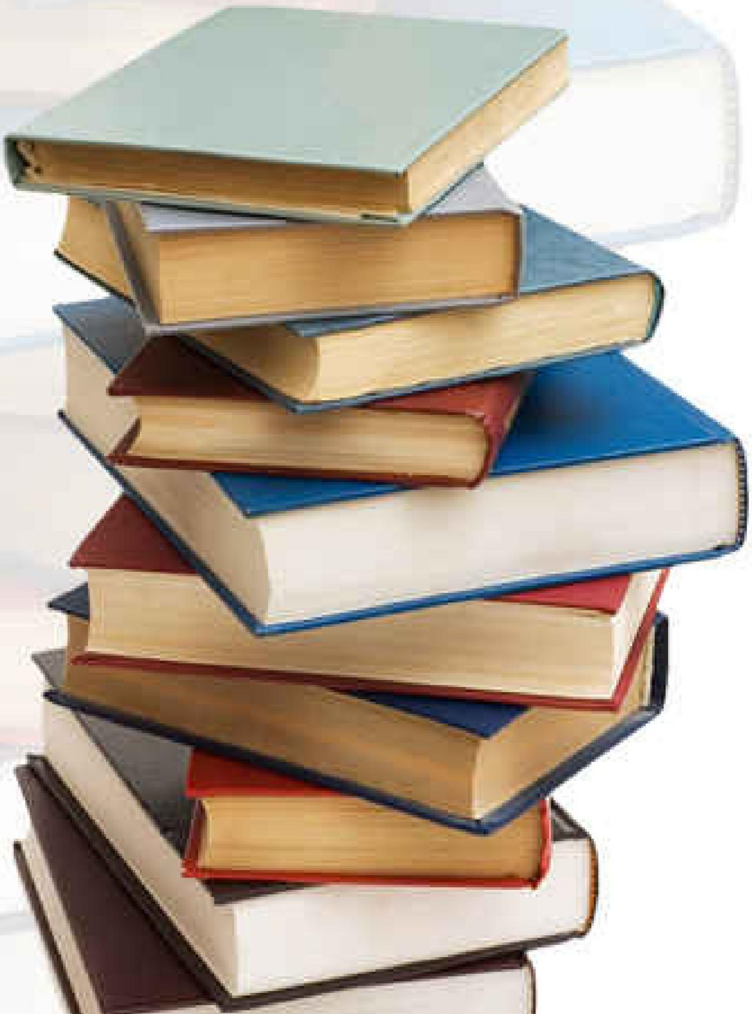
پژوهش عملیاتی ۱

بر اساس کتاب دکتر عادل آذر

حبیب جعفرپور



هوالحبیب

یار بوک

www.yarbook.blogfa.com

تحقیق در عملیات (۱)

براساس کتاب دکتر عادل آذر

(دانشگاه پیام نور)

مخصوص دانشجویان رشته حسابداری،مدیریت و اقتصاد

تهیه و تنظیم:

حبیب جعفرپور

دانشجوی حسابداری دانشگاه پیام نور آذرشهر

۹۲-۹۳

فصل اول

کلیات تحقیق در عملیات

ویژگی ها و فرآیندها:

تحقیق در عملیات:کاربرد رویکرد علمی در صدد حل مسائل مدیریتی

هدف تحقیق در عملیات: کمک به مدیران جهت تصمیم گیری بهتر

تحقیق در عملیات: بر مجموعه ای از فنون ریاضی توسعه یافته در علم مدیریت تاکید دارد.

تحقیق در عملیات: علم مدیریت، روش های مقداری، تحلیل مقداری، علم تصمیم گیری

تحقیق در عملیات:OR:Operation Research

پیدایش تحقیق در عملیات:

OR در طول جنگ جهانی دوم توسط دانشمندان انگلیسی توسعه و گسترش یافت.

پیدایش اولیه OR از سازمان های نظامی بوده است.

اولین و مهمترین دستاوردهای پژوهش عملیاتی: ابداع روش سیمپلکس

ابداع کننده روش سیمپلکس:جرج دتزیگ، ۱۹٤۷

روش سیمپلکس برای حل مسائل برنامه ریزی خطی ابداع شد.

تعریف تحقیق در عملیات:

دارای تعاریف متعدد به دلیل کاربران متفاوت

مهم ترین تعاریف:

۱.پژوهش عملیاتی: مجموعه روش های علمی و فنی شناخت مسائل درون سیستم درصدد جواب بهینه برای مسائل اند.

۲.پژوهش عملیاتی: کاربرد روش علمی مطالعه و بررسی فعالیت ها و عملیات پیچیده در سازمان های بزرگ

مهمترین تعریف OR: کاربرد روش علمی برای تحلیل و حل مسائل و تصمیمات مدیریتی

ویژگی های تحقیق در عملیات:

۱. تمرکز اصلی و اولیه OR : تصمیم گیری مدیران
۲. رویکرد OR: رویکرد علمی
۳. نوع نگاه به مسائل در OR: نگاه سیستماتیک(سیستمی) و منطقی
٤. نوع دانش OR: یک دانش بین رشته ای
۵. ستون علم OR:استفاده از مدل
٦. استفاده از رایانه

کانون توجه OR:تصمیم گیری

تصمیم: فرآیند انتخاب یک گزینه بهتر از بین دو یا چند گزینه متفاوت است.

هربرت سایمون: تصمیم گیری= فرآیند مدیریت

در OR تصمیم گیری و بررسی مسائل دارای فرآیند سیستماتیک است.

مراحل تصمیم گیری:۱.تعریف مسئله ۲. شناخت راه حل مسئله ۳. ارزیابی راه حل مسئله ٤. انتخاب یک راه حل

رویکرد OR: رویکرد علمی

روش علمی دکارت در هفت مرحله:قابل به کارگیری در تصمیم گیری:

۱. تعریف مسئله:تحلیل، تعریف و تعیین شرایط مشاهده
۲. مرحله مشاهده: تعیین کننده رفتار سیستم مورد بررسی
۳. فرضیه: شکل گیری فرضیه با توجه به مشاهده برای حل مسئله
٤. آزمایش: طراحی آزمایش تجربی و قابل اندازه گیری برای آزمون فرضیات
٥. اجرای آزمایش
٦. تایید یا رد فرضیه

نگاه سیستمی

استفاده از تئوری سیستم و تحلیل های نظام گرا

سیستم: مجموعه افراد، منابع، مفاهیم و رویه ها← در تعامل با یکدیگر برای رسیدن به هدف مشخص

سیستم در or: یک سازمام، بخشی از یک سازمان، مسئله تحت مطالعه و بررسی

سه بخش هر سیستم:داده ها، پردازشگرها، ستانده ها

اجزای سیستم توسط محیط خود محاصره اند← با بازخور در ارتباط با یکدیگرند.

داده ها: عناصر ورودی سیستم

پردازشگرها: مبدل داده به ستانده

ستانده: محصول ساخته شده و نتایج پردازشگرهای سیستم

بازخور: اطلاعات حاصل شده از بررسی ستانده ها برای تصمیم گیری

محیط: عناصر تاثیرگذار بر سیستم که غیر از داده ها، پردازشگرها و ستانده ها می‌باشد.

شناخت محیط با دو سوال چرچمن:۱.آیا دستکاری عنصر امکان پذیر است؟ ۲.آیا ماهیت (وجود) این عنصر به اهداف سیستم مربوط است؟(اگر سوال اولی نه باشد، دومی بله است← محیط سیستم است.)

رویکرد بین رشته ای

بسیاری از مسائل مدیریتی دارای جنبه های اقتصادی، روانشاسی، اجتماعی، مهندسی، ریاضی و فیزیکی و ...

یک گروه با تخصص های متفاوت← نایل آمدن به مسائل گریبان گیر سازمان ها

مدل ها در OR:

ستون علم OR: استفاده از مدل ها

مدل: ساده شده یا تجرید واقعیت است

خواص مدل: انتزاعی بودن، ساده بودن

انواع مدل ها از نظر انتزاعی بودن: ۱.مدل شمایلی ۲. مدل قیاسی ۳. مدل ریاضی

مدل شمایلی:

جایگزین فیزیکی از سیستم است: در اندازه ای متفاوت از اصل سیستم

با کمترین انتزاع از واقعیت همراه است.

نمونه ها: ماکت های سه بعدی، شمایل خط تولید، تصاویر دوبعدی

مدل قیاسی:

عینا شبیه سیتم واقعی نیست: رفتارش مانند رفتار سیستم

در قالب نمودارهای دوبعدی، نمودار سازمانی نشان دهنده روابط

نوع مدل فیزیکی با شمایل متفاوت از اصل

انتزاع بیشتر

مدل ریاضی:

پیچیدگی مانع استفاده از مدل شمایلی یا قیاسی

ساده سازی و انتزاع مدل ریاضی بیشتر است.

اکثر تحلیل های OR با مدل ریاضی

اغلب به صورت کلی بیان میشود.

دلایل استفاده از مدل ریاضی:

۱. تعریف و تبیین کردن موقعیت های خیلی پیچیده با مدل ریاضی
۲. شبیه سازی زمان عملیات واقعی
۳. دستکاری آسان در مدل
٤. هزینه بر نبودن رفع عیب مدل
٥. محاسبه ریسک در تصمیم گیری
٦. فراهم آوری زمینه آموزش و یادگیری

طبقه بندی مدل های ریاضی در تحقیق در عملیات:

انواع مدل های ریاضی در OR: ۱. قطعی ۲. احتمالی ۳. ترکیبی

قطعی:

در شرایط اطمینان کامل ساخته میشود.

پارامترها و نمادها و سمبل های بکار رفته به طور قطع و یقین اتفاق می افتد.

مدل ها: بهینه یابی خطی، برنامه ریزی خطی، حمل ونقل، تخصیص، برنامه ریزی آرمانی، برنامه ریزی عدد صحیح، مدل های شبکه، بهینه یابی غیر خطی، برنامه ریزی غیرخطی، روش های جستجو

احتمالی:

در شرایط نامعین و تصادفی رخ میدهد.

از یک تابع احتمالی، پیروی می‌کند.

گزینه های جایگزین و ممکن، قابل تصور است.

مدلها: فرآیندهای مارکوفی، تئوری صف، تحلیل تصمیم

ترکیبی:

ترکیبی از مدل قطعی و احتمالی

هم در شرایط قطعی و هم در شرایط احتمالی کاربرد دارد.

مدلها: پرت (Pert-GPM)، برنامه ریزی پویا، کنترل موجودی، شبیه سازی

**تفکیک مدل های بهینه یابی براساس ماهیت تابع هدف و یا محدودیت های مدل: خطی و غیرخطی

رویکرد OR در حل مسئله

ویژگی اصلی OR و فنون آن: تاکید بر رویکرد سیستماتیک و منطقی حل مسئله

فرآیند حل مسئله در OR:

مشاهده ← تعریف مسئله ← ساختن مدل ← حل مدل ← اجرا

بازخور

۱.مشاهده:

اولین قدم در فرآیند تحقیق در عملیات: تعریف مسئله موجود در سیستم یا سازمان

داشتن مسئول برای مشاهده عوامل سازمان و روابط در تعامل باهم برای آسیب شناسی

۲.تعریف مسئله:

مشخص شدن وجود مسئله در سازمان← تعریف آن به دقت و باوضوح

تعریف نادرست منجر به ساده انگاری و جواب نامناسب میشود.

تعریف روش حصول اهداف و آرمان های سازمان ضروری است.

توجه به هدف موجب میشود به مسئله واقعی توجه شود.

۳.ساختن مدل:

مدل در OR: بیان خلاصه و مجردی از یک مسئله در دنیای واقعی است.

می تواند در قالب یک شکل یا نمودار بیان گردد::اغلب شامل مدل های ریاضی اند.

با یک مثال اجزای یک مدل را معرفی میکنیم:

*فرض میکنیم یک موسسه تجاری کالایی را به فروش میرساند که هزینه تولید کالا ۵ ریال و قیمت فروش ۲۰ ریال میباشد. مدل بیانگر سود حاصل از فروش کالا عبارت است از:

$z = ۲۰x - ۵x$

X= تعداد محصولات

Z= کل سود حاصل از تجارت

X= یک متغییر مستقل است:در این رابطه، به هیچ چیز دیگری بستگی ندارد.

Z= یک متغییر وابسته است: چون به میزان x وابسته است.

اعداد ۵ و ۲۰ در معادله را«پارامتر» گویند.

پارامتر: اعداد و مقادیر ثابت ضرایب متغییرها در معادله ها(تابع هدف و محدودیت)

پارامتر:معمولا ثابت باقی می‌ماند::مقدار پارامترها از داده های حاصل از محیط به دست می آید.

یک معادله:درحالت کلی: رابطه‌ی کارکردی=یک معادله=مدل.

*فرض میکنیم محصول موسسه از اهن ساخته میشود و موسسه ۱۰۰کیلوگرم آهن دارد. برای تولید محصول X، ٤ کیلوگرم آهن لازم است.یعنی:

$٤x = ۱۰۰$

با این معادله مدل ما شامل دو رابطه زیر میشود:

$z = ۲۰x - ۵x$
$٤x = ۱۰۰$

به رابطه اولی$z = ۲۰x - ۵x$ رابطه‌ی هدف یا تابع هدف گوییم و به رابطه دوم $٤x = ۱۰۰$ محدویت می‌گوییم.

*شرکت به دنبال حداکثر سازی سود خود است، اما ناچار است سود خود را تا جایی که آهن در دسترس دارد افزایش دهد. پس:

$Max\ z = ۲۰x - ۵x$
Subject to:
$٤x = ۱۰۰$

به عبارت دیگر حداکثر سازی تابع Z به شرط اینکه $٤x = ۱۰۰$ باشد.

این مدل بیانگر یک مسئله مدیریتی است که درصدد تعیین تعداد تولید موسسه خود است.

مقدار x: مقدار تصمیم بالقوه مدیر را بیان میکند

*x را متغییر تصمیم گوییم.

۴.حل مسئله:

در فصول بعدی نحوه حل مدل خطی را می آموزیم.

نکته قابل توجه اینکه، مقدار متغییر تصمیم بدست آمده از حل مدل، بیانگر تصمیم واقعی مدیر نیست، بلکه به منزله اطلاعات است که مدیر را در اتخاذ تصمیم واقعی یاری میکند.

۵.اجرای نتایج:

ارزش واقعی فرآیند مطالعه علمی به تاثیر آن بر عملکرد سیستم مورد مطالعه خواهد بود.

۶.تکرار پذیر بودن فرآیند OR:

درهر مرحله نیاز به بازخور ضرورت دارد.

جمله‌ی«برای یک مسئله فقط یک مدل و یک جواب وجود دارد»مردود است و باید همواره مدل را بازبینی نمود.

بازنگری هر مرحله فرآیند OR: استفاده از عامل بازخور

* بیشترین کاربرد فنون OR در زمینه تولید و برنامه ریزی بلندمدت است.
* فراوانی استفاده از مدل ها:بسیار زیاد:برنامه ریزی خطی، برنامه ریزی عدد صحیح، برنامه ریزی آرمانی
* فراوانی استفاده از مدل ها: زیاد:حمل ونقل، تخصیص، پرت، کنترل موجودی، شبیه سازی
* فراوانی استفاده از مدلها:کم: تئوری صف، فرآیند مارکوفی، تحلیل تصمیم، برنامه ریزی پویا
* حل مدل به منزله حل مسئله است.
* فرآیند حل مسئله در OR:مشاهده، تعریف مسئله، ساختن مدل، حل مدل، اجرا
* انتزاعی ترین مدل:مدل ریاضی
* علم تحقیق در عملیات:علم مدیریت، تحلیل مقداری،پژوهش عملیاتی
* شکل گیری تحقیق در عملیات از سازمان های نظامی بوده است.
* کانون توجه OR: تصمیم گیری
* نرم افزارهای آموزشی Or: AB:QM, QSB
* نرم افزارهای کاربردی OR: GAMS, LINGO, LINDO

فصل دوم

برنامه ریزی خطی(مدل سازی)

۱. هدف اغلب مدیران و سازمان ها:حداکثر کردن سود یا حداقل کردن هزینه هاست.
۲. افزایش عوامل و فاکتورهای تصمیم گیری و تنوع محدودیت های نیل به هدف:: استفاده از روش های کمی برنامه ریزی و تصمیم گیری
۳. برنامه ریزی خطی: یکی از روش های متداول بهینه کردن یک هدف با توجه به محدودیت های هدف
٤. برنامه ریزی خطی: دارای یک تابع هدف(حداکثرسازی یا حداقل سازی) و چند محدودیت.
۵. برنامه ریزی خطی: روابط بین متغییرها در تابع هدف و محدودیت ها خطی است.
٦. سه گام اساسی به کارگیری برنامه‌ریزی خطی: الف. تعریف مسئله به گونه ای که قابل حل با برنامه‌ریزی خطی باشد. ب.مسئله در یک مدل ریاضی فرموله شود. ج. مسئله با یک تکنیک مشخص ریاضی قابل حل باشد.

مدل سازی:

هر مدل برنامه ریزی خطی شامل اجزایی زیر است:

۱. متغییرهای تصمیم
۲. تابع هدف:از متغییرهای تصمیم و پارامترها تشکیل میشود.
۳. محدودیت های مدل: از متغییرهای تصمیم و پارامترها تشکیل میشود.

متغییر تصمیم: شامل نمادهای ریاضی بیان کننده سطح فعالیت هر موسسه:$X_1, X_2, ...$

علامت متغییر تصمیم میتواند منفی(کوچکتر از صفر)، نامنفی(بزرگتر از صفر) و آزاد در علامت باشد.(در این فصل نامنفی است.)

تابع هدف: رابطه‌ی ریاضی خطی است که هدف موسسه را در قالب متغییرهای تصمیم توصیف میکند.

تابع هدف: به صورت حداکثر سازی(Max z) یا حداقل سازی (Min z) بیان میشود.

محدودیت های مدل: بیانگر روابط خطی بین متغییرهای تصمیم::بوسیله محیط عملیاتی به موسسه تحمیل میشوند.

محدودیت های مدل به یکی از صورت های کوچکتر مساوی$\leq$ یا مساوی= یا بزرگتر مساوی$\geq$ بیان میشود.

محدودیت‌ها یا ناشی از محدودیت منابع اند یا سیاست گذاری‌های داخل موسسه.

پارامترهای مدل:مقادیر ثابت در تابع هدف و محدودیت‌ها

مراحل فرموله کردن هر مسئله:

۱. تعریف متغییرهای تصمیم
۲. فرموله کردن تابع هدف
۳. فرموله کردن محدودیت ها

**در این فصل با ۹ نوع مسئله برنامه ریزی خطی سروکار خواهیم داشت و در سوالات تشریحی پایان ترم معمولا یکی از این ۹ نوع داده می‌شود. برای اینکه این فصل رو بخوبی یاد بگیرید باید متغییرهای تصمیم رو به خوبی تشخیص بدهید و بدانید که تابع هدف حداکثر سازی می‌باشد یا حداقل سازی. در فرموله کردن محدودیت ها هم به عباراتی که در سوال می آید توجه کنید تا علامت های بزرگتر مساوی یا مساوی و کوچکتر مساوی را درست بگذارید. در مواردی که به شرح و بسط زیاد موضوع باشد لحن نوشتار من به صورت عامیانه خواهد بود.

**درس رو از سر میگیریم، ۹ مسئله مورد بحث در این فصل عبارتند از:

۱.مسئله ترکیب تولید ۲. مسئله رژیم غذایی ۳. مسئله سرمایه گذاری ٤. مسئله بازاریابی(تبلیغات) ٥. مسئله حمل ونقل ٦.مسئله امتزاج ۷.مسئله زمان بندی چند دوره ای ۸.مسئله ترکیب محصولات کشاورزی ۹. مسئله چوب بری. لطفا کمربندهاتون رو محکم ببندید و به دلتون ترسی راه ندید که همه اینها خیلی آسون هستند و اینکه باهم دیگه بریم جلو میچسبه، پس عجله نکنید. اولین مسئله رو شروع میکنیم: راستی من همون مسائلی رو که در متن کتاب اورده رو توضیح میدم.

۱.مسئله ترکیب تولید:

شرکتی میخواهد بداند که از هریک از محصولاتش چه مقدار تولید کند(؟) تا با رعایت محدودیت منابع(در پایین میاد) حداکثر سود کل را نایل شود.(فهمیدیم که شرکت دنبال حداکثر کردن سودشه، پس تابع هدفمون مربوط میشه به سود هر محصول). نیروی کار و مواد مورد نیاز و همچنین سهم سود هر یک از محصولات در جدول زیر آمده است:

منابع مورد نیاز				
منابع	محصول ۱	محصول ۲	محصول ۳	مقدار در دسترس
نیروی کار(ساعت/واحد)	٥	۲	٤	۲٤۰ساعت
مواد(کیلوگرم/واحد)	٤	٦	۳	٤۰۰کیلوگرم
سهم سود هر واحد	۳	٥	۲	-

خب:گفتیم اول از همه هدفمون رو مشخص میکنیم، هدف تو این سوال این هست که سودمون رو حداکثر کنیم. وقتی هدف رو تعیین کردیم، باید ببینم چطوری میشه این هدف رو فرموله کرد، یعنی متغییر تصمیم رو تعیین کنیم. میدونیم که سود کل از ضرب کردن سودهرواحد محصول به تعداد هر محصول بدست میاد، سود هر محصول رو داریم ولی تعداد هر محصول رو نداریم پس متغییر تصمیم، تعداد فروش(تولید) هر محصول میشه.چون سه تا محصول داریم، پس سه تا متغییر تصمیم داریم که به ترتیب نامگذاری میکنیم:$X_۱,X_۲,X_۳$

تابع هدف=حداکثر سازی مجموع سود ناشی از هر سه محصول

$$Max\ z = ۳x_۱ + ٥x_۲ + ۲x_۳$$

حالا باید محدودیت هامون رو بنویسم، محدودیت ها مربوط میشه به نیروی کار و مواد استفاده شده در هر محصول. چنانچه در سوال گفته شده مقدار در دسترس نیروی کار و مواد به ترتیب ۲۴۰ ساعت و ۴۰۰ کیلوگرم هست و این بدان معنی هست که ما حداکثر به میزان ۲۴۰ ساعت کار کنیم و ۴۰۰ کیلوگرم مواد استفاده کنیم.و این میزان کار به نسبت۵ و ۲ و ۴ به محصول یک و دو و سه تعلق داره و مواد نیز به میزان ۴ و ۶و ۳ به محصول یک و دو وسه تعلق داره.

محدودیت مربوط به نیروی کار رو اینطوری مینویسم:

$5X_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 240$

دلیل استفاده از کوچکتر مساوی رو در بالا گفتیم، چون مقدار در دسترس ما به میزان ۲۴۰ هست و ما نمیتوانیم بیشتر از اون مصرف کنیم و حداکثر میتونیم به میزان ۲۴۰ کیلوگرم استفاده کنیم.

*یه نکته تستی اینکه، میپرسن در مدل سازی خطی استفاده از علامت کوچکتر مساوی≤ در محدودیت به چه معنی هست، باید بگیم به معنی این هست که ما می تونیم مقداری از منبع رو استفاده نکنیم.

خب محدودیت مربوط به مواد رو بنویسم، فکر میکنم شما هم بدون نگاه کردن این محدودیت رو بنویسد باهم ببینم:

$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 400$

شاید بگین محدودیت دیگه‌ای وجود نداره، اما من با یه سوال محدودیت دیگه رو به شما معرفی میکنم، « آیا می-شود تعداد تولید ما کمتر از صفر باشد؟»

همه‌ی ما میدونیم که تولید کمتر از صفر مفهومی نداره، پس برای اینکه مدل امون کامل بشه، باید محدودیت های نامنفی رو هم اضافه کنیم، یعنی:

$x_1 \geq 0 , x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

یا هر سه رو یه جا بنویسم:

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

حالا مدل امون بدین صورت تکمیل شد:

$Max\ z = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3$
s.t:
$5X_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 240$
$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 400$
$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

مسئله ترکیب تولید در یک نگاه:

هدف:حداکثر سازی سود حاصل از تولید محصولات(تابع هدف:مجموع حاصلضرب سود هر محصول در تعداد محصول)

سود معمولا اینگونه نیز تعریف میشود:(قیمت فروش – هزینه تمام شده)

در هر دو حالت متغییر تصمیم مقدار تولید هر یک از محصولات است.

تعداد متغییر تصمیم: به میزان تعداد محصولات

محدودیت ها: به میزان منابع استفاده شده و محدودیت های نامنفی.

**در اکثر برنامه ریزی خطی شرط نامنفی بودن وجود دارد.(در تمامی مسائل این فصل این شرط وجود دارد.)

**زمان ایجاد یک متغیر نامنفی: متغیر تصمیم بیان کننده افزایش سود یا زیان شرکت، یا متغییر بیان کننده نرخ رشد یا نرخ کاهش باشد.(در این فصل وجود ندارد.)

۲.مسئله رژیم غذایی:

مدیر هتلی درصدد تهیه یک برنامه غذایی برای صبحانه‌ی مهمانان خود می‌باشد. مدیر هتل در تلاش است که صبحانه در عالی‌ترین شکل دارای کالری، کلسیم، پروتئین و فیبر باشد و چربی و کلسترول آن در حد پایینی باشد.(این همه رو می بینید، نترسید، خیلی ساده اس ، اینها محدودیت ها هستن که بعد جدول تو خود سوال میگه چقدر باشه).همچنین وی درصدد حداقل کردن کل هزینه صبحانه است.(مسئله هدف خودشو لو داد که میخواد هزینه هاش حداقل بشه، با یه نگاه به جدول میتونی حدس بزنی، چی متغییر تصمیمه) جدول زیر نشان دهنده ی مشخصات هر یک از غذاها با ترکیبات موجود در آنها میباشد. ستون اخر جدول نشان دهنده هزینه هر غذا میباشد.

نام غذا	کالری	چربی (g)	کلسترول (mg)	آهن (mg)	کلسیم (mg)	پروتئین (g)	فیبر (g)	هزینه (ریال)
۱. آرد بادام (فنجان)	۹۰	۰	۰	۶	۲۰	۳	۵	۱۸۰
۲. آردبرنج (فنجان)	۱۱۰	۲	۰	۴	۴۸	۴	۲	۲۲۰
۳. سوپ جو (فنجان)	۱۰۰	۲	۰	۲	۱۲	۵	۳	۱۰۰
۴. پنیر (قاچ)	۹۰	۲	۰	۳	۸	۶	۴	۱۲۰
۵. تخم‌مرغ (عدد)	۷۵	۵	۲۷۰	۱	۳۰	۷	۰	۱۰۰
۶. گوشت گوسفند (قاچ)	۳۵	۳	۸	۰	۰	۲	۰	۹۰
۷. پرتقال (عدد)	۶۵	۰	۰	۱	۲۵	۱	۱	۴۰
۸. شیر (۲٪ فنجان)	۱۰۰	۴	۱۲	۰	۲۵۰	۹	۰	۱۶۰
۹. آب انار (فنجان)	۱۲۰	۰	۰	۰	۳	۱	۰	۵۰۰
۱۰. نان برشته (قاچ)	۶۵	۱	۰	۱	۲۶	۳	۳	۷۰

اینهایی که میگه محدودیت هامون هست.

