HW01_Linear Algebra

Saeed Razavi

Student ID: 98106542

① solve equations

a)
$$x_1+2x_2+x_3+x_4=7$$
$$x_1+2x_2+2x_3-x_4=12$$
$$2x_1+4x_2+6x_4=4$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1&2&1&1\\1&2&2&-1\\2&4&0&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\12\\4\end{bmatrix} \Rightarrow \hat{A}=\begin{bmatrix}1&2&1&1&7\\1&2&2&-1&12\\2&4&0&6&4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{31}]{E_{21}} \begin{bmatrix}1&2&1&1&7\\0&0&1&-2&5\\0&0&-2&4&-10\end{bmatrix} \xrightarrow{E_{32}} \begin{bmatrix}1&2&1&1&7\\0&0&1&-2&5\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}0=0\\x_3-2x_4=5\\x_1+2x_2+x_3+x_4=7\end{cases}$$

دو متغیر به صورت دلخواه تعیین می شوند و بقیه بر اساس آن ها (بی نهایت جواب)

$x_3=t_1$, $x_1=t_2$

$x_4=\dfrac{t_1-5}{2}$, $x_2=\dfrac{7-t_1-\frac{(t_1-5)}{2}-t_2}{2}$

و t_1 , t_2 کل فضای R را پوشش می دهند

b)
$$x+y+z=3$$
$$x+2y+3z=0$$
$$x+3y+4z=-2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&4\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix}3\\0\\2\end{bmatrix}}_{b}$$

$$\Rightarrow \hat{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&3\\1&2&3&0\\1&3&4&-2\end{bmatrix} \quad \begin{cases}\text{pivot}=1\\\text{multiplier}=1\end{cases} \Rightarrow E_{21}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, E_{31}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{21}\times\hat{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&3\\0&1&2&-3\\1&3&4&-2\end{bmatrix} \Rightarrow E_{31}\times(E_{21}\times\hat{A})=\begin{bmatrix}1&1&1&3\\0&1&2&-3\\0&2&3&-5\end{bmatrix}$$

$$E_{31} \times (E_{21} \times \hat{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{pivot} = 1 \\ \text{multiplier} = 2 \end{cases} \Rightarrow E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow E_{32} \times [E_{31} \times (E_{21} \times \hat{A})] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -z = +1 \Rightarrow z = -1 \\ y + 2z = -3 \Rightarrow y = -1 \\ x + y + z = 3 \Rightarrow x = +5 \end{cases}$$

ج)

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 12$$
$$2x_1 + 4x_2 + 6x_4 = 4$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{Pivot} = 1 \\ \text{multiplier} = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[E_{31}]{E_{21}} \hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{32}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{cases} 0 = 8\,! \\ \vdots \end{cases}$$

مسئله هیچ جوابی ندارد .

② invers Matrix

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-1&0\\1&-2&2\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{guass-Jordan}]{\text{using}} \hat{A}=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\2&-1&0&0&1&0\\1&-2&2&0&0&1\end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases}\text{pivot}=1\\ \text{multiplier}=2\\ \text{"}\quad\text{"}=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1&-1&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&-1&1&-1&0&1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\text{pivot}=1\\ \text{multiplier}=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&-1&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&-1&-3&1&1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\text{Pivot}=-1\\ \text{multiplier}\\ \text{"}\end{cases}$$

reverse

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1&-1&0&-2&1&1\\0&1&0&4&-1&-2\\0&0&-1&-3&1&1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\text{pivot}=1\\ \text{multiplier}=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&0&0&2&0&-1\\0&1&0&4&-1&-2\\0&0&-1&-3&1&1\end{bmatrix}$$

reverse

$$\xrightarrow{\text{Normilize}} \begin{bmatrix}1&0&0&2&0&-1\\0&1&0&4&-1&-2\\0&0&1&3&-1&-1\end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{A^{-1}=\begin{bmatrix}2&0&-1\\4&-1&-2\\3&-1&-1\end{bmatrix}}$$

---

③ orthgonal vectors in R^4

$$\begin{bmatrix}1\\0\\1\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\3\\3\\2\end{bmatrix}$$

$\vec{x}.\vec{y}$

two vectors are orthgnal if $\vec{x}.\vec{y}=0$

$$\begin{bmatrix}1&0&1&4\\2&1&1&3\\-1&3&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1&0&1&4&0\\2&1&1&3&0\\-1&3&3&2&0\end{bmatrix} \xrightarrow[E_{31}]{E_{21}} \begin{bmatrix}1&0&1&4&0\\0&1&-1&-5&0\\0&3&4&6&0\end{bmatrix} \xrightarrow{E_{32}}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&1&4&0\\0&1&-1&-5&0\\0&0&7&21&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}7x_3+21x_4=0\\ x_2-x_3-5x_4=0\\ x_1+x_3+4x_4=0\end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases}x_4=t\ ,\ x_3=-3t\\ x_2=2t\ ,\ x_1=-t\\ R^1 \text{ ی فقط } t\end{cases}}$$

$$\Rightarrow x \triangleq t\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\\1\end{bmatrix}, \quad t\in R^1 \rightarrow$$

