مقدمه ای بر یادگیری ماشین تمرین توری اول



باسمه تعالى

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

مقدمه ای بر یادگیری ماشین - گروه دکتر امینی پاییز ۱۴۰۱

تمرین تئوری اول

- 1. مهلت تحويل اين تمرين مطابق تاريخ اعلام شده در سامانه CW مي باشد.
 - ۲. ۱۴ روز تاخیر مجاز برای تحویل تمارین در اختیار شما خواهد بود.
- ۳. سقف تاخیر برای تحویل هر تمرین ۷ روز خواهد بود و پس از آن پاسخنامه تمرین منتشر خواهد شد.
 - ۴. ابهامات و مشكلات خود را مي توانيد با آقاي وزيري مطرح كنيد.

@Kiawesome

۱ احتمال گاوسی حاشیه ای و شرطی

۱. فرض کنید y یک بردار با توزیع گاوسی باشد، به عبارتی دیگر:

$$\mathbf{y} \sim \mathcal{N}(\mu, \, \mathbf{\Sigma})$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y_1} \\ \mathbf{y_2} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$$

نشان دهید:

(الف)

$$p(\mathbf{y_2}) = \mathcal{N}(\mu_2, \Sigma_{22})$$

(ب)

$$p(\mathbf{y_1}|\mathbf{y_2}) = \mathcal{N}(\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{y_2} - \mu_2), \ \boldsymbol{\Sigma_{11}\Sigma_{12}\Sigma_{22}}^{-1}\boldsymbol{\Sigma_{21}})$$

۲. فرض کنید

 $z \in \mathbb{R}^D, y \in \mathbb{R}^K, W \in \mathbb{R}^{K \times D}, b \in \mathbb{R}^K$

اگر داشته باشیم

$$p(z) = \mathcal{N}(\mu_z, \Sigma_z)$$
$$p(y|z) = \mathcal{N}(Wz + b, \Sigma_y)$$

نشان دهید:

(الف)

$$p(z,y) = \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$$

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_z \\ W \mu_y + b \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_z & \Sigma_z W^T \\ W \Sigma_z & \Sigma_y + W \Sigma_z W^T \end{bmatrix}$$

مقدمه ای بر یادگیری ماشین تمرین تئوری اول

(ب)

$$\begin{split} p(z|y) &= \mathcal{N}(\mu_{z|y}, \, \Sigma_{z|y}) \\ \mu_{z|y} &= \Sigma_{z|y}[W^T \Sigma_y^{-1}(y-b) + \Sigma^{-1}\mu_z] \\ \Sigma_{z|y}^{-1} &= \Sigma_z^{-1} + W^T \Sigma_y^{-1} W \end{split}$$

۲ محاسبه احتمال

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی تواما نرمال با پارامتر های زیر باشند:

$$\rho = -\frac{1}{2}, \sigma_Y^2 = 4, \mu_Y = -1, \sigma_X^2 = 1, \mu_X = 0$$

- را بیابید P(X+Y>0) .۱
- ۲. اگر بدانیم X+Yو X+2Yمستقل هستند، ثابت aرا بیابید.
 - را بدست آورید. P(X+Y>0|2X-Y=0). ۳.

۳ مقادیر ویژه

فرض کنید A یک ماتریس 2 imes 2 باشد که λ_1 و و λ_2 مقادیر ویژه آن هستند. اگر و $\lambda_1
eq \lambda_1$ ، ثابت کنید:

$$e^A = \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2} - \lambda_2 e^{\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2} I + \frac{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2} A$$

MAP *

 $\mu \sim Uni(0,1)$ کنید X و M دو متغیر تصادفی مستقل با میانگین M و واریانس M باشند، که M

- $(f_{\mu,X,Y}(t,x,y))$.۱ توزیع مشترک X,Y,μ را بیابید.
 - بیابید. تخمین MAP متغیر تصادفی μ را بیابید.

۵ متغیر تصادفی کمکی

رابطه زیر را اثبات کنید.

$$Var(X) = E(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y))$$