مدیر هتل میخواهد که برنامه غذایی دارای حداقل ٤٢٠ کالری، ٥ میلی گرم آهن،٤٠٠ میلی گرم کلسیم، ٢٠ گرم پروتئین و ١٢ گرم فیبر باشد. او میخواهد که میزان چربی بیشتر از ٢٠ گرم و میزان کلسترول بیشتر از ٣٠ میلی گرم نباشد.

حل مسئله خوشمزه غذایی:

اولین کار، تعیین هدف هست که در بالا گفتم، حداقل سازی هزینه هاس.

حالا ببینیم چه چیزی متغییر تصمیم هست؟ همونطور که گفتم باید دنبال چیزی بگردیم که بشه تابع هدف و محدودیت ها را باهاش فرموله کرد. هزینه کل مساوی با مجموع حاصلضرب تعداد مواد غذایی در هزینه هایشان.

چون ما هزینه ها رو داریم، پس متغییر تصمیم ما، تعداد هر غذا هست.چون ۱۰ تا غذا داریم پس ۱۰ تا متغییر تصمیم داریم:

تعداد فنجان آرد بادام	x_1:
تعداد فنجان آرد برنج	x_2:
تعداد فنجان سوپ جو	x_3:
تعداد قاچ پنیر	x_4:
تعداد تخم‌مرغ	x_5:
تعداد قاچ گوشت گوسفند	x_6:
تعداد پرتغال	x_7:
تعداد فنجان شیر	x_8:
تعداد فنجان آب انار	x_9:
تعداد قاچ نان برشته	x_{10}:

تابع هدف:حداقل سازی هزینه هر صبحانه که از مجموع هزینه غذاها در برنامه صبحانه بدست میاد.

$$\text{Minimize } Z = 180\,x_1 + 220\,x_2 + 100\,x_3 + 120\,x_4 + 100\,x_5 + 90\,x_6$$
$$+ 40\,x_7 + 160\,x_8 + 500\,x_9 + 70\,x_{10}$$

*پارامترها:هزینه هر واحد غذایی

خب حالا نوبتی هم باشه، نوبت محدودیت هاس.

محدودیت های ما مربوط میشه به موادی که مواد غذایی هست، یعنی کالری، چربی و کلسترول و... . بنابراین ما به تعداد مواد سازنده غذاها، محدودیت خواهیم داشت که اینجا ۷ محدودیت هست.

اولین محدودیت:کالری:

مدیر هتل میخواد، هر برنامه غذایی حداقل ٤٢٠ کالری داشته باشه. قبل از نوشتن محدودیت، باید بگم که حداقل مقداری را داشتن، یعنی کم کم اش این مقدار رو داشته باشیم، زیاد شد هم اشکالی نداره، اما کمترین مقداری که میتونه داشته باشه همینه.مثلا فروشنده لباس میگه کمترین قیمتی که میتونم بفروشم۵۰ تومنه، یعنی از این کمتر نباشه، بیشتر بود خدا برکت بده.

پس با این حساب، زمانی که میگیم حداقل ٤٢٠ باشد، یعنی کمتر از ٤٢٠ نباشه، مساوی یا بیشتر باشه.

به جدول مراجعه میکنیم میزان کالری موجود در هر غذا رو در متغییر تصمیم اش ضرب میکنیم. محدودیت های مربوط به آهن، کلسیم، پروتئین و فیبر هم به همین منوال هست. اگر مقدار ماده در غذا صفر باشه، متغییر تصمیم در محدویت نمیاد(چون صفر ضربدر هر عددی صفر هست) مثلا در آردبادم کلسترول وجود نداره، پس در محدودیت مربوط به آرد گندم، X_1 آورده نمیشه.

$90x_1 + 110x_2 + 100x_3 + 90x_4 + 75x_5 + 35x_6 + 65x_7 + 100x_8 + 120x_9 + 65x_{10}$ کالری ≥ 420

$6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 + x_7 + x_{10}$ میلی‌گرم آهن ≥ 5

$20x_1 + 48x_2 + 12x_3 + 8x_4 + 30x_5 + 25x_7 + 250x_8 + 3x_9 + 26x_{10}$ میلی‌گرم کلسیم ≥ 400

$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 2x_6 + x_7 + 9x_8 + x_9 + 3x_{10}$ گرم پروتئین ≥ 20

$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_7 + 3x_{10}$ گرم فیبر ≥ 12

محدودیت مربوط به چربی و کلسترول با این ۵ محدودیت فرق داره، چون گفته بیشتر ازb واحد نباشد، یعنی حداکثرb واحد باشد.(در اولی مسئله ترکیب تولید توضیح داده شد.)

$2x_1 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 + 3x_6 + 4x_8 + x_{10}$ گرم چربی ≤ 20

$270x_5 + 8x_6 + 12x_8$ میلی‌گرم کلسترول ≤ 30

مانند مسئله ترکیب متغییرها نامنفی هستند پس:

x_1 و x_2 و x_3 و x_4 و x_5 و x_6 و x_7 و x_8 و x_9 و x_{10} ≥ 0

مدل امون تموم شد:

$$\text{Min } Z = 180x_1 + 220x_2 + 100x_3 + 120x_4 + 100x_5 + 90x_6 + 40x_7 + 160x_8 + 500x_9 + 70x_{10}$$

S.t:

$$90x_1 + 110x_2 + 100x_3 + 90x_4 + 75x_5 + 35x_6 + 65x_7 + 100x_8 + 120x_9 + 65x_{10} \geq 420$$

$$2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 + 3x_6 + 4x_8 + x_{10} \leq 20$$

$$270x_5 + 8x_6 + 12x_8 \leq 30$$

$$6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 + x_7 + x_{10} \geq 5$$

$$20x_1 + 48x_2 + 12x_3 + 8x_4 + 30x_5 + 25x_7 + 250x_8 + 3x_9 + 26x_{10} \geq 400$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 2x_6 + x_7 + 9x_8 + x_9 + 3x_{10} \geq 20$$

$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_7 + 3x_{10} \geq 12$$

x_1 و x_2 و x_3 و x_4 و x_5 و x_6 و x_7 و x_8 و x_9 و x_{10} ≥ 0

خلاصه ای از اون چیزایی که گفته شد:(مسئله رژیم غذایی)

۱. هدف:حداقل سازی هزینه تهیه مواد غذایی
۲. متغییر تصمیم: مقدار مواد غذایی
۳. تعداد متغییر تصمیم:به تعداد غذاهای موجود در برنامه غذایی
٤. محدودیت ها: همان کیفیت غذاست.(مربوط به مواد سازنده غذا) و محدودیت نامنفی

۳.مسئله سرمایه گذاری:

شخصی هفتاد میلیون ریال(۷۰۰۰۰۰۰۰ریال)(مهمه) سرمایه دارد که میخواهد در بخش‌های مختلف سرمایه گذاری نماید. زمینه های مختلف سرمایه گذاری:

اوراق قرضه با ۸/۵ ٪ بازده سالانه

سپرده بانکی با ۵٪ بازده سالانه

اسناد خزانه با ٦/۵٪ بازده سالانه

خرید سهام با ۱۳٪ بازده سالانه

زمینه های سرمایه گذاری همگی پس از یکسال قابل ارزیابی و بازنگری هستند.(اضافی) هر زمینه سرمایه گذاری دارای ریسک مختص به خود است.(اضافی) بنابراین سرمایه گذار به منظور کاهش ریسک درصدد تقسیم سرمایه خود بین بخش های مختلف سرمایه گذاری است. سیاست سرمایه گذاری شرکت:

۱. مجموع سرمایه گذاری در اوراق قرضه بیشتر از ۲۰٪ کل سرمایه (یعنی۲۰٪ ۷۰میلیون) نباشد.
۲. مبلغ سرمایه گذاری در سپرده بانکی بیش از مجموع سرمایه گذاری در سه زمینه دیگر نباشد.
۳. مجمو ع سرمایه گذاری در اسناد خزانه و سپرده بانکی حداقل ۳۰٪ کل سرمایه(یعنی۳۰٪ ۷۰ میلیون) باشد.
٤. به منظور ایجاد حاشیه اطمینان نسبت مجموع سرمایه گذاری در سپرده بانکی و اسناد خزانه به مجموع سرمایه گذاری در اوراق قرضه و خرید سهام ۱/۲ به ۱ باشد.

حل مسئله:

ما وقتی سرمایه گذاری میکنیم به دنبال بازده بیشتر هستیم و برای کاهش ریسک در سرمایه گذاری های مختلفی، سرمایه گذاری میکنیم. بازده سالانه از ضرب کردن نرخ بازدهی به مبلغ سرمایه گذاری بدست میاد، ما نرخ بازدهی رو داریم، پس مبلغ سرمایه گذاری در هر یک از انواع سرمایه گذاری، متغییر تصمیم خواهد بود و ما در این سوال به علت داشتن ٤ زمینه سرمایه گذاری، ٤ تا متغییر تصمیم داریم که اینطوری نامگذاری میکنیم:

مبلغ سرمایه گذاری در اوراق قرضه X_1:
مبلغ سپرده بانکی X_2:
مبلغ سرمایه گذاری در اسناد خزانه X_3:
مبلغ سرمایه گذاری در خرید سهام X_4:

گفتیم هدفمون افزایش بازدهی هست، ما باید کل بازدهی امون رو محاسبه کنیم که از مجموع بازده هریک از زمینه های سرمایه گذاری حاصل میشه، مثلا بازده سرمایه گذاری در اوراق قرضه $۰.۰۸۵x_۱$ هست. با این مفروضات تابع هدف رو اینطوری می نویسم.

$$Max\ z = ۰.۰۸۵x_۱ + ۰.۰۵x_۲ + ۰.۰۶۵x_۳ + ۰.۱۳x_۴$$

محدودیت هامون ، سیاست های تعیین شده تقسیم کل سرمایه است.هر سیاست یک محدودیت.

سیاست اول:

۱. مجموع سرمایه گذاری در اوراق قرضه بیشتر از ۲۰٪ کل سرمایه (یعنی۲۰٪ ۷۰میلیون) نباشد.

سرمایه گذاری در اوراق قرضه=$x_۱$ و مبلغ کل سرمایه ۷۰۰۰۰۰۰۰ ریال هست که ۲۰٪ میشه ۱۴۰۰۰۰۰۰ ریال. چون نوشته بیشتر از ۲۰٪ نباشه یعنی میزان سرمایه گذاری کمتر یا مساوی ۲۰٪ کل سرمایه باشه. پس:

$x_۱ \leq ۱۴۰۰۰۰۰۰$ ریال

سیاست دوم:

۲. مبلغ سرمایه گذاری در سپرده بانکی بیش از مجموع سرمایه گذاری در سه زمینه دیگر نباشد.

سرمایه گذاری در سپرده بانکی $x_۲$ و مجموع بقیه سرمایه گذاری ها،$x_۲+x_۳+x_۴$ هست. چون گفته بیشتر نباشه، یعنی کمتر یا مساوی باشه.پس:

$$x_۲ \leq x_۱ + x_۳ + x_۴$$

چون باید تمامی محدودیت ها در برنامه ریزی خطی استاندارد باشه، (یعنی طرف راست محدودیت عدد باشه و طرف چپ متغییرها):پس تمامی متغییرهای طرف راست به چپ منتقل میشه، در حین انتقال علامت های اونها به منفی تبدیل میشه، خواهیم داشت:

$$x_۲ - x_۱ - x_۳ - x_۴ \leq ۰$$

سیاست سوم:

۳. مجموع سرمایه گذاری در اسناد خزانه و سپرده بانکی حداقل ۳۰٪ کل سرمایه(یعنی۳۰٪ ۷۰ میلیون) باشد.

سرمایه گذاری در اسناد خزانه$x_۳$ هست و سپرده بانکی $x_۲$که مجموع اشون میشه$x_۲ + x_۳$ و از اون طرف ۳۰٪ کل سرمایه هم۲۱۰۰۰۰۰۰ ریال میشه.چون نوشته حداقل ۳۰٪ سرمایه باشه یعنی $x_۲ + x_۳$ میتونه بیشتریا مساوی ۲۱۰۰۰۰۰۰ باشه.پس:

$$x_۲ + x_۳ \geq ۲۱۰۰۰۰۰۰$$

سیاست چهارم:

٤. به منظور ایجاد حاشیه اطمینان نسبت مجموع سرمایه گذاری در سپرده بانکی و اسناد خزانه به مجموع سرمایه گذاری در اوراق قرضه و خرید سهام ۱/۲ به ۱ باشد.

مجموع سپرده بانکی و اسناد خزانه x_2+x_3 و مجموع اوراق قرضه و خرید سهام x_1+x_4 هست.نسبت حاصل تقسیم x_2+x_3 بر x_1+x_4 :به عبارت دیگر:

$$\frac{x_2+x_3}{x_1+x_4}$$

سیاست چهارم میگه این نسبت بیشتر از ۱/۲ باشه.حداقل ۱/۲ باشه.(یعنی x_2+x_3 بیشتر از ۱/۲ برابر x_2+x_3 باشد.)

$$\frac{x_2+x_3}{x_1+x_4} \geq 1.2$$

چون باید استاندارد بشه، مخرج طرف چپ به ۱.۲ ضرب میشه.

$$x_2+x_3 \geq 1.2(x_1+x_4)$$

۱.۲ به x_1 و x_4 ضرب میشه.

$$x_2+x_3 \geq 1.2x_1+1.2x_4$$

متغییرهای طرف راست به طرف چپ میره و علامتشون تغییر میکنه.

$$x_2+x_3-1.2x_1-1.2x_4 \geq 0$$

به نظر شما محدودیت ها تموم شده؟ ما هنوز محدودیت مربوط به مقدار سرمایه گذاری کلی رو ننوشتیم، اگه در سوال بگه کل سرمایه خود را سرمایه گذاری کند(مثل الان) خواهیم نوشت:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=7000000$$

اما اگه میگفت قصد دارد کمتر از ۷۰۰۰۰۰۰ریال سرمایه گذاری کند، یا حداکثر به میزان ۷۰۰۰۰۰۰ریال سرمایه گذاری کند.این محدودیت را مینوشتیم:

این محدودیت مربوط به این سوال نیست.یادگیری هست فقط. $x_1+x_2+x_3+x_4 \leq 7000000$

مدل به صورت تمام قد:

$$Max\ z = 0.085x_1+0.05x_2+0.065x_3+0.13x_4$$
s.t:
$$x_4 \leq 1400000$$
$$x_2-x_1-x_3-x_4 \leq 0$$
$$x_2+x_3 \geq 2100000$$
$$x_2+x_3-1.2x_1-1.2x_4 \geq 0$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4 = 7000000$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 0$$

۴.مسئله بازاریابی (تبلیغات)

یک فروشگاه زنجیره ای برای بالا بردن فروش خود درصدد است که تبلیغات را در سطح وسیعی برنامه ریزی کند. سه نوع وسیله تبلیغاتی موجود عبارتند از: آگهی تجاری تلویزیون، آگهی تجاری تلویزیون رادیو و ستون تبلیغاتی روزنامه. هزینه هر بار تبلیغات و تعداد مشتریانی که در معرض هربار تبلیغات قرار میگیرند، برحسب نوع وسیله‌ی تبلیغات در جدول زیر داده شده است:

وسیلهٔ تبلیغات	تعداد افرادی که در معرض تبلیغات قرار می‌گیرند	هزینه (تومان)
آگهی تجاری تلویزیون	۲۰۰۰۰	۱۵۰۰۰۰
آگهی تجاری رادیو	۱۲۰۰۰	۶۰۰۰۰
روزنامه	۹۰۰۰	۴۰۰۰۰

شرکت باید محدودیت های زیر را در تبلیغات خود مدنظر داشته باشد:

۱. کل بودجه تبلیغات ۱۰۰۰۰۰۰ تومان است.
۲. مجوز تعداد تبلیغات تلویزیون حداکثر چهارنوبت است.
۳. مجوز تعداد تبلیغات رادیور حداکثر ۱۰ نوبت است.
٤. مجوز تعداد آگهی روزنامه برای ۷ نوبت است.
۵. مجموع آگهی های تبلیغاتی در سه وسیله نباید بیشتر از ۱۵ نوبت باشد.

حل مسئله:

تابع هدف این مسئله رو باهم بررسی میکنیم،در اول سوال گفته شده که فروشگاه میخواد فروشش رو بالا ببره، اما ما هیچ داده‌ای برای فروش نداریم، پس تابع هدف مربوط به فروش نمیشه. دومین چیزی که به ذهن خطور می‌کنه، کاهش هزینه‌های تبلیغات هست، اما در محدودیت اول می‌بینیم که کل بودجه رو داده، پس لزومی نداره که تابع هدف رو حداقل سازی هزینه قرار بدیم.

ما در تبلیغات و بازاریابی در مرحله اول به دنبال افزایش تعداد افرادی هستیم که در معرض تبلیغات قرار می‌گیرند، پس تابع هدفمون حداکثرسازی تعداد افرادی هست که در معرض تبلیغات قرار می‌گیرند. کل افرادی که از طریق تلویزیون در معرض تبلیغ هستند $\left(\text{تعداددفعات‌تبلیغ‌درتلویزیون} \times ۲۰۰۰۰\right)$ و برای رادیو $\left(\text{تعداددفعات‌تبلیغ‌دررادیو} \times ۱۲۰۰۰\right)$ و برای روزنامه $\left(\text{تعداددفعات‌تبلیغ‌درروزنامه} \times ۹۰۰۰\right)$.می باشد.

با توجه به گفته های بالا، متغییر تصمیم ما «تعداد دفعات تبلیغ در تلویزیون،رادیو، روزنامه» هست که با نمادهای x_1 و x_2 و x_3 نشان میدهیم.

تعداد آگهی تجاری تلویزیون : x_1
تعداد آگهی تجاری رادیو : x_2
تعداد آگهی تبلیغاتی روزنامه : x_3

تابع هدف:حداکثرسازی تعداد افرادی که در معرض تبلیغ قرار میگیرند.(مجموع افراد در معرض تبلیغ هر سه رسانه)

$Max\ z = ۲۰۰۰۰۰x_۱ + ۱۲۰۰۰۰x_۲ + ۹۰۰۰۰x_۳$

محدودیت های مدل هم، محدودیتهای اعلامی سوال هست.

۱. کل بودجه تبلیغات ۱۰۰۰۰۰۰ تومان است.

هزینه هر آگهی در تلویزیون ۱۵۰۰۰۰ و در رادیو ٦۰۰۰۰ و در روزنامه ٤۰۰۰۰ ریال هست که کل هزینه ما برای تبلیغات برابرمیشه با مجموع هزینه کل آگهی در هر یک از رسانه ها. ما نمیتونیم بیشتر از ۱۰۰۰۰۰۰ریال هزینه کنیم، پس کل هزینه ما باید کمتر یا مساوی این مقدار باشه.

$۱۵۰۰۰۰x_۱ + ٦۰۰۰۰x_۲ + ٤۰۰۰۰x_۳ \leq ۱۰۰۰۰۰۰$

۲. مجوز تعداد تبلیغات تلویزیون حداکثر چهارنوبت است.

تعداد آگهی در تلویزیون $x_۱$ هست که باید کمتر یا مساوی چهارنوبت باشه.

$x_۱ \leq ٤$

۳.مجوز تعداد تبلیغات رادیو حداکثر ۱۰ نوبت است.

تعداد تبلیغات در رادیو $x_۲$ هست که حداکثر میتونه ۱۰ نوبت باشه یا به عبارت دیگه باید کمتر یا مساوی ۱۰ نوبت باشه.

$x_۲ \leq ۱۰$

٤.مجوز تعداد آگهی روزنامه برای ۷ نوبت است.

تعداد تبلیغات در روزنامه $x_۳$ هست که حداکثر میتونه ۷ نوبت باشه یا به عبارت دیگه باید کمتر یا مساوی ۷ نوبت باشه.

$x_۳ \leq ۷$

۵.مجموع آگهی های تبلیغاتی در سه وسیله نباید بیشتر از ۱۵ نوبت باشد.

مجموع آگهی‌ها برابر هست با$x_۱ + x_۲ + x_۳$ هست که باید کمتر یا مساوی ۱۵ باشه.

$x_۱ + x_۲ + x_۳ \leq ۱۵$

محدودیت های کارکردی امون رو نوشتیم و با اضافه کردن محدودیتهای نامنفی مدلمون تکمیل میشه.

$Max\ z = ۲۰۰۰۰۰x_۱ + ۱۲۰۰۰۰x_۲ + ۹۰۰۰۰x_۳$
s.t:
$۱۵۰۰۰۰x_۱ + ٦۰۰۰۰x_۲ + ٤۰۰۰۰x_۳ \leq ۱۰۰۰۰۰۰$
$x_۱ \leq ٤$
$x_۲ \leq ۱۰$
$x_۳ \leq ۷$
$x_۱ + x_۲ + x_۳ \leq ۱۵$
$x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰$

خلاصه بازاریابی:

۱. تعداد افراد مهم است.
۲. هدف:حداکثر کردن کل افرادی که در معرض تبلیغ قرار میگیرند.
۳. متغییر تصمیم: تعداد آگهی در هر نوع تبلیغ:به تعداد نوع تبلیغ، متغییر تصمیم داریم.

٤. محدودیت ها: محدودیت هزینه تبلیغات و محدودیت تعداد تبلیغات در هر نوع رسانه.

۵.مسئله حمل و نقل

یک شرکت حمل و نقل در صدد حمل تلویزیون‌های تولیدی از سه کارخانه به سه شهر مختلف است. عرضه‌ی ماهانه هر کارخانه و تعداد تقاضای ماهانه‌ی هر شهر در جداول زیر داده شده است:

کارخانه	عرضه تلویزیون دستگاه
۱. تهران	۳۰۰
۲. اراک	۲۰۰
۳. اصفهان	۲۰۰

شهر	تعداد تقاضا
A - شیراز	۱۵۰
B - بوشهر	۲۵۰
C - اهواز	۲۰۰

هزینه‌ی حمل هر دستگاه تلویزیون از هرکارخانه به هر شهر به نسبت مسافت و کیفیت راه تغییر می‌کند و به شرح جدول زیر است.(هزینه حمل به تومان است.)

از کارخانه	به شهر A	B	C
۱	۱٦	۱۸	۱۱
۲	۱٤	۱۲	۱۳
۳	۱۳	۱٥	۱۷

مسئله را به گونه ای فرموله کنید که ضمن تامین تقاضای هر شهر، کل هزینه حمل نیز حداقل گردد.

حل مسئله:

در مسائل حمل و نقل، هدف حداقل کردن هزینه‌حمل از کارخانه به شهر می‌باشد. هزینه حمل از یک کارخانه به شهر از ضرب کردن هزینه حمل در تعداد کالای قابل حمل به شهر بدست میاد.ما هزینه حمل از کارخانه‌ها به شهرهای مختلف رو داریم، اما تعداد کالای قابل حمل به شهرها رو نداریم، پس متغییر تصمیم ما، تعداد کالای قابل حمل از کارخانهi به شهرj می شود.

متغییر تصمیم این مسئله، دارای دو اندیس هست، یکی برای کارخانه و دیگری برای شهر.

*تعداد تلویزیون قابل حمل از کارخانه i ام به شهر j ام: x_{ij}

$i =$ (۳)اصفهان و (۲)اراک و (۱)تهران

$j =$ (C)اهواز و (B) بوشهر و (A)شیراز

پس وقتی مینویسیم x_{1A} یعنی میزان کالایی که از کارخانه ۱ به شهر A قابل حمل است.

با این مفروضات، مقدار کالایی که از شرکت ۱ قابل حمل است(تولید میشود) برابر است با مقدار کالایی که از شرکت ۱ به شهر A و شهر B و شهر C می رود:

$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C}$

مقدار کالایی که از شرکت ۲ قابل حمل است:

$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C}$

مقدار کالایی که از شرکت ۳ قابل حمل است:

$x_{3A} + x_{3B} + x_{3C}$

و مقدار کالایی که شهر A دریافت میکند برابر است با مقدار کالایی که از شرکت ۱ و شرکت ۲ و شرکت ۳ دریافت میکند:

$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}$

مقدار کالایی که شهر B دریافت میکند:

$x_{1B} + x_{2B} + x_{3B}$

مقدار کالایی که شهر C دریافت میکند:

$x_{1C} + x_{2C} + x_{3C}$

این‌ها برای یادگیری بودند.ابتدا تابع هدف رو فرموله می کنیم:

$$\text{Minimize } Z = 16x_{1A} + 18x_{1B} + 11x_{1C} + 14x_{2A} + 12x_{2B} + 13x_{2C} + 13x_{3A} + 15x_{3B} + 17x_{3C}$$

پارامترها از جدول سوم(هزینه ارسال مواد از کارخانه به شهر) برداشته شده و متغییرها با توضیحاتی که داده شد، قابل فهم است.

حالا میریم به سمت محدودیتهای کارکردی: محدودیت های کارکردی در این مسئله، دو نوع هست، یکی عرضه کارخانه‌ها و دیگری تقاضای شهرها.

عرضه کارخانه‌ها:عرضه هر کارخانه نشانگر میزان ظرفیت اون کارخانه هست و ما میدونیم که نمیشه بیشتر از ظرفیت تولید کرد، یعنی یا کمتر یا مساوی ظرفیت. چون سه کارخانه داریم، پس سه محدودیت عرضه داریم. در اول صفحه نوشتیم که میزان تولید هر کارخانه برابر هست با میزان کالای ارسالی به شهرهای سه گانه، پس مینویسیم:

$$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \le 300$$
$$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \le 200$$
$$x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} \le 200$$

اعداد طرف دوم از جدول اول(مربوط به عرضه) و طرف چپ نامعادله در بالای همین صفحه توضیح داده شد.

تقاضاهای شهرها:سه تا شهر داریم که تقاضاشون متفاوت از همدیگه هست و این رو میدونیم که تقاضا نمیشه کمتر از اون میزان باشه و چون نمیخوایم کالای فروش نرفته، نداشته باشیم، پس به میزان تقاضا به شهرها کالا میفرستیم. میزان کالای ارسالی به شهرها، جمع کالای ارسالی از کارخانه‌ها به این شهرهاست که در صفحه قبل توضیح داده شد.

$$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} = 150$$
$$x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} = 250$$
$$x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} = 200$$

با اضافه کردن محدودیت نامنفی مدل تکمیل میشه.

$$\text{Min } Z = 16\,x_{1A} + 18\,x_{1B} + 11\,x_{1C} + 14\,x_{2A} + 12\,x_{2B} + 13\,x_{2C} + 13\,x_{3A} + 15\,x_{3B} + 17\,x_{3C}$$

s.t:

$$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \le 300$$
$$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \le 200$$
$$x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} \le 200$$
$$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} = 150$$
$$x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} = 250$$
$$x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} = 200$$
$$x_{ij} \ge 0 \; (i = 1, 2, 3 \text{ و } j = A, B, C)$$

۶.مسئله امتزاج

یک شرکت نفتی سه درجه سوخت اتومبیل(سوپر، معمولی، فوق العاده) را از ترکیب سه ماده‌ی خام نفتی تولید می‌کند. پالایشگاه میخواهد به گونه ای ترکیب بهینه مواد خام در هر نوع سوخت را پیدا کند که سود خالص خود را حداکثر نماید.(تابع هدف) حداکثر موجودی از هر نوع ماده خام بر حسب بشکه و هزینه‌ی هر بشکه ماده‌ی خام به شرح زیر می‌باشد:

ماده خام	حداکثر موجودی روزانه(بشکه)	هزینه هر بشکه(دلار)
۱	٤٥٠٠	۱۲
۲	۲۷۰۰	۱۰
۳	۳٥۰۰	۱٤

به منظور اطمینان از امتزاج مناسب، هر درجه‌ای از سوخت دارای مشخصات معینی است. هر درجه‌ای از سوخت باید حداقل لازم را از ماده خام نوع ۱ به علاوه ترکیبی از دیگر اجزا به شرح زیر داشته باشد:(ما تو هر سه نوع سوخت از هر سه نوع ماده داریم، اینها محدودیت هامون هستن که توضیح میدم بعدا)

درجه سوخت	مشخصات ترکیب	قیمت فروش هر بشکه(دلار)
سوپر	حداقل ٥۰٪از ماده ۱	۲۳
	حداکثر ۳۰٪از ماده۲	
معمولی	حداقل ٤۰٪از ماده ۱	۲۰
	حداکثر ۲٥٪از ماده۳	
فوق العاده	حداقل ٦۰٪از ماده ۱	۱۸
	حداکثر ۱۰٪از ماده۲	

شرکت می‌خواهد حداقل ۳۰۰۰بشکه از هر درجه‌ای از سوخت اتومبیل تولید کند.

