HW02 - linear algebra

Saeed Rafati

98106542

1) اگر A ماتریس $m \times n$ و B ماتریس $n \times p$ باشد، به طوری که $AB = 0$ ثابت کنید $rank(A) + rank(B) \leq n$

first, assume linear system of equation $Ax=0$

$\underset{m\times n}{A}$ = matrix   column vector

for above equation, degree of null space is $n - rank(A)$

so we have $n - rank(A)$ independent vector that span $N(A)$ ①

now, take a look at AB

$$A \times \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_p \end{bmatrix} = 0$$

we know that $AB_i = 0$ and from $B_1 \dots B_p$, $rank(B)$ number of them are independent ②

①② $\longrightarrow$ $rank(B) \leq n - rank(A) \Rightarrow \boxed{rank(A) + rank(B) \leq n}$

proved!

2

فرض کنید $A \in M(F)$ و همچنین $1 \le rank(A) = r \le n-1$ باشد.نشان دهید ماتریس‌های $B_{n\times r}$ و $C_{r\times n}$ وجود دارند به قسمتی که:

$$rank(B) = rank(C) = r$$
$$A = BC$$

① → suppose $A_{n\times n}$ is a matrix with $Rank(A)=r$ independent column. to say more precisly,

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & & & & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_n \end{array} \end{array}$$

r number of vectors of A_i are indepdent

$n-r$ number of vectors of A_i are dependent

② → also suppose any arbitrary matrix $B_{n\times r}$ with $rank=r$ [for this $r<n$]

for a linear system of eqution: $\boxed{BC_i = A_i \rightarrow \text{Because } rank(B)=r \Rightarrow C_i \text{ is determined uniqly!}}$

$\boxed{\text{so for "r" number of } A_i\text{, we have "r" number of } C_i \text{ that are indepdent}}$

③ → for any dependent A_i, we can write it as sum of independt A_i's and C_i correspond to dependt A_i, is weighted sum of C_i's that belongs to independt A_i's

①②③ → for two arbitrary matrix $A_{n\times n}$ (with $rank(A)=r$) and $B_{n\times r}$ (with $rank(B)=r$)

we have uniquee matrix $C_{r\times n}$ (with r independt column, which means that $rank(C)=r$)

3

۳ تجزیه QR

اگر A ماتریسی با ابعاد $m \geq n$ باشد آنگاه ثابت کنید که در تجزیه QR ماتریس A $(A = QR)$، رنک ماتریس R و A با هم برابرند.

$$A = \underset{m m}{Q} \times \underset{m n}{R}$$

① → we know that Q is orthogonal matrix, so rank(Q) = m and Q has m independent column vector

② → we also know that $\boxed{A_i = Q R_i}$ → R_i determined uniquely because Q is full rank

i^{th} column of A

i^{th} column of R

It's obvious from equation that if A_i is dependent, R_i correspond to it is also dependent

→ $\boxed{\text{so number of independent column in } A = \text{number of independent column in } R}$

$\boxed{rank(A) = rank(R)}$

4

۴ مینیمم فاصله

اگر نقاط $P = (x, x, x)$ و $Q = (y, 3y, -1)$ بر روی ۲ خط که هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نمیکنند قرار داشته باشند آنگاه x و y را به گونه‌ای انتخاب کنید که مربع فاصله بین این ۲ نقطه $(||P - Q||^2)$ را از یکدیگر مینیمم کند.

$$||P-Q||^2 = \langle P-Q, P-Q \rangle = \langle P-Q, P \rangle - \langle P-Q, Q \rangle$$

dot product

$$||P-Q||^2 = \langle P,P \rangle - \langle Q,P \rangle - \langle P,Q \rangle + \langle Q,Q \rangle = \langle P,P \rangle - 2\langle Q,P \rangle + \langle Q,Q \rangle$$

$$3x^2 - 2\left[yx + 3yx - x\right] + \left(y^2 + 9y^2 + 1\right) = 3x^2 + 10y^2 - 8yx + 2x + 1$$

minimize ⟹

$$\frac{\partial ||P-Q||^2}{\partial x} = 0 \Rightarrow 6x - 8y + 2 = 0 \Rightarrow 6\left(\tfrac{20}{8}y\right) - 8y + 2 = 0 \Rightarrow 7y = -2 \Rightarrow \boxed{y = -2/7}$$

$$\frac{\partial ||P-Q||^2}{\partial y} = 0 \Rightarrow 20y - 8x = 0 \Rightarrow x = \frac{20}{8}y \qquad \boxed{\Rightarrow x = -5/7}$$

