



باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

گروه دکترامینی - روش های ریاضی در مهندسی

نیم سال اول ۱۴۰۱-۰۲

## تمرین عملی سری ششم

۱. مهلت تحویل این تمرین مطابق تاریخ اعلام شده در سامانه CW می باشد.

۲. ۱۰ روز تاخیر مجاز برای تحویل تمرین های تئوری در اختیار شما خواهد بود.

۳. سقف تاخیر برای تحویل هر تمرین ۷ روز خواهد بود و پس از آن پاسخنامه تمرین منتشر خواهد شد.

۴. ابهامات و مشکلات خود در مورد این تمرین را می توانید با دستیاران طراح، خانم سرخئی و حریق مطرح کنید.

@ZahraSorkhei , @SN\_HAR

داده هایی به صورت زوج  $(x, y)$  در اختیار است؛ در این مسئله قصد داریم با تابعی مانند  $f$  رابطه بین  $x$  و  $y$  را تقریب بزنیم چنان که داشته باشیم:  $y \sim f(x)$ . برای این منظور از تقریب چندجمله ای به صورت زیر استفاده می کنیم که در آن  $k$  درجه چندجمله ای است:

$$f(x) = \hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_k x^k$$

حال اگر  $n$  جفت نمونه  $(x_i, y_i)$  داشته باشیم، تقریب فوق را می توان به صورت  $Y = X\beta$  در نظر گرفت که در آن بردار  $\beta$  و  $Y$  و ماتریس  $X$  به صورت زیر تعریف می شوند:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^k \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^k \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^k \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

همچنین تابع خطا به صورت زیر تعریف می شود:

$$error = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_k x^k))^2$$

۱. ثابت کنید به منظور کمینه کردن خطا، بردار  $\beta$  باید به صورت مقابل تعریف شود:  $\beta = (X^T X)^{-1} X^T Y$

۲.  $X$  و  $Y$  را به صورت زیر در نظر می گیریم که در آن تابع  $g(\mu, \nabla, n)$ ،  $n$  نمونه رندوم دارای توزیع گوسی با میانگین  $\mu$  و انحراف معیار  $\nabla$  تولید می کند:

$$X = 2 - 3g(0, 1, 20)$$

$$Y = 10 - 2x^2 + 0.5x^3 + g(-3, 3, 20)$$

حال تابعی بنویسید که با گرفتن  $X$  و درجه چندجمله ای  $(k)$ ،  $\hat{Y}$  را با روش بیان شده تخمین بزند.

۳. به ازای  $k = 1, 2, \dots, 6$ ،  $\hat{Y}$  را تخمین زده و برای هر  $k$  مقادیر  $Y$  و  $\hat{Y}$  را در یک نمودار رسم کنید.

۴. برای  $k$  های بخش قبل، مقدار خطا را بدست آورده و نمودار خطا برحسب  $k$  را رسم کنید.