HW01 _ Artificial Intelijence

Saeed Rezvani

Student ID : 98106542

(1

۱. (۱۸ نمره) درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل یا مثال نقض نشان دهید.

(آ) محیطی [۱] وجود دارد که هر عاملی [۲] در آن رفتار عقلانی [۳] دارد.

(ب) امکان عقلانی بودن یک عامل در دو محیط متفاوت وجود دارد.

(ج) عاملی که تنها اطلاعات جزئی [۴] درباره‌ی استیت دریافت می‌کند، نمی‌تواند کاملا عقلانی باشد.

الف) ✓ ، فرض کنید محیطی داریم که شامل تنها یک حالت که در آن هر اکشنی عقلانی تلقی می‌شود.

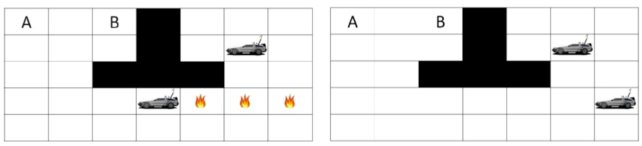
ب) ✓ ، بله ، فرض کنید دو محیطی داریم که با هیچ عملکرد بهینه‌ای قابل رسیدن به هدف نباشند.

در این صورت هر عملکردی از جانب عامل در هر دو محیط عقلانی به نظر می‌آید.

ج) X ، با توجه به اینکه کاملاً عقلانی بودن به معنای قابلیت تصمیم‌گیری بهینه متناسب با اطلاعاتی می‌باشد که دریافت می‌کند ، امکان کاملاً عقلانی بودن agent وجود دارد.

(2

۲. (۳۰ نمره) به دلیل تبحر شما در هوش مصنوعی، کنترل دو ماشین سفر در زمان به شما داده شده است. این دو ماشین که در یک سیاره‌ی مسطح با $N \times M$ کاشی گیر کرده‌اند، برای فرار از آن نیاز دارند به نقاط مشخص شده‌ای که در شکل پایین مشخص شده است برسند. در هر حرکت، هر دو ماشین حرکت می‌کنند. هر ماشین می‌تواند جابجا نشود و یا به یکی از همسایه‌های آزاد خود برود. ماشین‌ها نمی‌توانند هر دو وارد یک خانه شوند. ماشین‌های ما برای سفر در زمان نیاز دارند به سرعت ۸۸ مایل بر ساعت برسند و به دلیل اصطکاک بالای این سیاره، یک دنباله‌ای از آتش از خود به جا می‌گذارند. ماشین‌ها نمی‌توانند وارد خانه‌ای شوند که ماشین دیگر یا خودشان قبلا در آن جا حضور داشتند؛ زیرا باعث منفجر شدن ماشین می‌شود.



** دقت کنید جواب‌های شما باید برای حالت کلی نیز برقرار باشد و تنها خاص شکل بالا نباشد.

(آ) کران بالای مناسبی برای اندازه فضای مسئله برحسب N و M بدست بیاورید.

(ب) کران بالای مناسبی برای ضریب انشعاب [۵] بدست بیاورید.

(ج) یک تابع اکتشافی [۶] قابل‌قبول [۷] غیربدیهی [۸] برای مسئله ارائه دهید.

الف)

$$\underbrace{\binom{m\times n}{2}\times 2!}_{\text{مکان ماشین‌ها}} \times \underbrace{\binom{m\times n}{2}}_{A \text{ و } B}$$

A و B مکان قرار گرفتن دارند پس نیازی به !2 ندارند! اما مکان ماشین‌ها می‌توانند تغییر کنند.

ب) ضریب انشعاب ممکن برابر است با $\boxed{5\times5=25}$ ← branching factor

ج) یک تابع اکتشافی قابل قبول manhattan distance می‌باشد. زیرا هر بلاک (Block) را باید دور آتش

و تقریباً $h^*(x)$ را حقیقی تخمین بیشتری دارد.

۳. (۲۰ نمره) به سوالات زیر پاسخ کوتاه دهید. (با استدلال)

(آ) فرض کنید تابع f یک تابع محدب باشد که بر روی $\mathbb{R}$ تعریف شده است. اگر تابع اکتشافی $h(x)$ برای مسئله‌ای با تابع هزینه‌ی $h^*(x)$ قابل‌قبول باشد، اثبات کنید تابع اکتشافی $f'(h(x))$ برای مسئله‌ای با تابع هزینه‌ی $f'(h^*(x))$ قابل‌قبول است.