حل مسئله:

از بزرگی سوال نمی‌ترسیم و قدم به قدم جلو میریم، انشالله با این مسئله هم دوست بشیم. همانطور که گفته شد، هدفمون حداکثر سازی سود هست، همه عزیزان میدونند که سود یعنی (فروش – هزینه ها). ما اینجا قیمت فروش سوخت‌ها و هزینه مواد اولیه رو داریم.پس تابع هدف مربوط به اینها میشه، اما چه چیزی رو باید متغییر تصمیم بگیریم؟بررسی کنیم تا به جواب برسیم:

مانند مسئله حمل و نقل دو تا اندیس خواهیم داشت، یکی برای مواد اولیه و دیگری برای نوع درجه سوخت،با گفتن این سخن خیلی نزدیک شدیم به متغییر تصمیم. گفتیم که همه مواد در هر سه نوع سوخت بکار میره، پس متغییر تصمیم ما، مقدار ماده اولیه(بشکه)که به طور روزانه در هر یک از انواع سوخت استفاده میشه.

پس x_{ij} متغییر تصمیم هست در حالی که $i = ۱,۲,۳$ و $j = S\left(\text{سوپر}\right), P\left(\text{معمولی}\right), e(\text{فوق‌العاده})$ باشد.برای مثال $x_{۱s}$ یعنی تعداد بشکه‌ای که به طور روزانه از ماده اولیه نوع ۱ در سوخت سوپر استفاده میشود.

یک بشکه ماده خام ۱ در تولید هر سه نوع سوخت استفاده میشه، پس یک بشکه ماده خام ۱ به صورت ریاضی برابر است با:

$$x_{۱s} + x_{۱p} + x_{۱e}$$

و همین حرف برای ماده‌ی ۲ نیز صدق می‌کند، یعنی یک بشکه ماده خام ۲ برابر است با مجموع ماده خام از نوع دو که در هر سه نوع از سوخت استفاده میشود:

$$x_{۲s} + x_{۲p} + x_{۲e}$$

و ماده خام ۳:

$$x_{۳s} + x_{۳p} + x_{۳e}$$

چنانچه گفته شد، هر سه نوع سوخت حاوی مواد ۱ و ۲ و ۳ هستند، پس میشه گفت یک بشکه سوخت سوپر، تشکیل شده از ماده۱استفاده شده در آن، ماده۲ استفاده شده در آن و ماده ۳ استفاده شده درآن که به صورت ریاضی اینگونه میشود:

$$x_{۱s} + x_{۲s} + x_{۳s}$$

برای سوخت معمولی داریم:

$$x_{۱p} + x_{۲p} + x_{۳p}$$

برای سوخت فوق العاده داریم:

$$x_{۱e} + x_{۲e} + x_{۳e}$$

حال با داشته های بالا، میریم تا تابع هدف رو فرموله کنیم:

در صفحه قبل گفتیم که قیمت فروش هر بشکه سوخت و هزینه خرید هر بشکه ماده اولیه داریم، اکنون که ما فرموله یک بشکه ماده خام و بشکه سوخت رو داریم، با ضرب کردن قیمت و هزینه به بشکه مربوطه و ماکسیمم سازی آن تابع هدف رو بدست میاریم: (پارامترهای سوخت ها از جدول دوم و پارامتر ماده خام از جدول اول)

$$Max\ z = ۲۳(x_{۱s} + x_{۲s} + x_{۳s}) + ۲۰(x_{۱p} + x_{۲p} + x_{۳p}) + ۱۸(x_{۱e} + x_{۲e} + x_{۳e}) - ۱۲(x_{۱s} + x_{۱p} + x_{۱e}) - ۱۰(x_{۲s} + x_{۲p} + x_{۲e}) - ۱٤(x_{۳s} + x_{۳p} + x_{۳e})$$

حالا اعداد رو به داخل پارانتزها ضرب میکنیم و سپس ساده می‌کنیم.(برای مثال $۲۳x_{۱s} - ۱۲x_{۱s} = ۱۱x_{۱s}$ می‌شود)

$$Max\ z = ۱۱x_{۱s} + ۱۳x_{۲s} + ۹x_{۳s} + ۸x_{۱p} + ۱۰x_{۲p} + ٦x_{۳p} + ٦x_{۱e} + ۸x_{۲e} + ٤x_{۳e}$$

یه کمی ورزش کنید تا خون به مغزتون بیاد تا اینطوری به جزوه نگاه نکنید.

محدویت های این مسئله، اولیش درباره حداکثر موجودی مواد خام هست که در جدول اول اومده، برای یادآوری باید بگم که، حداکثر موجودی یعنی بیشتر مقدار موجودی این مقدار هست و موجودی مواد خام ما میتونه کمتر از این مقدار باشه یا مساوی این مقدار:

$$x_{۱s} + x_{۱p} + x_{۱e} \leq ٤۵۰۰$$
$$x_{۲s} + x_{۲p} + x_{۲e} \leq ۲۷۰۰$$
$$x_{۳s} + x_{۳p} + x_{۳e} \leq ۳۵۰۰$$

گروه دوم محدودیت ها، در جدول دوم با عنوان مشخصات ترکیب گنجانده شده که یکمی به دقت عزیزان نیاز داره.

محدودیت ترکیب مربوط به سوخت سوپر:

۱. حداقل ۵۰٪ از ماده ۱: یعنی مقدار ماده استفاده شده از ماده ۱ در سوخت سوپر(x_{1s}) از ۵۰٪ یک بشکه سوخت سوپر($x_{1s} + x_{2s} + x_{3s}$) بیشتر باشه.(کمترین مقداری که میتونه از ماده ۱ در سوپر استفاده بشه ۵۰٪ هست)

$$\frac{x_{1s}}{x_{1s} + x_{2s} + x_{3s}} \geq 50\%$$

باید به صورت استاندارد تبدیل بشه.

$$x_{1s} \geq 0.05(x_{1s} + x_{2s} + x_{3s})$$

۰.۰۵ را به درون پارانتز ضرب کرده و به سمت چپ انتقال میدهیم.

$$x_{1s} - 0.05x_{1s} - 0.05x_{2s} - 0.05x_{3s} \geq 0 \rightarrow 0.05x_{1s} - 0.05x_{2s} - 0.05x_{3s} \geq 0$$

۲.حداکثر ۳۰٪از ماده۲: یعنی میزان استفاده از ماده ۲ در سوپر باید کمتر یا مساوی ۳۰٪ سوخت سوپر باشه.(نمیتونه بیشتر از ۳۰٪ باشه)

$$\frac{x_{2s}}{x_{1s} + x_{2s} + x_{3s}} \leq 30\%$$

$$0/70\, X_{2s} - 0/30 X_{1s} - 0/30 X_{3s} \leq 0$$

محدودیت ترکیب مربوط به سوخت معمولی:

۱.حداقل ٤٠٪ از ماده۱: مانند محدودیت اول صفحه

$$\frac{x_{1p}}{x_{1p} + x_{2p} + x_{3p}} \geq 40\%$$

$$0/60\, X_{1p} - 0/40 X_{2p} - 0/40 X_{3p} \geq 0$$

۲.حداکثر ۲۵٪ از ماده ۳:

$$\frac{x_{3p}}{x_{1p} + x_{2p} + x_{3p}} \leq 25\%$$

$$0/75\, X_{3p} - 0/25 X_{1p} - 0/25 X_{2p} \leq 0$$

محدودیت ترکیب مربوط به سوخت فوق العاده:

۱.حداقل ٦٠٪ از ماده ۱

$$0/40\, X_{1e} - 0/60 X_{2e} - 0/60\, X_{3e} \geq 0$$

۲.حداکثر ۱۰٪ از ماده ۲

$$0/90\, X_{2e} - 0/10 X_{1e} - 0/10\, X_{3e} \leq 0$$

حالا یه مجموعه محدودیت نیز باقی می‌مونه که مربوط میشه به این جمله:

«شرکت می‌خواهد حداقل ۳۰۰۰بشکه از هر درجه‌ای از سوخت اتومبیل تولید کند.»

پس:

$$x_{۱s} + x_{۲s} + x_{۳s} \geq ۳۰۰۰$$
$$x_{۱p} + x_{۲p} + x_{۳p} \geq ۳۰۰۰$$
$$x_{۱e} + x_{۲e} + x_{۳e} \geq ۳۰۰۰$$

با اضافه کردن محدودیت نامنفی، مدل تکمیل میشود:

$$\text{Max } Z = ۱۱\,x_{۱s} + ۱۳\,x_{۲s} + ۹\,x_{۳s} + ۸\,x_{۱p} + ۱۰\,x_{۲p} + ۶\,x_{۳p} + ۶\,x_{۱e} + ۸\,x_{۲e} + ۴\,x_{۳e}$$

s.t:

$$x_{۱s} + x_{۱p} + x_{۱e} \leq ۴۵۰۰$$
$$x_{۲s} + x_{۲p} + x_{۲e} \leq ۲۷۰۰$$
$$x_{۳s} + x_{۳p} + x_{۳e} \leq ۳۵۰۰$$
$$۰/۵۰\,x_{۱s} - ۰/۵۰\,x_{۲s} - ۰/۵۰\,x_{۳s} \geq ۰$$
$$۰/۷۰\,x_{۲s} - ۰/۳۰\,x_{۱s} - ۰/۳۰\,x_{۳s} \leq ۰$$
$$۰/۶۰\,x_{۱p} - ۰/۴۰\,x_{۲p} - ۰/۴۰\,x_{۳p} \geq ۰$$
$$۰/۷۵\,x_{۳p} - ۰/۲۵\,x_{۱p} - ۰/۲۵\,x_{۲p} \leq ۰$$
$$۰/۴۰\,x_{۱e} - ۰/۶۰\,x_{۲e} - ۰/۶۰\,x_{۳e} \geq ۰$$
$$۰/۹۰\,x_{۲e} - ۰/۱۰\,x_{۱e} - ۰/۱۰\,x_{۳e} \leq ۰$$
$$x_{۱s} + x_{۲s} + x_{۳s} \geq ۳۰۰۰$$
$$x_{۱p} + x_{۲p} + x_{۳p} \geq ۳۰۰۰$$
$$x_{۱e} + x_{۲e} + x_{۳e} \geq ۳۰۰۰$$
$$X_{ij} \geq ۰ \quad (i = ۱, ۲, ۳;\ j = s, p, e)$$

۷.مسئله زمان بندی چند دوره‌ای

شرکت تولیدکنندهٔ رایانه‌های شخصی درصدد تهیهٔ برنامه زمانبندی برای تولید محصولات خود است. ظرفیت عادی تولید برای شرکت ۱۶۰ رایانه در هفته است. همچنین شرکت توانایی تولید ۵۰ کامپیوتر را در نوبت اضافه کاری دارد. هزینهٔ مونتاژ، بازرسی و بسته‌بندی هر رایانه در وقت عادی ۱۹۰۰۰۰ تومان است. تولید هر رایانه در وقت اضافی ۲۶۰۰۰۰ تومان هزینه دارد. در ضمن هزینهٔ نگهداری هر رایانه در انبار برای تحویل در ماه آینده ۱۰۰۰۰ تومان می‌باشد. جدول زیر تعداد سفارشات رایانه را برای ۶ هفته نشان می‌دهد.

هفته	سفارشات رایانه
۱	۱۰۵
۲	۱۷۰
۳	۲۳۰
۴	۱۸۰
۵	۱۵۰
۶	۲۵۰

شرکت تولیدکننده درصدد تهیه سفارشات در زمان مقرر می‌باشد و حاضر نیست هیچ یک از مشتریان خود را از دست بدهد. مسأله را به گونه‌ای فرموله کنید که ضمن حداقل کردن هزینه‌های تولید و انبارداری، برنامه زمانی لازم برای تولید را در ظرفیت عادی و اضافه کاری ارایه دهد. به عبارت دیگر مشخص کنید که تعداد تولید در هر هفته در وقت عادی و اضافه کاری چقدر باید باشد تا هزینه‌های کارخانه حداقل گردند. در ضمن مدیر شرکت می‌خواهد در انتهای هفته ششم موجودی انبار صفر باشد.

حل مسئله:

از صورت مسئله متوجه تابع هدف میشویم اما اینکه چه چیزی متغییر تصمیم هست را باید بررسی کنیم. ما با سه هزینه سروکار داریم، هزینه در وقت عادی، هزینه در وقت اضافه کاری و هزینه نگهداری هر رایانه. با این مفروضات ما با سه مجموعه از متغییرها مواجه خواهیم شد. دسته اول مربوط به تولید در زمان عادی برای ٦ هفته ، دسته دوم تعداد تولید در زمان اضافی برای ٦ هفته و دسته سوم برای نشان دادن موجودی انبار در ۵ هفته می باشد.(دلیل ۵ هفته بودن موجودی:انتهای هفته ششم موجودی انبار صفر باشد)

تعداد تولید رایانه در هفته j در زمان عادی (j = ۱,۲,۳,۴,۵,۶) : R_j

تعداد تولید رایانه در هفته j در زمان اضافه کاری (j = ۱,۲,۳,۴,۵,۶) : O_j

تعداد رایانه مازاد که در هفته j در انبار نگهداری می‌شود. (j = ۱,۲,۳,۴,۵) : I_j

تابع هدف: گفتیم که هدف حداقل سازی کل هزینه هاس،ما شش هفته هزینه‌ی وقت عادی و شش هفته هزینه‌ی اضافه کاری و ۵ هفته هزینه‌ی انبارداری خواهیم داشت که باید مجموع اینها رو حداقل کنیم:

$$Min\ z = ١٩٠٠٠٠(R_١ + R_٢ + R_٣ + R_٤ + R_٥ + R_٦) + ٢٦٠٠٠٠(O_١ + O_٢ + O_٣ + O_٤ + O_٥) + ١٠٠٠٠(I_١ + I_٢ + I_٣ + I_٤ + I_٥)$$

محدودیت های مسئله هم سه دسته اند:

۱.دسته اول: مربوط به ظرفیت تولید در زمان عادی در شش هفته:

$R_j \geq ١٦٠\ (j = ١,٢,٣,٤,٥,٦)$

۲.دسته دوم:ظرفیت تولید در زمان اضافه کاری در ٦هفته:

$O_j \geq ٥٠\ (j = ١,٢,٣,٤,٥,٦)$

۳.دسته سوم:تعداد تولید هفتگی و موجودی انبار مورد نیاز:

هفته اول: تولید در وقت عادی+تولید در وقت اضافی –موجودی انبار در هفته اول برای اینکه بتونیم ۱۰۵ سفارش رو جوابگو باشیم، باید حداقل ۱۰۵ رایانه داشته باشیم.	$R_١ + O_١ - I_١ \geq ١٠٥$
هفته دوم:علاوه بر تولید عادی و اضافی،موجوی انبار هفته قبل نیز وجود دارد.	$R_٢ + O_٢ + I_١ - I_٢ \geq ١٧٠$
هفته سوم	$R_٣ + O_٣ + I_٢ - I_٣ \geq ٢٣٠$
هفته چهارم	$R_٤ + O_٤ + I_٣ - I_٤ \geq ١٨٠$
هفته پنجم	$R_٥ + O_٥ + I_٤ - I_٥ \geq ١٥٠$
هفته ششم: دلیل کسر نکردن $I_٦$ از طرف چپ، به خاطر اینکه نمیخواهیم در آخر هفته ششم در انبار موجودی باقی بماند.	$R_٢ + O_٢ + I_٥ \geq ٢٥٠$

مدل تکمیل شده:

$$Min\ Z = ۱۹۰۰۰۰(R_۱ + R_۲ + R_۳ + R_۴ + R_۵ + R_۶)$$
$$+ ۲۶۰۰۰۰(O_۱ + O_۲ + O_۳ + O_۴ + O_۵ + O_۶)$$
$$+ ۱۰۰۰۰(I_۱ + I_۲ + I_۳ + I_۴ + I_۵)$$

s.t:

$R_j \leq ۱۶۰\ (j = ۱,۲,۳,۴,۵,۶)$

$O_j \leq ۵۰\ (j = ۱,۲,۳,۴,۵,۶)$

$R_۱ + O_۱ - I_۱ \geq ۱۰۵$

$R_۲ + O_۲ + I_۱ - I_۲ \geq ۱۷۰$

$$R_3 + O_3 + I_2 - I_3 \geq 230$$
$$R_4 + O_4 + I_3 - I_4 \geq 180$$
$$R_5 + O_5 + I_4 - I_5 \geq 150$$
$$R_6 + O_6 + I_5 \geq 250$$
$$R_j \geq 0\ (j = 1,2,\ldots,6)\ ;\ O_j \geq 0\ \ (j = 1,2,\ldots,6);\ I_j \geq 0\ (j = 1,2,\ldots,5)$$

۸.مسئله ترکیب محصولات کشاورزی

کشاورزی دارای زمینی است که مساحت آن ۲۰۰۰هکتار است. زمین این کشاورز به ۳ قطعه مجزا تقسیم شده است. قطعه اول ۵۰۰ هکتار، قطعه دوم ۸۰۰ هکتار و قطعه سوم ۷۰۰ هکتار مساحت دارد. زمین کشاورز برای کشت ذرت، پیاز و لوبیا مناسب است. حداکثر زمین قابل کشت برای هر یک از محصولات و سود حاصل از هر هکتار بر حسب نوع محصول قابل کشت در جدول زیر داده شده است:

محصول	حداکثر سطح قابل کشت (هکتار)	سود هر هکتار (ریال)
ذرت	۹۰۰	۶۰۰۰۰
پیاز	۷۰۰	۴۵۰۰۰۰
لوبیا	۱۰۰۰	۳۰۰۰۰

هر یک از محصولات را میتوان در هر کدام از قطعات سه گانه کشت نمود. اما شرایط زیر باید رعایت شود:

۱.حداقل ۶۰٪ هر قطعه زمین باید کشت شود.

۲.کشاورز میخواهد که در هر س قطعه زمین نسبت مساحت زیر کشت به کل مساحت مساوی باشد.

مسئله را طوری فرموله کنید که سودکشاورز در هر قطعه حداکثر شود.

حل مسئله:

تابع هدف، حداکثر کردن سود هست. سود هر هکتار از محصولات رو داده و ما باید میزان محصول کشت شده کلی رو پیدا کنیم.

متغییر تصمیم مانند حمل و نقل دو اندیسه خواهد بود، چون میتوان هر سه محصول را در هر سه قطعه کاشت.پس میتوان متغییر تصمیم را اینگونه معرفی کرد:

مساحت کشت شده برای محصول i در قطعه زمین j

$x_{ij}: (i = 1,2,3\,; j = 1,2,3)$

اندیس اولی معرف محصول و اندیس دومی معرف زمین هست. برای مثال x_{12}، بیانگر مساحت زیر کشت محصول ذرت در قطعه دوم هست. تعداد متغییر ها ۹ تا خواهد بود.

تابع هدف از حاصلضرب سطح زیر کشت هر محصول در سودهر هکتار بدست میاد.

سطح زیر کشت محصول ذرت:

$x_{11} + x_{12} + x_{13}$

سطح زیر کشت محصول پیاز:

$x_{21} + x_{22} + x_{23}$

سطح زیر کشت محصول لوبیا:

$x_{31} + x_{32} + x_{33}$

قطعه زمین یک(جمع سطح زیر کشت ذرت،پیاز، لوبیا در زمین یک)

$x_{11} + x_{21} + x_{31}$

قطعه زمین دو(جمع سطح زیر کشت ذرت،پیاز، لوبیا در زمین دو)

$x_{12} + x_{22} + x_{32}$

قطعه زمین سه(جمع سطح زیر کشت ذرت،پیاز، لوبیا در زمین سه)

$x_{13} + x_{23} + x_{33}$

تابع هدف:

$Max\ z = ٦٠٠٠٠٠(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + ٤٥٠٠٠٠٠(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + ٣٠٠٠٠٠(x_{31} + x_{32} + x_{33})$

محدودیت ها مربوط به حداقل و حداکثر مساحت قابل کشت هر قطعه زمین، حداکثر سطح قابل کشت هر محصول، سیاست های کشاورز.

الف.٦٠٪ هر قطعه زمین باید زیر کشت برود.یعنی حداقل ٦٠٪ هر قطعه زمین باید کشت شود و بیشترین مقدار هم مربوط به مساحت قطعه زمین مربوط است.

قطعه زمین شماره۱:

محدودیت حداقل برای قطعه زمین ۱ $٥٠٠ \times ٦٠\% = ٣٠٠$	$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq ٣٠٠$
محدودیت حداکثر برای قطعه زمین ۱	$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq ٥٠٠$

قطعه زمین شماره ۲:

محدودیت حداقل برای قطعه زمین ۲ $٨٠٠ \times ٦٠\% = ٤٨٠$	$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq ٤٨٠$
محدودیت حداکثر برای قطعه زمین ۲	$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq ٨٠٠$

قطعه زمین شماره ۳:

محدودیت حداقل برای قطعه زمین ۳ $٧٠٠ \times ٦٠\% = ٤٢٠$	$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq ٤٢٠$
محدودیت حداکثر برای قطعه زمین ۳	$x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq ٧٠٠$

ب.حداکثر سطح قابل کشت هر محصول در جدول آورده شده ذرت ۹۰۰، پیاز۷۰۰، لوبیا ۱۰۰۰ هکتار.

مساحت زیر کشت ذرت	$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq ٩٠٠$
مساحت زیر کشت پیاز	$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq ٧٠٠$
مساحت زیر کشت لوبیا	$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq ١٠٠٠$

ج.سیاست های کشاورز:در هرسه قطعه زمین نسبت مساحت زیر کشت(برای زمین ۱: $(x_{11}+x_{21}+x_{31})$ به کل مساحت زمین(برای زمین ۱: ۵۰۰) برابر باشد.یعنی:

$$\frac{x_{11}+x_{21}+x_{31}}{500}=\frac{x_{12}+x_{22}+x_{32}}{800}=\frac{x_{13}+x_{23}+x_{33}}{700}$$

برای اینکه بتوانیم این محدودیت را در برنامه ریزی بیاوریم، به محدودیت های زیر تبدیل کرده :

$$\frac{x_{11}+x_{21}+x_{31}}{500}=\frac{x_{21}+x_{22}+x_{32}}{800}$$

$$\frac{x_{11}+x_{21}+x_{31}}{500}=\frac{x_{13}+x_{23}+x_{33}}{700}$$

$$\frac{x_{12}+x_{22}+x_{32}}{800}=\frac{x_{13}+x_{23}+x_{33}}{700}$$

سپس به صورت استاندارد تبدیل می کنیم:

$$800\,(x_{11}+x_{21}+x_{31})-500\,(x_{12}+x_{22}+x_{32})=0$$

$$700\,(x_{11}+x_{21}+x_{31})-500\,(x_{13}+x_{23}+x_{33})=0$$

$$700\,(x_{12}+x_{22}+x_{32})-800\,(x_{13}+x_{23}+x_{33})=0$$

مدل به صورت زیرتکمیل شد:

$$\text{Min } Z=60000\,(x_{11}+x_{12}+x_{13})+450000\,(x_{21}+x_{22}+x_{23})+30000\,(x_{31}+x_{32}+x_{33})$$

s.t:

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}\geq 300$$

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}\leq 500$$

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}\geq 480$$

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}\leq 800$$

$$x_{۱۳} + x_{۲۳} + x_{۳۳} \geq ۴۲۰$$

$$x_{۱۳} + x_{۲۳} + x_{۳۳} \leq ۷۰۰$$

$$x_{۱۱} + x_{۱۲} + x_{۱۳} \leq ۹۰۰$$

$$x_{۲۱} + x_{۲۲} + x_{۲۳} \leq ۷۰۰$$

$$x_{۳۱} + x_{۳۲} + x_{۳۳} \leq ۱۰۰۰$$

$$۸۰۰\,(x_{۱۱} + x_{۲۱} + x_{۳۱}) - ۵۰۰\,(x_{۱۲} + x_{۲۲} + x_{۳۲}) = ۰$$

$$۷۰۰\,(x_{۱۱} + x_{۲۱} + x_{۳۱}) - ۵۰۰\,(x_{۱۳} + x_{۲۳} + x_{۳۳}) = ۰$$

$$۷۰۰\,(x_{۱۲} + x_{۲۲} + x_{۳۲}) - ۸۰۰\,(x_{۱۳} + x_{۲۳} + x_{۳۳}) = ۰$$

$$X_{ij} \geq ۰ \quad (i = ۱, ۲, ۳ \,;\, j = ۱, ۲, ۳)$$

۹.مسئله برش چوب

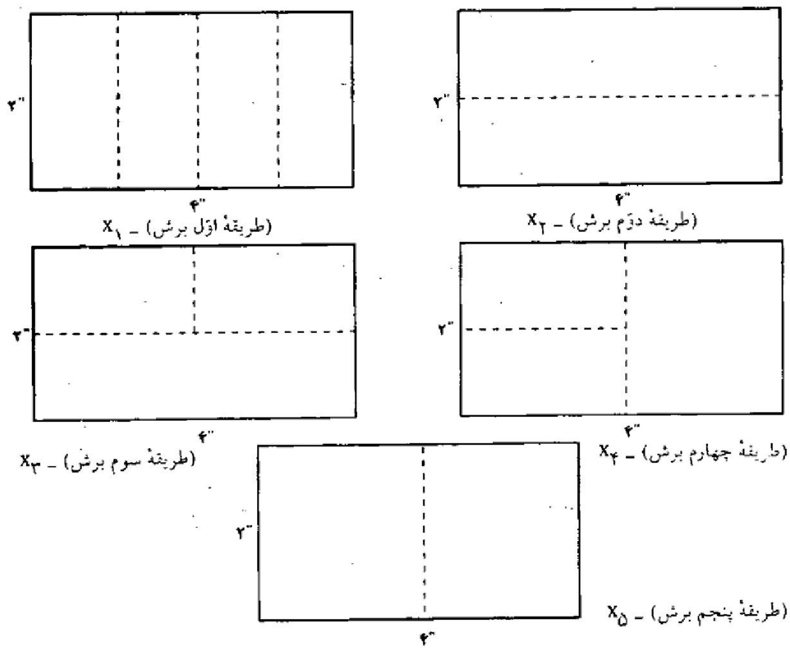
یک شرکت چوب بری باید سفارشهایی را به ابعاد زیر تهیه و به متقاضیان تسلیم نماید.

