رمزنگاری - شبیه سازی مواد در علم شیمی و زیست - یادگیری ماشینی

شبیه سازی در کامپیوتر کلاسیک در برابر کامپیوتر کوانتومی

برخلاف کامپیوتر کلاسیک، یک کامپیوتر کوانتومی، خود نیز یک سامانه ی کوانتومی است. بسیاری از خصوصیات کامپیوتر های کلاسیک غیر قابل پیاده سازی در کامپیوترهای کوانتومی می‌باشند.

یکی از مهم ترین خصوصیات، شاخص های همدوسی در تابع موج است.

هرچقدر توابع موج کیوبیت‌های کامپیوتر کوانتومی در حین انجام محاسبات و یا پردازش همدوس تر باشند؛ نتایج محاسبات دقیق‌تر بدست می‌آید.

برای تعریف ساده‌ی همدوسی می‌توان گفت:

همدوسی خاصیت یک سیستم کوانتومی است که در آن فازهای هر زیر حالت کوانتومی به یکدیگر مرتبط هستند. این ارتباط به سیستم اجازه می‌دهد یکی از حالات خود (محتمل ترین حالت) را با کمک تداخل به تشدید برساند.

عوامل موثر در همدوسی و ناهمدوسی کوانتومی

به طور کلی **هرگونه کنش و واکنش کنترل نشده و تبادل ناخواسته انرژی** بین کیوبیت ها و محیط باعث ناهمدوسی می‌شود.

دکوراسیون یک فرآیند است که در آن یک کیوبیت با محیط اطراف خود تعامل می‌کند و **اطلاعات خود را با محیط به اشتراک می‌گذارد**.

این امر باعث می‌شود که کیوبیت با محیط همسو شود و حالت خود را از دست بدهد.

دکوراسیون به دلیل تبادل حرارت بین کیوبیت و محیط اطراف رخ می‌دهد. در دمای بالاتر، کیوبیت‌ها انرژی بیشتری دارند و بنابراین بیشتر مستعد دکوراسیون هستند.

دما کیوبیت ها در دماهای بالاتر مستعد دکوراسیون[18] [19] هستند. این به این دلیل است که هرچه دما بالاتر باشد، کیوبیت ها انرژی بیشتری دارند و بیشتر احتمال دارد با محیط خود تعامل داشته باشند.

برخورد کیوبیت ها همچنین می توانند توسط ارتعاشات دکور شوند. این به این دلیل است که ارتعاشات می توانند باعث حرکت کیوبیت ها شوند، که می تواند حالت های کوانتومی آنها را مختل کند.

تابش الکترومغناطیسی کیوبیت ها می توانند توسط تابش الکترومغناطیسی، مانند نور و امواج رادیویی، دکور شوند. این به این دلیل است که تابش الکترومغناطیسی می تواند با الکترون های کیوبیت ها تعامل داشته باشد و باعث از دست رفتن خواص کوانتومی آنها شود.

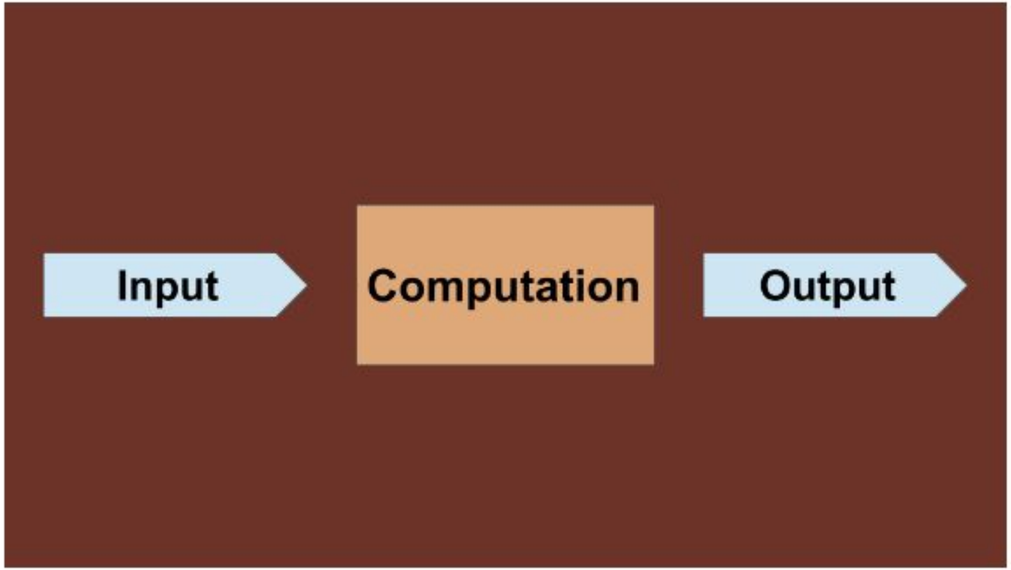
سردسازی کیوبیت‌ها این می تواند انرژی کیوبیت ها را کاهش دهد و آنها را کمتر مستعد تعامل با محیط خود کند.

