HW03_ Artificial Intelijence

Saeed Rezavi

Student ID : 98106542

---

① (۲۰ نمره) فرض کنید یک شبکه بیزی با n راس داریم؛ ثابت کنید بیش‌ترین تعداد یالی که این شبکه می‌تواند داشته‌باشد، $\frac{n(n-1)}{2}$ می‌باشد.

یک شبکه گرافی، شبکه‌ی بیزی می‌باشد اگر بین هر دو node، حداکثر یک یال وجود داشته باشد ① و دور جهت‌دار ② نیز نداشته باشیم. اگر این شبکه را با این فرض بسازیم که بین دو node، تنها درصورتی یال وجود دارد که تنها

برقراری شرط ①

⇐ پس برای دو node دلخواه، یک یال در نظر می‌گیریم:

$$\boxed{\max[\text{edge}] = \binom{N}{2} = \frac{n(n-1)}{2}}$$

همین برای اثبات اینکه شبکه‌ی بیزی ما تشکیل گراف جهت‌دار نمی‌دهد، می‌توان گفت که چون شرط کردیم که تنها اگر بخواهیم دور جهت‌دار داشته باشیم، باید یالی داشته باشیم که شرط تنها را بشکند که این خلاف فرض اولیه می‌باشد.

برقراری شرط ②

② ۲. (۱۰ نمره) شبکه بیزی با ۴ متغیر X, Y, Z, W مثال بزنید که در حالت کلی فقط مجموعه‌ی استقلال‌های $X \perp\!\!\!\perp Y|Z$ و $W \perp\!\!\!\perp Y|Z$ در آن برقرار باشد.

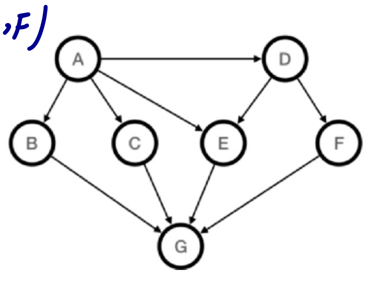
$$\begin{tikzcd} & & W \\ X \arrow[r] & Z \arrow[r] \arrow[ur] & Y \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow x \perp\!\!\!\perp y \mid z$ ①

$w \perp\!\!\!\perp y \mid z$ ②

⇐ می‌توان با D-separation نشان دهیم که مجموعه‌ی استقلال‌ها فقط ۲ مورد بالا را شامل می‌شوند.

③ چه فاکتورگیری از توزیع توام $P(A, B, C, D, E, F, G, H)$ را نشان می‌دهد؟



$P(A,B,C,D,E,F,G,H)$

$= P(A).P(C|A).P(B|A)P(E|A)P(D|A).P(E|D,A).P(F|D).P(G|B,C,E,F)$

$$P(B|G,E) \begin{cases} \to \text{Query}: B \\ \to \text{observed}: G, E \\ \to \text{Hidden}: A, Z, D, F \end{cases}$$

الف) ابتدا هدف آن است که با ترتیب joint متغیرهای B, G, E برسیم و پس با normilize کردن آن روی B به $P(B|G,E)$ برسیم.

ترتیب: A, Z, D, F

$$\boxed{P(A), P(B|A), P(Z|A,B), P(D|A,Z), P(E|A,D), P(F|E,A), P(G|B,Z)}$$

الف)

$$\xrightarrow[\text{Join}]{A} \left(P(A), P(B|A), P(Z|A,B), P(D|A,Z), P(E|A,D), P(F|E,A)\right)$$

$$\xrightarrow{\text{sum}} \sum_{A} P(A,B,Z,D,E,F) = P(B,Z,D,E,F) \quad \boxed{P(B,Z,D,E,F), \; P(G|B,Z)}$$

$$\xrightarrow[\text{Join}]{Z} P(B,Z,D,E,F,G) \xrightarrow[\text{sum}]{Z} \sum_{Z} P(B,Z,D,E,F,G) = \boxed{P(B,D,E,F,G)}$$

$$\xrightarrow[\text{sum}]{D} P(B,E,F,G) \xrightarrow[\text{sum}]{F} P(B,E,G) \xrightarrow[\text{Normilize}]{B} P(B|E,G)$$

ب)

ترتیب: F, D, Z, A

$$\boxed{P(A), P(B|A), P(Z|A,B), P(D|A,Z), P(E|A,D), P(F|E,A), P(G|B,Z)}$$

$$\xrightarrow[\text{sum}]{F} \sum_{F} P(F|E,A) = 1 \Rightarrow \boxed{P(A), P(B|A), P(Z|A,B), P(D|A,Z), P(E|A,D), P(G|B,Z)}$$