✓

5

نگاشت بردار $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ را بر فضای ستونی $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ تعیین نموده و آن را به صورت $p + q$ بنویسید، جاییکه $p \in col(A)$ و $q \perp col(A)$. از چهار زیرفضای بنیادی A، q متعلق به کدام است؟

① $q \perp col(A) \Rightarrow q \in N(A) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = -4 \end{matrix}$

$\xrightarrow[x_3 = 1]{\text{assume}} \Rightarrow q = c \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

ضریب

② $p \in col(A) \Rightarrow \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow p = \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha - \beta \\ -2\alpha + 4\beta \end{bmatrix}$

$\Rightarrow p + q = b \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha - \beta \\ -2\alpha + 4\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c \\ 3c \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{3 مجهول}]{\text{حل 3 معادله}}$ $\boxed{\begin{matrix} \alpha = 9/22 \\ \beta = 37/22 \\ c = \frac{24}{22} \end{matrix}}$

$\Rightarrow q = \frac{24}{22} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $p = \begin{bmatrix} 23/11 \\ -14/11 \\ 65/11 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{← } q \text{ متعلق به فضای پوچی چپ ماتریس } A \text{ می‌باشد زیرا در } N(A^T) \text{ قرار دارد.}}$

6 پایه یکامتعامد

در $\mathbf{R}^4$ پایه یکامتعامدی برای W پیدا کنید جاییکه $W = span\{(1,1,1,1),(1,1,3,5),(1,1,7,7)\}$.

to find a orthogonal Basis we have to solve : $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 7 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

gauss jordan $\overset{①}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} \overset{②}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ جواب کلی : $c \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ضریب دلخواه $\xrightarrow{\text{یک نمونه}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

---

7 زیر فضای سطری(امتیازی)

ماتریس A به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -3 & 6 & 1 \\ -1 & -4 & 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

۱. فرم کاهش یافته سطری پلکانی ماتریس A ($R = rref(A)$) را بدست آورید.

۲. بعد و یک پایه برای هر کدام از چهار زیر فضای اساسی ماتریس A به دست آورید.

۳. ثابت کنید فضای سطری A و A^TA برابر است.

۴. فرم کاهش یافته سطری پلکانی برای ماتریس R^TR را به دست آورید.

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -3 & 6 & 1 \\ -1 & -4 & 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2 \\ +1 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 3 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}$

$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 1 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \div 2$

$rref(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ rref

$\to$ we have 2 pivot $\to$ dim

$\dim(C(A)) = 2$

$\dim(N(A)) = 5 - 2 = 3$

$\dim(N(A^T)) = 3 - 2 = 1$

$\dim(C(A^T)) = 2$

۲)

Basis

$C(A) \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C(A^T) \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

$N(A) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $N(A^T) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3) $C(A^T) \overset{?}{=} C((A^TA)^T) \Rightarrow C(A^T) \overset{?}{=} C(A^TA)$ باید این ماتریس را باز کنیم و نشان دهیم سطرهای آن ضریب سطرهای A باشد. ✓

8

۸ بهینه سازی

دستگاه معادلات $Ax = b$ را در نظر بگیرید که $A \in R^{m\times n}$ یک ماتریس رتبه کامل سطری است و $m > n$. اگر دستگاه چندین جواب داشته باشد، ثابت کنید جواب x^* که صورت زیر تعریف می شود، از بین همه جواب ها کمترین نرم را دارد.

$$x^* = A^T(AA^T)^{-1}b$$

objective : $\min_x \|Ax-b\| \triangleq \min_x \|Ax-b\|^2 = \min \langle Ax-b, Ax-b \rangle$

$\xrightarrow{\text{expand}} \langle Ax-b, Ax\rangle - \langle Ax-b, b\rangle = \langle Ax, Ax\rangle - \langle b, Ax\rangle - \langle Ax, b\rangle + \langle b, b\rangle \Rightarrow$

objective function $= f(x) = (Ax)^T(Ax) - b^TAx - (Ax)^Tb + b^Tb$

$\Rightarrow x^TA^TAx - b^TAx - x^TA^Tb + b^Tb \triangleq x^T(A^TA)x - 2x^TA^Tb + b^Tb$

$\xrightarrow{\text{minimize}} \frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2A^TAx^* - 2A^Tb = 0 \Rightarrow 2A^TAx^* = 2A^Tb \Rightarrow x^* = A^{-T}A^{-1}A^Tb$

$$\boxed{x^* = A^T(AA^T)^{-1}b}$$