استفاده از مواد با همدوسی بالا برخی از مواد، مانند ابر رساناها، زمان های همدوسی بسیار طولانی دارند که آنها را برای استفاده در رایانه های کوانتومی بسیار مناسب می کند.

توسعه‌ی الگوریتم‌های جایگزین برای تصحیح خطای کوانتومی الگوریتم های تصحیح خطا کوانتومی می توانند برای تشخیص و تصحیح خطاهایی که توسط ناهمدوسی ایجاد می شوند استفاده شوند.

مدل محاسباتی استاندارد

برای بررسی برتری کامپیوتر کوانتومی نسبت به کامپیوتر کلاسیک نیاز به درک مدل کوئری داریم. پیش از بررسی مدل کوئری، مدل ساده و استاندارد محاسباتی را بررسی می‌کنیم. به تصویر زیر دقت کنید:



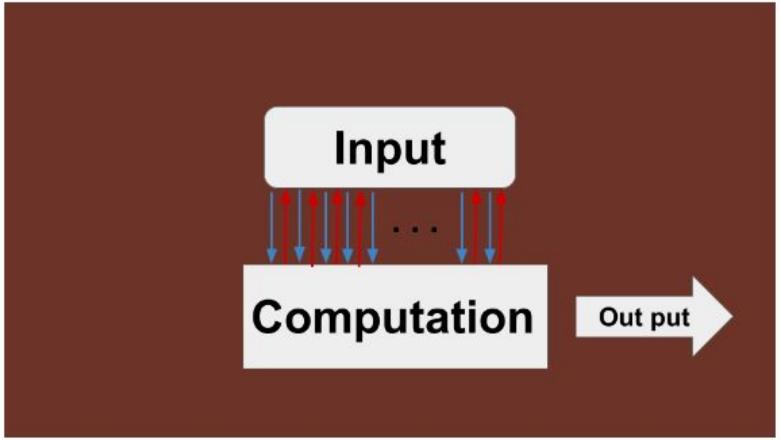
شکل ۹: یک واحد محاسباتی که مقادیری را به عنوان ورودی گرفته، پردازش کرده و سپس مقدار/مقادیر خروجی را ارائه کرده است.

در تصویر بالا یک نمود ساده از کامپیوترهای امروزی ارائه شده است. در دنیای واقعی مقدار ورودی می‌تواند از هر منبعی تأمین شده باشد. با این وجود هدف ما بررسی منابع تولید ورودی نیست؛ بلکه هدف بررسی مقادیر ورودی (به صورت ایزوله) می‌باشد. می‌توان درنظر گرفت که ورودی داده شده و خروجی نهایی،هر دو در قالب یک رشته از اعداد باینری، ماتریس و یا هرقالب مدنظر کاربر باشند.

مهم‌ترین نکته درباره‌ی این واحد محاسباتی، **در دسترس بودن کل مقادیر ورودی برای واحد پردازش** است. به عبارت دیگر **واحد پردازش می‌تواند تمامی مقادیر ورودی را دریافت کرده و تشخیص** دهد.

مدل کوئری

در مدل کوئری، داده‌های ورودی توسط یک تابع تولید می‌شوند. واحد محاسباتی دسترسی به تابع تولیدورودی دارد و می‌تواند برای دریافت داده‌های جدید،از تابع یاد شده،درخواست کند.



شکل ۱۰: شکل بالا نمود مدل محاسباتی‌کوئری است. واحد محاسباتی برای دریافت داده‌های جدید نیاز به درخواست از تابع ورودی دارد. خطوط قرمز و رو‌به‌بالا نشان از درخواست واحد محاسباتی و خطوط آبی رو‌به‌پایین نشان از پاسخ واحد ورودی می‌باشد.

