



باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

گروه دکترامینی - روش های ریاضی در مهندسی

نیم سال اول ۱۴۰۱-۰۲

تمرین سری ششم-b

۱. مهلت تحویل این تمرین مطابق تاریخ اعلام شده در سامانه CW می باشد.

۲. ۱۰ روز تاخیر مجاز برای تحویل تمرین های تئوری در اختیار شما خواهد بود.

۳. سقف تاخیر برای تحویل هر تمرین ۷ روز خواهد بود و پس از آن پاسخنامه تمرین منتشر خواهد شد.

۴. ابهامات و مشکلات خود در مورد این تمرین را می توانید با دستیاران طراح، خانم سرخئی و حیدری مطرح کنید.

@m_h99999 , @ZahraSorkhei

۱ حل معادله به روش کمترین مربعات

معادله $Ax = b$ با روش کمترین مربعات حل کنید و پاسخ آن را x' بنامید. حال $b' = Ax'$ را بدست بیاورید و بردار خطا

و میزان خطا برای b را محاسبه کنید. همچنین بیان کنید هر از یک بردار های b ، b' و $b - b'$ در کدام فضا از چهار زیر

فضای بنیادی A قرار دارند.

$$b = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

۲ بهترین تقریب خطی

می خواهیم مقادیر y برحسب x را با استفاده معادله خطی $y = \beta_0 + \beta_1 x$ تقریب بزنیم. مقادیر β را به صورتی بدست

بیاورید که معادله بیان شده بهترین خط برای تخمین نقاط $(2, 1)$ ، $(5, 2)$ ، $(7, 3)$ و $(8, 3)$ باشد. خط بدست آمده را به

همراه نقطه بیان شده رسم کنید.

۳ حداقل مربعات غیر خطی

تابع $f: R^n \rightarrow R^m$ را در نظر بگیرید که هر مولفه f به صورت زیر تعریف می شود:

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^m (\phi_i(a_i^T x - b_i))^2$$

که $\phi: R \rightarrow R$ یک تابع اسکالر است. و $b_i \in R$ و $a_i \in R^n$

ماتریس $A \in R^{m \times n}$ متشکل از سطرهای a_1^T, \dots, a_m^T و بردار $b \in R^m$ دارای مولفه های b_1, \dots, b_m را در نظر بگیرید.

معادله ابدیت الگوریتم Levenberg - Marquardt را بدست آورید.

۴ حداقل مربعات چند هدفه

مسئله حداقل مربعات زیر را در نظر بگیرید:

$$J = \|Ax - b\|^2 + \lambda \|x - x^{des}\|^2$$

که A یک ماتریس $m \times n$ است که $m < n$ و $\lambda > 0$.

الف) جواب این مسئله را به صورت مستقیم بدست آورید.

ب) نشان دهید رابطه زیر برای هر A و $\lambda > 0$ برقرار است و جواب بخش الف را با استفاده از آن بازنویسی کنید:

$$(A^T A + \lambda I)^{-1} A^T = A^T (A A^T + \lambda I)^{-1}$$

ج) اگر پیچیدگی زمانی محاسبه معکوس یک ماتریس $n \times n$ از مرتبه $O(n^3)$ باشد، توضیح دهید استفاده از رابطه بخش

ب چه کمکی می کند.