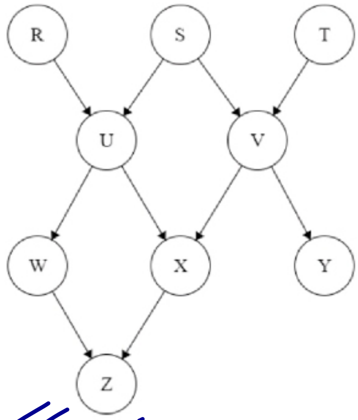
$$\xrightarrow[\text{Join}]{D} P(E,D|A,Z) \xrightarrow[\text{sum}]{D} \sum_{D} P(E,D|A,Z) = P(E|A,Z) \to \boxed{P(A), P(B|A), P(Z|A,B), P(E|A,Z), P(G|B,Z)}$$

$$\xrightarrow[\text{Join}]{Z} P(Z,G,E|A,B) \xrightarrow[\text{sum}]{Z} \sum_{Z} P(E,Z,G|A,B) = P(E,G|A,B) \to \boxed{P(A), P(B|A), P(E,G|A,B)}$$

$$\xrightarrow[\text{Join}]{A} P(A,B,E,G) \xrightarrow[\text{sum}]{A} \sum_{A} P(A,B,E,G) = P(B,E,G) \xrightarrow[\text{normilize}]{B} P(B|E,G)$$

ج) ترتیب دوم به مراتب بهتر است زیرا از join کردن متغیرها، table های با سایز کوچکتر ساخته می‌شوند. و منطقاً هرچه سایز table کوچکتر باشد هم سرعت بیشتر و هم حجم کمتری اشغال می‌کند. در حالیکه در حالت اول یک table بسیار بزرگ از متغیرها ساخته می‌شود که مطلوب ما نیست.

۵. (۲۵ نمره) با توجه به شکل زیر و با استفاده از D-Separation، درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید. در صورت نادرست بودن، یک مسیر معتبر بین دو متغیر تصادفی بنویسید.



(آ) $R \perp\!\!\!\perp Z|U$

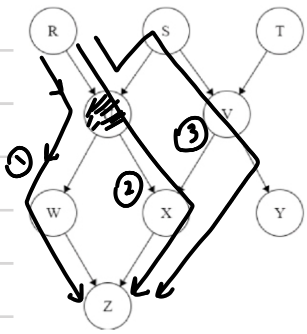
(ب) $U \perp\!\!\!\perp V|S, X$

(ج) $W \perp\!\!\!\perp Y|S$

(د) $W \perp\!\!\!\perp Y|U, V$

(ه) $W \perp\!\!\!\perp T|U, X, Z$

آ) ۳ مسیر متمایز از R تا Z وجود دارد. باید برای هر مسیر استقلال را چک کنیم.



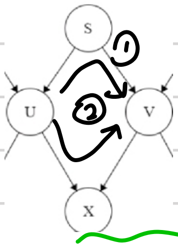
مسیر 1 → R → U → W → inactive

مسیر 2 → R → U → X → inactive

مسیر 3 → active

⇒ $\boxed{R \perp\!\!\!\perp Z | U \quad \text{False}}$

ب) دو مسیر از U به V وجود دارد.

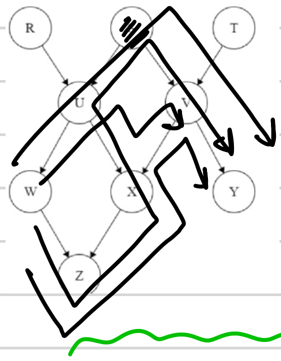


مسیر 2 → U → X ← V → active

⇒ $\boxed{U \perp\!\!\!\perp V | S, X \quad \text{False}}$

ج) ۴ مسیر متفاوت از W به Y وجود دارد.

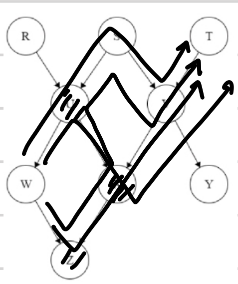
اگر یک نود تمام ۴ مسیر inactive می‌باشد



⇒ $\boxed{W \perp\!\!\!\perp Y | S \quad \text{True}}$

د) با observe کردن U و V چیزی تغییر نکرده و بازهم داریم: $\boxed{W \perp\!\!\!\perp Y | S \quad \text{True}}$

ه) ۴ مسیر مختلف از W به T وجود دارد.