مسئله‌ی دوچ

الگوریتم دوچ[۲۷] اولین و ساده‌ترین الگوریتم کوانتومی است. این الگوریتم برای اولین بار در سال ۱۹۸۵ در مقاله‌ای مطرح شد؛ که توسط دیوید دوچ[۲۸] نوشته شده‌بود. این الگوریتم نقطه‌ی شروعی برای اثبات برتری کامپیوترهای کوانتومی نسبت به کامپیوترهای کلاسیک است.

مسئله‌ی دوچ یکی از ساده‌ترین مفاهیم ممکن را مطرح می‌کند. اگر یک تابع به فرم زیر تعریف شود:

$$f : \sum \rightarrow \sum$$

هدف بررسی ثابت بودن یا متعادل[۲۹] بودن تابع f است. به‌طور کلی، درساده‌ترین حالت، می‌توان چهار وضعیت را برای تابع $f : \sum \rightarrow \sum$ درنظر گرفت:

a	$f_1(a)$
0	0
1	0

a	$f_2(a)$
0	0
1	1

a	$f_3(a)$
0	1
1	0

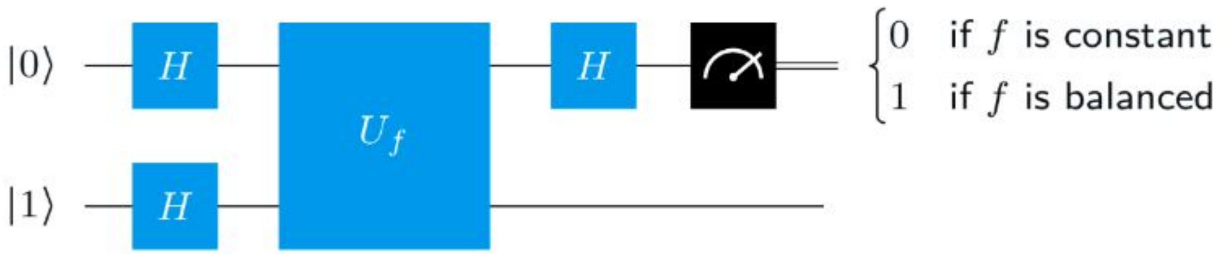
a	$f_4(a)$
0	1
1	1

شکل ۱۱: تمام حالات ممکن برای یک تابع ثابت و یک تابع متعادل

مسئله‌ی دوچ	
$f : \sum \to \sum$	ورودی
صفر اگر تابع ثابت بود؛ یک اگر تابع متعادل بود.	خروجی

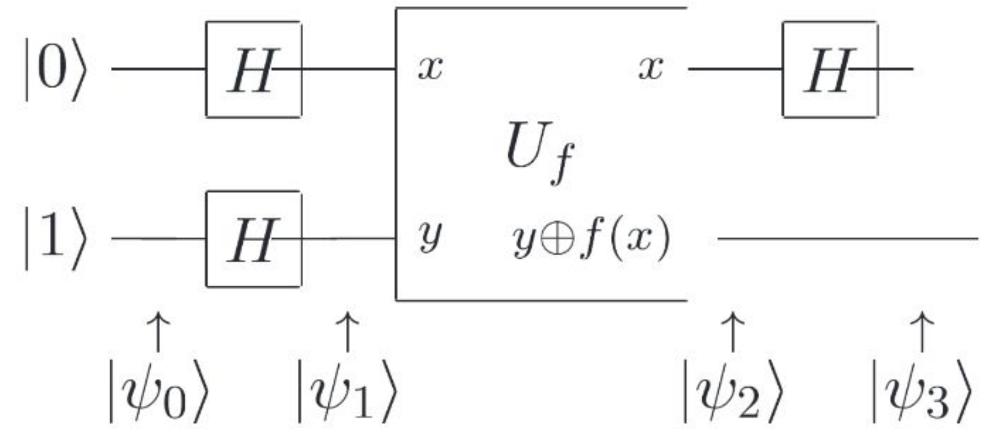
الگوریتم دوچ

حال به بررسی الگوریتم دوچ می‌پردازیم. الگوریتمی که مسئله‌ی دوچ را با یک مدار کوانتومی حل می‌کند:



شکل ۱۲: مدار کوانتومی الگوریتم دوچ

مراحل پیاده‌سازی الگوریتم دوچ



شکل ۱۳ : پیاده‌سازی مدار کوانتومی الگوریتم دوچ

$$|\psi_0\rangle = |01\rangle \tag{۲۷}$$

سیستم دو کیوبیتی تشکیل شده، پس از اعمال اثر دو گیت هادامارد می‌دهد:

$$|\psi_1\rangle = \left[\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right]\left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right] \tag{۲۸}$$

$$|\psi_2\rangle = \begin{cases} \pm\left[\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right]\left[\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right] & \text{if } f(0)=f(1) \\ \pm\left[\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right]\left[\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right] & \text{if } f(0)\neq f(1) \end{cases} \qquad (۲۹)$$

با اعمال آخرین گیت هادامارد روی کیوبیت اول به حالت زیر خواهیم رسید:

$$|\psi_3\rangle = \begin{cases} \pm|0\rangle\left[\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right] & \text{if } f(0)=f(1) \\ \pm|1\rangle\left[\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right] & \text{if } f(0)\neq f(1) \end{cases} \qquad (۳۰)$$

با درنظر گرفتن شرایط زیر می‌توان $|\psi_3\rangle$ را به شکل زیر بازنویسی کرد:

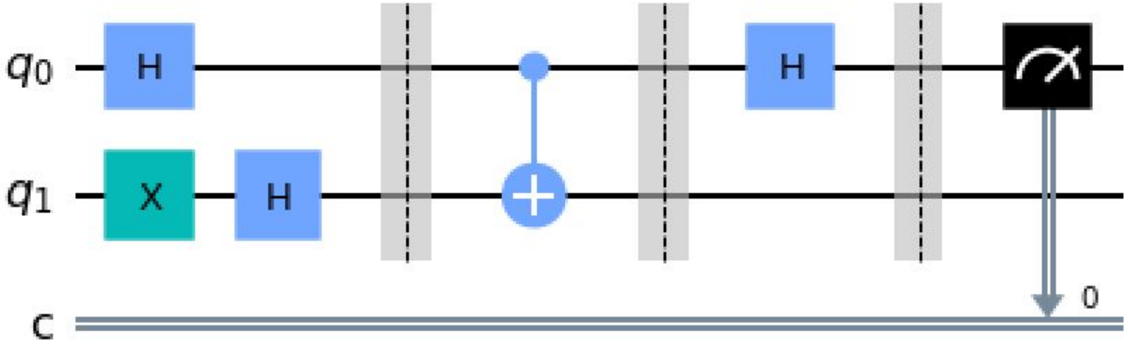
بررسی ثابت یا متعادل بودن تابع f

$$\begin{cases} f(0) = f(1) \implies & f(0) \oplus f(1) = 0 \\ f(0) \neq f(1) \implies & f(0) \oplus f(1) = 1 \end{cases} \qquad (۳۱)$$

از این رو:

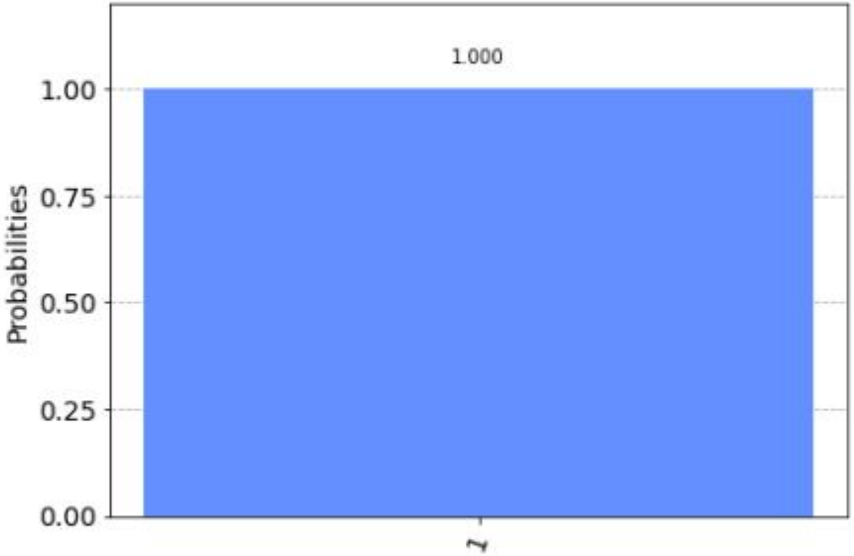
$$|\psi_3\rangle = \pm|f(0) \oplus f(1)\rangle \left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right] \qquad (۳۲)$$

