HW 06 – linear algebra

Saeed Rafati

98106542

---

۱ حل معادله به روش کمترین مربعات

معادله $Ax = b$ با روش کمترین مربعات حل کنید و پاسخ آن را x' بنامید. حال $b' = Ax'$ را بدست بیاورید و بردار خطا و میزان خطا برای b را محاسبه کنید. همچنین بیان کنید هر از یک بردار های b ، b' و $b - b'$ در کدام فضا از چهار زیر فضای بنیادی A قرار دارند.

$$b = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ ، } A = \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(1)

می‌دانیم برای بدست آوردن جواب $Ax=b$ با روش کمترین مربعات، می‌توانیم از pseudoinverse استفاده کنیم و داریم:

$$\tilde{x} = A^{+}b \text{, where } A^{+} = A^T(AA^T)^{-1}$$

$$\Rightarrow \tilde{x} = A^T(AA^T)^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ , } \tilde{b} = A\tilde{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ , } eror = \tilde{b} - b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow \|eror\| = 11$

1) b در $C(A)$, $N(A^T)$

2) b' " $C(A^T)$

3) $b - \tilde{b}$ " $N(A^T)$

۲ بهترین تقریب خطی

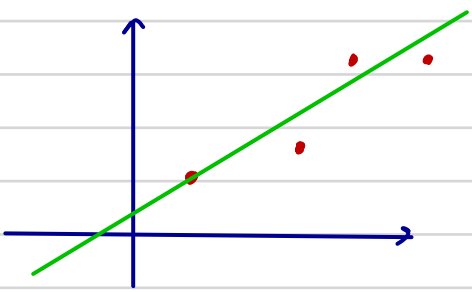
می خواهیم مقادیر y برحسب x را با استفاده معادله خطی $y = \beta_0 + \beta_1 x$ تقریب بزنیم. مقادیر β را به صورتی بدست بیاورید که معادله بیان شده بهترین خط برای تخمین نقاط $(2,1)$ ، $(5,2)$ ، $(7,3)$ و $(8,3)$ باشد. خط بدست آمده را به همراه نقطه بیان شده رسم کنید.

$$\rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 1 & 7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \text{ , } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\min_{\theta} \|A\theta - b\|$$

$$\rightarrow \tilde{\theta} = A^T(AA^T)^{-1}b \quad \rightarrow \quad AA^T = \begin{bmatrix} 142 & -22 \\ -22 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{84}$$

$$\Rightarrow \tilde{\theta} = \frac{1}{84}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 142 & -22 \\ -22 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{84}\begin{bmatrix} 24 \\ 30 \end{bmatrix}$$



۳ حداقل مربعات غیر خطی

تابع $f: R^n \to R^m$ را در نظر بگیرید که هر مولفه f به صورت زیر تعریف می شود:

$$||f(x)||^2 = \sum_{i=1}^{m} (\phi_i(a_i^T x - b_i))^2$$

که $a_i \in R^n$ و $b_i \in R$ و $\phi : R \to R$ یک تابع اسکالر است.

ماتریس $A \in R^{m\times n}$ متشکل از سطر های $a_1^T, ..., a_m^T$ و بردار $b \in R^m$ دارای مولفه های $b_1, ..., b_m$ را در نظربگیرید.

معادله اپدیت الگوریتم Levenberg - Marquardt را بدست آورید.

طبق روابط جزوه داریم:

$$x^{k+1} = x^k - \left[Df(x^k)^T Df(x^k) + \lambda^k I\right]^{-1} Df(x^k)^T f(x^k)$$

where

$$f(x^k) = \begin{bmatrix} \phi_1(a_1^T x - b_1) \\ \vdots \\ \phi_m(a_m^T x - b_m) \end{bmatrix}, \quad Df(x^k) = \begin{bmatrix} — \phi_1'(a_1^T x - b_1)\, a_1^T — \\ \vdots \\ \phi_m'(\dots) \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow Df(x^k) = \sum \phi_i(x^k)\, a_i^T = \underbrace{\mathrm{diag}(\phi_i(x))}_{\Lambda} A$$

$$\Rightarrow x^{k+1} \leftarrow x^k - (A^T \Lambda^T \Lambda A + \lambda^k I)^{-1} A^T \Lambda^T f(x^k) \xrightarrow{\Lambda\Lambda^T = \Lambda^2}$$

$$\boxed{x^{k+1} \leftarrow x^k - (A^T \Lambda^2 A + \lambda^k I)^{-1} A^T \Lambda^T f(x^k) \qquad \text{update}}$$

۴ حداقل مربعات چند هدفه

مسئله حداقل مربعات زیر را در نظر بگیرید:

$$J = ||Ax - b||^2 + \lambda||x - x^{des}||^2$$

که A یک ماتریس $m \times n$ است که $m < n$ و $\lambda > 0$.

الف) جواب این مسئله را به صورت مستقیم بدست آورید.

طبق روابط جزوه، برای Least square چندهدفه می‌توانیم یک مسئله‌ی معادل بنویسیم $\min_x ||\tilde{A}x - \tilde{b}||$ ارائه دهیم که

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A \\ \sqrt{\lambda} I \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} b \\ \sqrt{\lambda}\, x^{des} \end{bmatrix}$$

$$\to \tilde{A}^T\left[\tilde{A}\tilde{A}^T\right]^{-1}\tilde{b} = (A^TA + \lambda I)^{-1}(A^Tb + \lambda x^{des})$$

ب) ابتدا نشان می‌دهیم $A^TA+\lambda I$ و $AA^T+\lambda I$ وارون‌پذیرند.

for any x $\quad x^TA^TAx = ||Ax|| \to AA^T, A^TA$ مثبت نیمه‌معین

برای $A^TA+\lambda I$ و $AA^T+\lambda I$، تمام مقادیر ویژه با λ offset، زیرا مقادیر ویژه AA^T می‌باشند.

$\lambda_i(A^TA+\lambda I)$ ← دارای determinant ← معکوس‌پذیرند.

$$A^T(AA^T+\lambda I)^{-1} \stackrel{?}{=} (A^TA+\lambda I)^{-1}A^T \to A^TAA^T+\lambda A^T = A^TAA^T+\lambda A^T$$

← اثبات شد

ندسی:

$$A^T(AA^T+\lambda I)(b - Ax^{des}) + x^{des}$$

ج) ماتریس $AA^T+\lambda I$ یک ماتریس مربعی $m\times m$ است و چون $m<n$ ← ادره زمان کمتری دارد.