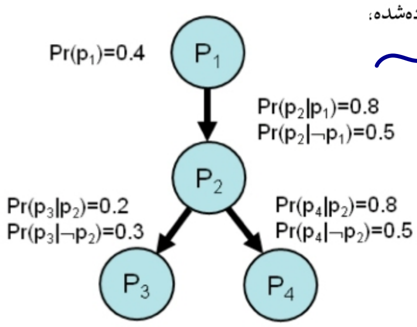


هر ۴ مسیر inactive می‌باشند ⇐ $\boxed{W \perp\!\!\!\perp T | U, X, Z \quad \text{true}}$

محاسبه احتمال شرطی $Pr(P1|P2, \neg P3)$ در شبکه بیز داده‌شده:

true ← کوچکتر از P

false ← بزرگتر از P



r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}
0.2551	0.5060	0.6991	0.8909	0.9593	0.5472	0.1386	0.1493	0.2575	0.8407
r_{11}	r_{12}	r_{13}	r_{14}	r_{15}	r_{16}	r_{17}	r_{18}	r_{19}	r_{20}
0.0827	0.9060	0.7612	0.1423	0.5888	0.6330	0.5030	0.8003	0.0155	0.6917

① rejection sampling method:

① $r_1 \to P_1(true) \to r_2 (P_2: true) \to r_3 (P_3: false) \to r_4 (P_4: false)$

② $r_5 \to P_1(false) \to r_6 (P_2: false)$ ✗.

③ $r_7 \to P_1(true) \to r_8 (P_2: true) \to r_9 (P_3: false) \to r_{10} (P_4: false)$

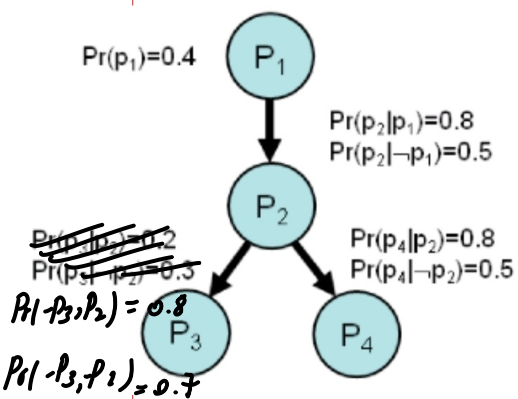
④ $r_{11} \to P_1(true) \to r_{12} (P_2: false)$ ✗.

⑤ $r_{13}: P_1(false) \to r_{14} (P_2: true) \to r_{15} (P_3: false) \to r_{16} (P_4: true)$

⑥ $r_{17}: P_1(false) \to r_{18} (P_2: false)$ ✗.

$$\to \boxed{P_r(P_1 | P_2, -P_3) = 2/3 = 66\%}$$

② Likelihood sampling:



① $r_1 (P_1: true) \to r_2 (P_4: ..)$

$w_1 = 0.8, w_2 = 0.8 \to w_t = 0.64$

② $r_3 (P_1: false) \to r_4 (\cdots)$

$w_1 = 0.5$

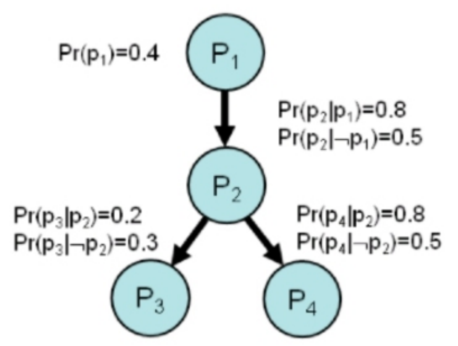
$w_2 = 0.8 \to w_t = 0.4$

③ $w_t = 0.4$, ④ $w_t = 0.64$, ⑤ $w_t = 0.64$ ⑥ $w_t = 0.64$, ⑦ $w_t = 0.4$

⑧ $w_t = 0.4$ ⑨ $w_t = 0.4$ ⑩ $w_t = 0.64$

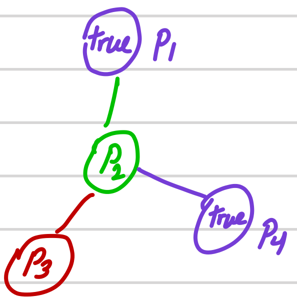
$$\boxed{P_r(P_1 | P_2, -P_3) = \frac{\sum w_{desire}}{\sum w_{total}} = \frac{5 \times 0.64}{5 \times 0.64 + 5 \times 0.4} = \frac{3.2}{3.2+2} = \frac{3.2}{5.2} = \frac{16}{26} = \frac{8}{13}}$$

③ gibbs sampling



برای gibbs sampling، observed variable ها را ثابت می‌کنیم. همین یک random state انتخاب می‌کنیم و شبکه بیز را initialize می‌کنیم. پس تمام node ها غیر از observed variable ها با استفاده از احتمال شرطی نسبت به تمام متغیرها، مقدارگذاری می‌کنیم و...