پیاده سازی الگوریتم دوچ با کمک کیس کیت



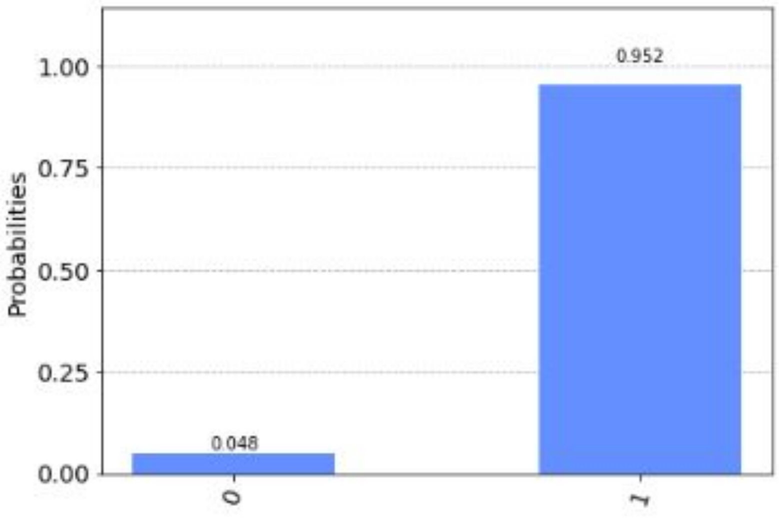
شکل ۱۶: مدار کوانتومی کامل که روی شبیه‌ساز کلاسیک پیاده‌سازی شده‌است.

Classical Vs Quantum simulation



شکل ۱۷ : خروجی شبیه‌سازی برابر با یک شده است. طبق فرمول ۳۱ این تابع یک تابع متعادل است.

Classical Vs Quantum simulation



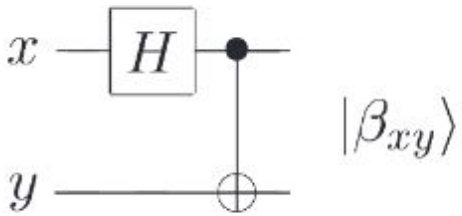
شکل ۱۸ : مقادیر محاسبه‌شده با کمک کامپیوتر کوانتومی

شبیه سازی پدیده‌های کوانتومی

حالات بل

به مدار نمایش داده شده در شکل ۱۹ دقت کنید:

In	Out
$\lvert 00\rangle$	$(\lvert 00\rangle + \lvert 11\rangle)/\sqrt{2} \equiv \lvert\beta_{00}\rangle$
$\lvert 01\rangle$	$(\lvert 01\rangle + \lvert 10\rangle)/\sqrt{2} \equiv \lvert\beta_{01}\rangle$
$\lvert 10\rangle$	$(\lvert 00\rangle - \lvert 11\rangle)/\sqrt{2} \equiv \lvert\beta_{10}\rangle$
$\lvert 11\rangle$	$(\lvert 01\rangle - \lvert 10\rangle)/\sqrt{2} \equiv \lvert\beta_{11}\rangle$



شکل ۱۹: مدار کوانتومی بل به‌همراه ورودی و خروجی آن

این مدار دارای یک گیت هادامارد و سپس CNOT است و چهار حالت پایه محاسباتی را مطابق جدول داده شده تبدیل می کند. به عنوان مثال: گیت هادامارد ورودی $\langle 00|$ را به حالت $\frac{(|0\rangle+|1\rangle)}{\sqrt{2}}$ انتقال می‌دهد و سپس CNOT حالت خروجی $\frac{(|00\rangle+|11\rangle)}{\sqrt{2}}$ را آماده می‌کند.

ابتدا اعمال تبدیل هادامارد حالت کیوبیت بالایی را به یک برهمنهی کوانتومی منتقل می‌کند. این برهمنهی ایجاد شده، به عنوان کیوبیت کنترل به CNOT عمل می کند و حالت کیوبیت هدف تنها زمانی معکوس می شود که حالت کیوبیت کنترل ۱ باشد.

از حالات بل برای تبیین و تعریف درهم‌تنیدگی استفاده می‌شود.

$$
\begin{aligned}
|\beta_{00}\rangle &= \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \\
|\beta_{01}\rangle &= \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} \\
|\beta_{10}\rangle &= \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}} \\
|\beta_{11}\rangle &= \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}
\end{aligned} \tag{۳۳}
$$

از حالت‌های بالا به عنوان حالات بل یا حالات EPR یادمی‌کنیم.