ابعاد چوبهای سفارشی	مقدار سفارش
۱″×۲″×۱۱′	۱۳۰۰
۱″×۴″×۱۱′	۱۰۰۰
۲″×۲″×۱۱′	۷۰۰

این سفارشات باید از تخته‌های استاندارد به ابعاد ۱۱′ × ۴″ × ۲″ تهیه گردد. شرکت چوب‌بری در نظر دارد که سفارشات را به گونه‌ای برآورده سازد که حداقل تخته استاندارد را مورد استفاده قرار دهد. حال مسأله را به گونه‌ای فرموله خواهیم کرد که ضمن تهیهٔ سفارشات، حداقل تختهٔ استاندارد استفاده شود.

حل مسئله:

مسئله های چوب بری، نسبت به بقیه راحتتر هست. تابع هدفمون حداقل کردن تعداد تخته های استفاده شده برای برش هست. متغییر تصمیم بستگی به تعداد برشهای از یک تخته استاندارد دارد، به همین دلیل در این مسائل اولین کاری که انجام می‌دهیم، تعیین تعداد نحوه برش چوب‌ها هست.به تعداد نحوه برش چوب، متغییر تصمیم خواهیم داشت. در این سوال از یک تخته۲در٤، باید تخته هایی در ابعاد ۱در۲ و ۱در ٤ و ۲در ۲ برش داد.حال با رسم شکل نشان میدهیم که چند روش برای برش این چوبها از تخته ۲در٤ وجود دارد.



مشاهده شد که ۵ روش برای برش چوب ها در این ابعاد وجود دارد، پس ۵ متغییر تصمیم داریم که عبارتند از:

تعداد تخته‌های استانداردی که دارای طریقهٔ اوّل برش هستند. : X_1

تعداد تخته‌های استانداردی که دارای طریقهٔ دوم برش هستند. : X_2

تعداد تخته‌های استانداردی که دارای طریقهٔ سوم برش هستند. : X_3

تعداد تخته‌های استانداردی که دارای طریقهٔ چهارم برش هستند. : X_4

تعداد تخته‌های استانداردی که دارای طریقهٔ پنجم برش هستند. : X_5

تابع هدف:

$$\text{Minimize } Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

محدودیت ها مربوط به مقدار سفارش می باشد، وقتی سفارش ۱۳۰۰ عدد هست ما باید حداقل ۱۳۰۰ عدد برش داده باشیم تا بتوانیم جوابگوی تقاضای مشتری باشیم. چون سه نوع برش داریم، پس سه محدودیت داریم و پارامترهای محدودیت ها ،تعداد هر برش در هر متغییر تصمیم(تصاویر)است.

مشاهده می کنیم که ابعاد ۲در۱، از طریقه برش اول(٤تا)، سوم(۲تا)، و چهارم(۲تا) بدست می آید، پس می نویسیم:

$$4x_1 + 2x_3 + 2x_4 \geq 1300$$

برای برش ها دیگر نیز مانند بالایی عمل میکنیم:

$$2x_2 + x_3 \geq 1000$$

$$x_4 + 2x_5 \geq 700$$

مدل کلی:

$$\text{Min } Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

s.t:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_3 + 2x_4 &\geq 1300 \\ 2x_2 + x_3 &\geq 1000 \\ x_4 + 2x_5 &\geq 700 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

فصل سوم

برنامه ریزی خطی روش هندسی

۱. شروع:۱۹٤۱، لئونتیف، هیچکاک همزمان با او مدل حمل و نقل
۲. وایت:۱۹٤۵:ترکیبات مختلف مواد برای حصول نتیجه
۳. پیشرفت فن Lp : جرج دنتزیگ

سه قدم اساسی استفاده از فن برنامه ریزی خطی:

۱.بیان مسئله به گونه ای قابل حل با فن برنامه ریزی خطی تعریف شود.

۲. فرموله شدن مسئله در یک قالب ریاضی

۳.قابل حل بودن مدل با فن ریاضی(قطعی و معین)

٤. برنامه ریزی خطی یکی از مهم ترین فنون OR در شرایط تصمیم گیری قطعی است.
۵. برنامه ریزی خطی به مسائل تخصیص منابع محدود بین فعالیت های رقیب در جهت یافتن بهترین راه حل ممکن،مربوط می شود.

مفروضات برنامه ریزی خطی:

شرایط خطی بودن یک برنامه ریزی ریاضی:

۱.فرض تناسب ۲.فرض جمع پذیری ۳.فرض بخش پذیری ٤.معین بودن

۱.فرض تناسب:

۱. هر فعالیت به تنهایی و مستقل از سایر فعالیت ها عمل میکند.
۲. شیب رابطه تابعی ثابت است←متغییر تصمیم برابر مقداری تغییر کند،مقدار تابع به همان نسبت تغییر می-کند.

۲.فرض جمع پذیری:

۱. باید روابط ریاضی بین متغییرها در مدل به صورت جمع جبری بیان گردد.
۲. در برنامه ریزی خطی حاصلضرب دو متغییر یا توان نخواهیم داشت.

۳.فرض بخش پذیری:

۱. غیرعدد صحیح بودن متغییرهای تصمیل در مدل
۲. متغییرهای تصمیم هر مقدار دلخواهی را در جواب نهایی مسئله داشته باشد.
۳. معنای بخش پذیری:هر واحد فعالیت به هر کسر دلخواهی قابل تقسیم است.
٤. با محدودیت غیر منفی مدل تضمین می شود.

۴.معین بودن:

کلیه پارامترهای مدل برنامه ریزی خطی در افق برنامه ریزی مقادیر ثابتی باشد.

***مدل فرض تناسب و جمع پذیری داشته باشد اما بخش پذیری نداشته باشد:برنامه ریزی عدد صحیح

***فرض معین بودن نباشد:احتمالی

***فرض جمع پذیری و تناسب نباشد:غیرخطی

روش ترسیمی حل مسئله برنامه ریزی خطی:

١. روابط خطی یکی از ساده ترین روابط است که برای حل آن از شیوه ترسیمی استفاده می شود.

٢. روش ترسیمی در مدل های برنامه ریزی خطی به مدل هایی محدود می شود که حداکثر ٢ متغییر تصمیم دارد.

٣. در حل این نوع مدل ها،از دستگاه مختصات استفاده کرد.

٤. شیوه ترسیمی حل مدل،صرفا جنبه تئوریک دارد.

مراحل حل برنامه ریزی به روش هندسی:

١. رسم معادلات مرزی محدودیت‌ها

٢. تعیین ناحیه قابل قبول متناظر با هر محدودیت

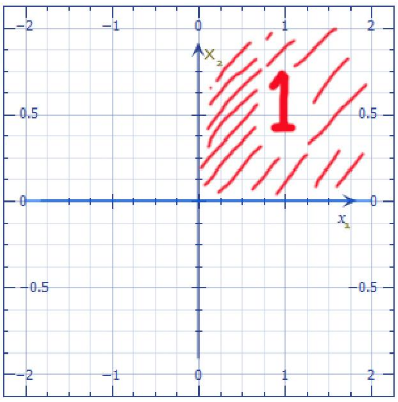
٣. تعیین ناحیه موجه

٤. پیدا کردن جواب بهینه

با چند مثال این فصل رو به خوبی و خوشی به پایان می رسانیم:

مثال١:با روش ترسیمی مدل خطی زیر را حل کنید:

$Max\ z = ٤٠x_{١} + ٥٠x_{٢}$
s.t:
$x_{١} + ٢x_{٢} \leq ٤٠$
$٤x_{١} + ٣x_{٢} \leq ١٢٠$
$x_{١}, x_{٢} \geq ٠$



اول از همه کار رو با نام خدا شروع می کنیم و بعدش یک محور مختصات رسم میکنیم:

محور افقی، محور $X_{١}$ و محور عمودی مربوط به $X_{٢}$ هست. چون متغییرهای تصمیم نامنفی هستند $x_{١}, x_{٢} \geq ٠$ فقط ناحیه اول مورد قبول هست.

١.رسم معادلات مرزی محدودیت ها و تعیین ناحیه قابل قبول متناظر با هر محدودیت

برای اینکه بتونیم خط متناظر با هر محدودیت رو بکشیم، علامت های بزرگتر مساوی و کوچکتر مساوی رو به = تبدیل می کنیم.

*ابتدا درباره محدودیت اول بحث می کنیم:

$x_1 + ۲x_۲ = ٤۰$

با جایگزینی علامت مساوی به جای ≥ کوچکتر مساوی، نامعادله به معادله یک خط تبدیل میشه، که با پیدا کردن دو نقطه از این خط، میشه رسمش کرد.برای راحتی کار، یکبار به x_1 صفر داده و $x_۲$ را پیدا میکنیم و باردیگر به $x_۲$ صفر می‌دهیم تا x_1 را پیدا کنیم. در تمامی محدودیت‌ها اینکار را انجام میدهیم تا دو نقطه از خط متناظر با محدودیت را بدست بیاریم تا بتونیم خط رو رسم کنیم:

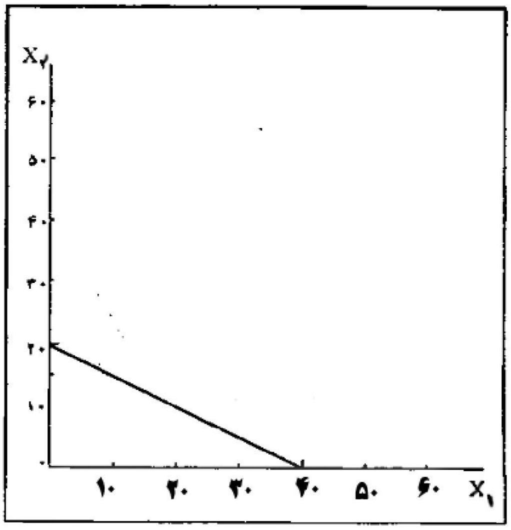
یادآوری: $(x_1, x_۲)$

$L_1: x_1 + ۲x_۲ = ٤۰$

$x_1 = ۰ \Rightarrow ۰ + ۲x_۲ = ٤۰ \Rightarrow ۲x_۲ = ٤۰ \Rightarrow x_۲ = \frac{٤۰}{۲} = ۲۰ \Rightarrow (۰,۲۰)$

$x_۲ = ۰ \Rightarrow x_1 + ۲(۰) = ٤۰ \Rightarrow x_1 = ٤۰ \Rightarrow (٤۰,۰)$

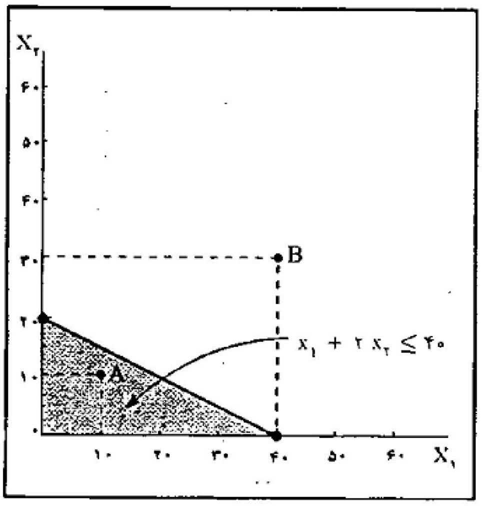
حال نقاط را روی محور مختصات پیدا کرده و بهم وصل میکنیم:



این خط، خط متناظر با محدودیت اول هست ولی محدودیت اول را نشان نمی‌دهد، برای اینکه محدودیت اول را نشان دهیم، باید یک نقطه از پایین یا بالای خط انتخاب کرده و در محدودیت $x_1 + ۲x_۲ \leq ٤۰$ قرار میدهیم، اگر نقطه در محدودیت صدق کرد، طرفی که نقطه در آنجا هست را منطقه قابل قبول محدودیت اول میگوییم.برای سهولت همواره نقطه مبدا (۰,۰) را در محدودیت قرار دهید، اگر صدق کرد، طرفی از خط که مبدا درآن قرار دارد، منطقه قابل قبول است.

$(۰,۰) \Rightarrow ۰ + ۲(۰) = ۰ \leq ٤۰$

چون مبدا در محدودیت صدق می‌کند، پس ناحیه مربوط به محدودیت اول، قسمتی است که مبدا درآن قرار دارد.

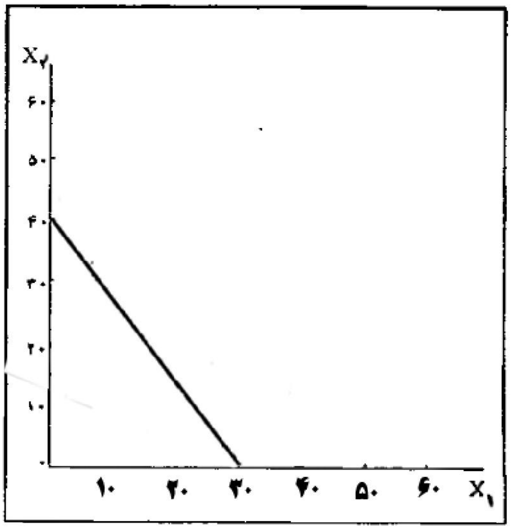


حال به سراغ محدودیت دوم رفته و رسم میکنیم:

$L_۲: ٤x_۱ + ۳x_۲ = ۱۲۰$

$x_۱ = ۰ \Rightarrow ٤(۰) + ۳x_۲ = ۱۲۰ \Rightarrow ۳x_۲ = ۱۲۰ \Rightarrow x_۲ = \frac{۱۲۰}{۳} = ٤۰ \Rightarrow (۰,٤۰)$

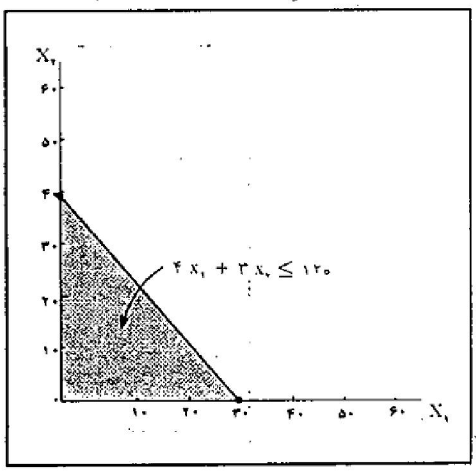
$x_۲ = ۰ \Rightarrow ٤x_۱ + ۳(۰) = ۱۲۰ \Rightarrow ٤x_۱ = ۱۲۰ \Rightarrow x_۱ = \frac{۱۲۰}{٤} = ۳۰ \Rightarrow (۳۰,۰)$



باز این خط، خط متناظر با محدودیت دومی هست ولی محدودیت دوم را نشان نمی‌دهد، برای نشان دادن محدوده قابل قبول محدودیت دوم، نقطه مبدا را در محدودیت دوم قرار میدهیم و بررسی میکنیم:

$(۰,۰) \Rightarrow ٤(۰) + ۳(۰) = ۰ \leq ۱۲۰$

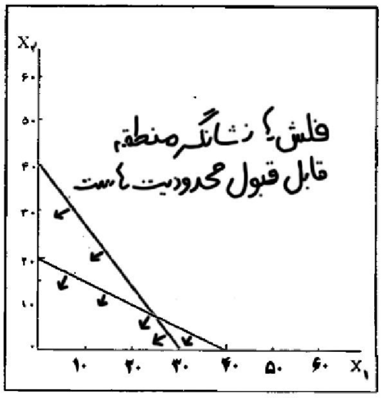
چون نقطه مبدا در محدودیت دوم صدق می‌کند، پس ناحیه-ای که مبدا در آنجا قرار دارد، قابل قبول هست.



به یاد داشته باشیم که روی خط و قسمتی که با رنگ سیاه، مشخص شده است، منطقه قابل قبول محدودیت دوم هست.برای اینکه به صحت این موضوع پی ببرید، هر نقطه ای را از منطقه سیاه یا روی خط، در محدودیت دوم بگذارید، صدق می کند.

*هر دو محدودیت را باید در یک محور مختصات رسم کرد، در این جزوه برای یادگیری شما در مختصات دیگر رسم میشود.

حال هر دو محدودیت در یک محور مختصات:

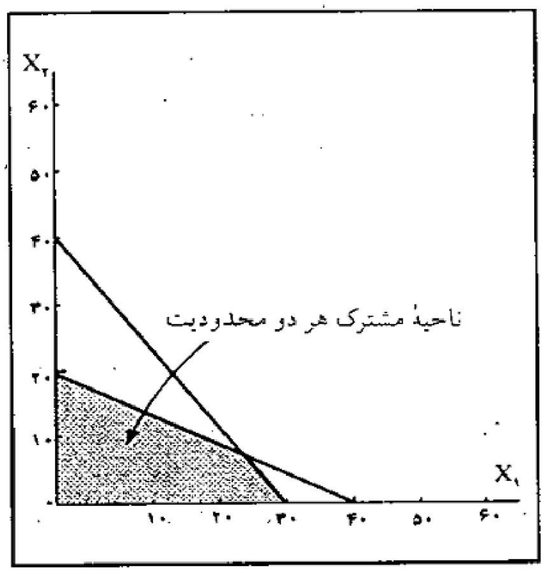


سومین مرحله از حل ترسیمی، تعیین ناحیه موجه است.قبل از تعیین ناحیه موجه باید توضیح مختصری در مورد ناحیه موجه داده شود.

ناحیه موجه یا فضای شدنی یا فضای جواب، ناحیه ای است که تمام نقاط آن در تمامی محدودیت‌ها صدق کند.

به عبارت ساده تر، ناحیه موجه ناحیه‌ای هست که محدودیت‌ها در آن ناحیه مشترک اند و هر عددی از این ناحیه در تمام محدودیت‌ها صدق میکنه.

در این مسئله ناحیه موجه بخش این بخش می باشد:



*برای اینکه بدانیم، نقطه ای در ناحیه موجه قرار دارد یا ندارد، مختصات نقطه را در تمامی محدودیت‌ها جای گذاری میکنیم، اگر در تمامی محدودیتها صدق کرد، در ناحیه جواب(موجه،شدنی) قرار گرفته است.

قدم چهارم :رسم راستای تابع هدف و پیدا کردن جواب بهینه

راستای تابع هدف به خطی گفته میشه که تابع هدف رو در مقداری دلخواه نشان میده، گفته میشه. برای رسم راستای تابع هدف، در تابع هدف، به جای Z عددی دلخواه قرار میدیم(اگه حاصلضرب پارامترها باشه راحتتر حل میشه یا مضربی از پارامترها) و دو نقطه را پیدا کرده و به هم وصل میکنیم تا راستای تابع هدف رسم بشه.

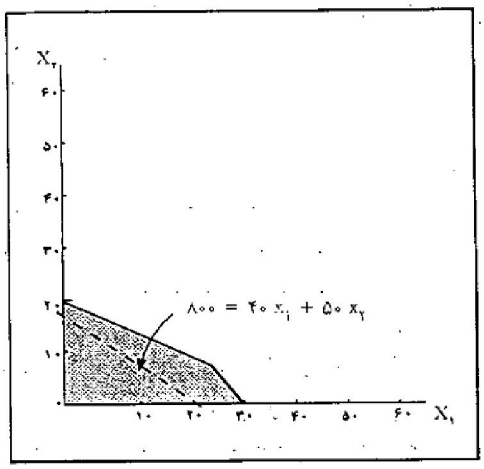
$z = ٤٠x_١ + ٥٠x_٢$

$z = ٨٠٠ \Rightarrow ٨٠٠ = ٤٠x_١ + ٥٠x_٢$

$x_١ = ٠ \Rightarrow ٤٠(٠) + ٥٠x_٢ = ٨٠٠ \Rightarrow ٥٠x_٢ = ٨٠٠ \Rightarrow x_٢ = \frac{٨٠٠}{٥٠} = ١٦ \Rightarrow (٠,١٦)$

$x_٢ = ٠ \Rightarrow ٤٠x_١ + ٥٠(٠) = ٨٠٠ \Rightarrow ٤٠x_١ = ٨٠٠ \Rightarrow x_١ = \frac{٨٠٠}{٤٠} = ٢٠ \Rightarrow (٢٠,٠)$

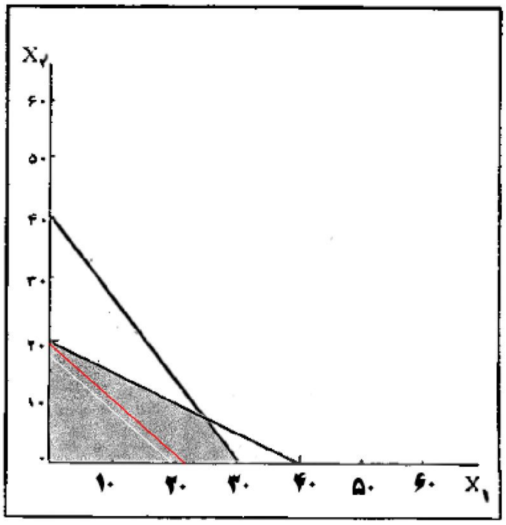
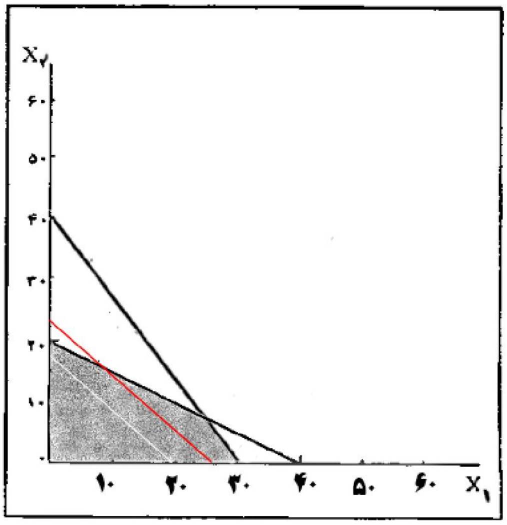
حال با توجه به نقاط بدست آمده، راستای تابع هدف را رسم میکنیم.



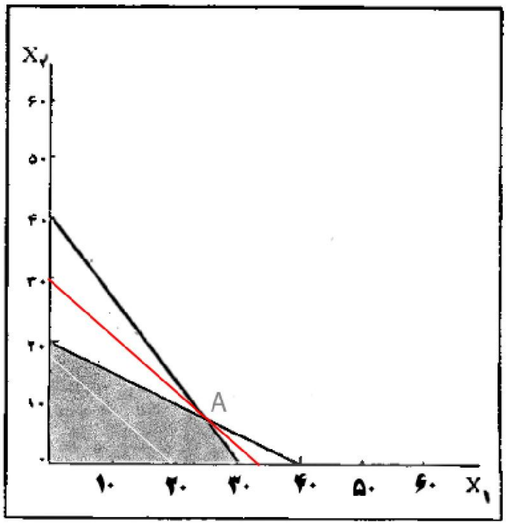
خط $٤٠x_1 + ٥٠x_2 = ٨٠٠$ نشان میدهد که برای هر ترکیبی از x_1 و x_2 بر روی خط z=۸۰۰ خواهد بود. چنانچه در شکل دیده میشه، ما بازهم میتونیمz رو افزایش بدیم، اما این افزایش محدود به ناحیه موجه هست.

**به طور کلی، هرگاه تابع هدف ما حداکثر سازی باشد، راستای تابع هدف را به موازات خودش از مبدا دور میکنیم تا جایی که حداقل(بیش از یک نقطه هم میتواند باشد) یک نقطه از ناحیه موجه با راستای تابع هدف مماس باشد.نقطه‌ی مماس نقطه(نقاط بهینه) است.

با شکل نشان میدم که چطوری راستای تابع هدف رو از مبدا دور میکنیم:

	راستای تابع هدف، از مبدا دور شده، اما هنوز هم میتوانیم، از مبدا دور کنیم، چون به پایان محدودیت-هامون نرسیدیم.پس باز هم از مبدا دور میکنیم.
	در این شکل هم میبیند که باز هم میشه راستای تابع هدف رو از مبدا دور کرد.

خب، حالا مشاهده میکنیم که اگه راستای تابع هدف رو از مبدا دور کنیم، در محدودیت‌های ما صدق نخواهد کرد. بنابراین آخرین نقطه‌ای(نقاط) که با راستای تابع هدف مماس هست، جواب بهینه هست.



برای پیدا کردن مختصات نقطه‌ای که تقاطع دو خط است(مانند نقطه A که از تقاطع دو خط مرزی محدودیت اول و محدودیت دوم میباشد) از روش دومعادله دومجهولی استفاده میکنیم.(جواب در صفحه بعد)

$Max\ z = ٤٠x_۱ + ٥٠x_۲$
s.t:
$x_۱ + ٢x_۲ \leq ٤٠$
$٤x_۱ + ٣x_۲ \leq ١٢٠$
$x_۱, x_۲ \geq ٠$

نقطه A تقاطع دو خط $x_۱ + ٢x_۲ = ٤٠$ و $٤x_۱ + ٣x_۲ = ١٢٠$ می باشد.با دستگاه زیر میتوان مختصات نقطه A را پیدا کرد.

$x_۱ + ٢x_۲ = ٤٠$
$٤x_۱ + ٣x_۲ = ١٢٠$

*یادآوری:برای حل این دستگاه باید یکی از متغییرها را حذف کنیم.برای اینکار معادله‌ها را به اعدادی ضرب می‌کنیم، تا با جمع کردن دو معادله باهم، یکی از متغییرها حذف شود.

معادله اول را به ٤- ضرب میکنیم و محدودیت دوم بدون تغییر:

$-٤x_۱ - ٨x_۲ = -١٦٠$
$٤x_۱ + ٣x_۲ = ١٢٠$

حال مقادیر سمت چپ معادلات را بایکدیگر و سمت راست را با یکدیگر جمع میکنیم:($x_۱$ حذف میشود)

$$-٤x_۱ - ٨x_۲ + ٤x_۱ + ٣x_۲ = -١٦٠ + ١٢٠ \Rightarrow -٥x_۲ = -٤٠ \Rightarrow x_۲ = \frac{-٤٠}{-٥} = ٨$$

حال که $x_۲$ را پیدا کردیم، در یکی از معادلات جایگزاری کرده و $x_۱$ را پیدا میکنیم.

