HW03 – linear algebra
Saeed Rezaei
98106542

۱ ماتریس پاسکال

درایه‌های ماتریس مربعی پاسکال S به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$S_{ij} = \binom{i+j}{i} = \binom{i+j}{j}$$

برای مثال برای ماتریس 5×5 داریم:

ابتدا اثبات می‌کنیم در تجزیه‌ی LU برای ماتریس‌های متقارن (مانند پاسکال) $U = L^T$

suppose we have: $\underbrace{A}_{\text{symmetric}} = LU \xrightarrow{A = A^T} A = LU = U^T L^T$

because LU decomposition is unique $\Rightarrow U = L^T$

Vandermonde equality!

الف) حال تساوی Vandermonde را در نظر می‌گیریم.

$$\sum \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}$$

I Let $r = m$

II $\binom{m}{m-k} = \binom{m}{k}$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{k} = \binom{n+m}{n}} \quad \text{I}$$

* حال ماتریس P_n را که درایه‌ی (i,j) آن از رابطه‌ی $\begin{cases} \binom{i}{j} & \text{اگر } i \geq j \\ 0 & \text{اگر } i < j \end{cases}$ تشکیل می‌دهیم که یک ماتریس پایین مثلثی می‌باشد.

حال داریم: $\underbrace{P_n P_n^T (n,m)}_{\text{درایه}} \; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{k} \overset{\text{I}}{=} \binom{n+m}{n}$ ← تعریف پاسکال!

$$\boxed{A = P_n P_n^T \Rightarrow \det(A) = \overset{1}{\cancel{\det(P_n)}}\;\underset{1}{\cancel{\det(P_n^T)}} = 1}$$

درایه‌های روی قطر اصلی ۱

$L = P_n$
$U = P_n^T$

ب) I $\hat{P}_n = P_n - P_n^*$

پاسکالی که یکی از درایه‌ی آن منهای ۱ شده

پاسکالی که سطر آخر آن همه‌ی درایه‌های آن صفر است به جز درایه‌ی (n,n)

$$P_n^* = \underbrace{(-1)^{n+n}}_{+1}\,\underbrace{\det(P_{n-1})}_{+1} = 1 \quad \text{II}$$

$$\text{I, II} \rightarrow \boxed{\det(\hat{P}_n) = 1 - 1 = 0}$$

(2)

۲ یک نامساوی!

اگر ماتریس X به صورت $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ باشد که $x_i\in\mathbb{R}^n$، ثابت کنید داریم:

$$|det(X)|\le\prod_{i=1}^{n}\|x_i\|$$

راهنمایی: از تجزیه QR کمک بگیرید.

① $X=QR \xrightarrow{XX} X^2=QRQR \xrightarrow{det} [det(X)]^2=det^2(Q)\,det^2(R)$

$\xrightarrow{*}$ Q is orthonormal matrix $\Rightarrow det(Q)=\pm1 \Rightarrow det^2(Q)=1$

$\xrightarrow[*]{①} det(X)^2=det^2(R) \xrightarrow{\sqrt{\ }} |det(X)|=|det(R)|$ (I)

$\xrightarrow{**}$ R is upper trangular matrix $\Rightarrow \begin{cases} ① & det(R)=\prod_{i=1}^{N}R_{ii} \\ ② & R_{ii}=Q_i^T x_i \end{cases} \Rightarrow det(R)=\prod_{i=1}^{N}Q_i^T x_i$

$|det(R)|=|\prod_{i=1}^{N}Q_i^T x_i| \xrightarrow{|ab|\le|a||b|} |det(R)|\le\prod_{i=1}^{N}|Q_i^T x_i|\le\prod_{i=1}^{N}|x_i|$

$\xRightarrow{(I)} \boxed{|det(X)|\le\prod_{i=1}^{N}\|x_i\|}$

(3)

۳ دترمینان ماتریس Hessenberg

ماتریس Hessenberg، یک ماتریس مثلثی به همراه یک قطر اضافه است. برای نمونه سه ماتریس آن به صورت زیر هستند:

$$H_2=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}, H_3=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}, H_4=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\1&2&1&0\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{bmatrix}$$

رابطه‌ای برای دترمینان H_n پیدا کنید و مقدار دترمینان H_{10} را از این رابطه بدست آورید.

