HW04 _ linear algebra

Saeed Pakravi

98106542

① سوال۱

تجزیه SVD ماتریس A را یافته و سپس با استفاده از آن، پایه های یکا متعامد برای چهار زیرفضای $C(A)$ ، $N(A)$ ، $C(A^T)$ و $N(A^T)$ ارائه دهید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$A = U\Sigma V^T$

first we compute $A^TA \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 9-\lambda & -9 \\ -9 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)^2 - 81 = 0 \Rightarrow (9-\lambda) = \pm 9 \longrightarrow \lambda_1 = 0 \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

$\longrightarrow \lambda_2 = 18 \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

$$\boxed{\Rightarrow \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{18} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\Rightarrow V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}$$

$u_1 = \frac{Av_1}{\sqrt{\lambda_1}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; u_2 = \frac{Av_2}{\sqrt{\lambda_2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

$u_3 \rightarrow \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow u_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\boxed{\Rightarrow U = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}}$$

→ ① پایه برای $C(A) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$, ② $N(A) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, ③ $C(A^T) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

④ $N(A^T)$ $= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}$

2 سوال۲

فرض کنید A یک ماتریس مثبت معین باشد؛ رابطه ی میان تجزیه مقادیر تکین و تجزیه مقادیر ویژه آن را شرح دهید.
آیا درصورتیکه A منفی معین باشد، رابطه ای میان این دو تجزیه وجود خواهد داشت؟

a) suppose A is possitive-definite matrix (A is also symetric, that is $A=A^T$)

$$\xrightarrow{\text{definition of eigenvector}} Av=\lambda v \xrightarrow{\times A^T} A^TAv=\lambda A^Tv \xrightarrow{A^T=A} (A^TA)v=\lambda(\lambda v) \Rightarrow (A^TA)v=\lambda^2 v \quad \text{I}$$

so, for any eigen pair value (v_i, λ_i) singular value $=\sqrt{\lambda_i^2}$

$\longrightarrow$ since A is possitive definite, $\lambda_i>0$ II

$$\xrightarrow[\text{II}]{\text{I}} \boxed{\sigma_i=+\lambda_i \text{, for each eigen pair } (v_i, \lambda_i)}$$

singular value eigenvalue

b) If A is negative definite, symmetric matrix, we have $\boxed{\sigma_i=-\lambda_i \text{, for each eigen pair } (v_i, \lambda_i)}$

3 سوال۳

طبق قضیه ای، هر ماتریس مربعی معکوس پذیر A را می توان به صورت $A=HQ$ تجزیه کرد که در آن H ماتریسی متقارن و مثبت معین و Q ماتریسی متعامد است.

۱. تجزیه $A=U\Sigma V^T$ را در نظر گرفته و Q را به صورت $Q=UV^T$ اختیار کنید. حال H را به گونه ای بیابید که رابطه $U\Sigma V^T=HQ$ برقرار باشد. استدلال کنید که چرا H بدست آمده مثبت معین و متقارن است.

۲. ماتریس 2×2 زیر را در نظر بگیرید. تجزیه های $A=U\Sigma V^T$ و $A=HQ$ را برای این ماتریس بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 3\end{bmatrix}$$

I $A=HQ \longrightarrow H=AQ^{-1}$

II $A=U\Sigma V^T$

III $Q=UV^T$

$$\xrightarrow[\text{II, III}]{\text{I}} H=U\Sigma V^T(UV^T)^{-1}=U\Sigma \underbrace{V^T(V^T)^{-1}}_{I}U^{-1}$$

*Note that U and V are orthonormal matrixes. $\Rightarrow U^T=U^{-1}$

طرف 1 $\rightarrow \boxed{H=U\Sigma U^{-1}} \xrightarrow{U^{-1}=U^T} \boxed{H=U\Sigma U^T}$

$\xrightarrow{\text{اثبات تقارن}} H^T=U\Sigma^T U^T \xrightarrow{\Sigma^T=\Sigma} H^T=U\Sigma U^T \xrightarrow{U^T=U^{-1}} \boxed{H^T=U\Sigma U^{-1}}$ طرف 2

$\rightarrow \boxed{H=H^T=U\Sigma U^{-1}} \longrightarrow$ اثبات تقارن

$\xrightarrow{\text{اثبات PD}}$ for any arbitrary vector $x\in R^n$

$$x^THx=x^TU\Sigma U^Tx \xrightarrow{U^Tx=y\in R^n} x^THx=y\Sigma y^T=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i y_i^2 \xrightarrow[y_i^2\geq 0]{\sigma_i>0} \boxed{x^THx\geq 0}$$

