



باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

روش های ریاضی در مهندسی - گروه دکتر امینی

نیمسال اول ۱۴۰۱-۰۲

تمرین تئوری سری پنجم

۱. مهلت تحویل این تمرین مطابق تاریخ اعلام شده در سامانه CW می باشد.

۲. ۱۰ روز تاخیر مجاز برای تحویل تمرین های تئوری در اختیار شما خواهد بود.

۳. سقف تاخیر برای تحویل هر تمرین ۷ روز خواهد بود و پس از آن پاسخنامه تمرین منتشر خواهد شد.

۴. ابهامات و مشکلات خود در مورد این تمرین را می توانید با دستیاران طراح، آقایان رامی و صفوی مطرح کنید.

@mamin_rami, @Safavi_MRS

سوال اول

با استفاده از الگوریتم MP و OMP مسئله P_0 را برای x حل نمایید. همچنین مقدار $spark(A)$ و $\mu(A)$ را محاسبه کنید.

$$y = Ax$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

سوال دوم (امتیازی)

جلال و امیرعلی میخواهند $spark$ ماتریس شبه واندروموند که به صورت زیر است را بیابند اما بلد نیستند. به جای آن ها $spark$ ماتریس را بیابید.

$$z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C} : \Phi_{m \times n} = \begin{bmatrix} z_1^a & z_2^a & \dots & z_n^a \\ z_1^{a+1} & z_2^{a+1} & \dots & z_n^{a+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{a+m-1} & z_2^{a+m-1} & \dots & z_n^{a+m-1} \end{bmatrix}$$

سوال سوم

در الگوریتم OMP در گام شماره k ، مجموعه S به صورت $S^k = S^{k-1} \cup \{j_0\}$ به روز رسانی میشود که j_0 ستونی از ماتریس واژه نامه $A \in (R)^{m \times n}$ است که $\epsilon(j)$ تعریف شده به صورت زیر را حداکثر میکند:

$$\|r^{k-1}\|_2^2 - \frac{(a_j^T r^{k-1})^2}{\|a_j\|_2^2}$$

نشان دهید برای بردار دلخواه \mathbf{b} و تکرار k ، مجموعه S^k در دو حالت زیر یکسان است:

• ماتریس واژه نامه $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$

• ماتریس واژه نامه $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\mathbf{D}$ که در آن $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ یک ماتریس قطری معکوس پذیر است.

سوال چهارم

الف. بردار دلخواه $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم بردار $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ در همسایگی \mathbf{b} را به گونه‌ای به دست آوریم که نسخه هموار شده آن باشد. این مسئله را به صورت حداقل مربعات چندهدفه زیر مدل سازی نمایید ($\lambda > 0$):

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 + \lambda \|\mathbf{Dx} - \mathbf{d}\|^2$$

که در مسئله فوق عبارت اول نزدیکی دو بردار \mathbf{x} و \mathbf{b} و عبارت دوم، همواری بردار \mathbf{x} را برآورده می‌نماید (ماتریس های \mathbf{A} ، \mathbf{D} و \mathbf{d} را به دست آورید که $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times n}$ است).

ب. برای حالت خاص $n = 2$ ، $\hat{\mathbf{x}}(\lambda)$ (پاسخ مسئله بهینه سازی فوق) را به دست آورید.

ج. بردار $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{x}}(\lambda)$ را به دست آورید و توجیه کنید.

سوال پنجم

در مسئله حداقل مربعات، تابع هدف ما (جهت کمینه کردن)، به صورت زیر است:

$$\|Ax - b\|^2 = \sum_{i=1}^m (\tilde{a}_i^T - b_i)^2$$

که در آن \tilde{a}_i^T سطر i ام ماتریس A است و هدف، یافتن بردار $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ است. در یک نسخه دیگر از مسئله حداقل مربعات، تابع هدف ما به صورت زیر است:

$$\sum_{i=1}^m w_i (\tilde{a}_i^T - b_i)^2$$

که وزن های w_i مثبت هستند و به ما داده شده اند.

الف. نشان دهید با انتخاب ماتریس قطری D به صورت مناسب، می‌توان این مسئله را به مسئله حداقل مربعات معمولی تبدیل کرد به طوری که تابع هدف به صورت $\|D(Ax - b)\|^2$ خواهد شد و عملاً تابع هدف در مسئله جدید خواهد بود:

$$\|Bx - d\|^2$$

به طوری که $B = DA$ و $d = Db$.

ب. نشان دهید اگر ستون های ماتریس A مستقل خطی باشند، ستون های ماتریس B نیز مستقل خطی هستند.

ج. جواب مسئله حداقل مربعات جدید را بر حسب A و b و $W := \text{diag}(w)$ به دست آورید.