→ initial state



← حال 2 احتمال شرطی مختلف نیاز داریم که آنها را حساب می‌کنیم تا کارمان راحت‌تر شود.

$$Pr(P_1 \mid P_2{:}true, P_3{:}false, P_4) = \frac{Pr(P_1, P_2{:}true, P_3{:}false, P_4)}{\sum_{P_1} Pr(P_1, P_2{:}true, P_3{:}false, P_4)} =$$

استفاده از تعریف شبکه بیز →

ساده شد!

$$\boxed{Pr(P_1 \mid P_2=1, P_3=-1, P_4) = \frac{Pr(P_1)\cdot Pr(P_2 \mid P_1)\cdot \cancel{Pr(P_4 \mid P_2)}\cdot \cancel{Pr(P_3 \mid P_2)}}{\cancel{Pr(P_3 \mid P_2)}\, \cancel{Pr(P_4 \mid P_2)} \sum Pr(P_1)\, Pr(P_2 \mid P_1)}}$$

به طریق مشابه →

$$\boxed{Pr(P_4 \mid P_1, P_2=1, P_3=-1) = \frac{\cancel{Pr(P_1)}\cdot \cancel{Pr(P_2=1 \mid P_1)}\cdot \cancel{Pr(P_3=-1 \mid P_2=1)}\cdot Pr(P_4 \mid P_2=+1)}{\cancel{Pr(P_1)}\, \cancel{Pr(P_2=1 \mid P_1)}\, \cancel{Pr(P_3=-1 \mid P_2=1)}} =}$$

$Pr(P_4 \mid P_2=+1)$ ← ساده شد :)

summarize →

$$\boxed{Pr(P_1 \mid \cdots) = \frac{Pr(P_1)\, Pr(P_2 \mid P_1)}{Pr(P_1=1)\, Pr(P_2 \mid P_1=1) + Pr(P_1=0)\, Pr(P_2 \mid P_1=0)}}$$

$$\boxed{Pr(P_4 \mid \ldots) = Pr(P_4 \mid P_2)}$$

با استفاده از دو فرمول بدست آمده در صفحه ی قبل به محاسبه ی gibbs sampling می پردازیم:

(دقت شود در random initialization ، P_1 , P_4 ، true شده‌اند.

← برای راحتی کار احتمال‌های مورد نیاز را از قبل حساب می‌کنیم ←

$$P_r[P_1 = true \mid P_2 = true, P_3 : false, P_4 = true] = 0.516$$
$$P_r[P_1 = true \mid P_2 = true, P_3 : false, P_4 = False] = 0.516$$
$$P_r[P_1 = false \mid P_2 = true, P_3 : false, P_4 = true] = 0.483$$
$$P_r[P_1 = false \mid P_2 = true, P_3 : false, P_4 = false] = 0.483$$

$$P_r[P_4 = true \mid P_2 = true, P_3 : false, P_1 = true] = 0.8$$
$$P_r[P_4 = true \mid P_2 = true, P_3 : false, P_1 = False] = 0.8$$
$$P_r[P_4 = false \mid P_2 = true, P_3 : false, P_1 = true] = 0.2$$
$$P_r[P_4 = false \mid P_2 = true, P_3 : false, P_1 = false] = 0.2$$

→ ① r_1 (P_1 : true) →
② r_3 (P_1 : false) →
③ r_5 (P_1 : false) →
→ ④ r_7 (P_1 : true) → ..
→ ⑤ r_9 (P_1 : true) → ...
→ ⑥ r_{11} (P_1 : true) → ..
⑦ r_{13} (P_1 : false) → ...
⑧ r_{15} (P_1 : false)
→ ⑨ r_{17} : (P_1 : true)
→ ⑩ r_{19} (P_1 : true)

$$\boxed{P(P_1 \mid P_2, \neg P_3) = \frac{6}{10} = 60\%}$$