$|H_1|=2$, $|H_2|=4-1=3$

$det(H_3)=2det(H_2)-1[det(H_2)-det(H_1)]$

$det(H_4)=2det(H_3)-1[det(H_3)-det(H_2)]$

$\longrightarrow \boxed{|H_N|=|H_{N-1}|+|H_{N-2}|} \Rightarrow$ $H_3=5$, $H_4=8$, $H_5=13$, $H_6=21$, ... $H_7=34$, $H_8=55$, $H_9=89$

$\boxed{H_{10}=144}$

۴ ماتریس دوران

با استفاده از قطری‌سازی ماتریس دوران ثابت کنید:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \Longrightarrow A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta + \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1$$

$$\rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow \lambda = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} \rightarrow \lambda = \cos\theta \pm j\sin\theta \Rightarrow \lambda_1 = e^{j\theta}, \ \lambda_2 = e^{j(-\theta)}$$

$$\rightarrow (A - \lambda_i I)v_i = 0 \xrightarrow{\lambda_1} \begin{bmatrix} -j\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -j\sin\theta \end{bmatrix} v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} j \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\lambda_2} \begin{bmatrix} j\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & j\sin\theta \end{bmatrix} v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -j \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda = \begin{bmatrix} e^{j\theta} & 0 \\ 0 & e^{j\theta} \end{bmatrix} \quad \text{(I)}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} j & -j \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(II)}$$

$$\Rightarrow X^{-1} = \frac{1}{2j}\begin{bmatrix} 1 & j \\ -1 & j \end{bmatrix} \quad \text{(III)}$$

$$\rightarrow A = X\Lambda X^{-1}$$

$$\rightarrow A^n = X\Lambda^n X^{-1}$$

$$\xrightarrow[\text{(II)}\,\text{(III)}]{\text{(I)}} A^n = \frac{1}{2j}\begin{bmatrix} j & -j \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{jn\theta} & 0 \\ 0 & e^{-jn\theta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & j \\ -1 & j \end{bmatrix} = \frac{1}{2j}\begin{bmatrix} je^{jn\theta} + je^{-jn\theta} & e^{-jn\theta} - e^{jn\theta} \\ e^{jn\theta} - e^{-jn\theta} & je^{jn\theta} + je^{-jn\theta} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\sin(n\theta) = \frac{e^{jn\theta} - e^{-jn\theta}}{2j}]{\cos(n\theta) = \frac{je^{jn\theta} + je^{-jn\theta}}{2j}} \boxed{A^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos(n\theta) \end{bmatrix}}$$

۵ ماتریس‌های متشابه

اگر $A, B \in M_n$ و ماتریس‌های A و B متشابه باشند، موارد زیر را ثابت کنید:

الف. $tr(B) = tr(A)$

ب. $det(B) = det(A)$

ج. A^2 و B^2 نیز متشابه هستند.

د. اگر A قطری‌شدنی باشد، B نیز قطری‌شدنی است.

$$A = P^{-1}BP$$

a) $$tr(A) = tr(P^{-1}BP) \xrightarrow{tr(AB) = tr(BA)}$$

$$tr(A) = tr(\underbrace{PP^{-1}}_{I}B) \Rightarrow \boxed{tr(A) = tr(B)}$$

b) $$\det(A) = \det(P^{-1}BP) = \det(P^{-1})\det(B)\det(P) \xrightarrow{\det(P) = \frac{1}{\det(P^{-1})}} \boxed{\det(A) = \det(B)}$$

c) $A=P^{-1}BP \xrightarrow{\times A} A^2=(P^{-1}BP)\underbrace{(P^{-1}}_{I}BP) \Rightarrow A^2=P^{-1}B^2P \Rightarrow A^2$ and B^2 are similar matrix

d) بله

اگر B قطری شدنی باشد، یعنی n بردار ویژه مستقل از هم دارد. ←

$$A=P^{-1}BP \xrightarrow{B=X\Lambda X^{-1}} A=\underbrace{P^{-1}X}_{C}\Lambda \underbrace{X^{-1}P}_{C^{-1}} \Rightarrow \boxed{A=C\Lambda C^{-1}}$$

چون هردوی ماتریس های x و P^{-1} مربعی و full rank می باشند ⇐ ضرب ماتریسی آنها نیز یک ماتریس فول رنک می باشد

ماتریسی است که ستون های C بردارهای ویژه ← ستون های C مستقل خطی ←

ای برای A می باشند ⇐ A قطری شدنی است زیرا n بردار ویژه ی مستقل دارد.

۶ صحیح و غلط!

درستی یا نادرستی عبارات زیر را با ذکر دلیل یا مثال نقض مشخص کنید.

الف. ماتریسی با مقادیر ویژه حقیقی و n بردار ویژه حقیقی، متقارن است.

ب. ماتریسی با مقادیر ویژه حقیقی و n بردار ویژه متعامد یکه، متقارن است.

ج. ماتریس وارون یک ماتریس وارون‌پذیر متقارن، متقارن است.

a) counter example $\Rightarrow A=\begin{bmatrix}2&2\\1&5\end{bmatrix}$

$\Rightarrow [2-\lambda][5-\lambda]-2 \Rightarrow \lambda^2-7\lambda+8=0$

$\Rightarrow \Delta>0 \Rightarrow \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R} \Rightarrow v_1,v_2\in\mathbb{R}^2$

but $A\neq A^T$ False

b) $A=X\Lambda X^{-1} \xrightarrow[\text{so } \Rightarrow XX^T=I \Rightarrow X^T=X^{-1}]{X \text{ is orthonormal matrix}} A=X\Lambda X^T$ (I)