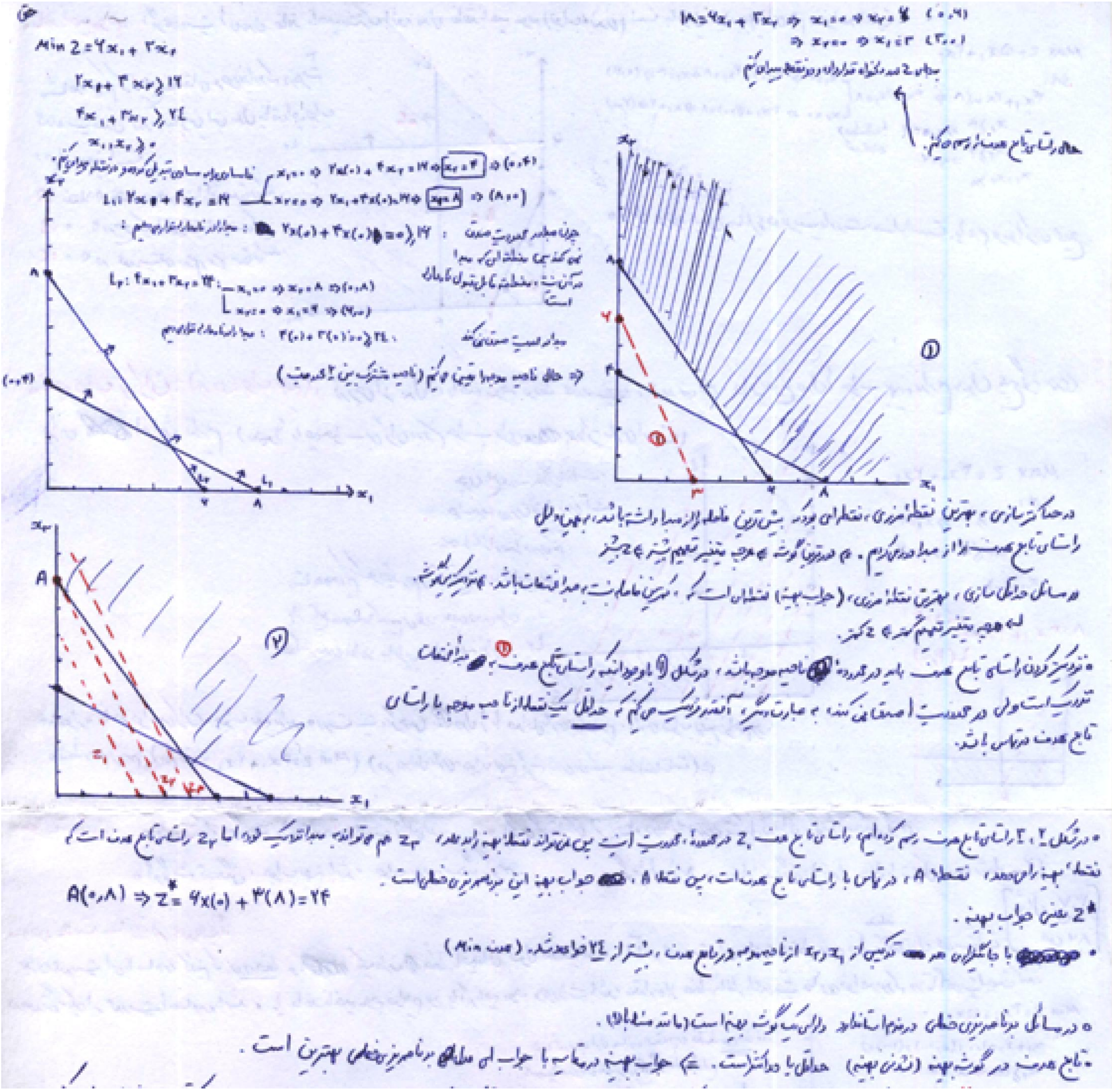
$$٤x_۱ + ٣(٨) = ١٢٠ \Rightarrow ٤x_۱ = ١٢٠ - ٢٤ \Rightarrow ٤x_۱ = ٩٦ \Rightarrow x_۱ = \frac{٩٦}{٤} = ٢٤$$

مختصات نقطه A برابر است با (٢٤,٨).

با جایگذاری مختصات این نقطه در تابع هدف، مقدار بهینه مدل را بدست می آوریم.

$$z = ٤٠x_۱ + ٥٠x_۲ \Rightarrow z^* = ٤٠(٢٤) + ٥٠(٨) = ١٣٦٠$$

یک مثال برای حداقل سازی:



$$\text{Min } Z = 6x_1 + 3x_2$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 12$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$L_1: 2x_1 + 3x_2 = 12$: $x_1 = 0 \Rightarrow 2(0) + 3x_2 = 12 \Rightarrow \boxed{x_2 = 4} \Rightarrow (0,4)$; $x_2 = 0 \Rightarrow 2x_1 + 3(0) = 12 \Rightarrow \boxed{x_1 = 6} \Rightarrow (6,0)$

$2(0) + 3(0) = 0 \geq 12$

$L_2: 4x_1 + 3x_2 = 24$: $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 8 \Rightarrow (0,8)$; $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 6 \Rightarrow (6,0)$

$4(0) + 3(0) = 0 \geq 24$

$18 = 6x_1 + 3x_2 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 6 \quad (0,6)$

$\Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \quad (3,0)$

در حداکثر سازی، بهترین نقطه مرزی، نقطه‌ای بود که بیشترین فاصله را از مبدا داشته باشد، به همین دلیل راستای تابع هدف را از مبدا دور می‌کردیم. در واقع هر چه متغیر تصمیم بیشتر، z بیشتر.

در مسائل حداقل سازی، بهترین نقطه مرزی، (جواب بهینه) نقطه‌ای است که کمترین فاصله را نسبت به مبدا مختصات باشد. به عبارت دیگر هر چه متغیر تصمیم کمتر، z کمتر.

$A(0,8) \Rightarrow z^* = 6\times(0) + 3(8) = 24$

z^* یعنی جواب بهینه.

حالت های خاص برنامه ریزی:

نقاط بهینه چندگانه

جواب بهینه چندگانه: اگر یک مدل برنامه‌ریزی خطی بیش از یک نقطه بهینه داشته باشد، بهینه چندگانه می‌گوییم. یعنی چند (x_1, x_2) وجود دارد که تابع هدف را بهینه می‌کنند.

• این را به خاطر داشته باشیم که هر (x_1, x_2) بر روی راستای تابع هدف z را یک مقدار برابر می‌دهد.

• همواره جواب بهینه، یکی از گوشه‌ای شدنی است (یک جواب می‌گیرند). در چندگانه هم ۲ نقطه گوشه‌ای شدنی و نقاط مابین آن‌ها بهینه هستند.

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 30x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

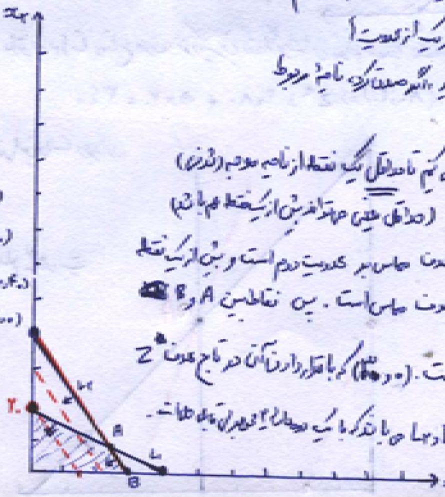
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$L_1: x_1 + 2x_2 = 40 \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow 0 + 2x_2 = 40 \Rightarrow x_2 = 20 \Rightarrow (0, 20) \\ x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + (2 \times 0) = 40 \Rightarrow x_1 = 40 \Rightarrow (40, 0) \end{cases}$

$L_2: 4x_1 + 3x_2 = 120 \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow (4 \times 0) + 3x_2 = 120 \Rightarrow x_2 = 40 \Rightarrow (0, 40) \\ x_2 = 0 \Rightarrow 4x_1 + (3 \times 0) = 120 \Rightarrow x_1 = 30 \Rightarrow (30, 0) \end{cases}$

راستای تابع هدف: $1200 = 40x_1 + 30x_2 \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 40 \Rightarrow (0, 40) \\ x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 30 \Rightarrow (30, 0) \end{cases}$

[اگر شیب یکی از محدودیت‌ها با تابع هدف برابر باشد امکان دارد جواب بهینه چندگانه داشته باشیم. این شرط لازم ولی کافی نیست]



برای تعیین ناحیه قابل قبول هر یک از محدودیت‌ها: نقطه (0,0) را در محدودیت می‌گذاریم، اگر صدق کرد ناحیه مربوط به (0,0) قابل قبول است.

• راستای تابع هدف را از مبدا دور می‌کنیم تا حداقل یک نقطه از ناحیه موجه (شدنی) با راستای تابع هدف مماس باشد. (حداقل یعنی می‌تواند بیش از یک نقطه هم باشد)

• مشاهده می‌شود که راستای تابع هدف مماس بر محدودیت دوم است و بیش از یک نقطه از ناحیه موجه با راستای تابع هدف مماس است. بین نقاط بین A و B جواب بهینه هستند.

• مختصات نقطه B معلوم است. (30,0) که با قرار دادن آن در تابع هدف Z^*

• نقطه A از تقاطع ۲ خط به دست می‌آید که با یک دستگاه ۲ معادله ۲ مجهولی به دست می‌آید.

$$-4 \times \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 40 \\ 4x_1 + 3x_2 = 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x_1 - 8x_2 = -160 \\ 4x_1 + 3x_2 = 120 \end{cases}$$

$$-5x_2 = -40$$

$$\boxed{x_2 = 8}$$

با جایگزاری x_2 در یکی از معادلات x_1 به دست می‌آید

$$x_1 + 2 \times 8 = 40 \Rightarrow x_1 = 40 - 16$$

$$x_1 = 24$$

$$A = (24, 8)$$

$$Z^* = (40 \times 24) + (30 \times 8) = 1200$$

$$Z^* = (40 \times 30) + (30 \times 0) = 1200$$

فاقد ناحیه جواب:

فاقد ناحیه موجه: اگر محدودیت‌های مدل فاقد ناحیه مشترک باشند مدل فاقد ناحیه موجه (جواب شدنی) است بنابراین جواب بهینه‌ای هم نخواهد داشت.

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 3x_2$$

s.t.

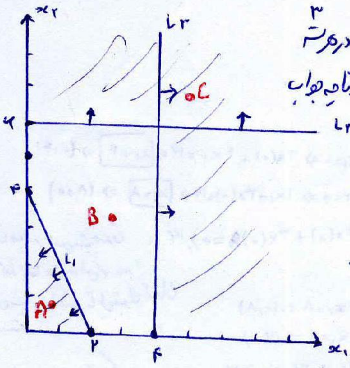
$4x_1 + 2x_2 \leq 8 \Rightarrow 4x_1 + 2x_2 = 8 \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow 4 \times (0) + 2x_2 = 8 \Rightarrow x_2 = 4 \Rightarrow (0, 4) \\ x_2 = 0 \Rightarrow 4x_1 + (2 \times 0) = 8 \Rightarrow x_1 = 2 \Rightarrow (2, 0) \end{cases}$

$x_1 \geq 4 \Rightarrow x_1 = 4$ (خط موازی با محور عمودی)

$x_2 \geq 6 \Rightarrow x_2 = 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

• دلیل وجود چنین مسائلی هم ترتیب نادرست مسئله است. یا عدم فرموله کردن صحیح.



مشاهده می‌کنیم که هیچ منطقه‌ای وجود ندارد که در هر ۳ محدودیت صدق کند، بنابراین این مدل فاقد ناحیه جواب و جواب بهینه است.

A: نقطه A فقط در محدودیت اول صدق می‌کند.

B: " B در هیچ یک از محدودیت‌ها صدق نمی‌کند.

C: " C در محدودیت‌های دوم و سوم صدق می‌کند.

ناحیه جواب بی کران:

ناحیه جواب بی کران: (بدون جواب بهینه)، در برخی از مدل‌ها، ناحیه موجه توسط محدودیت‌ها، محدود نمی‌شود. در این نوع مدل‌ها جواب بهینه نداریم، چون هیچ گونه حدی برای افزایش نداریم. (معمولاً ناحیه جواب بی کران بدون جواب برای حداکثرسازی است)

$\max\ z = 4x_1 + 2x_2$

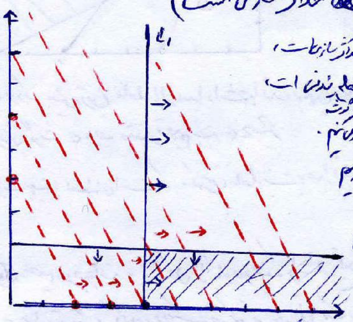
s.t.

$x_1 \geq 4 \Rightarrow x_1 = 4$

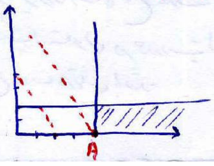
$x_2 \leq 2 \Rightarrow x_2 = 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

$A: 4x_1 + 2x_2 = 8$ (0,4), (2,0)



چون تابع هدف حداکثرسازی است، جواب بهینه دورترین نقطه گوشه شدنی است، پس راستا را از مبدا دور می‌کنیم. مشاهده می‌کنیم که هر چقدر هم راستای تابع هدف را جلو ببریم باز تابع هدف ماکسیمم می‌شود، یعنی حدی برای حداکثر شدن ندارد. بنابراین جواب بهینه ندارد.

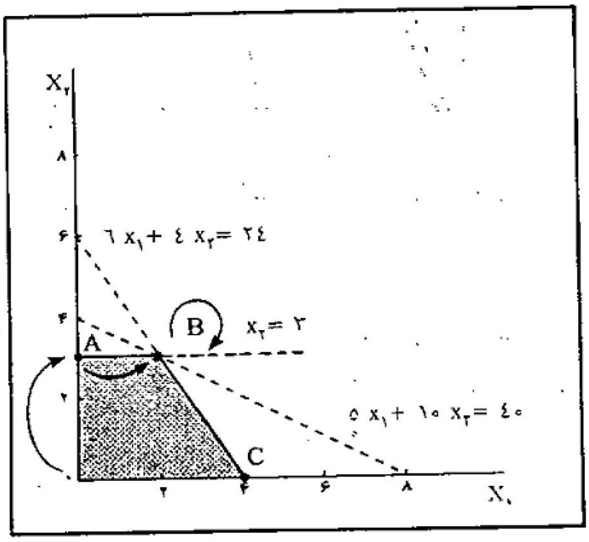


• همواره ناحیه جواب بی کران، جواب بهینه ندارد؟ درست نیست، اگر همین مدل را با حداقل‌سازی بررسی کنیم، دارای جواب بهینه خواهیم بود. فقط رسم می‌کنیم. (فرض: $\min\ z = 4x_1 + 2x_1$) (در حداقل‌سازی، جواب بهینه گوشه شدنی نزدیک به مبدا مختصات است) ۴

جواب تبهگن:

جواب تبهگن: • برای تشکیل هر گوشه ۲ معادله مرزی محدودیت‌ها کافی‌اند. • اگر هر گوشه شدنی از بیش از دو معادله مرزی تشکیل شده باشد، گوشه را تبهگن گوییم.

• اگر گوشه تبهگن، جواب بهینه باشد، جواب بهینه تبهگن گوییم. • گوشه‌ای زاید در نقطه تبهگن: (تعداد خطوط تشکیل دهنده نقطه - ۲)



محدودیت مساوی و ناحیه جواب نقطه ای:

• وجود علامت مساوی در محدودیت ها

برای محدودیت های نامساوی گفتیم که روی خط و یک طرف خط ناحیه قابل قبول محدودیت است. اما در محدودیت های مساوی فقط روی خط، محدوده قبول محدودیت است.

در صورتی که یکی از محدودیت ها مساوی باشد، یا فاقد ناحیه موجه خواهیم بود یا اگر ناحیه موجه وجود داشته باشد مقداری از خط متناظر با محدودیت مساوی خواهد بود که در تمام محدودیت ها صدق کند.

$Min\ Z = 3x_1 + 5x_2$

s.t:

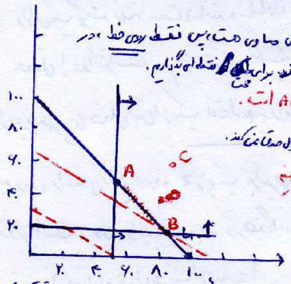
$x_1 + x_2 = 100 : (0,100)\ ,\ (100,0)$

$x_1 \geq 50 \Rightarrow x_1 = 50$

$x_2 \geq 20 \Rightarrow x_2 = 20$

$x_1 , x_2 \geq 0$

$150 = 3x_1 + 5x_2 \begin{cases} (0,30) \\ (50,0) \end{cases}$



چون محدودیت اول مساوی هست بین نقطه روی خط و در محدودیت صدق می کند برای ... نقطه ای بگذاریم.

• ناحیه موجه خط AB است.

گوشه ای نقطه C در محدودیت اول صدق نمی کند.

• چون Min هست نزدیک ترین نقطه به مبدا جواب بهینه است.

نقطه B با توجه به راستای تابع هدف، نزدیک ترین نقطه گوشه ای موجه به مبدأ مختصات است. نقطه B از تقاطع دو خط $x_1 + x_2 = 100$ و خط $x_2 = 20$ به وجود آمده است.

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 100 \\ x_2 = 20 \end{cases} \Rightarrow x_1 + 20 = 100 \Rightarrow \boxed{x_1 = 80}$

$x^* : (80, 20) \Rightarrow Z^* = 3 \times 80 + 5 \times 20 = 340$

• ناحیه موجه یک نقطه باشد:

اگر 2 محدودیت باشد که یکی از آن ها مساوی باشد و این دو خط همدیگر را قطع کنند این حالت وجود دارد.

در این مثال نقطه A، ناحیه موجه است.

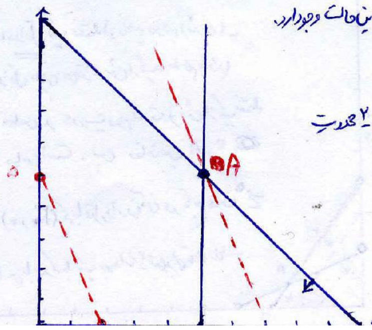
$Max\ Z = 5x_1 + 2x_2$

s.t:

$x_1 + x_2 \leq 10 \Rightarrow x_1 + x_2 = 10 \begin{cases} (0,10) \\ (10,0) \end{cases}$

$x_1 = 5$

$x_1 , x_2 \geq 0$



با توجه به راستای تابع هدف، نقطه A، نقطه بهینه نیز هست. که از تقاطع 2 محدودیت به وجود آمده:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 = 5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x_2 = 5} \Rightarrow x^* = (5, 5)$

$Z^* = 5 \times 5 + 2 \times 5 = 35$

*فضای شدنی:ناحیه موجه: فضای جواب:ناحیه ای که تمام نقاط آن در تمامی معادلات محدودیت ها صدق کند.

*جواب بهینه:جوابی که در ناحیه موجه است و تابع هدف را بدست می دهد(MAXیا MIN)

*نقاط گوشه ای(حدی):محل تقاطع محدودیت ها باهم و محورها.

*نقاط گوشه ای شدنی: نقاط گوشه ای که در کنار ناحیه موجه است.

*اگر محدودیت= باشد، روی خط قابل قبول است.

*اگر محدودیت بزرگتر و کوچکتر باشد روی خط و یک طرف خط بسته به بزرگتر یا کوچکتر بودن.

*به خطی که تابع هدف را در مقداری دلخواه نشان می دهد، راستای تابع هدف گوییم.

*نقطه بهینه همواره در مرز ناحیه موجه قرار دارد.

*سه خاصیت جواب های گوشه ای:

۱.جواب بهینه برنامه ریزی خطی،قطعا یکی از جواب ها، گوشه موجه است.

۲.تعداد جواب های گوشه موجه متناهی است.(محدود)

۳.چنانچه یک جواب گوشه موجه از تمام جواب های گوشه موجه مجاور خود از نظر تابع هدف بهتر باشد، در این صورت جواب بهینه است.

****حداکثر تعداد گوشه اگر m تعداد محدودیت و n تعداد متغییر باشد.

$$\frac{(m+n)!}{\mathrm{m!\,n!}}$$

مثال: اگر یک برنامه ریزی خطی دارای سه محدودیت و دو متغییر تصمیم باشد،حداکثر نقاط گوشه ای این مدل چند تاست؟

$$\frac{(۳+۲)!}{۳!\,۲!}=\frac{۵!}{۳!\,۲!}=\frac{۱\times۲\times۳\times۴\times۵}{۱\times۲\times۳\times۱\times۲}=۱۰$$

این مدل نوشتن برای یادگیری فاکتوریل بود. میتوان به راحتی جواب این سوال را داد.

$$\frac{(۳+۲)!}{۳!\,۲!}=\frac{۵!}{۳!\,۲!}=\frac{۳!\times۴\times۵}{۳!\,۲!}=۱۰$$

*گوشه ای که ار بیش از دو معادله مرزی تشکیل شده باشد،گوشه تبهگن گویند.

*برای تشکیل هرگوشه برنامه ریزی خطی دومعادله مرزی کافی است.

**اگر مسئله یک برنامه ریزی خطی و یک نقطه داد و وضعیت نقطه را خواست، در محدودیت ها جایگذاری می کنیم، اگر در تمام محدودیت ها صدق کرد، نقطه در داخل منطقه موجه است.اگر به صورت تساوی صدق کند، نقطه مرزی است.

مثال:مسئله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

وضعیت نقطه($۲,\frac{۱}{۲}$) چگونه است؟

$$Max\ z=۱۰x_۱+۲۰x_۲$$
$$\frac{۱}{۲}x_۱+۲x_۲\le ۶$$
$$x_۱+۲x_۲\le ۱۰$$
$$x_۱,x_۲\ge ۰$$

در محدودیت ها جایگذاری میکنیم:

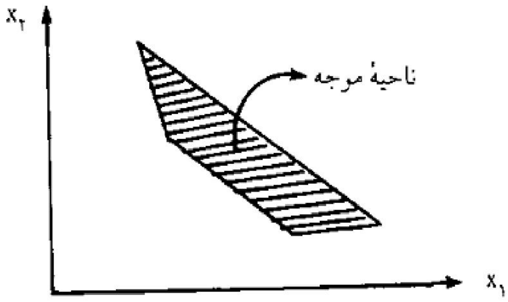
$$\frac{۱}{۲}(۲)+۲\left(\frac{۱}{۲}\right)=۱<۶$$

چون در هر دو محدودیت صدق میکند، نقطه در منطقه موجه است.

$$(۲) + ۲\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۳ < ۱۰$$

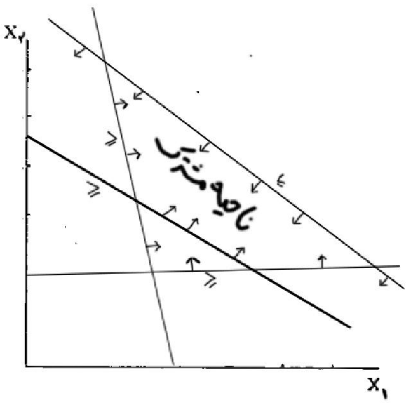
*گاهی شکل ترسیمی یک مدل LP را میدهد و وضعیت محدودیت ها را میخواهد:

برای مثال:



این مدل ٤ محدودیت دارد، برای دانستن تعداد محدودیت‌ها، تعداد خطوطی که ناحیه موجه را ایجاد کرده اند، بشمارید.

برای تعیین بزرگتر یا کوچکتر مساوی بودن محدودیت-ها،به نوع اشتراک محدودیت در ناحیه موجه توجه میکنیم.اگر مبدا را شامل شد، کوچکتر مساوی وگرنه بزرگتر مساوی.



این مدل دارای سه محدودیت به صورت بزرگتر مساوی $\geq$ و یک محدودیت به صورت کوچکتر مساوی$\leq$ می-باشد.به شکل روبرو توجه کنید.

*در یک مدل LP (برنامه ریزی خطی) به روش ترسیمی، دارای تابع هدف Min باشد، نزدیکترین گوشه حدی(گوشه شدنی،گوشه موجه) به مبدا مختصات نسبت به تابع هدف، نقطه بهینه است.(در Max دورترین)

*اگر در حل ترسیمی مدلLP نقاط بهینه بر روی یک پاره خط قرارگرفته باشد، مدل دارای حالت خاص بهینه چندگانه است.

*در برنامه ریزی خطی جواب موجه در تمام محدودیت های مدل صدق میکند.

*در برنامه ریزی خطی جواب بهینه همواره یک گوشه شدنی است.

*در برنامه ریزی خطی هیچ نقطه‌ای یافت نشود که در تمام محدودیت ها صدق کند، دارای حالت خاص «فاقد ناحیه جواب» است.

*اگر مقدار تابع هدف در یک نقطه گوشه شدنی، بهتر از نقاط گوشه ای مجاور باشد، نقطه بهینه است.(بهتر در Min یعنی کمتر و در Max یعنی بیشتر)

*اگر یک مدل برنامه ریزی خطی به صورت ترسیمی داده شود، متغییر تصمیم ۲تاست و محدودیت ها به تعداد خطوط رسم شده.

*حالت های خاص برنامه ریزی خطی: عدم وجود جواب موجه، جواب بهینه چندگانه، تبهگن

*محدودیتی زائد است که بودن یا نبودنش در تعیین ناحیه جواب تفاوتی ایجاد نمیکند.

فصل چهارم

برنامه ریزی خطی(سیمپلکس)

۱. روش سیمپلکس: یک فن کلی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی است.
۲. مراحل ریاضی روش سیمپلکس: بیانگر فرآیند حرکت در روش ترسیمی می‌باشد::حرکت از یک گوشه به گوشه‌ی دیگر
۳. روش سیمپلکس: از یک گوشه به گوشه‌ای بهتر حرکت می‌کنیم.
٤. روش ترسیمی:فقط برای مدل‌های دو متغییره

تبدیل مدل برنامه‌ریزی خطی به فرم استاندارد:

۱. اولین قدم حل برنامه ریزی خطی به روش سیمپلکس:تبدیل مدل به فرم استاندارد
۲. فرم استاندارد مدل برنامه ریزی خطی:یک مدل با تابع هدف Max و محدودیت های مساوی(=) به جای کوچکتر مساوی یا بزرگتر مساوی
۳. چون فرم استاندارد به صورت Maxهست باید تابع هدف Min به Max تبدیل شود تا با روش سیمپلکس قابل حل باشد.کل تابع هدف را به منفی ضرب میکنیم.

$Min\ z = Max(-z)$

روش سیمپلکس برای محدودیت های کوچکتر مساوی ($\le$):

با یک مثال توضیح داده می‌شود:

$Max\ z = ٤٠x_1 + ٥٠x_2$
s.t:
$x_1 + ٢x_2 \le ٤٠$
$٤x_1 + ٣x_2 \le ١٢٠$
$x_1, x_2 \ge ٠$

با نام او شروع می‌کنیم. یکبار با دقت بخوانید تا متوجه بشوید تا کل کتاب در دستان شما نرم شود.پس به هنگام خواندن، یا درس دادن استاد حواستان جمع باشد.

اولین کاری که میکنیم، نگاه به محدودیت هاست، اگه محدودیت‌ها$\le$ بودند، از این روش استفاده می‌کنیم، اگه تو محدودیت‌ها = یا $\ge$ داشتیم، از روش‌هایی که در ادامه خواهد آمد استفاده خواهیم کرد. تمامی محدودیت‌ها کوچکتر مساوی هستند، پس میتونیم شروع کنیم.

تابع هدف باید Max باشه، که خوشبختانه این مدل خودش ماکزیمم هست. اما اگه Min بود باید به طرفین تابع هدف منفی ضرب میشد.(با فرض Min بودن تابع هدف:$Max(-z) = -٤٠x_1 - ٥٠x_2$. این یک فرض هست، به این سوال ربطی نداره، قاطی نکنید)(تمامی مراحل برای Max و Min یکسان است)

مقادیر سمت راست تابع هدف رو با هواپیمای جت به سمت چپ انتقال میدیم، که در راه علامتشون تغییر میکنه، به این شکل در میاد.

