



باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

گروه دکتر امینی - روش های ریاضی در مهندسی

نیمسال اول ۱۴۰۱-۰۲

تمرین سری چهارم

۱. مهلت تحویل این تمرین مطابق تاریخ اعلام شده در سامانه CW می باشد.

۲. ۱۰ روز تاخیر مجاز برای تحویل تمرین های تئوری در اختیار شما خواهد بود.

۳. سقف تاخیر برای تحویل هر تمرین ۷ روز خواهد بود و پس از آن پاسخنامه تمرین منتشر خواهد شد.

۴. ابهامات و مشکلات خود در مورد این تمرین را می توانید با دستیاران طراح، آقای زرگران و خانم حریقی مطرح کنید.

@cloner_z4 , @SN_HAR

سوال ۱

تجزیه SVD ماتریس A را یافته و سپس با استفاده از آن، پایه های یکا متعامد برای چهار زیرفضای $C(A)$ ، $N(A)$ ، $C(A^T)$ و $N(A^T)$ ارائه دهید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

سوال ۲

فرض کنید A یک ماتریس مثبت معین باشد؛ رابطه ی میان تجزیه مقادیر تکین و تجزیه مقادیر ویژه آن را شرح دهید. آیا در صورتیکه A منفی معین باشد، رابطه ای میان این دو تجزیه وجود خواهد داشت؟

سوال ۳

طبق قضیه ای، هر ماتریس مربعی معکوس پذیر A را می توان به صورت $A = HQ$ تجزیه کرد که در آن H ماتریسی متقارن و مثبت معین و Q ماتریسی متعامد است.

۱. تجزیه $A = U\Sigma V^T$ را در نظر گرفته و Q را به صورت $Q = UV^T$ اختیار کنید. حال H را به گونه ای بیابید که رابطه $U\Sigma V^T = HQ$ برقرار باشد. استدلال کنید که چرا H بدست آمده مثبت معین و متقارن است.

۲. ماتریس 2×2 زیر را در نظر بگیرید. تجزیه های $A = U\Sigma V^T$ و $A = HQ$ را برای این ماتریس بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

سوال ۴

برای ماتریس مربعی معکوس پذیر A داریم: $A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$. مقادیر تکین A^{-1} را بدست آورده و نشان دهید: $\sigma_{\max}(A)\sigma_{\max}(A^{-1}) \geq 1$

سوال ۵

با کمک تجزیه SVD نشان دهید که ماتریس مربعی A متقارن است اگر و تنها اگر $A^T A = A A^T$.

سوال ۶

فرض کنید که D ماتریسی $n \times d$ است. اگر B ماتریسی مربعی به صورت زیر تعریف شود:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & D^T \\ D & 0 \end{bmatrix}$$

نشان دهید که در فرایند قطری سازی ماتریس B تمام اطلاعات مورد نیاز برای بدست آوردن تجزیه SVD ماتریس D موجود است.

(راهنمایی: بردارهای ویژه B را به بردارهای تکین تجزیه SVD مرتبط کنید.)

سوال ۷

نشان دهید بزرگترین مقدار تکین ماتریس $A + B$ حداکثر برابر با مجموع بزرگترین مقدارهای تکین ماتریس A و B است. همچنین ناشناخته بزرگترین مقدار تکین AB از ضرب مقادیر تکین ماتریسهای A و B کوچکتر مساوی است.

سوال ۸

۱. ماتریس دلخواه $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که رابطه ی زیر برقرار است:

$$\|A\|_f = \sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2}$$

در رابطه ی فوق، r رنک ماتریس A است. همچنین $\|A\|_f$ نرم $frobenius$ ماتریس A را نشان می دهد.

۲. اگر بهترین تقریب مرتبه k از این ماتریس در معیار فرم فروبینیوس A_k باشد، آنگاه نشان دهید سطرهای ماتریس A_k نگاشت سطرهای متناظر A روی زیرفضای V_k توسع یافته توسط مجموعه بردارهای v_1, v_2, \dots, v_k است.