



باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

گروه دکترامینی - روش های ریاضی در مهندسی

نیم سال اول ۱۴۰۱-۰۲

تمرین سری دوم

۱. مهلت تحویل این تمرین مطابق تاریخ اعلام شده در سامانه CW می باشد.

۲. ۱۰ روز تاخیر مجاز برای تحویل تمرین های تئوری در اختیار شما خواهد بود.

۳. سقف تاخیر برای تحویل هر تمرین ۷ روز خواهد بود و پس از آن پاسخنامه تمرین منتشر خواهد شد.

۴. ابهامات و مشکلات خود در مورد این تمرین را می توانید با دستیاران طراح، آقایان زرگران و میررشید مطرح کنید.

@cloner_z4 , @ThatOneGuyULTRA12345

۱ مرتبه ماتریس

اگر A ماتریس $m \times n$ و B ماتریس $n \times p$ باشد، به طوری که $AB = 0$ ثابت کنید $rank(A) + rank(B) \leq n$

۲ تجزیه پذیری

فرض کنید $A \in M(F)$ و همچنین $1 \leq rank(A) = r \leq n - 1$ باشد. نشان دهید ماتریس های $B_{n \times r}$ و $C_{r \times n}$ وجود

دارند به قسمتی که:

$$rank(B) = rank(C) = r$$

$$A = BC$$

۳ تجزیه QR

اگر A ماتریسی با ابعاد $m \geq n$ باشد آنگاه ثابت کنید که در تجزیه QR ماتریس A ($A = QR$)، رنک ماتریس R و A با

هم برابرند.

۴ مینیمم فاصله

اگر نقاط $P = (x, x, x)$ و $Q = (y, 3y, -1)$ بر روی ۲ خط که هیچگاه یکدیگر را قطع نمیکنند قرار داشته باشند آنگاه x و y را به گونه ای انتخاب کنید که مربع فاصله بین این ۲ نقطه $(\|P - Q\|^2)$ را از یکدیگر مینیمم کند.

۵ فضاهای بنیادی

نگاشت بردار $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ را بر فضای ستونی $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ تعیین نموده و آن را به صورت $p + q$ بنویسید، جاییکه $p \in \text{col}(A)$ و $q \perp \text{col}(A)$. از چهار زیرفضای بنیادی A ، q متعلق به کدام است؟

۶ پایه یکامتعامد

در \mathbf{R}^4 پایه یکامتعامدی برای W پیدا کنید جاییکه $W = \text{span}\{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 3, 5), (1, 1, 7, 7)\}$.

۷ زیر فضای سطری (امتیازی)

ماتریس A به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -3 & 6 & 1 \\ -1 & -4 & 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

۱. فرم کاهش یافته سطری پلکانی ماتریس A ($R = \text{rref}(A)$) را بدست آورید.

۲. بعد و یک پایه برای هر کدام از چهار زیر فضای اساسی ماتریس A به دست آورید.

۳. ثابت کنید فضای سطری A و $A^T A$ برابر است.

۴. فرم کاهش یافته سطری پلکانی برای ماتریس $R^T R$ را به دست آورید.

۸ بهینه سازی

دستگاه معادلات $Ax = b$ را در نظر بگیرید که $A \in R^{m \times n}$ یک ماتریس رتبه کامل سطری است و $n > m$. اگر دستگاه چندین جواب داشته باشد، ثابت کنید جواب x^* که صورت زیر تعریف می شود، از بین همه جواب ها کمترین نرم را دارد.

$$x^* = A^T(AA^T)^{-1}b$$