(ب) در صورت داشتن تابع‌های اکتشافی قابل‌قبول $h_1(n), h_2(n), \dots, h_m(n)$ که هیچکدام بقیه را غالب نکند، تابع اکتشافی جدیدی ارائه دهید که هم قابل‌قبول باشد و هم توابع اکتشافی $h_1(n), h_2(n), \dots, h_m(n)$ را غالب کند.

3

آ) می‌دانیم توابع محدب دارای مشتق اول صعودی هستند $\Leftarrow$ (*)

$\Leftarrow$ چون $h(x)$، admissible می‌باشد و برای $h^*(x)$ قابل قبول است $\Leftarrow$ $h^*(x) \geq h(x)$ (**)

$\xrightarrow{(*)\,/\,(**)}$ $f'(h^*(x)) \geq f'(h(x)) \Rightarrow$ $\boxed{f'(h(x)) \text{ یک تابع اکتشافی قابل قبول برای } f'(h^*(x)) \text{ می‌باشد.}}$

ب) یک تابع می‌سازیم $\boxed{h_t(n) = Max(h_1(n) \dots h_m(n))}$ باشد که در هر نقطه ماکسیمم بین تمامی این توابع اکتشافی می‌گیرد و در کل برتری آنها غالب می‌شود.

۴. (۲۵ نمره) می‌خواهیم مسئله‌ی SSP را با استفاده از الگوریتم ژنتیک حل کنیم. برای این کار مکانیزم crossover و جهش مربوط به الگوریتم ژنتیک را برای مسئله‌ی گفته شده ارائه دهید.

mutation

SSP: subset sum problem

cross-over: برای این بخش مکانیزم ارائه شده در بخش عملی تمرین سری ۴ را ارائه می‌دهم. برای این کار ۴ کروموزوم دلخواه از کل جمعیت را به صورت رندوم انتخاب می‌کنم. سپس، ۲ کروموزوم با بیش‌ترین fitness score را برای فرزندآوری انتخاب می‌کنم. حال یک عدد رندوم به صورت uniform بین 0 تا 1 انتخاب می‌کنم و اگر این احتمال از یک threshold کم‌تر شد، دو بچه (children) همان کروموزوم های انتخابی بدون تغییر هستند. اما اگر عدد رندوم ما از threshold بیش‌تر بود شروع به ادغام کروموزوم های انتخابی می‌کنم. یک عدد رندوم متناسب با سایز هر کروموزوم انتخاب می‌کنم و فرزندها با فرمول زیر شکل می‌گیرند:

random index

child 1 ≜ (parent 1 [:random index], parent 2 [random index :])

child 2 ≜ (parent 2 [:random index], parent 1 [random index :])

جهش یا mutation: پس از ساخته شدن فرزندان در مرحله‌ی قبل، نوبت به mutation می‌رسد. برای mutation هم ابتدا یک عدد رندوم بین 0-1 به صورت uniform انتخاب می‌شود و اگر این عدد پایین‌تر از threshold بود، جهش صورت نمی‌گیرد. اما اگر بیش‌تر بود، یک عدد رندوم متناسب با طول هر کروموزوم تولید می‌شود و ژن (gene) در محل آن random index، تغییر می‌کند.

random index

(در مسئله‌ی ssp، ژن آن بخش flip می‌شود.)

۵. (۳۰ نمره) جمعیتی متشکل از پنج کروموزم را با مقادیر فیتنس (قبل از امتیازبندی)

$$f_1 = 5, f_2 = 7, f_3 = 8, f_4 = 10, f_5 = 15$$

در نظر بگیرید. در هر یک از حالات مقابل احتمال انتخاب کروموزم ۴ در یک مرحله‌ی انتخاب را محاسبه کنید.

(آ) انتخاب چرخ رولت [9]

(ب) انتخاب چرخ رولت پس از مرتب کردن امتیازها به صورت خطی(بالاترین امتیاز برابر با ۱۰ و کمترین امتیاز مقدار ۱ را در امتیازبندی جدید به خود می‌گیرند)

(ج) انتخاب تورنمنت [10] با سایز تورنمنت برابر با ۲، و احتمال ۰/۷۵ برای انتخاب بهترین کروموزم در هر تورنمنت.