$Max\ z - ٤٠x_1 - ٥٠x_2 = ٠$

چرا مساوی صفر؟طرف راست و چپ باهم برابرند، دو مقدار برابر رو از هم کسر کنی، صفر میشه.

حالا نوبت به محدودیت‌ها میرسه.به اینجا با دقت توجه کنید:

گفتیم که مدل استاندارد دارای محدودیت‌های مساوی هست، پس به جای علامت‌های≤ علامت = قرار میدیم.اما طرف راست و چپ محدودیت‌ها که باهم برابر نیستند!! باید چیکار کنیم؟کمک!!! سمت چپ محدودیت ما کمبودی داره که نمی‌تونه با طرف راستش برابر باشه!! ما به سمت چپ کمک میکنیم تا با سمت راست برابر بشه، بخاطر همین یه متغییر کمکی به نام s_i بهش اضافه می‌کنیم. با این کار محدودیت کوچکتر مساوی به مساوی تبدیل میشه.i اندیس s هم مربوط به شماره محدودیت میشه.مثلا برای محدودیت یک میشه $s_۱$.

به این متغییرکمکی که به طرف چپ محدودیت کوچکتر مساوی اضافه میشه، متغییر کمکی کمبود میگیم.

$x_۱ + ۲x_۲ + s_۱ = ٤٠$
$٤x_۱ + ۳x_۲ + s_۲ = ۱۲٠$

یه چیز دیگه‌ای هم هست که چون بیشتر اوقات در سوالای تستی میدن، بعدا توضیح میدم، فعلا باهم بریم جلو ببینم چی میشه.

نوبتی هم باشه، نوبت کشیدن جدول سیمپلکس هست، جدول سیمپلکس از سه بخش تشکیل شده، از چپ به راست، متغییر پایه ای، متغییرهای موجود در مدل و سمت راست معادلات موجود در مدل.

متغییر اساسی	متغییرهای موجود در مدل	مقادیر راست
	ضرایب متغییرها در تابع هدف و محدودیت ها	

اولین سطر جدول سیمپلکس مربوط میشه به تابع هدف.این سطر رو «سطر صفر» میگیم.

سطر صفر رو براساس تابع هدف زیر پر میکنیم:

$Max\ z - ٤٠x_۱ - ٥٠x_۲ = ٠$

متغییر اساسی سطر صفر همیشه $z_.$ هست.

متغییر اساسی	z	$x_۱$	$x_۲$	$s_۱$	$s_۲$	مقادیر راست
$z_.$	۱	-٤٠	-٥٠	٠	٠	٠

چرا $s_۱$ و $s_۲$ صفر شدن؟ چون این متغییرها در تابع هدف وجود ندارند.

به تعداد محدودیت‌ها متغییر اساسی داریم، اما متغییر اساسی رو در محدودیت ها چطوری تعیین کنیم؟

متغییر اساسی یک محدودیت، متغییری هست که در محدودیت مورد بحث دارای ضریب یک باشه و در دیگر محدودیت‌ها ضریب اش صفر باشه(وجود نداشته باشه).فکر کنم فهمیدن قضیه چیه.اما برای اطمینان، متغییر پایه ای(اساسی) برای محدودیت اول را باهم تعیین می‌کنیم.

$x_۱ + ۲x_۲ + s_۱ = ٤٠$

در محدودیت اول $x_۱$ دارای ضریب یک هست، ولی در محدودیت دوم دارای ضریب ٤ هست. $x_۲$ هم که جای بحث کردن نداره، چون ضریب اش ۲ هست.تنها می‌مونه $s_۱$ که در این محدودیت دارای ضریب ۱ هست و در محدودیت دیگه وجود نداره.

به طور کلی میشه گفت، متغییر اساسی محدودیت متغییر مثبتی که ما به محدودیت اضافه می‌کنیم ،هست.

حالا با توجه به این معادله $x_۱ + ۲x_۲ + s_۱ = ٤٠$ سطر دوم رو باهم مینویسم.

متغییر اساسی	z	$x_۱$	$x_۲$	$s_۱$	$s_۲$	مقادیر راست
$z_۰$	۱	-٤٠	-٥٠	٠	٠	٠
$s_۱$	٠	۱	۲	۱	٠	٤٠

چرا ضریب z در این سطر صفر شد؟ چون Z در این محدودیت وجود نداره.

با توجه به توضیحات بالا سطر سوم رو با توجه به این $٤x_۱ + ۳x_۲ + s_۲ = ۱۲٠$

محدودیت مینویسیم:

متغییر اساسی	z	$x_۱$	$x_۲$	$s_۱$	$s_۲$	مقادیر راست
$z_۰$	۱	-٤٠	-٥٠	٠	٠	٠
$s_۱$	٠	۱	۲	۱	٠	٤٠
$s_۲$	٠	٤	۳	٠	۱	۱۲٠

این خاصیت رو به خاطر بسپارید، چون خیلی به درد خواهد خورد، یعنی کل سیمپلکس رو این چندتا نکته است:

اول:ستون مربوط به متغییرهای اساسی واحد خواهد بود، یعنی ستون مربوط به متغییر اساسی(پایه ای) در سطر خود ۱ و در بقیه سطرها صفر خواهد بود.(خیلی مهمه)

دوم:متغییرهای اساسی هر جدول سیمپلکس برابر است با مقادیر سمت راست در سطر خود و متغییرهای غیرپایه‌ای مساوی صفر.دراین تابلو(جدول).$(x_۱ = ٠, x_۲ = ٠, s_۱ = ٤٠, s_۲ = ۱۲٠)$ می باشند.

سوم:هر جدول سیمپلکس متناظر با یک نقطه‌ی گوشه‌ای است.

چهارم:جدول اولیه سیمپلکس، متناظر با مبدا مختصات است.

پنجم: ضریب z در سطر صفر در ستون خود(با رنگ سیاه علامت گذاری شده) نشانگر نوع تابع هدف است و تا آخرین جدول سیمپلکس بی تغییر خواهد ماند.اگر ۱- باشد به معنی این است که تابع اولیه Min می‌باشد.

ششم:شرط بهینگی، وجود نداشتن ضریب منفی در سطر صفر و سمت راست.

هفتم: ضریب منفی سمت راست، سطر صفر نشانگر حداقل سازی تابع اولیه است.

ادامه بحث:

تابلوی سیمپلکس به تابلویی خواهیم گفت که متغیرهای پایه‌ای در ستون خودشون واحد باشند که در نکته‌ی اول توضیح داده شد.این تابلو، یک تابلوی سیمپلکس هست.

متغیر اساسی	z	$x_۱$	$x_۲$	$s_۱$	$s_۲$	مقادیر راست
$z_۰$	۱	−٤۰	−۵۰	۰	۰	۰
$s_۱$	۰	۱	۲	۱	۰	٤۰
$s_۲$	۰	٤	۳	۰	۱	۱۲۰

۱.بعد از تشکیل جدول سیمپلکس اولیه، باید متغیر ورودی رو انتخاب کنیم.متغیر ورودی، متغیری هست که تابع هدف را نسبت به بقیه متغیرها زودتر به ماکسیمم می‌رسونه.متغیر ورودی ، متغیری هست که باید برای حرکت به سمت گوشه‌ی موجه بهتر، به جای یکی از متغیرهای اساسی وارد شه.

متغیر ورودی رو با توجه به ضرایب سطر صفر انتخاب خواهیم کرد، متغیری که منفی‌تر هست رو انتخاب می-کنیم.(متغیری منفی‌تر هست که قدرمطلق ضریب اش از بقیه بیشتر باشه)

در سطر صفر دو ضریب منفی داریم ۵۰- و ٤۰- که ۵۰- منفی تر هست.پس $x_۲$ متغیر ورودی خواهد بود. و ستون مربوط به متغیر ورودی رو، ستون لولا می نامیم.

متغیر اساسی	z	$x_۱$	$x_۲$	$s_۱$	$s_۲$	مقادیر راست
$z_۰$	۱	−٤۰	−۵۰	۰	۰	۰
$s_۱$	۰	۱	۲	۱	۰	٤۰
$s_۲$	۰	٤	۳	۰	۱	۱۲۰

۲.حالا باید تعیین کنیم چه متغیری رو باید خارج کنیم از متغیر اساسی،تا متغیر ورودی به جای اون بشینه. برای این‌کار از قاعده مینیمم استفاده می‌کنیم.یعنی کدام یک از متغیرهای اساسی زودتر به صفر نزدیک می‌شوند.

برای این کار، مقادیر سمت راست رو، بر **مقادیر مثبت** (صفر و منفی نه) تقسیم می‌کنیم، هر کدام کوچکتر بود، متغیر خروجی هست و سطر مربوط به متغیر خروجی، سطر لولا نامیده میشه.

$$Min\left\{\frac{٤۰}{۲}=۲۰,\frac{۱۲۰}{۳}=٤۰\right\}=۲۰$$

پس $s_۱$ متغیر خروجی هست.

متغیر اساسی	z	$x_۱$	$x_۲$	$s_۱$	$s_۲$	مقادیر راست
$z_۰$	۱	−٤۰	−۵۰	۰	۰	۰
$s_۱$	۰	۱	۲	۱	۰	٤۰
$s_۲$	۰	٤	۳	۰	۱	۱۲۰

عنصری که در تقاطع سطر و ستون لولا قرار داره رو عدد لولا می‌نامیم.

متغییر اساسی	z	x_1	x_2	s_1	s_2	مقادیر راست
z_0	۱	−۴۰	−۵۰	۰	۰	۰
s_1	۰	۱	۲	۱	۰	۴۰
s_2	۰	۴	۳	۰	۱	۱۲۰

حالا یه جدول سیمپلکس جدیدی رسم می‌کنیم و در ستون متغییر اساسی، به جای s_1 متغییر x_2 رو می‌نویسیم.
چون x_2 متغییر اساسی شد باید در ستون مربوط به خودش واحد بشه(خاصیت اولی که گفتم). چون عنصر لولا ۲ هست باید سطر لولا رو بر ۲ تقسیم کنیم تا عنصر لولا ۱ بشه و در جدول جدید در سطر x_2 بنویسیم.(اگر عنصر لولا یک بود، خود سطر رو می‌نوشتیم.)

متغییر اساسی		z	x_1	x_2	s_1	s_2	مقادیر راست
	z_0			?			
$\frac{s_1}{۲} \rightarrow$	x_2	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	۰	۲۰
	s_2			?			

حال نوبت به عناصر دیگه ستون لولا می‌رسه. واحد بودن ستون مربوط به متغییر اساسی رو اینطوری گفتیم که ستون متغییر اساسی در سطر خود ۱ و در بقیه سطرها صفر(۰) باشه.پس باید یه اعمالی رو انجام بدیم تا بقیه عناصر ستون لولا که با علامت ؟ نشون دادم، صفر بشه.
ضریب ستون x_2 در سطر صفر ۵۰− هست که باید صفر بشه، چه ضریبی از سطر لولا(s_1 در تابلوی قبلی یا x_2 در تابلوی جدید، هرکدام راحتتر محاسبه بشه) رو با سطر صفر جمع کنیم، ۵۰− ، به صفر تبدیل میشه؟
سطر x_2 رو در جدول دوم، به ۵۰ ضرب می‌کنیم و با سطر صفر تابلوی قبلی جمع می‌زنیم.

متغییر اساسی		z	x_1	x_2	s_1	s_2	مقادیر راست
$۵۰x_2 + z_0 \rightarrow$	z_0	۱	$۵۰\left(\frac{۱}{۲}\right) - ۴۰$	$۵۰(۱) - ۵۰$	$۵۰\left(\frac{۱}{۲}\right) + ۰$	$۵۰(۰)+۰$	$۵۰(۲۰) + ۰$
$\frac{s_1}{۲} \rightarrow$	x_2	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	۰	۲۰
	s_2			?			

مشاهده می‌کنیم که ستون x_2 در سطر z_0 صفر شد.

متغییر اساسی		z	x_1	x_2	s_1	s_2	مقادیر راست
$۵۰x_2 + z_0 \rightarrow$	z_0	۱	−۱۵	۰	۲۵	۰	۱۰۰۰
$\frac{s_1}{۲} \rightarrow$	x_2	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	۰	۲۰
	s_2			?			

حال نوبت به سطر سوم میرسه، چه مضربی از سطر لولا رو با سطر سوم جمع کنیم، ستون لولا واحد میشه؟ چون ضریب $x_۲$ در سطر سوم ۳ هست، با ضرب کردن سطر$x_۲$ به ۳- و جمع کردنش با سطر سوم، ستون $x_۲$ واحد میشه.

متغییر اساسی		z	$x_۱$	$x_۲$	$s_۱$	$s_۲$	مقادیر راست
$۵۰x_۲ + z_۰ \to$	$z_۰$	۱	-۱۵	۰	۲۵	۰	۱۰۰۰
$\frac{s_۱}{۲} \to$	$x_۲$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	۰	۲۰
$-۳x_۲ + s_۲ \to$	$s_۲$	۰	$-۳\left(\frac{۱}{۲}\right) + ۴$	$-۳(۱) + ۳$	$-۳\left(\frac{۱}{۲}\right) + ۰$	$-۳(۰)+۱$	$-۳(۲۰) + ۱۲۰$

با این عمل، تابلوی دوم سیمپلکس به پایان میرسه.

متغییر اساسی	z	$x_۱$	$x_۲$	$s_۱$	$s_۲$	مقادیر راست
$z_۰$	۱	-۱۵	۰	۲۵	۰	۱۰۰۰
$x_۲$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	۰	۲۰
$s_۲$	۰	$\frac{۵}{۲}$	۰	$-\frac{۳}{۲}$	۱	۶۰

به ستون $x_۲$ توجه کنید که در سطر خود ۱ و در سطور دیگر صفر است.

این جدول متناظر با نقطه $x_۱ = ۰ , x_۲ = ۲۰$ هست. و $z = ۱۰۰۰$ می باشد.

چون در سطر صفر، عنصر منفی وجود داره، سیمپلکس رو ادامه میدم.(انتخاب متغییر ورودی باتوجه به سطر صفر، انتخاب متغییر خروجی با توجه به قاعده مینیمم، عملیات واحد کردن ستون مربوط به متغییر اساسی)

متغییر اساسی		z	$x_۱$	$x_۲$	$s_۱$	$s_۲$	مقادیر راست
	$z_۰$	۱	-۱۵	۰	۲۵	۰	۱۰۰۰
	$x_۲$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	۰	۲۰
	$s_۲$	۰	$\frac{۵}{۲}$	۰	$-\frac{۳}{۲}$	۱	۶۰

متغییر اساسی		z	$x_۱$	$x_۲$	$s_۱$	$s_۲$	مقادیر راست
$۱۵x_۱ + z_۰ \to$	$z_۰$	۱	۰	۰	۱۶	۶	۱۳۶۰
$-\frac{۱}{۲}x_۱ + x_۲ \to$	$x_۲$	۰	۰	۱	$\frac{۴}{۵}$	$-\frac{۱}{۵}$	۸
$s_۲ \times \frac{۲}{۵}$	$x_۱$	۰	۱	۰	$-\frac{۳}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	۲۴

چون در سطر صفر، و طرف راست منفی وجود ندارد، جدول بهینه است.بنابراین جواب بهینه معادله برابر است با:

$x_۱^* = ۲۴ , x_۲^* = ۸ , z^* = ۱۳۶۰$

$s_۱ = ۰ , s_۲ = ۰$

اگر جواب را در معادله هدف قرار دهیم باید z برابر با ۱۳۶۰ باشد.

$z = ٤٠x_١ + ٥٠x_٢$
$z = ٤٠(٢٤) + ٥٠(٨) = ١٣٦٠$

روش حل مدل با محدودیت کوچکتر مساوی به پایان رسید.همیشه تمام محدودیت‌ها کوچکتر مساوی نیست به همین دلیل، روش حل سیمپلکس با محدودیت های بزرگتر مساوی و مساوی در بخش بعدی توضیح داده میشه.

حالت های خاص

۱.ناحیه موجه بی کران:

اگر متغییر ورودی داشته باشیم، ولی نتوانیم متغییر خروجی انتخاب کنیم، مدل دارای ناحیه جواب بی‌کران است.

(دلیل اینکه نمی‌تونیم خروجی رو انتخاب کنیم اینه که تمام عناصر ستون لولا، یا صفرهست یا منفی).

*یادآوری:منفی بودن سطر صفر به معنی توانایی بهتر کردن مدل هست.

برای مثال اگر مدلی، جدول سیمپلکسی شبیه این داشت، مدل، ناحیه جواب بیکران داره.

متغییر اساسی	z	x_1	x_2	s_1	s_2	مقادیر راست
z_0	۱	-15	۰	۲۵	۰	۱۰۰۰
x_2	۰	$-\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{2}$	۰	۲۰
s_2	۰	۰	۰	$-\frac{3}{2}$	۱	٦۰

ورودی داریم ولی به علت منفی یا صفر بودن عناصر ستون لولا امکان انتخاب خروجی وجود ندارد.

۲.بهینه چندگانه:

اگر مقدار یکی از متغییرهای غیراساسی در سطر صفر، (صفر) باشد، مسئله دارای جواب بهینه چندگانه است.

*یادآوری:صفر ضریب در سطرZ به معنی این هست که ما می‌توانیم متغییر را وارد کنیم، ولی هیچ اثری بر روی تابع هدف نخواهد داشت.

متغییر اساسی	z	x_1	x_2	s_1	s_2	مقادیر راست
z_0	۱	۰	۰	۳	۰	۱۵
x_1	۰	۱	۰	-1	٤	٦
x_2	۰	۰	۱	۲	-3	۳

مشاهده می کنیم که متغیر غیراساسی s_2 در سطح صفر دارای مقدار ۰ می باشد.پس مدل دارای جواب بهینه چندگانه است.

۳.فاقد ناحیه موجه:

اگر در طرف دوم، منفی وجود داشته باشد(بغیر از سطح صفر)،مدل فاقد ناحیه موجه است.

٤.جواب تبهگن:

اگر در جدول سیمپلکس، یکی از مقادیر سمت راست برابر با صفر شود، جواب تابلوی مورد بحث تبهگن خواهد بود و اگر در جدول بعدی، تبهگن از بین برود، تبهگن موقت گوییم.

اگر جدولی که دارای مقدار صفر در سمت راست می‌باشد، بهینه باشد، جواب بهینه تبهگن می‌گوییم.

روش سیمپلکس برای محدودیت های بزرگتر مساوی (≥) و مساوی(=):

اگه بین محدودیت‌ها، محدودیت‌های بزرگتر مساوی و مساوی وجود داشته باشه، برای پیدا کردن جواب از روش Mبزرگ یا دومرحله ای استفاده می‌کنیم.پس به خاطر داشته باشید، در صورتی از روش های این بخش استفاده می-کنیم که محدودیت‌هامون بزرگتر مساوی یا مساوی باشه.

*روشهای Mبزرگ و دومرحله‌ای به تابع هدف ربطی ندارد، با توجه به محدودیت‌ها از آن‌ها استفاده می‌کنیم یا نمی‌کنیم.

روش Mبزرگ:

امیدوارم روش قبل رو به خوبی یادگرفته باشین، چون در این روش، چند نکته‌ی کوچیک وجود داره که باید بدونید و بقیه اعمال مانند روش قبلی هست.مثل قبل حواس‌ها شش دانگ جمع باشه و کمربندها رو ببندیم و تغذیه مناسب یادتون نره که روش M بزرگه.

با یه مثال توضیح خواهم داد که چه خبره:

$Min\ z = ۳x_۱ + ۵x_۲$
s.t:
$x_۱ + x_۲ = ۱۰۰$
$x_۱ \geq ۵۰$
$x_۲ \geq ۲۰$
$x_۱, x_۲ \geq ۰$

ابتدا یادآور میشم که روشهای Mبزرگ و دومرحله‌ای به تابع هدف ربطی نداره.

من ابتدا به سراغ محدودیت‌ها میرم و اونا رو به حالت استاندارد(مساوی) تبدیل می‌کنم.

*جدول اولیه سیمپلکس، مبدا مختصات رو نشون میده.یعنی باید محدودیت‌ها رو طوری تنظیم کنیم که تمام محدودیت‌ها، در مبدا مختصات صدق کنند.

*محدودیت‌های مساوی، فقط بر روی خط قابل قبول هست.

با این یادآوری ها، میریم سراغ محدودیت اول:

شاید بگین، محدودیت اول که خودش مساوی هست و به قولی استاندارد.اما در یادآوری اول گفتم که باید محدودیت‌ها طوری تنظیم بشن که در مبدا مختصات صدق کنند! آیا مبدا مختصات در این محدودیت صدق می-کنه؟چه کار می‌تونیم بکنیم؟ شاید بگین یه محدودیت کمکی کمبود اضافه کنیم! اما اینجا که کمبود نداریم! پس یه متغیری رو به طور مصنوعی بهش اضافه می‌کنیم و اسمشو میذاریم $R_۱$ که با متغییر کمکی اشتباهی گرفته نشه. یادمون باشه این متغییر مصنوعی، وجود خارجی نداره و تنها دلیلی که به محدودیت اضافه میشه، گسترش منطقه جواب تا مبدا مختصات هست.

آیا این متغییر مصنوعی به تابع هدفمون لطمه‌ای وارد نمی‌کنه؟

سوال خوبی بود!اسم M از اینجا به بعد هست که ظاهر میشه. ما برای اینکه متغییر مصنوعی در تابع هدف، تغییرات چندانی ایجاد نکنه، جریمه‌ی بزرگی بهش تحمیل می‌کنیم.این جریمهM برابر متغییر مصنوعی هست.M یک عدد

خیلی بزرگ هست با ضرب کردن اون به متغییر مصنوعی و تحمیل اون به تابع هدف، باعث میشه تابع هدف تغییرات چندانی در برابر متغییر مصنوعی نشان نده.

در مدل‌هایی که تابع هدفشونMax هست MR_i رو از تابع هدف کسر می‌کنیم و در تابع هدفMin به تابع هدف اضافه می‌کنیم.

برای محدویت اول داریم:

$$x_1 + x_2 + R_1 = 100$$

تابع هدف:

$$Min\ z = 3x_1 + 5x_2 + MR_1$$

*در محدودیت‌های مساوی یک متغیر مصنوعی به سمت چپ محدودیت اضافه می‌کنیم.(R_iکه i در آن، شماره محدودیت است.)

*برای اثرنگذاشتن متغییر مصنوعی در تابع هدف، $+MR_i$ را به طرف راست تابع Min و $-MR_i$ رو به طرف راست تابع Max اضافه می‌کنیم.

محدودیت دوم و سوم:

طرف چپ محدودیت دوم و سوم یه چیزایی رو مازاد داره، برای اینکه دو طرف برابر بشن، از یک متغییر کمکی، کمک گرفته و مازاد طرف چپ رو کسر می‌کنیم. به این متغییر کمکی، متغیر کمکی مازاد میگن.متغییر کمکی مازاد هم با علامت S نشان داده میشه.

$$x_1 - s_2 = 50$$
$$x_2 - s_3 = 20$$

با وجود اینکه، متغییرهای کمکی به دادمون رسیدن، اما یه مشکل دیگه هم هست، این محدودیت‌ها در مبدا مختصات صدق نمی‌کنن.پس متغییر مصنوعی هم نیاز دارند تا مبدا مختصات هم در اون‌ها صدق کنه.پس متغییر مصنوعی هر کدوم رو اضافه می‌کنیم و تابع هدف رو نوسازی می‌کنیم.

$$x_1 - s_2 + R_2 = 50$$
$$x_2 - s_3 + R_2 = 20$$

تابع هدف:

$$Min\ z = 3x_1 + 5x_2 + MR_1 + MR_2 + MR_3$$

*در محدودیت‌های بزرگتر مساوی$\geq$ ، یک متغییر کمکی مازاد کسر می‌کنیم($-s_i$) و یک متغییر مصنوعی (R_i) اضافه می‌کنیم.

*برای اثرنگذاشتن متغییر مصنوعی در تابع هدف، $+MR_i$ را به طرف راست تابع Min و $-MR_i$ رو به طرف راست تابع Max اضافه می‌کنیم.

تابع هدف رو به حالت استاندارد درمیاریم.چون تابع هدف Min هست به ۱- ضرب می‌کنیم تا Max شود.پس داریم:

$$Max - z = -۳x_۱ - ۵x_۲ - MR_۱ - MR_۲ - MR_۳$$

$$Max - z + ۳x_۱ + ۵x_۲ + MR_۱ + MR_۲ + MR_۳ = ۰$$
$$x_۱ + x_۲ + R_۱ = ۱۰۰$$
$$x_۱ - s_۲ + R_۲ = ۵۰$$
$$x_۲ - s_۳ + R_۲ = ۲۰$$

تابلوی سیمپلکس رو رسم کرده و ضرایب را وارد می‌کنیم.

*متغییر اساسی هر محدودیت، متغییری است که در آن محدودیت دارای ضریب ۱ و در بقیه محدودیت‌ها وجود نداشته باشد.(ضریب صفر)

*در محدودیت‌های بزرگتر مساوی و مساوی، متغییر اساسی، متغییر مصنوعی اضافه شده به محدودیت می‌باشد.

	z	$x_۱$	$x_۲$	$s_۲$	$s_۳$	$R_۱$	$R_۲$	$R_۳$	
$z_۰$	-۱	۳	۵	۰	۰	M	M	M	۰
$R_۱$	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۱۰۰
$R_۲$	۰	۱	۰	-۱	۰	۰	۱	۰	۵۰
$R_۳$	۰	۰	۱	۰	-۱	۰	۰	۱	۲۰

این یک تابلوی سیمپلکس نیست! چرا؟

گفتیم تابلوی سیمپلکس جدولی هست که ستون متغییرهای اساسی، در سطر خودشون ۱ باشند و در سطرهای دیگه صفر. تو این تابلو، متغییرهای اساسی در سطر خودشون یک هستند(با رنگ سیاه) ولی در سطر صفر، دارای مقدارM هستند.(خاکستری)

پس باید با عملیات ردیفی(همون طور که ستون‌ها رو صفر می‌کردیم)، سطر صفر ستونهای متغییرهای اساسی رو صفر می‌کنیم.در روش M بزرگ، با این فرمول میتوان اینکار رو انجام داد:

$$-M(R_۱ + R_۲ + R_۳) + z_۰ \to z_۰$$

*تنها تفاوتی که این روش با روش قبلی داره، در همین جدول اول هست.

		z	$x_۱$	$x_۲$	$s_۲$	$s_۳$	$R_۱$	$R_۲$	$R_۳$	
$-M(R_۱ + R_۲ + R_۳) + z_۰ \to$	$z_۰$	-۱	$-M(۱+۱+۰) + ۳$	$-M(۱+۰+۱) + ۵$	$-M(-۱) + ۰$	$-M(-۱) + ۰$	$-M(۱) + M$	$-M(۱) + M$	$-M(۱) + M$	-۱۷۰M
	$R_۱$	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۱۰۰
	$R_۲$	۰	۱	۰	-۱	۰	۰	۱	۰	۵۰
	$R_۳$	۰	۰	۱	۰	-۱	۰	۰	۱	۲۰

		z	$x_۱$	$x_۲$	$s_۲$	$s_۳$	$R_۱$	$R_۲$	$R_۳$	
	$z_۰$	-۱	$۳-۲M$	$۵-۲M$	M	M	۰	۰	۰	−۱۷۰M
	$R_۱$	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۱۰۰
	$R_۲$	۰	۱	۰	−۱	۰	۰	۱	۰	۵۰
	$R_۳$	۰	۰	۱	۰	−۱	۰	۰	۱	۲۰

این یه جدول سیمپلکس هست.حالا مانند روش قبل، ورودی و خروجی رو انتخاب می‌کنیم و عملیات‌های لازم رو انجام می‌دهیم.