اثبات possitive definite بودن

۲. ماتریس 2×2 زیر را در نظر بگیرید. تجزیه های $A = U\Sigma V^T$ و $A = HQ$ را برای این ماتریس بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

ب)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A^TA-\lambda I) = (10-\lambda)^2 - 64 = \lambda^2 - 20\lambda + 36 = 0 \Rightarrow 10 \pm \sqrt{100-36} \Rightarrow \lambda_1 = +2 \Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{2}$$
$$\lambda_2 = +18 \Rightarrow \sigma_2 = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \xrightarrow{\text{به طور مشابه}} v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i} \Rightarrow u_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow u_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{به طور مشابه}} u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

جواب نهائی

$$\boxed{\Rightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} \end{bmatrix}, Q = UV^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} \end{bmatrix}}$$

4

سوال۴

برای ماتریس مربعی معکوس پذیر A داریم: $A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$. مقادیر تکین A^{-1} را بدست آورده و نشان دهید: $\sigma_{max}(A)\sigma_{max}(A^{-1}) \geq 1$.

I singular values of $A \Rightarrow \det(A^TA) = \det(AA^T) = 0$ (1)

singular values of A is answer of this equation

II singular values of $A^{-1} \Rightarrow \det(A^{-1}(A^{-1})^T) = \det(A^{-1}(A^T)^{-1}) = \det((A^TA)^{-1})$ (2)

(3) we know that if A has eigenvalues of λ_i $i=1\dots n$ then A^{-1} has eigenvalue of $\frac{1}{\lambda_i}$ $i=1\dots n$

$$\xrightarrow{(1)(2)(3)} \boxed{\text{for each } \sigma_i \text{ we have : } \sigma_i(A) = \frac{1}{\sigma_i(A^{-1})}}$$

$$\Rightarrow \sigma_{max}(A)\sigma_{max}(A^{-1}) = \sigma_{max}(A)\frac{1}{\sigma_{min}(A)} \xrightarrow[\sigma_{max}(A) \geq \sigma_{min}(A)]{\sigma_i > 0} \boxed{\sigma_{max}(A)\sigma_{max}(A^{-1}) \geq 1}$$

→ proof of (3)

$$Ax = \lambda x \xrightarrow{\times A^{-1}} x = \lambda A^{-1}x \xrightarrow{\div \frac{1}{\lambda}} A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$$

so A^{-1} has same eigen vectors but it's eigenvalues are inverse of eigenvalues of A

5

سوال۵

با کمک تجزیه SVD نشان دهید که ماتریس مربعی A متقارن است اگر و تنها اگر $A^TA = AA^T$.

* statement is not "If and only If"

proof of right side of statement:

If A is symmetric $\rightarrow A^T = A$ (I)

$$A^TA \xrightarrow[A=A^T]{A^T=A} \boxed{A^TA = AA^T}$$

* give a counterexample for leftside

suppose A is orthonormal. that is $\rightarrow \begin{cases} \underline{a_i} \cdot \underline{a_j} = 1 & i = j \\ \underline{a_i} \cdot \underline{a_j} = 0 & i \neq j \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{A^TA = AA^T = I \text{ but } A \text{ is not symmetric}}$$

6

سوال۶

فرض کنید که D ماتریسی $n \times d$ است. اگر B ماتریسی مربعی به صورت زیر تعریف شود:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & D^T \\ D & 0 \end{bmatrix}$$

نشان دهید که در فرایند قطری سازی ماتریس B تمام اطلاعات موردنیاز برای بدست آوردن تجزیه ی SVD ماتریس D موجود است.

(راهنمایی: بردارهای ویژه B را به بردارهای تکین تجزیه SVD مرتبط کنید.)

* for a Block matrix in the form: $\Gamma = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

$$\det(\Gamma) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B) \quad \text{(I)}$$

for calculate λ_i of B we have to compute answer of $\begin{vmatrix} -\lambda I & D^T \\ D & -\lambda I \end{vmatrix} = 0$

$$\xrightarrow{\text{(I)}} \underbrace{\det(-\lambda I)}_{\neq 0}\det\left(-\lambda I + \frac{D}{\lambda} I D^T\right) = 0 \rightarrow \det\left(-\lambda I + \frac{D}{\lambda} I D^T\right) = 0$$

$\Rightarrow \det(DD^T - \lambda^2 I) = 0 \xrightarrow{\lambda^2 = \gamma} \lambda_i =$ مقادیر ویژه‌ی B ریشه‌ی دوم معادله‌ی $\det(DD^T - \gamma I) = 0$ می‌باشد

از طرفی جذر دوم جواب‌های معادله‌ی $\det(DD^T - \gamma I) = 0$ برابر singular value های D می‌باشند.