(I) $\Rightarrow A^T=(X\Lambda X^T)^T=X\Lambda^T X^T \xrightarrow[\text{so } \Lambda=\Lambda^T]{\Lambda \text{ is diagonal}} A^T=X\Lambda X^T$ (II)

(I), (II) $\Rightarrow \boxed{A=A^T}$ so A is symmetric true

c) (I) $A=A^T$

(II) $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$

$\xrightarrow{\text{(I) (II)}} \boxed{(A^{-1})^T=A^{-1}} \rightarrow \boxed{A^{-1} \text{ is symmetric}}$ true

۷ ماتریس بلوکی

اگر $A = X\Lambda X^{-1}$، آنگاه ماتریس بلوکی $B = \begin{bmatrix} 2A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$ را قطری‌سازی کرده و مقادیر و بردارهای ویژه آن را بنویسید.

we can formulate B as: $B = \hat{X}\hat{\Lambda}\hat{X}^{-1}$ → diagonal form

suppose we have ⇒ $\hat{X} = \begin{bmatrix} \alpha X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}$ (I)

$\hat{X}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha}X^{-1} & 0 \\ 0 & X^{-1} \end{bmatrix}$ (II)

$\hat{\Lambda} = \begin{bmatrix} \beta\Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix}$ (III)

$\Rightarrow \hat{X}\hat{\Lambda}\hat{X}^{-1} = \begin{bmatrix} \beta X\Lambda X^{-1} & 0 \\ 0 & X\Lambda X^{-1} \end{bmatrix} \xRightarrow{X\Lambda X^{-1} = A} \begin{bmatrix} \beta A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{\beta = 2}$

$\boxed{\alpha = \text{any arbitrary number} \in \mathbb{R}}$

⇒ eigen values of B contain both $\lambda_i(A)$, $i=1\dots n$ and $2\lambda_i; A$, $i=1..n$

⇒ eigen vectors are any $\underline{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ where $\underline{x}_i = [\alpha x_i \quad 0]_{1\times 2n}$, where α is any arbitrary number

x_i: eigenvector of A; 0: row vector of zeros

۸ ضرب داخلی و مقادیر ویژه

اگر ماتریس $A \in M_n(\mathbb{F})$ یک ماتریس هرمیتی باشد، آنگاه برای هر $x \in \mathbb{F}^n$ ثابت کنید داریم:

$$\lambda_{min}\|x\|^2 \leq \langle Ax, x\rangle \leq \lambda_{max}\|x\|^2$$

A is hermitian so $A^H = A$ (or simply, $A^T = A$) for A we have $A = Q\Lambda Q^{-1}$ (*) (Q: orthonormal)

$\langle Ax, x\rangle = (Ax)^T x = x^T A^T x \xrightarrow{A^T = A} \langle Ax, x\rangle = x^T A x \xrightarrow{(*)} \langle Ax, x\rangle = x^T Q\Lambda Q^{-1} x$

$\xrightarrow{Q^{-1}x = y} \langle Ax, x\rangle = y^T \Lambda y \xrightarrow[\|y\| = \|x\|]{\|Q\| = 1} \boxed{\langle Ax, x\rangle = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i^2}$

maximize $\lambda_i = \lambda_{max}$; $\lambda_i = \lambda_{min}$ minimize

(I) $\boxed{\min[\langle Ax, x\rangle] = \lambda_{max} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \lambda_{max}\|x\|^2}$

$\boxed{\max[\langle Ax, x\rangle] = \lambda_{min} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \lambda_{min}\|x\|^2}$ (II)

(I)(II) → $\boxed{\lambda_{min}\|x\|^2 \leq \langle Ax, x\rangle \leq \lambda_{max}\|x\|^2}$

۹ استقلال بردارهای ویژه

اثبات کنید اگر ماتریس X دارای مقادیر ویژه $\lambda_1, ..., \lambda_n$ باشد که متناظر با بردارهای ویژه $v_1, ..., v_n$ هستند، اگر مقادیر ویژه $\lambda_1, ..., \lambda_s$ از یکدیگر متمایز باشند، بردارهای $v_1, ..., v_s$ مستقل خطی خواهند بود.

← برای هر دو بردار ویژه با مقدار ویژه متمایز اثبات می‌کنیم.

فرض می‌کنیم $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ وجود دارند بطوریکه $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$

$$\text{I} \xrightarrow{\times \lambda_1} \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_1 v_2 = 0$$

$$\text{II} \xrightarrow{\times X} \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 = 0$$

$$\text{II} - \text{I} \Longrightarrow \alpha_2 \underbrace{\left[\lambda_1 - \lambda_2\right]}_{\neq 0} v_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$

به طریق مشابه $\Rightarrow \alpha_1 = 0$

$$\boxed{\text{به تناقض رسیدیم} \leftarrow \alpha_1, \alpha_2 \neq 0 \text{ وجود ندارند که } \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \Leftarrow v_1 \text{ و } v_2 \text{ مستقل خطی می‌باشند.}}$$