اما تشخیص ضریب منفی تر در سطر صفر در روشM بزرگ:

می‌دونیم که M بزرگ یه عدد خیلی بزرگه و اگه این عدد خیلی بزرگ به منفی ضرب بشه، یه عدد خیلی بزرگ منفی میشه. پس وقتی منفی تر رو تعیین می‌کنیم به ضرایب M منفی توجه می‌کنیم، هر کدام بیشتر باشد، منفی تر است.

برای مثال $۳M-۵$ منفی تر از $۲M-۱۰$ هست.

در صورتی که ضرایب M برابر باشد، به جای M یک عدد بگذارید، هر کدام از نظر عددی بیشتر باشد، آن متغیر ورودی است.

برای مثال در این مسئله دو ضریب منفی $۲M-۵$ و $۲M-۳$ داریم، به فرض اگر M، ۱۰۰ باشد،$۲M-۳$ منفی تر از ۲M – ۵ خواهد بود.(به جای M عدد ۱۰۰ را بگذارید.)

متغیر ورودی انتخاب شد، حال به دنبال متغیر خروجی میگردیم.متغییر خروجی مانند روش قبل می‌باشد.(قاعده مینیمم:تقسیم طرف راست به عناصر ستون مثبت ستون لولا)

		z	$x_۱$	$x_۲$	$s_۲$	$s_۳$	$R_۱$	$R_۲$	$R_۳$	
	$z_۰$	-۱	$۳-۲M$	$۵-۲M$	M	M	۰	۰	۰	−۱۷۰M
	$R_۱$	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۱۰۰
	$R_۲$	۰	۱	۰	−۱	۰	۰	۱	۰	۵۰
	$R_۳$	۰	۰	۱	۰	−۱	۰	۰	۱	۲۰
		بقیه اعمال مانند روش قبل، برای اختصار از توضیح پرهیز میشود.								
$(۲M-۳)x_۱+z_۰\rightarrow$	$z_۰$	-۱	۰	$۵-۲M$	$۳-M$	M	۰	$۲M-۳$	۰	−۷۰M−۱۵۰
$-x_۱+R_۱\rightarrow$	$R_۱$	۰	۰	۱	۱	۰	۱	−۱	۰	۵۰
$R_۲\rightarrow$	$x_۱$	۰	۱	۰	−۱	۰	۰	۱	۰	۵۰
	$R_۳$	۰	۰	۱	۰	−۱	۰	۰	۱	۲۰

		z	$x_۱$	$x_۲$	$s_۲$	$s_۳$	$R_۱$	$R_۲$	$R_۳$	
$(۲M-۵)x_۲ + z_۰ \rightarrow$	$z_۰$	-۱	۰	۰	$۳-M$	$۵-M$	۰	$۲M-۳$	$۲M-۵$	-۳۰M-۲۵۰
$-x_۲ + R_۱ \rightarrow$	$R_۱$	۰	۰	۰	۱	۱	۱	-۱	-۱	۳۰
$x_۱ \rightarrow$	$x_۱$	۰	۱	۰	-۱	۰	۰	۱	۰	۵۰
$R_۳ \rightarrow$	$x_۲$	۰	۰	۱	۰	-۱	۰	۰	۱	۲۰
		z	$x_۱$	$x_۲$	$s_۲$	$s_۳$	$R_۱$	$R_۲$	$R_۳$	
$(M-۳)s_۲ + z_۰ \rightarrow$	$z_۰$	-۱	۰	۰	۰	۲	$M-۳$	M	$M+۲$	-۳۴۰
$R_۱ \rightarrow$	$s_۲$	۰	۰	۰	۱	۱	۱	-۱	-۱	۳۰
$s_۲ + x_۱ \rightarrow$	$x_۱$	۰	۱	۰	۰	۱	۱	۰	-۱	۸۰
$x_۲ \rightarrow$	$x_۲$	۰	۰	۱	۰	-۱	۰	۰	۱	۲۰

تابلو بهینه شد. چون در سطر صفر منفی وجود ندارد.

جواب بدست آمده، جواب شدنی است، چون در متغییرهای اساسی، متغییر مصنوعی وجود ندارد.

*۱- در ستونZ در سطر صفر، نشانگر Min بودن تابع هدف است.

جواب بهینه:

$x_۱^* = ۸۰ \,, x_۲^* = ۲۰ , s_۲^* = ۳۰ \,, s_۳^* = ۰ \,, -z = -۳۴۰ \rightarrow z^* = ۳۴۰$

**اگر در جدول بهینه، یکی از متغییرهای اساسی، متغییر مصنوعی باشد، جواب نشدنی است و مدل فاقد جواب است.

**شرط بهینگی، نامنفی بودن سطر صفر است.

**شرط شدنی بودن نقطه متناظر با تابلو،نبود متغییرمصنوعی در متغییر اساسی.

روش دو مرحله ای:

همان طور که قبلا گفته شد، روش دومرحله ای زمانی استفاده خواهد شد که محدودیت‌ها بزرگتر مساوی یا مساوی باشند. مثال قبلی را با استفاده از روش دو مرحله‌ای حل می‌کنیم.

$Min\ z = ۳x_۱ + ۵x_۲$
s.t:
$x_۱ + x_۲ = ۱۰۰$
$x_۱ \geq ۵۰$
$x_۲ \geq ۲۰$
$x_۱, x_۲ \geq ۰$

محدودیت‌ها به صورت استاندارد:

$x_۱ + x_۲ + R_۱ = ۱۰۰$
$x_۱ - s_۱ + R_۲ = ۵۰$
$x_۲ - s_۲ + R_۳ = ۲۰$

برای روش دو مرحله‌ای تحمیل جریمه به تابع هدف نیاز نیست.ما یک تابع هدف تازه‌ای برای کاهش جمع متغییرهای مصنوعی ارائه می‌کنیم و مدل را با استفاده از آن حل می‌کنیم تا متغییرهای مصنوعی به صفر برسند.

پس اولین مرحله از روش دو مرحله‌ای نوشتن تابع هدف حداقل سازی تابع مجموع متغییرهای مصنوعی هست.

$Min\ R = R_۱ + R_۲ + R_۳$

*به یاد داشته باشیم که تابع هدف اولیه چه Max باشد چه Min ، تابع هدف اولین مرحله، روش دو مرحله‌ای Min خواهد بود.

*تابع هدف را استاندارد کرده و جدول را رسم می‌کنیم.

$Max - z = -R_۱ - R_۲ - R_۳ \Rightarrow Max - z + R_۱ + R_۲ + R_۳$
$x_۱ + x_۲ + R_۱ = ۱۰۰$
$x_۱ - s_۱ + R_۲ = ۵۰$
$x_۲ - s_۲ + R_۳ = ۲۰$

	R	$x_۱$	$x_۲$	$s_۲$	$s_۳$	$R_۱$	$R_۲$	$R_۳$	
$R_۰$	-۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۰
$R_۱$	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۱۰۰
$R_۲$	۰	۱	۰	-۱	۰	۰	۱	۰	۵۰
$R_۳$	۰	۰	۱	۰	-۱	۰	۰	۱	۲۰

مانند تابلوی اول روشM بزرگ، این تابلو نیز، تابلوی سیمپلکس نیست، چون ستون‌های متغیرهای اساسی واحد نیستند.با معادله زیر می‌تواند ستون‌های متغییراساسی را واحد کرد:

$-(R_۱ + R_۲ + R_۳) + R_۰ \to R_۰$

		R	x_1	x_2	s_2	s_3	R_1	R_2	R_3	
$-(R_1+R_2+R_3)+z_0 \rightarrow$	R_0	-۱	$-(۱+۱+۰)+۰$	$-(۱+۰+۱)+۰$	$-(-۱)+۰$	$-(-۱)+۰$	$-(۱)+۱$	$-(۱)+۱$	$-(۱)+۱$	−۱۷۰
	R_1	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۱۰۰
	R_2	۰	۱	۰	−۱	۰	۰	۱	۰	۵۰
	R_3	۰	۰	۱	۰	−۱	۰	۰	۱	۲۰

حال تابلو سیمپلکس شد و مانند روش اول حل می‌کنیم.(چون هر دو عدد منفی سطر صفر برابر است، یکی را به دلخواه وارد می‌کنیم).جدول را تا بهینگی ادامه می‌دهیم.

		R	x_1	x_2	s_2	s_3	R_1	R_2	R_3	
	R_0	-۱	−۲	−۲	۱	۱	۰	۰	۰	−۱۷۰
	R_1	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۱۰۰
	R_2	۰	۱	۰	−۱	۰	۰	۱	۰	۵۰
	R_3	۰	۰	۱	۰	−۱	۰	۰	۱	۲۰
		R	x_1	x_2	s_2	s_3	R_1	R_2	R_3	
$2x_1+R_0 \rightarrow$	R_0	-۱	۰	−۲	−۱	۱	۰	۲	۰	−۷۰
$-x_1+R_1 \rightarrow$	R_1	۰	۰	۱	۱	۰	۱	−۱	۰	۵۰
$R_2 \rightarrow$	x_1	۰	۱	۰	−۱	۰	۰	۱	۰	۵۰
$R_3 \rightarrow$	R_3	۰	۰	۱	۰	−۱	۰	۰	۱	۲۰
		R	x_1	x_2	s_2	s_3	R_1	R_2	R_3	
$2x_2+R_0 \rightarrow$	R_0	-۱	۰	۰	−۱	−۱	۰	۲	۲	-۳۰
$-x_2+R_1 \rightarrow$	R_1	۰	۰	۰	۱	۱	۱	−۱	−۱	۳۰
$x_1 \rightarrow$	x_1	۰	۱	۰	−۱	۰	۰	۱	۰	۵۰
$R_3 \rightarrow$	x_2	۰	۰	۱	۰	−۱	۰	۰	۱	۲۰
		R	x_1	x_2	s_2	s_3	R_1	R_2	R_3	
$s_2+R_0 \rightarrow$	R_0	-۱	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰
$R_1 \rightarrow$	s_2	۰	۰	۰	۱	۱	۱	−۱	−۱	۳۰
$s_2+x_1 \rightarrow$	x_1	۰	۱	۰	۰	۱	۱	۰	−۱	۸۰
$x_2 \rightarrow$	x_2	۰	۰	۱	۰	−۱	۰	۰	۱	۲۰

*شرط پایان مرحله اول، نامنفی بودن سطر صفر هست و اینکه $R_0 = ۰$ باشه.یعنی هیچ متغییر مصنوعی در پایه(متغییر اساسی) نباشه، اگر هم متغییر اساسی یکی از ، متغیرهای مصنوعی بود، برابر با صفر باشه.

*هدف ما از مرحله اول، صفر کردن تمام متغییرهای مصنوعی و رسیدن به یک نقطه گوشه‌ای شدنی از مدل برنامه ریزی هست.

*تمامی جداول مرحله اول، بجز آخرین جدول، نقاط گوشه‌ای نشدنی هستند.(چون متغییر مصنوعی بزرگتر از صفر دارن)

*آخرین جدول مرحله اول، متناظر با یک نقطه گوشه‌ای شدنی از مدل هست.

مرحله دوم:

تابع هدف اولیه رو استاندارد می‌کنیم:

$$Min\ z = ۳x_۱ + ۵x_۲$$
$$Max - z = -۳x_۱ - ۵x_۲ \rightarrow Max - z + ۳x_۱ + ۵x_۲ = ۰$$

ستون متغییرهای مصنوعی رو از آخرین جدول حذف می‌کنیم و به جای سطر صفر، ضرایب تابع هدف اولیه رو می‌ذاریم:

		Z	$x_۱$	$x_۲$	$s_۲$	$s_۳$	
	$Z_۰$	-۱	۳	۵	۰	۰	۰
	$s_۲$	۰	۰	۰	۱	۱	۳۰
	$x_۱$	۰	۱	۰	۰	۱	۸۰
	$x_۲$	۰	۰	۱	۰	-۱	۲۰

با وجود اینکه ضرایب سطر صفر، نامنفی اند، اما جدول بهینه نیست، چون جدول سیمپلکس نیست. به ستون متغیرهای اساسی نگاه کنید.می بینیم که ستون متغییرهای اساسی $x_۱, x_۲$ واحد نیست.پس اقدام به واحد کردن ستون‌ها می‌کنیم.

*در دومین مرحله، اولین کار نگاه کردن به ستون‌های متغیرهای اساسی هست.اگر ستون‌ها واحد نبود، آن‌ها را واحد میکنیم.

		Z	$x_۱$	$x_۲$	$s_۲$	$s_۳$	
$-۳(x_۱) - ۵(x_۲) + Z_۰ \rightarrow$	$Z_۰$	-۱	۰	۰	۰	۲	-۳۴۰
	$s_۲$	۰	۰	۰	۱	۱	۳۰
	$x_۱$	۰	۱	۰	۰	۱	۸۰
	$x_۲$	۰	۰	۱	۰	-۱	۲۰

حال اگر جدول بهینه نباشد، تا بهینگی ادامه می‌دهیم.

در این مسئله، در اولین مرحله، مرحله‌ی دوم جدول بهینه شد. پس:

$$x_۱^* = ۸۰\ , x_۲^* = ۲۰, s_۲^* = ۳۰\ , s_۳^* = ۰\ , -z = -۳۴۰ \rightarrow z^* = ۳۴۰$$

موارد خاص در برنامه ریزی خطی:

۱.جواب بهینه چندگانه:

در روش سیمپلکس: اگر ضریب یک متغیر غیراساسی در سطر صفر تابلوی بهینه سیمپلکس، صفر باشد، مدل، جواب بهینه چندگانه دارد.

۲.فاقد ناحیه جواب:

هرگاه در یک تابلوی سیمپلکس بهینه، حداقل یکی از متغییرهای اساسی مصنوعی و دارای مقدار بزرگتر از صفر باشد، مدل فاقد ناحیه جواب موجه.

*بودن متغییر مصنوعی در متغییر اساسی یعنی ناحیه موجه وجود ندارد.

۳.ناحیه جواب بی کران:

اگر در تابلوی سیمپلکس، امکان انتخاب متغییر ورودی باشد ولی متغییر خروجی وجود نداشته باشد(منفی یا صفر بودن ستون لولا) مدل برنامه ریزی دارای ناحیه جواب بیکران است.

٤.جواب تبهگن:

در تابلوی سیمپلکس، یک متغییر اساسی مساوی صفر باشد، گوشه متناظر با تابلو تبهگن است.

متغییرهای منفی و آزاد در علامت:

۱.متغییر آزاد در علامت:

متغییری که میتواند هر علامتی را بگیرد.

برای حل برنامه ریزی باید متغییر آزاد در علامت را به دو متغییر نامنفی تبدیل کرد تا بتوان حل کرد.

اگر x_i یک متغییر آزاد در علامت باشد: آنگاه:

$$x_i = x_i' - x_i''$$
$$x_i' \geq ۰$$
$$x_i'' \geq ۰$$

برای مثال اگر:

$$Min\ z = ۳x_۱ + ۵x_۲$$
s.t:
$$x_۱ + x_۲ = ۱۰۰$$
$$x_۱ \geq ۵۰$$
$x_۱$ آزاد $, x_۲ \geq ۰$

برای حل توسط سیمپلکس باید ابتدا آزاد در علامت را به دو متغییر نامنفی تبدیل کرده و در تابع هدف و محدویتها قراردهیم.

$$x_۱ = (x_۱' - x_۱'')$$

$$Min\ z = ۳(x_۱' - x_۱'') + ۵x_۲$$
$$(x_۱' - x_۱'') + x_۲ = ۱۰۰$$
$$(x_۱' - x_۱'') \geq ۱۰۰$$
$$x_۱' \geq ۰, x_۱'' \geq ۰, x_۲ \geq ۰$$

۲.متغییر با حد پایین منفی:

اگر $x_۱ \geq -۲۰$ باشد:

$$x_۱ = x_۱' - ۲۰$$
$$x_۱' \geq ۰$$

۳.متغیر منفی:

$$x \leq ۰ \Rightarrow x = -x' \Rightarrow x' \leq ۰$$

در برنامه ریزی به جای x، $-x'$ را میگذاریم.

نکات:

۱. متغییرهای تبدیل کننده نامعادلات به معادلات:متغییر کمکی
۲. اضافه کردن متغییر مصنوعی R به محدودیت: بزرگتر شدن(گسترش) ناحیه موجه
۳. هر تابلوی سیمپلکس از نظر هندسی، متناظر با یک گوشه
٤. اگر یک گوشه‌ی موجه، از نظر تابع هدف نسبت به گوشه‌های مجاور خود بهتر باشد، آن گوشه جواب موجه است.
٥. محدودیتی که نیازی به متغیر کمکی ندارد:محدودیت مساوی
٦. محدودیت مساوی فقط متغییر مصنوعی
۷. محدودیت بزرگتر مساوی، متغییر مصنوعی و متغییر کمکی مازاد
۸. محدودیت کوچکتر مساوی، فقط متغیر کمکی کمبود
۹. محدودیت فعال(الزام آور): از نقطه گوشه‌ی بهینه بگذرد.
۱۰. متغییرهای کمکی: متغییر کمبود و متغییر مازاد
۱۱. برای تبدیل تابع هدف Min به Max طرفین معادله را به ۱– ضرب می‌کنیم.
۱۲. معادلات مرزی: چنانچه محدودیت ها به تساوی تبدیل شوند
۱۳. محدودیت های نامنفی هم معادلات مرزی هستند.
١٤. گوشه:از تقاطع حداقل دو معادله مرزی بدست می آید.
١٥. گوشه غیرموجه(نشدنی): گوشه ای که در ناحیه موجه قرار ندارد.
١٦. گوشه موجه(شدنی):گوشه ای که در مرز ناحیه موجه (شدنی، ناحیه جواب) قراردارد.
١٧. گوشه های مجاور: دو گوشه ای که دارای معادله مرزی یکسان هستند.
١٨. مدل استاندارد: مدل برنامه ریزی خطی با تابع هدف Max و محدودیت های مساوی.
١٩. در توابع ماکزیمم سازی جریمه متغییر مصنوعی: MR- در تابع هدف
۲۰. در توابع مینیمم سازی جریمه متغییر مصنوعی :MR+ در تابع هدف
۲۱. پایان مرحله اول، سیمپلکس دو مرحله ای:بهینه شدن تابلو و R=۰
۲۲. بهینگی:نامنفی شدن ضرائب سطر صفر
۲۳. وجود عدد ۱– در سطر صفرZ به عنوان ضریب Z : تابع هدف از نوع Min است.
٢٤. متغییر مصنوعی به محدودیت‌های بزرگتر مساوی و مساوی اضافه میشود.
٢٥. روشهای سیمپلکس M بزرگ و دو مرحله ای فقط در محدودیت های بزرگتر مساوی و مساوی کاربرد دارد.
٢٦. اگر متغییر خروجی طبق قاعده حداقل نسبت اعداد سمت راست بر مقادیر مثبت ستون لولا نباشد، در تابلوی بعد حداقل یک متغییر اساسی منفی است.(جواب ندارد)

۲۷. در جواب موجه اساسی، متغییرهای مساوی صفر:متغییر غیراساسی
۲۸. در صورتی که کلیه متغییرهای مصنوعی غیراساسی شود:تابلوی سیمپلکس متناظر با یک گوشه‌ی شدنی(موجه)
۲۹. شروع روش سیمپلکس همواره از مبدا مختصات است.
۳۰. اگر در یک نقطه m متغییر مقدار بزرگتر از صفر و n متغییر مقدار صفر داشته باشد، آن جواب موجه اساسی است.
۳۱. اگر جواب اساسی موجه(بهینه) نباشد: حداقل یکی از متغییرهای اساسی دارای مقدار منفی خواهد بود.
۳۲. گوشه بر روی هر معادله ای که قرار بگیرد، متغییر کمکی آن گوشه صفر میشود.
۳۳. اگر نقطه‌ای در داخل محدوده موجه باشد، مقدار متغییر کمکی آن مثبت است.
۳٤. اگر نقطه ای خارج از محدوده موجه باشد، مقدار متغییر کمکی آن منفی است.
۳۵. تعداد متغییرهای اساسی به تعداد محدودیت های مدل است.
۳٦. تعداد تکرارهای سیمپلکس در روش M بزرگ با روش سیمپلکس دومرحله ای برابر است.
۳۷. انتقال از یک تابلوی سیمپلکس به تابلوی بعدی به معنای انتقال از یک جواب گوشه به جواب گوشه است.
۳۸. در روش سیمپلکس دو مرحله ای و M بزرگ همواره عنصر لولا مثبت است.
۳۹. در روش دو مرحله ای تابلوی نهایی مرحله اول، بیانگر یک گوشه موجه است.
٤۰. اگر تابلویی را بدهد و نوع آن را بخواهد، باید به سطر صفر، طرف دوم و متغییرهای اساسی توجه کرد.
   a. اگر در سطر صفر تابلوی بهینه متغییر غیر اساسی مقدار صفر داشته باشد(بهینه چندگانه)
   b. اگر یکی از متغییرهای اساسی در طرف دوم برابر صفر شود:
      i. اگر تابلو بهینه باشد:بهینه تبهگن
      ii. اگر تابلو بهینه نباشد: تبهگن موقت
   c. اگر طرف دوم یکی از متغییرهای اساسی در تابلوی بهینه منفی باشد: فاقد جواب بهینه
   d. اگر یکی از متغییرهای اساسی در تابلوی بهینه مصنوعی باشد:فاقد جواب بهینه
٤۱. اگر تابلویی را بدهد و تعداد محدودیت های
   a. مساوی را بخواهد:به تعداد متغییر مصنوعی که دارای متغییر کمکی نیست.(متغییر کمکی و مصنوعی یک محدودیت دارای اندیس مشابه اند.)
   b. بزرگتر مساوی: به تعداد متغییرهای مصنوعی و کمکی که اندیسشان یکی هست.
   c. کوچکتر مساوی: به تعداد متغییرهای کمکی که متغییرمصنوعی هم اندیس ندارد.

برای پیدا کردن ضریب یکی از متغییرهای غیراساسی در سطر صفر از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:(با فرض وجود دو محدودیت)

$$\text{ضریب} = \left[\text{ضریب متغییر اساسی اول در تابع هدف} \quad \text{ضریب متغییر اساسی دوم در تابع هدف}\right]\begin{bmatrix}\text{ضریب متغییر اساسی اول در ستون متغییر غیر اساسی}\\ \text{ضریب متغییر اساسی دوم در ستون متغییر غیر اساسی}\end{bmatrix} - \text{ضریب متغییر غیر اساسی در تابع هدف}$$

$$\text{ضریب} = [a \quad b]\begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix} - \text{ضریب متغییر غیر اساسی در تابع هدف} = [(a\times c)+(b\times d)] - \text{ضریب متغییر غیر اساسی در تابع هدف}$$

مثال:یکی از تابلوهای سیمپلکس مدل LP زیر داده شده است.

$Max\ z = ۳x_۱ + ۳x_۲ + ۵x_۳$
s.t:
$۲x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ \le ۴۳۰$
$۳x_۱ + x_۲ + ۲x_۳ \le ۶۴۰$
$x_۱, x_۲, x_۳ \ge ۰$

متغییر اساسی	Z	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$s_۱$	$S_۲$	راست
Z_۰	۱	$\frac{۹}{۲}$		۰	۰	$\frac{۵}{۲}$	۱۱۵۰
$S_۱$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$	۰	۱	$-\frac{۱}{۲}$	۲۰۰
$x_۳$	۰	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۲۳۰

مقدار ضریب $x_۲$ در سطر Z چقدر است؟

$$\text{ضریب}\,x_۲ = [۰ \quad ۵]\begin{bmatrix}\frac{۳}{۲}\\ \frac{۱}{۲}\end{bmatrix} - ۳ = \left[\left(۰\times\frac{۳}{۲}\right)+\left(۵\times\frac{۱}{۲}\right)\right] - ۳ = -\frac{۱}{۲}$$

گاهی مسئله ای به این فرم می‌دهند و مقدار بهینه z را میخواهند:

$Max\ z = ۱۰x_۱ - x_۲ + ۵x_۳ - ۳x_۴ + x_۵$
s.t:
$۳x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ + x_۴ + \frac{۱}{۳}x_۵ \le ۹۰$
$x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵ \ge ۰$

این مدل دارای یک محدودیت هست به همین دلیل دارای یک متغیر اساسی هست. می‌دانیم که متغیراساسی در سیمپلکس برابر با مقدار سمت راست و متغیرهای غیراساسی برابر با صفر است. بنابراین فقط یکی از متغییرها می‌تواند بزرگتر از صفر باشد.

به همین دلیل، در هربار یکی از متغییرها را بزرگتر از صفر درنظر می‌گیریم و بقیه متغییرها را صفر.با جایگزاری در محدودیت، مقدار متغییر بزرگتر از صفر را پیدا کرده و تابع هدف را محاسبه میکنیم.در Max بیشترین مقدار، Z بهینه است و در Min کمترین مقدار.

در تابع هدف Max متغییرهایی که دارای علامت مثبت هستند، باعث افزایش خواهند شد، بنابراین فقط متغییرهای مثبت را بررسی میکنیم.ودر تابع Min متغییرهایی که دارای علامت منفی اند.

$x_۱ =?\ IF\ x_۲ = x_۳ = x_۴ = x_۵ = ۰ \ \rightarrow ۳x_۱ + ۲(۰) + ۰ + ۰ + \frac{۱}{۳}(۰) = ۹۰ \ \rightarrow ۳x_۱ = ۹۰ \rightarrow x_۱ = ۳۰ \rightarrow$
$Z = ۱۰(۳۰) - ۰ + ۵(۰) - ۳(۰) + ۰ = ۳۰۰$
$x_۳ =?\ IF\ x_۱ = x_۲ = x_۴ = x_۵ = ۰ \ \rightarrow ۳(۰) + ۲(۰) + x_۳ + ۰ + \frac{۱}{۳}(۰) = ۹۰ \ \rightarrow x_۳ = ۹۰ \rightarrow$
$Z = ۱۰(۰) - ۰ + ۵(۹۰) - ۳(۰) + ۰ = ۴۵۰$
$x_۵ =?\ IF\ x_۱ = x_۲ = x_۳ = x_۴ = ۰ \ \rightarrow ۳(۰) + ۲(۰) + ۰ + ۰ + \frac{۱}{۳}(x_۵) = ۹۰ \ \rightarrow x_۵ = ۲۷۰ \rightarrow$
$Z = ۱۰(۰) - ۰ + ۵(۰) - ۳(۰) + ۲۷۰ = ۲۷۰$

بیشترین مقدار در بین Z ها به جواب بهینه است.چون تابع هدف Max است.

فصل پنجم

تحلیل عناصر سیمپلکس و مسئله ثانویه

۱. هر برنامه ریزی خطی با یک مسئله برنامه ریزی خطی دیگر در ارتباط است.

۲. هر مسئله برنامه ریزی خطی دارای دو فرم است: اولیه و ثانویه

۳. به مسئله ثانویه، دوگان می‌گویند.