پس بی نهایت جواب دارد.
مثلاً یکی از جواب ها برابر است با

$$x=\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\\1\end{bmatrix}$$

---

(4) بردارهای پایه در فضای R^4

$A = (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, -1)$
$B = (1, 2, -1, 1), (0, 1, 2, -1)$

اگر ۴ بردار $v_1 \dots v_4$ در فضای R^4 باشند
کل فضا را span کنند داریم

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\cdots v_1 \cdots\\ \cdots v_2 \cdots\\ \cdots v_3 \cdots\\ \cdots v_4 \cdots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \varepsilon\\ \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$$

ضرایب   هر نقطه در فضای R^4

* پس باید بعد از حذف به روش gauss-jordan هر سطر یک pivot غیرصفر داشته باشد:)

$$\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\0&1&2&-1\\x_1&x_2&x_3&x_4\\\hat{x}_1&\hat{x}_2&\hat{x}_3&\hat{x}_4\end{bmatrix}\xrightarrow[E_{31}]{E_{41}}\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\0&1&2&-1\\0,&x_2-2x_1,&x_3+x_1,&x_4-x_1\\0&,\hat{x}_2-2\hat{x}_1&,\hat{x}_3+\hat{x}_1&,\hat{x}_4-\hat{x}_1\end{bmatrix}\xrightarrow[E_{32}]{E_{42}}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1,&2,&-1&1\\0,&1,&2&-1\\0,&0,&x_3+x_1-2(x_2-2x_1),&x_4-x_1+(x_2-2x_1)\\0,&0,&\hat{x}_3+\hat{x}_1-2(\hat{x}_2-2\hat{x}_1),&\hat{x}_4-\hat{x}_1+(\hat{x}_2-2\hat{x}_1)\end{bmatrix}\xrightarrow{E_{43}}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1,&2,&-1,&1\\0,&1,&2,&-1\\ '' & '' & '' & ''\\0,&0,&0,&\left[\hat{x}_4-\hat{x}_1+(\hat{x}_2-2\hat{x}_1)\right]-\left[\dfrac{\hat{x}_3+\hat{x}_1-2(\hat{x}_2-2\hat{x}_1)}{x_3+x_1-2(x_2-2x_1)}\right]\begin{bmatrix}x_4-x_1\\+(x_2-2x_1)\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$\left[\hat{x}_4 - \hat{x}_1 + (\hat{x}_2 - 2\hat{x}_1)\right]\left[\frac{\hat{x}_3 + \hat{x}_1 - 2(\hat{x}_2 - 2\hat{x}_1)}{x_3 + x_1 - 2(x_2 - 2x_1)}\right] \neq 0$$

$\Rightarrow$ ① $\hat{x}_4 - \hat{x}_1 + (\hat{x}_2 - 2\hat{x}_1) \neq 0$

② $\hat{x}_3 + \hat{x}_1 - 2(\hat{x}_2 - \hat{x}_1) \neq 0$

③ $x_3 + x_1 - 2(x_2 - 2x_1) \neq 0$

اگر ۳ شرط بالا برقرار باشد ۲ بردار دیگر می‌توانن فضا R^4 را span کنند.

فقط با بردار (۱،۰،۰،۰) نمی‌توان این کار را کرد.

با انتخاب ۲ تایی از ۳ بردار دیگر می‌توان فضای R^4 را span کرد.

مثلاً: (۰،۰،۱،۱) و (۱،۱،۰،۰)

⑤ polynomial space

برای حل مسئله از تناقض استفاده می‌کنیم: ابتدا مجموعه تمام چندجمله‌ای‌هایی که بر $x-1$ بخش‌پذیر می‌باشند را D می‌نامیم: ←

$$D = \{\phi(x) = f(x)(x-1) \mid \phi(x), f(x) \in \underbrace{P}_{\text{set of all polynomials}}\}$$

حال فرض کنید چندجمله‌ای ما $y(x)$ باشد که $(x-1) \nmid y(x)$ ← فرض کنیم P توسط D، span می‌شود یعنی به ازای هر چندجمله‌ای مانند $\psi(x)$ داریم

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x), \quad \text{where } \phi_i(x) \in D,\ c_i \in R$$

اگر بجای $\psi(x)$، $y(x)$ که بر $(x-1)$ بخش‌پذیر نباشد را قرار دهیم داریم:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{N \leftarrow \text{finite}} c_i \phi_i(x) \xrightarrow{\text{باز کنیم}} y(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i (\hat{\phi}_i(x))(x-1).$$

$$\boxed{\Rightarrow y(x) = (x-1)\sum_{i=1}^{N} c_i \hat{\phi}_i(x)}$$

$\Rightarrow$ یعنی $y(x)$ بر $(x-1)$ بخش‌پذیر است که این یک تناقض است. ∴