الف) در چرخ رولت، احتمال هر بخش از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$P_i = \frac{N_i}{\sum_{j=1}^{K} N_j} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} P_1 = 5/45 = 1/9 \\ P_2 = 7/45 \\ P_3 = 8/45 \\ P_4 = 10/45 = 2/9 \\ P_5 = \frac{15}{45} = \frac{1}{3} \end{cases}}$$

ب) $\Rightarrow$ liner map $\to$ $ax+b$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} 15a+b = 10 \\ 5a+b = 1 \end{cases} \Rightarrow 10a = 9 \Rightarrow a = 9/10$

$\Rightarrow b = -3.5$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{f} = \frac{9}{10} f - 3.5} \Rightarrow \hat{f}_1 = 1, \hat{f}_2 = 2.8, \hat{f}_3 = 3.7, \hat{f}_4 = 5.5, \hat{f}_5 = 10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_1 = 1/23 \\ P_2 = 2.8/23 \\ P_3 = 3.7/23 \\ P_4 = \frac{5.5}{23} \\ P_5 = \frac{10}{23} \end{cases}$$

ج)

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} P_1 = \frac{4 \times (\frac{3}{4})(\frac{1}{4})}{10} = 3/40 = \frac{12}{160} \\ P_2 = \frac{3/4 + 3(3/16)}{10} = \frac{21}{160} \\ P_3 = \frac{2(3/4) + 2(3/16)}{10} = \frac{30}{160} \\ P_4 = \frac{3(3/4) + 3/16}{10} = \frac{39}{160} \\ P_5 = \frac{4(3/4)}{10} = \frac{3}{10} = \frac{12}{40} = \frac{48}{160} \end{cases}}$$

6

۶. (۲۰ نمره) فرض کنید تابع f یک تابع محدب[11] مشتق‌پذیر با دامنه‌ی $\mathbb{R}_+$ باشد.

(آ) اثبات کنید تابع

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt, \quad x\in\mathbb{R}_{++}$$

محدب است. ($\mathbb{R}_{++}$ به معنای اعداد حقیقی مثبت و $\mathbb{R}_+$ به معنای اعداد حقیقی نامنفی است.)

(ب) نامساوی زیر را اثبات کنید

$$\int_a^b f(t)dt \le \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)) \quad (a,b)\in R_+^2$$

الف)

f is convex and differentiable, $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ $\quad x\in R^{++}$ is convex ?

$$\Rightarrow y=\frac{t}{x} \Rightarrow \frac{dt}{x}=dy \Rightarrow F(x)=\frac{1}{x}\int_0^1 x f(yx)dy \Rightarrow F(x)=\int_0^1 f(yx)dy$$

for any convex function

$$f(\gamma\alpha+(1-\gamma)\beta)\leq\gamma f(\alpha)+(1-\gamma)f(\beta)$$

$$F(\gamma\alpha+(1-\gamma)\beta)=\int_0^1 f(y[\gamma\alpha+(1-\gamma)\beta])dy$$

① convexity of f

② linearity of integral

$$\boxed{\underbrace{\int_0^1 f(y[\gamma\alpha+(1-\gamma)\beta])dy}_{F(\gamma\alpha+(1-\gamma)\beta)}\leq\underbrace{\gamma\int_0^1 f(y\alpha)dy}_{\gamma F(\alpha)}+\underbrace{(1-\gamma)\int_0^1 f(y\beta)dy}_{(1-\gamma)F(\beta)}}$$

convexity of $F(x)$ is proved :)

ب)

$$a\leq t\leq b \Rightarrow t=\lambda b+(1-\lambda)a \qquad t\in[0\ 1]$$

طرف اول

$$\Rightarrow dt=[b-a]d\lambda$$

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt}=\int_0^1 f(\lambda b+(1-\lambda)a)[b-a]d\lambda=(b-a)\int_0^1 f(\lambda b+(1-\lambda)a)d\lambda$$

$$\xrightarrow{\text{convexity}}\leq(b-a)\int_0^1 \lambda f(b)+(1-\lambda)f(a)\,d\lambda = b-a\left[\int_0^1 \lambda(f(b)-f(a))d\lambda+\int_0^1 f(a)d\lambda\right]$$

$$\leq b-a\left[\frac{1}{2}(f(b)-f(a))+f(a)\right]=\boxed{\frac{1}{2}(b-a)[f(b)+f(a)]}$$

طرف دوم