تحلیل عناصر تابلوی سیمپلکس:

عناصر سطر Z	مثبت:کاهش در مقدار تابع هدف
	منفی:افزایش در مقدار تابع هدف
سطر متغیر اساسی (متغیر تصمیم)	مثبت:کاهش متغیر اساسی به ازای ورود یک واحد از متغیر ستون مربوطه
	منفی:افزایش متغیر اساسی به ازای ورود یک واحد از متغیر ستون مربوطه
سطر متغیر اساسی (متغیر کمکی)	مثبت: استفاده از منابع
	منفی: آزاد کردن منابع، مصرف نکردن، افزایش منبع برای ورود متغییر ستون مربوطه
عناصر سمت راست	متغییر اساسی متناظر، کمکی(S): موجودی منبع
	متغییر اساسی متناظر، تصمیم (X):میزان تولید

قیمت سایه ای:

۱. قیمت سایه ای:ارزش اقتصادی منابع، فرصت از دست رفته

۲. قیمت سایه ای:میزان افزایش Z در اثر افزایش یک واحد از این منبع

۳. قیمت سایه ای:عبارت است از ارزش نهایی منابع به کار رفته در تولید

٤. قیمت سایه ای: به ازای نداشتن هر واحد از منبع چقدر سود از دست می رود.

۵. قیمت سایه ای:به ازای داشتن یک واحد از منبع چقدر سود حاصل می شود.

٦. قیمت سایه ای: حداکثر قیمت مقرون به صرفه پرداختی برای خرید یک واحد از آن منبع

۷. قیمت یک واحد منابع در بازار بیشتر از قیمت سایه ای باشد، خرید مقرون به صرفه نیست.

۸. قیمت یک واحد منابع در بازار کمتر از قیمت سایه ای، خرید مقرون به صرفه است.

۹. قیمت سایه ای: حداکثر سود حاصل از یک واحد منبع

از نکته بالایی نتیجه می‌گیریم که اگر قیمت سایه ای منابع را به منابع موجود ضرب کنیم، جواب بهینه حاصل میشود.

تعیین قیمت سایه ای:

قیمت سایه ای هر یک محدودیت‌ها(منابع) از سطر صفر، تابلوی بهینه سیمپلکس استخراج می‌شود.قیمت سایه ای محدودیتها(منابع) ،ضریب متغیرهای کمکی یا مصنوعی هر یک از محدودیت‌هاست که در جدول اولیه، متغیر اساسی بوده اند.

*اگر M نداشته باشد، قدر مطلق همان مقدار، قیمت سایه ای است.

*اگرM داشته باشد، عبارت شامل M را حذف می‌کنیم ، قدر مطلق عبارت باقی مانده، قیمت سایه ای است.

(قدر مطلق یعنی عدد بدون منفی:قدر مطلق ۱- برابر ۱ است.)

مدل زیر را در نظر بگیرید:

$Max\ z = ۱۰x_۱ + ۲۰x_۲$
s.t:
$-x_۱ + ۳x_۲ \leq ۳۰$
$x_۱ + x_۲ \leq ۲۰$
$x_۱, x_۲ \geq ۰$

اگر تابلوی بهینه مدل بالا، تابلوی زیر باشد، قیمت سایه ای منابع چقدر است؟

	Z	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	
$Z.$	۱	۰	۰	$\frac{۵}{۲}$	$\frac{۲۵}{۲}$	۳۲۵
$X_۲$	۰	۰	۱	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۲۵}{۲}$
$X_۲$	۰	۲	۰	$-\frac{۱}{۴}$	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۱۵}{۲}$

با توجه به محدودیت‌ها، متغیرهای اساسی جدول اول $s_۱, s_۲$ می‌باشد. بنابراین قیمت سایه ای منبع اول ضریب $s_۱$ در سطر صفر جدول بهینه خواهد بود و قیمت سایه ای منبع دوم ضریب $s_۲$ در سطر صفر جدول بهینه خواهد بود.

قیمت سایه ای منبع اول: $y_۱ = \frac{۵}{۲}$ می باشد.

قیمت سایه ای منبع دوم: $y_۲ = \frac{۲۵}{۲}$ می باشد.

مسئله ثانویه

۱. مسئله ثانویه یک برنامه ریزی خطی برای یافتن قیمت سایه ای منابع است.
۲. ارزش واقعی منابع باید به نحوی تعیین گردد که مجموع ارزش نسبت داده شده به هزینه استفاده از منابع حداقل گردد.(اگر هدف حداکثرسازی سود باشد، مسئله ثانویه حداقل سازی هزینه منابع خواهد بود)
۳. قیمت سایه ای: حداکثر سود بدست آمده به ازای یک واحد اضافی از منبع
٤. قیمت سایه ای: ارزش واقعی یک واحد منبع بکار رفته
۵. ارزش واقعی منابع بکار رفته، حداقل می‌تواند صفر باشد.
٦. بهترین حالت محدودیت‌ها در ثانویه مساوی است.
۷. در مسئله ثانویه، متغیرهای تصمیم، قیمت سایه‌ای مسئله اولیه هستند.
۸. به تعداد محدودیت‌های مسئله اولیه، در مسئله ثانویه محدودیت خواهیم داشت.(به دنبال قیمت سایه ای هستیم، به همین دلیل باید برای هرکدام از محدودیت ها (منابع) یک متغیر تصمیم در مسئله ثانویه وجود داشته باشد)

بدست آوردن مسئله ثانویه از مسئله اولیه:

فرم کانونی مدل‌های برنامه ریزی:

Min عددثابت $\geq$ محدودیت‌ها ۰ $\geq$ متغیرهای‌تصمیم	Max عددثابت $\leq$ محدودیت‌ها ۰ $\geq$ متغییرهای‌تصمیم

۱. اگر مسئله اولیه Max باشد، مسئله ثانویه Min است و برعکس.
۲. هر محدودیت مسئله اولیه متناظر با یک متغیر تصمیم در مسئله ثانویه است.
   a. به تعداد محدودیت‌های مسئله اولیه، در مسئله ثانویه متغیر تصمیم خواهیم داشت.
   b. به تعداد متغیرهای مسئله اولیه، در مسئله ثانویه محدودیت داریم.
۳. عناصر سمت راست هر محدودیت در مسئله اولیه، ضرایب تابع هدف در مسئله ثانویه است.
٤. نوع محدودیت‌های مسئله ثانویه با توجه به نوع متغیر تصمیم در اولیه تعیین می‌شود.
۵. نوع متغیرهای تصمیم در مسئله ثانویه با توجه به محدودیت‌های مسئله اولیه تعین می‌شود.

توضیح در صفحه بعد با یک مثال:

مسئله ثانویه مدل زیر را بنویسید!

$Max\ z = ۶x_۱ + ۴x_۲ + ۷x_۳$
S.t:
$x_۱ + x_۳ \leq ۱$
$۲x_۱ + ۳x_۲ \geq ۴$
$x_۲ + x_۳ = ۱$
$x_۱ \leq ۰ , x_۲ \geq ۰, x_۳$ آزاددرعلامت

گفتیم در مسئله ثانویه، به دنبال قیمت سایه ای هستیم و همچنین گفتیم که هر محدودیت دارای قیمت سایه ای می‌باشد،پس برای یافتن قیمت سایه‌ای هر یک از محدودیت‌ها در مسئله ثانویه، یک متغیر تصمیم که معرف آن محدودیت است نیاز داریم. اگر متغیر تصمیم مسئله ثانویه رو y_i بنامیم.متغیر متناظر با هر محدودیت اینگونه نامگذاری می‌شود:

$y_۱$:	$x_۱ + x_۳ \leq ۱$
$y_۲$:	$۲x_۱ + ۳x_۲ \geq ۴$
$y_۳$:	$x_۲ + x_۳ = ۱$

نتیجه : به تعداد محدودیت‌های مسئله اولیه، در مسئله ثانویه متغیر تصمیم داریم.

اگه تابع اولیه Max باشه، تابع ثانویه Min هست. اما پارامترهای تابع ثانویه چی هستند؟

چون مسئله اولیه Max ، تابع ثانویه Min میشه و چون ما در مسئله ثانویه دنبال قیمت سایه‌ای هستیم، پس باید قیمت های سایه ای روMin کنیم، ترکیب قیمت سایه‌ای برای حداکثر کردن، مسئله اولیه به این شکل هست که باید منبع $y_۱$ حداکثر ۱ واحد، منبع $y_۲$ حداقل ۴ واحد و منبع $y_۳$ مساوی ۱ واحد باشه.یعنی

$y_۱ + ۴y_۲ + y_۳$

پس تابع هدف ثانویه میشه:

$Min\ y = y_۱ + ۴y_۲ + y_۳$

نتیجه: مقادیر سمت راست محدودیت‌ها در مسئله‌ی اولیه، پارامترهای (ضرایب) متغیرهای تصمیم در تابع هدف ثانویه می‌باشد.

متغیرهای تصمیم مسئله اولیه، محدودیت‌هایی برای قیمت سایه‌ای محسوب میشن، چون از هر کدوم از منابع به صورت یکسان در همه‌ی متغیرهای تصمیم استفاده نمیشه.ارزشی که هر متغیر تصمیم در مسئله اولیه داره، برابر با ضریب اش در تابع هدف هست.پس محدودیت‌های مسئله ثانویه مربوط به متغیرهای تصمیم مسئله اولیه هست.

نتیجه: به تعداد متغیرهای تصمیم مسئله اولیه، در مسئله ثانویه محدودیت خواهیم داشت.

حالا چطوری این محدودیت ها رو فرموله کنیم؟

$y_۱:$	$x_۱ + x_۳ \leq ۱$
$y_۲:$	$۲x_۱ + ۳x_۲ \geq ٤$
$y_۳:$	$x_۲ + x_۳ = ۱$

برای هر متغیر تصمیم یک محدودیت:

طرف دوم	نوع محدودیت		
ضریب متغیر $X_۱$ در تابع هدف	با توجه به نوع متغیر $X_۱$ در مسئله اولیه	$(\text{ضریب } x_۱ \text{ درمحدودیت‌اول}) y_۱ + (\text{ضریب } x_۱ \text{ درمحدودیت‌دوم}) y_۲ + (\text{ضریب } x_۱ \text{ درمحدودیت‌سوم}) y_۳$	محدودیت مربوط به $x_۱$:
			محدودیت مربوط به $x_۲$:
			محدودیت مربوط به $x_۳$:

تعیین نوع محدودیت:

فرم کانونی مدلهای برنامه ریزی رو به یاد دارید؟

Min	Max
محدودیت‌ها $\geq$ عددثابت	محدودیت‌ها $\leq$ عددثابت
متغیرهای‌تصمیم $\geq$ ۰	متغییرهای‌تصمیم $\geq$ ۰

۱.اگه مسئله اولیه Max باشه و متغیر تصمیم از فرم کانونی پیروی کنه(نامنفی باشه یعنی $x_i \geq ۰$ باشه)، محدودیت مربوط به اون متغیر در مسئله ثانویه از فرم کانونی Min تبعیت می‌کنه.(یعنی محدودیت مربوط به x_i در مسئله ثانویه بزرگتر مساوی خواهد بود.)

۲.اگه مسئله اولیه Max باشه و متغیر تصمیم منفی باشه (یعنی $x_i \leq ۰$ باشه)، محدودیت مربوط به متغیر تصمیم در مسئله ثانویه از فرم کانونی Min تبعیت نمی‌کنه.(یعنی محدودیت مربوط به x_i در مسئله ثانویه کوچکتر مساوی خواهد بود.

۳.اگه مسئله اولیه Max باشه و متغیر تصمیم آزاد در علامت باشه، محدودیت مربوط به اون متغیر تصمیم در مسئله ثانویه، مساوی خواهد بود.

حال همین ها رو میتوان برای تابع اولیه Min نیز گفت.

۱. مسئله اولیه Min، $x_i \geq ۰$ باشد ← محدودیت متناظر با x_i در مسئله ثانویه با علامت$\geq$

۲.مسئله اولیهMin و $x_i \leq ۰$ باشد ← محدودیت متناظر با x_i در مسئله ثانویه با علامت $\leq$

۳.مسئله اولیهMin و متغیر تصمیم آزاد در علامت ← محدودیت متناظر با x_i در مسئله ثانویه با علامت $=$

محدودیت های مسئله ثانویه را باهم می نویسیم:

$Max\ z = ٦x_١ + ٤x_٢ + ٧x_٣$

$y_١$:	$x_١ + x_٣ \leq ١$
$y_٢$:	$٢x_١ + ٣x_٢ \geq ٤$
$y_٣$:	$x_٢ + x_٣ = ١$

$x_١ \leq ٠ , x_٢ \geq ٠, x_٣$ آزاددرعلامت

طرف دوم	نوع محدودیت			
٦	چون $x_١$ از فرم کانونی Max پیروی نکرده،محدودیت هم از فرم کانونی Min پیروی نمی‌کند.	$\leq$	$(١)y_١ + (٢)y_٢$	محدودیت مربوط به $x_١$:
٤	چون $x_٢$ از فرم کانونی Max پیروی کرده است، محدویت هم از فرم کانونی Min پیروی می‌کند.	$\geq$	$(٣)y_٢ + (١)y_٣$	محدودیت مربوط به $x_٢$:
٧	چون $x_٣$ آزاد در علامت است، محدودیت مساوی می‌شود.	=	$(١)y_١ + (١)y_٣$	محدودیت مربوط به $x_٣$:

حالا تنها کاری که موند، تعیین علامت متغیرهای تصمیم مسئله ثانویه هست. متغیرهای مسئله ثانویه متناظر با محدودیت‌های مسئله اولیه هستند، پس براساس نوع آن‌ها تعیین علامت خواهند شد.مانند تعیین نوع محدودیت در ثانویه.

فرم کانونی:

Min	Max
عددثابت $\geq$ محدودیت‌ها ≥ ٠ متغیرهای‌تصمیم	عددثابت $\leq$ محدودیت‌ها ≥ ٠ متغییرهای‌تصمیم

١.مسئله اولیه Max، محدودیت از فرم کانونی تبعیت کند(کوچکتر مساوی)← متغیر تصمیم متناظر با محدودیت از فرم کانونی Min پیروی میکند.(یعنی $y_i \geq ٠$ میشود.)

٢.مسئله اولیه Max، محدودیت از فرم کانونی تبعیت نکند(بزرگتر مساوی) ← متغیر تصمیم متناظر با محدودیت از فرم کانونی Min پیروی نمیکند.(یعنی $y_i \leq ٠$ میشود.)

٣.مسئله اولیهMax، محدودیت = باشد، متغیر تصمیم متناظر با محدودیت آزاد در علامت خواهد بود.

برای Min:

١.محدودیت از فرم کانونی تبعیت کند(بزرگتر مساوی) ← متغیر تصمیم متناظر با محدودیت از فرم کانونی Max پیروی میکند.(یعنی $y_i \geq ٠$ میشود.)

٢. محدودیت از فرم کانونی تبعیت نکند(کوچکتر مساوی) ← متغیر تصمیم متناظر با محدودیت از فرم کانونی Max پیروی نمیکند.(یعنی $y_i \leq ٠$ میشود.)

٣. محدودیت = باشد، متغیر تصمیم متناظر با محدودیت آزاد در علامت خواهد بود.

تعیین علامت متغیرهای تصمیم مسئله ثانویه رو باهم انجام میدیم:

$Max\ z = 6x_1 + 4x_2 + 7x_3$

$y_1:$	$x_1 + x_3 \leq 1$
$y_2:$	$2x_1 + 3x_2 \geq 4$
$y_3:$	$x_2 + x_3 = 1$

$x_1 \leq 0 , x_2 \geq 0, x_3$ آزاددرعلامت

چون محدودیت اول از فرم کانونی تبعیت می‌کنه، پس $y_1 \geq 0$ هست.

چون محدودیت دوم از فرم کانونی تبعیت نمی‌کنه، پس $y_2 \leq 0$ هست.

چون محدودیت سوم مساوی هست، پس y_3 آزاد در علامت هست.

مسئله ثانویه:

$Min\ y = y_1 + 4y_2 + y_3$
s.t:
$y_1 + 2y_2 \leq 6$
$3x_2 + x_3 \geq 4$
$x_1 + x_3 = 7$
$y_1 \geq 0 , y_2 \leq 0, y_3$ آزاد

(این بحث خیلی آسان هست، اما نیاز به توجه بیشتر شما داره، فرم کانونی رو به خاطر داشته باشید.)

❋اگه با روش سیمپلکس جواب بهینه مسئله ثانویه رو پیدا کنیم، قیمت سایه ای منابع مسئله اولیه بدست میاد.

قضایای ثانویه

قضیه ۱: ثانویه مسئله ثانویه، مسئله اولیه است. (از مسئله ثانویه طرح شده در جزوه، ثانویه بگیرید، همان اولیه خواهد شد)

قضیه ۲:به ازای هر جواب موجه دلخواه اولیه و ثانویه، همواره مقدار تابع هدف مسئله Min بزرگتر مساوی تابع هدف مسئله Max است.

اگه مسئله اولیه رو Max فرض کنیم، برای اینکه جواب بهینه رو پیدا کنیم از پایین به بالا میریم، وچون مسئله ثانویه آن Min هست از بالا به پایین میایم، پس همواره این رابطه برقراره:

$z \leq y$

قضیه ۳:اگر x_j^* جواب بهینه اولیه و y_j^* جواب بهینه ثانویه باشد، در این صورت مقدار دو تابع هدف در نقاط بهینه برابرند.

$z \leq z^* = Cx_j^* = by_j^* = y_\cdot^* \leq y$

قضیه ٤: قضیه لنگی مکمل:هر جواب اساسی در مسئله اولیه دارای یک جواب اساسی مکمل در مسئله ثانویه است که بین آن‌ها رابطه‌ی لنگی مکمل وجود دارد که در بهینگی به صورت زیر است:

اگر قیمت سایه‌ای منابع مسئله اولیه S_i^* وقیمت سایه ای منابع مسئله ثانویه t_j^* باشد. و x_j^* مقدار بهینه متغیر تصمیم مسئله اولیه و y_i^* مقدار بهینه متغیر تصمیم مسئله ثانویه باشد:داریم:

$x_j^* t_j^* = ٠ \,, y_i^* s_i^* = ٠$

*اگر یکی از متغیرها صفر باشد، دیگری بزرگتر از صفر است.

مثال: جواب بهینه مسئله ثانویه $y_1^* = ٣ \,, y_2^* = ١$ باشد، جواب بهینه تابع اولیه آن چقدر است؟

$$\begin{aligned}
&Max\ z = ٨x_1 + ٤x_2\\
&s.t:\\
&x_1 + x_2 \leq ١٠\\
&٥x_1 + x_2 \leq ١٥\\
&x_1, x_2 \geq ٠
\end{aligned}$$

ابتدا فرم استاندارد مسئله را می نویسیم:

$$\begin{aligned}
&Max\ z = ٨x_1 + ٤x_2\\
&s.t:\\
&x_1 + x_2 + s_1 = ١٠\\
&٥x_1 + x_2 + s_2 = ١٥\\
&x_1, x_2, s_1, s_2 \geq ٠
\end{aligned}$$

می دانیم که:

$$\begin{aligned}
&y_1^* s_1^* = ٠ \Rightarrow y_1^* = ١ \Rightarrow s_1^* = ٠\\
&y_2^* s_2^* = ٠ \Rightarrow y_2^* = ٣ \Rightarrow s_2^* = ٠
\end{aligned}$$

با جایگذاری s_1^* وs_2^* در محدودیت‌ها، دو معادله دو مجهولی بدست می آید که با حل آن جواب بهینه بدست می آید.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = ١٠ \\ ٥x_1 + x_2 = ١٥ \end{cases} \qquad X_1^* = \frac{٥}{٤} \,, x_2^* = \frac{٣٥}{٤}$$

*اگر یکی از مسائل دارای جواب بی کران بدون گوشه بهینه باشد، آنگاه دیگری ناحیه جواب موجه ندارد.

*اگر یکی از دو مسئله دارای جواب موجه باشد و دیگری فاقد ناحیه جواب موجه باشد، انگاه مسئله اولی جواب بی کران دارد.

*مقدار متغیر اساسی در جدول بهینه، قیمت سایه ای منبع متناظر با آن متغیر اساسی در مسئله دیگر است.

*اگر مسئله اولیه دارای ناحیه موجه محدود باشد، مسئله ثانویه دارای ناحیه موجه بی کران با گوشه بهینه است.

*اگر مسئله اولیه فاقد ناحیه موجه باشد، ثانویه آن یا دارای جواب بی کران بدون گوشه بهینه است یا فاقد ناحیه موجه است.

*اگر مسئله اولیه دارای حالت بهینه چندگانه باشد، ثانویه آن دارای حالت بهینه تبهگن می‌باشد و بالعکس.

روش سیمپلکس ثانویه:

این روش برای حل مسائلی هست که در جدول اول شرط بهینگی رو دارند(عناصر سطر صفر نامنفی) ولی شرط موجه بودن (منفی نبودن مقادیر سمت راست)رعایت نمیشه. به عبارت دیگه جدول مقدماتی بهینه غیرموجه هست.ما در روش سیمپلکس ثانویه از نقطه ی بهینه نشدنی به نقطه ی بهینه شدنی حرکت می‌کنیم.

روش سیمپلکس دوگان توسط لیمک ارائه شده است.کمی متفاوت هست.

اگه تابع هدف رو استاندارد کردید و مشاهده کردید هیچ عنصر منفی در سطر صفر وجود نداره این مراحل رو پیش برید:

۱.اگه محدودیت مساوی وجود داشت، به دو محدودیت بزرگتر مساوی و کوچکتر مساوی تبدیل کنید.

۲.طرفین محدودیت های بزرگتر مساوی رو به ۱– ضرب کنید(اینکار باعث تغییر بزرگتر مساوی به کوچکتر مساوی میشه)

۳.اگه متغیر منفی یا آزاد در علامت وجود داره به متغیر نامنفی تبدیل کرده(فصل قبلی گفتیم چطور) و مدل رو تبدیل می کنیم به مدل نامنفی

٤.مسئله رو به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم(متغیرکمکی)

۵.تشکیل جدول مقدماتی سیمپلکس

مثال:

$$\begin{aligned}&Max\ z = -x_۱ - ۳x_۲\\&s.t:\\&x_۱ + x_۲ \geq ۲\\&x_۱ + ۳x_۲ \leq ۳\\&x_۱, x_۲ \geq ۰\end{aligned}$$

چون محدودیت اول بزرگتر مساوی هست، دو طرفش رو به ۱– ضرب می‌کنیم.

$$\begin{aligned}&Max\ z = -x_۱ - ۳x_۲\\&s.t:\\&-x_۱ - x_۲ \leq -۲\\&x_۱ + ۳x_۲ \leq ۳\\&x_۱, x_۲ \geq ۰\end{aligned}$$

استاندارد می‌کنیم و جدول سیمپلکس اولیه رو رسم می کنیم:

$$\begin{aligned}&Max\ z + x_۱ + ۳x_۲ = ۰\\&s.t:\\&-x_۱ - x_۲ + s_۱ = ۲\\&x_۱ + ۳x_۲ + s_۲ = ۳\\&x_۱, x_۲, s_۱, s_۲ \geq ۰\end{aligned}$$

متغیر اساسی	Z	$X_۱$	$X_۲$	$S_۱$	$S_۲$	مقدار راست
Z	۱	۱	۳	۰	۰	۰
$S_۱$	۰	۱−	۱−	۱	۰	۲−
$S_۲$	۰	۱	۳	۰	۱	۳

در روش سیمپلکس ثانویه ابتدا متغیر خروجی رو انتخاب می‌کنیم:متغیر خرروجی رو براساس مقادیر سمت راست انتخاب می‌کنیم.

متغیر خروجی:منفی ترین مقدار در مقادیر سمت راست، متغیر خروجی هست و سطر مربوطه سطر لولا می گیم.

متغیر اساسی	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	مقدار راست
Z	۱	۱	۳	۰	۰	۰
S_1	۰	−۱	−۱	۱	۰	−۲
S_2	۰	۱	۳	۰	۱	۳

متغیر ورودی: عناصر سطر صفر رو بر عناصر منفی (صفر و مثبت قبول نیست) تقسیم می‌کنیم،قدر مطلق اونها رو می‌گیرم، هر کدام کمترین مقدار رو داشت، متغیر ورودی هست و ستون مربوطه ستون لولاست.

متغیر اساسی	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	مقدار راست
Z	۱	۱	۳	۰	۰	۰
S_1	۰	−۱	−۱	۱	۰	−۲
S_2	۰	۱	۳	۰	۱	۳

**ستون لولا در روش سیمپلکس ثانویه، منفی است.

حالا مانند روش سیمپلکس معمولی، متغیر ورودی به پایه وارد میشه و عنصر لولا باید یک بشه و ستون لولا در بقیه عناصر صفر.

متغیر اساسی		Z	X_1	X_2	S_1	S_2	مقدار راست
$-x_1 + z \rightarrow$	Z	۱	۰	۲	۱	۰	−۲
$-s_1 \rightarrow$	x_1	۰	۱	۱	-۱	۰	۲
$-x_1 + s_2 \rightarrow$	S_2	۰	۰	۲	۱	۱	۱

شرط بهینگی برقرار هست و چون توقسمت دوم منفی نداره شدنی هست. بنابراین مقدار بهینه:

$x_1^* = ۲ , x_2^* = ۰ , z^* = -۲$

*اگر در روش سیمپلکس ثانویه، خروجی معین شود ولی نتوان ورودی انتخاب کرد، در این صورت مسئله جواب موجه ندارد.

*در روش سیمپلکس ثانویه عنصر لولا همواره منفی است.

۱. هر مسئله اولیه دارای یک مسئله ثانویه است.
۲. سمت چپ هر محدودیت ثانویه به معانی ارزش واقعی منابع به کار رفته در یک واحد متغیر تصمیم است.
۳. محدودیتی که تاثیری در ایجاد منطقه موجه نداشته باشد: محدودیت زائد
٤. تعداد محدودیت های مسئله ثانویه=تعداد متغیرهای تصمیم مسئله اولیه
۵. تعداد متغیرهای مسئله ثانویه=تعداد محدودیت مسئله اولیه
٦. قیمت سایه ای حداکثر قیمتی است که می توانیم بابت یک واحد منبع پرداخت کنیم، اگر قیمت منابع در بازارکمتر باشد، خرید به صرفه است و اگر بیشتر باشد به صرفه نیست.
۷. مقدار بهینه تابع هدف اولیه برابر با مقدار بهینه تابع هدف ثانویه است.

تمام

ما به شما اعتماد داریم

از آنجایی که ما به شما اعتماد داریم ابتدا جزوه را در اختیار شما قرار داده و سپس هزینه آن را که ناچیز است از شما دریافت می‌کنیم، در صورتی که جزوه مورد استفاده شما قرار گرفت و توانایی پرداخت داشتید مبلغ ۳۰۰۰۰ ریال را به شماره حساب ۳۳۲٦۱۰۹۷٦٤ نزد بانک ملت بنام حبیب جعفرپور واریز نمایید.و یا به شماره کارت ٦۱۰٤۳۳۷۰٤۱۱۹۲۲۹۳ به نام حبیب جعفرپور واریز نمایید.

پیروز و موفق باشید.

حبیب جعفرپور