دوربری

دوربری کوانتومی تکنیکی برای جابجایی حالات کوانتومی به نقاط دیگر است. در اینجا نحوه عملکرد دوربری کوانتومی آمده است:

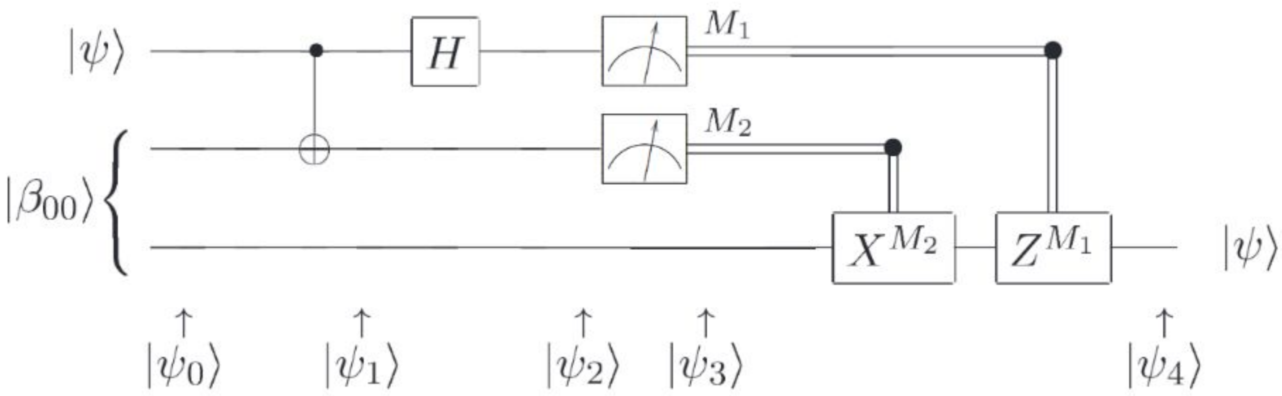
آلیس و باب مدت ها پیش با هم آشنا شدند اما اکنون دور از هم زندگی می کنند. در حالی که آنها با هم یک جفت EPR تولید کردند، هر کدام یک کیوبیت از جفت EPR را در هنگام جدا شدن می‌گرفتند. سالها بعد، باب مخفی است، و ماموریت آلیس، در صورتی که آن را بپذیرد، تحویل یک کیوبیت $|\Psi\rangle$ به باب است. او وضعیت و خصوصیات کیوبیت را نمی داند و علاوه بر این فقط می تواند اطلاعات کلاسیک را برای باب ارسال کند. آیا آلیس باید این مأموریت را بپذیرد؟

درظاهر، تمام شرایط علیه آلیس است. او وضعیت $|\Psi\rangle$ کیوبیتی را که باید برای باب بفرستد نمی داند، و طبق قوانین مکانیک کوانتومی، او حق تعیین وضعیت $|\Psi\rangle$ را ندارد؛زیرا فقط یک نسخه از جفت کیوبیت را در اختیار دارد. به علاوه، حتی اگر او حالت $|\Psi\rangle$ را می دانست، توصیف دقیق آن به مقدار نامحدودی از اطلاعات کلاسیک نیاز دارد، زیرا $|\Psi\rangle$ مقادیری را در یک فضای پیوسته می گیرد.

به طور کلی، مراحل حل به شرح زیر است: آلیس با کیوبیت $\langle\Psi|$ با یک کیوبیت خود از جفت EPR، و سپس دو کیوبیت در اختیارش را اندازه گیری می کند و یکی از چهار نتیجه کلاسیک ممکن ، ۰۰، ۰۱، ۱۰، ۱۱ را بدست می‌آورد. درنهایت او این اطلاعات را به باب ارسال می‌کند.

بسته به پیام کلاسیک آلیس، باب یکی از چهار عملگر جدول زیر را روی کیوبیت EPR خود اعمال می‌کند. به طرز شگفت انگیزی، با انجام این کار او می تواند حالت اولیه را بازیابی کند $\langle\Psi|$! مدار کوانتومی نشان داده شده در شکل زیر توصیف دقیق تری از دوربری کوانتومی ارائه می دهد. دوربری حالتی که باید از راه دور منتقل شود عبارت است از $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ که α و β ناشناخته هستند.

