Devoir 5
MAT-2910 Analyse numérique pour l'ingénieur

Nom: Safae Elfattahi
Équipe: 35

Question 1

1. Fonction diag() de MATLAB

La fonction `diag()` permet de créer des matrices diagonales ou d'extraire une diagonale spécifique d'une matrice. Voici des exemples :

```
D = diag(ones(5, 1)); % Matrice diagonale 5x5 avec des 1 sur la diagonale principale
M = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9];
d = diag(M); % Extraction de la diagonale principale [1; 5; 9]
```

2. Utilité de iInconnu

Dans `EquationOndesResolution2d.m`, `iInconnu` est utilisé pour identifier les indices des points à l'intérieur de la grille (non aux bords). Cela permet de calculer les valeurs des inconnues sans écraser les conditions aux bords.

3. Condition CFL

La condition CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) garantit la stabilité du schéma numérique. Elle impose que :

$$r_1 + r_2 \leq 1, \quad \text{où } r_1 = \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta y^2},\ r_2 = \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}.$$

Cette condition limite le pas de temps Δt pour éviter une divergence des solutions.

Question 2

1. Explication des résultats

Après application des paramètres fournis dans le devoir :

$$f_1(x, y) = \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{10}\right), \quad f_2(x, y) = 0,$$

nous obtenons une simulation animée représentant la propagation de l'onde. Le code MATLAB produit un graphique 3D où l'onde évolue au cours du temps.

2. Analyse du graphique final

Le graphique final montre une onde dont l'amplitude diminue avec le temps. Cela est dû à l'absence de réflexion aux bords (conditions aux bords nulles). L'énergie de l'onde s'atténue progressivement, ce qui explique pourquoi elle semble "aplatie".

3. Comportement à long terme

Si le code s'exécutait indéfiniment, l'onde se dissiperait complètement en raison des conditions aux bords nulles. La solution convergerait vers un état stationnaire où toutes les valeurs seraient nulles.

Figures

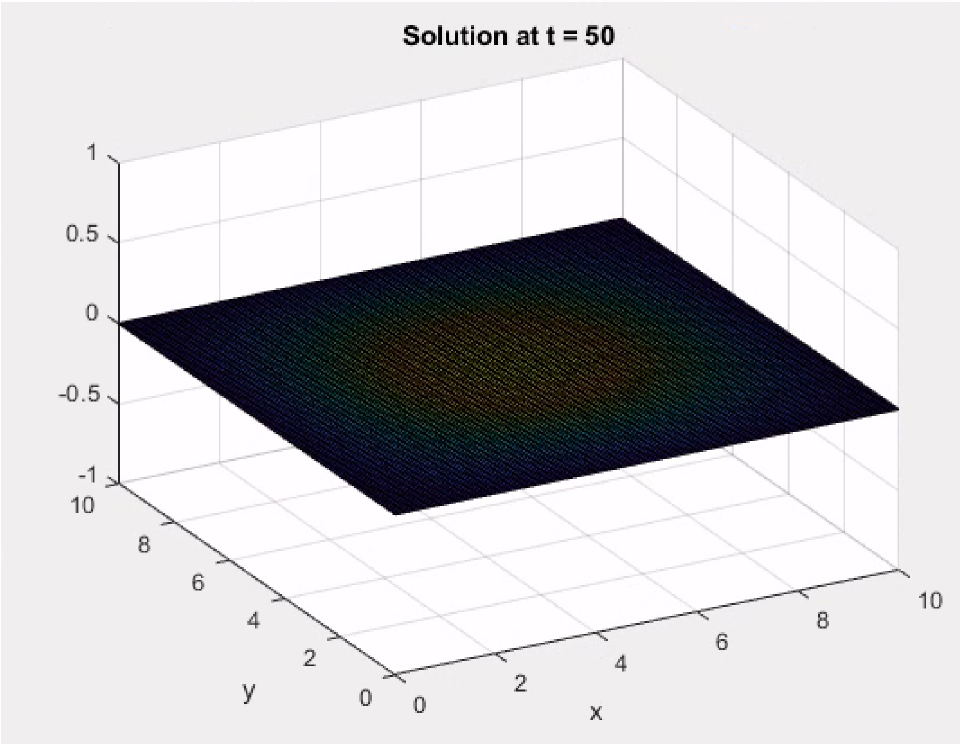

Figure 1: Propagation de l'onde en 2D à un temps donné.

Preuve mathématique de la condition CFL

Énoncé du problème

Considérons l'équation aux dérivées partielles hyperbolique suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

où $u(x,t)$ est une fonction dépendant de la position x et du temps t, et $c > 0$ est une vitesse constante.

Discrétisation

Utilisons un schéma explicite en différences finies pour discrétiser cette équation :

- Discrétisation temporelle : $t_n = n\Delta t$ (pas de temps),
- Discrétisation spatiale : $x_i = i\Delta x$ (pas d'espace),

- Approximation de $\frac{\partial u}{\partial t}$ par une différence avant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t},$$

- Approximation de $\frac{\partial u}{\partial x}$ par une différence arrière :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}.$$

Substituons ces approximations dans l'équation de transport :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0.$$

Clarification sur u_i^{n+1}

Le terme u_i^{n+1} représente l'approximation numérique de la solution $u(x,t)$:

- À la position spatiale $x_i = i\Delta x$, où Δx est le pas d'espace,
- Au pas de temps $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, où Δt est le pas de temps.

Ainsi, u_i^{n+1} est la valeur de la solution calculée au prochain pas de temps, pour une position donnée x_i. Cela le distingue de $f(x+h)$, qui représente une évaluation continue de la fonction au point $x+h$, sans notion de temps. Tandis que $f(x+h)$ décrit un déplacement spatial, u_i^{n+1} inclut une avancée dans le temps.

Réarrangement

Réarrangeons cette équation pour isoler u_i^{n+1} :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(u_i^n - u_{i-1}^n),$$

où $\lambda = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ est appelé le *nombre de Courant*.

Analyse de stabilité

Formulation matricielle

Le schéma explicite peut être vu comme une itération matricielle de la forme :

$$u^{n+1} = Au^n,$$

où u^n est le vecteur des valeurs de u à l'instant t_n, et A est une matrice des coefficients.

Pour que la solution numérique reste stable, la norme spectrale de A doit être inférieure ou égale à 1. Cela garantit que les perturbations dans u ne s'amplifient pas.

Application à une onde sinusoïdale

Considérons une solution de la forme $u_i^n = e^{i(kx_i - \omega t_n)}$, où k est le nombre d'onde et ω la fréquence angulaire. Substituons cette solution dans l'équation discrétisée :

$$e^{i(kx_i - \omega t_{n+1})} = e^{i(kx_i - \omega t_n)} - \lambda\left(e^{i(kx_i - \omega t_n)} - e^{i(kx_{i-1} - \omega t_n)}\right).$$

En factorisant $e^{i(kx_i - \omega t_n)}$, nous obtenons le facteur d'amplification G :

$$G = 1 - \lambda(1 - e^{-ik\Delta x}).$$

Condition de stabilité

Pour que le schéma soit stable, il faut que $|G| \leq 1$. Calculons $|G|$:

$$|G|^2 = (1 - \lambda(1 - \cos(k\Delta x)))^2 + (\lambda \sin(k\Delta x))^2.$$

Développons et imposons $|G| \leq 1$. Cela conduit à la contrainte suivante sur λ :

$$\lambda = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

Conclusion

La condition CFL garantit que :

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

Cette condition impose que l'information ne peut pas se propager plus vite que le maillage ne le permet durant un pas de temps Δt, assurant ainsi la stabilité du schéma numérique.