سوال۷
7
نشان دهید بزرگترین مقدار تکین ماتریس $A+B$ حداکثر برابر با مجموع بزرگترین مقدارهای تکین ماتریس A و B است.
همچنین ناشنا دهید بزرگترین مقدار تکین AB از ضرب مقادیر تکین ماتریسهای A و B کوچکتر مساوی است.

I we know that following rules are hold for matrix norms $\to \|\cdot\| : K^{m\times n} \to R$

$$\boxed{① \|A\| \geq 0 \quad ② \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad ③ \|AB\| \leq \|A\| \|B\|}$$

II we have a matrix norm called spectral norm with following definition:

$$\|A\| = \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}, \text{where } \|x\|=1$$

III $\underbrace{\|A\|_2}_{\text{spectral norm}} = \sigma_{max}(A)$

$$\xrightarrow[\text{III}]{\text{I, II}} \sigma_{max}(A+B) = \|A+B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2 \Rightarrow \boxed{\sigma_{max}(A+B) \leq \sigma_{max}(A) + \sigma_{max}(B)}$$

$$\xrightarrow[\text{III}]{\text{I, II}} \sigma_{max}(AB) = \|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2 \Rightarrow \boxed{\sigma_{max}(AB) \leq \sigma_{max}(A)\, \sigma_{max}(B)}$$

سوال۸
8

۱. ماتریس دلخواه $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ را درنظر بگیرید. نشان دهید که رابطه ی زیر برقرار است:

$$\|A\|_f = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2$$

در رابطه ی فوق، r رنک ماتریس A است. همچنین $\|A\|_f$ نُرم $frobenius$ ماتریس A را نشان می دهد.

۲. اگر بهترین تقریب مرتبه k از این ماتریس در معیار فرم فروبینیوس A_k باشد، آنگاه نشان دهید سطرهای ماتریس A_k نگاشت سطرهای متناظر A روی زیرفضای V_k توسع یافته توسط مجموعه بردارهای $v_1, v_2, ..., v_k$ است.

الف)

we know that $\to \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2 = tr(\Sigma^T \Sigma)$ I

$$\|A\|_f^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2 = tr(AA^T) \xrightarrow{A = U\Sigma V^T} tr(U\Sigma \cancel{V^T V}^{I} \Sigma^T U^T)$$

$$= tr(U\Sigma\Sigma^T U^T) \xrightarrow{tr(AB) = tr(BA)} tr(\Sigma^T \cancel{U^T U}_{I} \Sigma)$$

$$= tr(\Sigma^T \Sigma) \quad \text{II}$$

$$\xrightarrow[\text{II}]{\text{I}} \boxed{\sum \sigma_i^2 = \|A\|_f^2}$$

۲. اگر بهترین تقریب مرتبه k از این ماتریس در معیار فرم فروبینیوس A_k باشد، آنگاه نشان دهید سطرهای ماتریس A_k نگاشت سطرهای متناظر A روی زیرفضای V_k توسط مجموعه بردارهای $v_1, v_2, \ldots, v_k$ است.

ب)

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T \quad , r = \min(m,n)$$

$$A_K = \sum_{i=1}^{K} \sigma_i u_i v_i^T \qquad V_K = [v_1, \ldots, v_K]$$

$$A_K^T \overset{?}{=} V_K (\underbrace{V_K^T V_K}_{I})^{-1} V_K^T A^T$$

$$\Rightarrow A_K^T \overset{?}{=} V_K V_K^T A^T$$

2. شروع از طرف

$$A^T = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i v_i u_i^T \longrightarrow V_K^T A^T = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \underbrace{V_K^T v_i}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} u_i^T$$

ith element

$$\Rightarrow V_K^T v_i u_i^T = \begin{bmatrix} 0^T \\ \vdots \\ \sigma_i u_i^T \\ 0^T \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow V_K^T A^T = \begin{bmatrix} \sigma_1 u_1^T \\ \vdots \\ \sigma_K u_K^T \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{V_K V_K^T A^T = \sum_{i=1}^{K} \sigma_i v_i u_i^T = \underbrace{A_K^T}_{\text{طرف اول}}}$$

حکم اثبات شد.