$$|\psi_0\rangle = |\psi\rangle|\beta_{00}\rangle \qquad (۳۵)$$



شکل ۲۰: مدار کوانتومی برای انتقال یک کیوبیت دو خط بالا نشان دهنده سیستم آلیس هستند، در حالی که خط پایین نشان دهنده سیستم آلیس است خط سیستم باب است. مترها اندازه گیری را نشان می دهند و خطوط دوتایی که از آنها بیرون می آیند دارای حالت کلاسیک هستند بیت ها (به یاد بیاورید که خطوط منفرد نشان دهنده کیوبیت هستند)

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha|0\rangle(|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle(|00\rangle + |11\rangle)] \tag{۳۶}$$

جایی که ما از این قاعده استفاده می کنیم که دو کیوبیت اول (در سمت چپ) متعلق به آلیس هستند و کیوبیت سوم متعلق به باب است. همانطور که قبلا توضیح دادیم ، کیوبیت دوم آلیس و کیوبیت باب در یک حالت EPR شروع می شوند. آلیس یک گیت $CNOT$ را روی کیوبیت‌های خود اثر می‌دهد. از این رو:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha|0\rangle(|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle(|10\rangle + |01\rangle)] \tag{۳۷}$$

سپس گیت هادامارد را روی اولین کیوبیت اثر می‌دهد و به دست می آورد:

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}[\alpha(|0\rangle + |1\rangle)(|00\rangle + |11\rangle) + \beta(|0\rangle - |1\rangle)(|10\rangle + |01\rangle)] \tag{۳۸}$$

این حالت را می توان به روش زیر بازنویسی کرد، به سادگی با گروه بندی مجدد عبارات:

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle =& \frac{1}{2}[|00\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |01\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) \\ &+ |10\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + |11\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)] \end{aligned} \tag{۳۹}$$

این عبارت به طور طبیعی به چهار اصطلاح تقسیم می شود. عبارت اول دارای کیوبیت های آلیس است در حالت $|00\rangle$ و کیوبیت باب، که بیانگر حالت اصلی $|\Psi\rangle$ است؛ در حالت $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ قرار دارد.

. اگر آلیس یک اندازه گیری را انجام دهد و نتیجه ۰۰ را به دست آورد، آنگاه کیوبیت باب دقیقا همان $|\Psi\rangle$ می‌باشد. به طور مشابه:

$$\begin{aligned} 00 &\longmapsto |\psi_3(00)\rangle \equiv [\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle] \\ 01 &\longmapsto |\psi_3(01)\rangle \equiv [\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle] \\ 10 &\longmapsto |\psi_3(10)\rangle \equiv [\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle] \\ 11 &\longmapsto |\psi_3(11)\rangle \equiv [\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle] \end{aligned} \tag{۴۰}$$

بسته به نتیجه اندازه گیری آلیس، کیوبیت باب به یکی از این چهار حالت ممکن قرار خواهد گرفت. البته، برای پیدا کردن حالت کیوبیت، باید نتیجه اندازه‌گیری آلیس را به باب اعلام کرد. کمی پیش‌تر نشان خواهیم داد که همین وضعیت مانع از استفاده از دوربری برای انتقال اطلاعات با سرعتی، سریع‌تر ازسرعت نور می‌شود.

هنگامی که باب نتیجه اندازه گیری را فهمید، باب می تواند حالت کیوبیت خود را «تثبیت» کند و با استفاده از گیت کوانتومی مناسب، $|\Psi\rangle$ را بازیابی کند. به عنوان مثال، در موردی که اندازه گیری نتیجه‌ی ۰۰ را نشان

سوال اول

آیا دوربری به فرد اجازه نمی‌دهد حالت‌های کوانتومی را سریع‌تر از نور منتقل کند؟ این امر بسیار جذاب و شگرف است؛ زیرا تئوری نسبیت نشان می دهد که انتقال اطلاعات سریعتر از نور می تواند برای ارسال اطلاعات به عقب در زمان استفاده شود. دوربری کوانتومی ارتباط سریع‌تر از سرعت نور را امکان‌پذیر نمی‌کند، زیرا برای تکمیل دوربری، آلیس باید نتیجه اندازه‌گیری خود را از طریق یک کانال ارتباطی کلاسیک به باب منتقل کند.

می‌توان نشان داد؛ که بدون این کانال ارتباطی کلاسیک، دوربری توان انتقال هیچ اطلاعاتی را ندارد.

کانال ارتباط کلاسیک با سرعت نور محدود می شود، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که تله پورت کوانتومی نمی تواند سریعتر از سرعت نور انجام شود و این تناقض ظاهری را حل می‌شود.

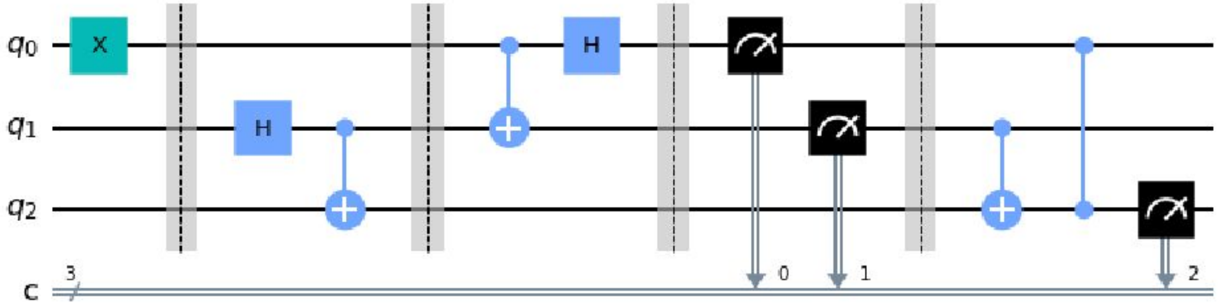
سوال دوم

در فرآیند دوربری به نظر می رسد یک کپی از حالت کوانتومی در حال انتقال از راه دور ایجاد می‌شود؛ در حالی که آشکارا قضیه عدم شبیه سازی[۳۲] مورد بحث نقض می کند.

این نقض ناشی از دقت کم و یا توهم است؛ زیرا پس از فرآیند دوربری فقط کیوبیت هدف در حالت $\langle\Psi|$ باقی می ماند و کیوبیت اصلی که حامل داده است؛ با توجه به فرآیند اندازه گیری حالت اصلی به یکی از حالت های پایه محاسباتی $\langle 0|$ یا $\langle 1|$ رمبش می‌کند.

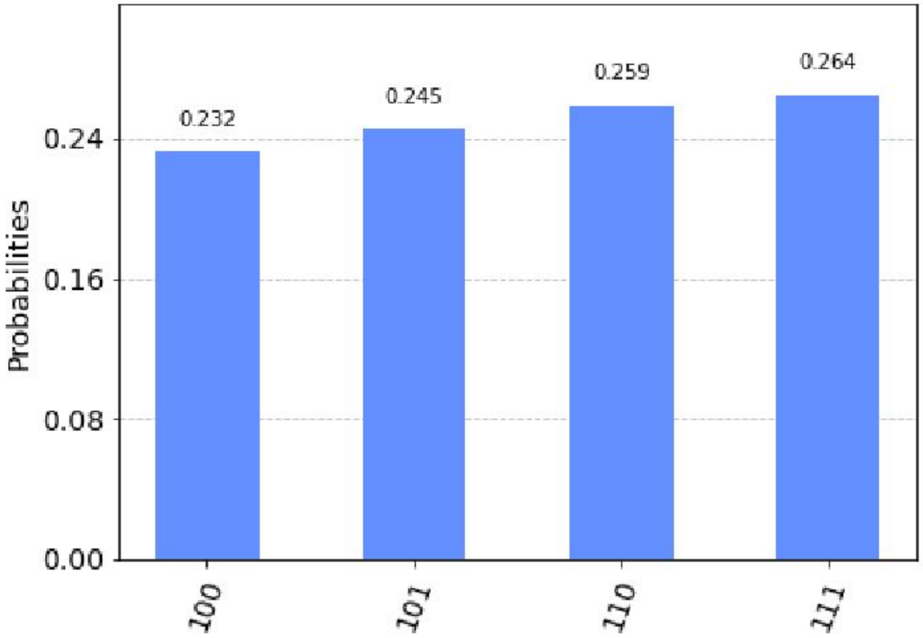
شبیه سازی دوربری کوانتومی

Teleportation Q-Circuit



شکل ۲۴: مرحله‌ی پایانی تلپورت، داده‌ی داخل کیوبیت سای به کیوبیت باب منتقل شده است.

Measurement on Teleportation circuit



شکل ۲۵: به‌دلیل اجراشدن مدار در شبیه‌ساز کلاسیک شاهد نتایج ناشی از تداخل نیستیم .احتمال رخداد
حالاتی که در آن مقدار کیوبیت تلپورت برابر یک است